

Глава 4

Графы

При необходимости проанализировать взаимосвязь между достаточно большим количеством неких однородных объектов мы, скорее всего, произвольно начнем рисовать на бумаге точки (кружочки), изображающие наши объекты, и соединять эти точки линиями или стрелками, отображающими интересующие нас отношения между рассматриваемыми объектами. Имея перед глазами рисунок (схему), легче оценить представляющие интерес взаимозависимости между объектами. Такие схемы широко используют в различных областях. Это и социограммы (в психологии), и симплексы (в топологии), и электрические цепи (в физике), и диаграммы организации (в экономике). Можно еще упомянуть сети коммуникаций, схему метрополитена, генеалогические деревья и так далее, и так далее. Д. Кёниг первым предложил называть такие схемы «графами». Термин «граф» (от латинского слова «графио» – пишу) приобрел права гражданства и вошел в математический язык в 1936 году, после выхода в свет известной монографии Кёнига, в которой впер-

вые графы рассматриваются как самостоятельные математические объекты независимо от их конкретного содержания.

Начало теории графов все единодушно относят к 1736 г., когда Л. Эйлер не только решил популярную в то время задачу о кёнигсбергских мостах¹, но и нашел критерий существования в графе специального маршрута, который сегодня называют эйлеровым циклом. Однако эти результаты Эйлера более ста лет являлись, по сути, единственным достижением математической дисциплины, которую позднее назовут теорией графов. Лишь в середине XIX века инженер-электрик Г. Кирхгоф разработал теорию графов, называемых деревьями, для исследования электрических цепей, а математик А. Кэли в связи с описанием строения углеводородов решил перечислительные задачи для трех видов деревьев. К этому же периоду относится появление знаменитой проблемы четырех красок².

Родившись при решении головоломок и занимательных игр, теория графов в настоящее время предоставляет в распоряжение инженера исключительно удобный математический аппарат для моделирования структурных свойств систем и отношений между объектами самой разнообразной природы. Благодаря наглядности и простоте этот аппарат завоевал широкое признание и повсеместно используется в инженерных исследованиях и в научно-технической

¹ Эйлер показал, что нельзя обойти семь городских мостов Кенигсберга и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

² Известная «нерешаемая» задача теории графов. Можно ли любую карту раскрасить только четырьмя красками так, чтобы каждые две граничащие страны не были одного и того же цвета?

литературе. В теоретической механике графы используются при вычислении скоростей многозвенных механизмов³.

Среди множества графов принято различать три типа: ориентированные, неориентированные и смешанные графы. Некоторые авторы выделяют еще и геометрические графы.

4.1. Основные понятия и термины

Определение графа

Довольно часто в исследованиях приходится иметь дело с множествами, содержащими элементы различной математической структуры, например, элементами такого множества могут быть точки плоскости вместе с линиями, соединяющими какие-то из этих точек. Можно еще вспомнить и «школьную» алгебру (как мы уже знаем, «по-взрослому» она называется полем действительных чисел), элементами которой являются и действительные числа, и операции сложения и умножения действительных чисел. Для идентификации единого целого (множества), объекты (элементы) которого имеют различное математическое строение, часто употребляют вместо термина «множество» термин «совокупность», пользуясь при этом везде, где это необходимо, угловыми скобками $\langle \rangle$ вместо привычных фигурных скобок $\{ \}$.

³ Кирсанов М.Н. *Решебник. Теоретическая механика*. – М.: Физматлит, 2008.

Предметом первых задач теории графов были конфигурации, состоящие из точек и линий, связывающих некоторые точки. Примеры таких конфигураций представляет рис. 4.1.

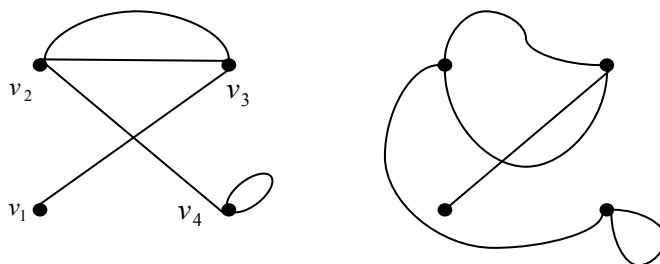


Рис 4.1

В этих задачах было совершенно безразлично, соединяют ли две концевые точки прямые линии или же эти точки соединяются криволинейными дугами. Так же не принималась во внимание и протяженность линии. Существенным и важным было только то обстоятельство, что каждая линия соединяет две конкретные точки. Таким образом, обе конфигурации (графа), изображенные на рис.4.1, идентичны. В результате рассмотрения таких задач пришли к следующему определению графа как абстрактного математического понятия.

Определение 4.1. *Граф* G – это совокупность $G = \langle V, U \rangle$, где V – непустое множество, элементы которого называют *вершинами* графа; а U – множество, элементы которого называются *ребрами* графа. Каждое ребро графа представляет собой неупорядоченную или

упорядоченную пару элементов множества V . Множество V называют *носителем графа*, а множество U – его *сигнатурой*.

Точки и линии, о которых речь шла выше, в определении графа предстали вершинами и ребрами. Определение ребра как пары вершин говорит только о наличии между вершинами пары определенной связи, ничего другого из этого не следует. Примерами вершин графа могут служить аэропорты, электростанции, телефонные узлы, различные технические процессы, а ребра представляют авиалинии, телефонные линии, операции и работы, задействованные в технических процессах.

Число $n = |V|$ вершин графа G называется его *порядком*, число ребер $m = |U|$ — *размером графа*. Такой граф называют (n, m) – *графом*. Вершины графа, как правило, будем обозначать символами $v_1, v_2, \dots, v_n$, а его ребра символами $u_1, u_2, \dots, u_m$. Для обозначения отдельных вершин будем также использовать символы a , b , c , а для обозначения отдельных ребер — символы u , e .

Различные ребра графа могут соответствовать одним и тем же парам его вершин. Такие ребра называются *кратными* (или *параллельными*).

Пусть a , b – вершины графа. Упорядоченную пару этих вершин обозначим символом $a \times b$, а неупорядоченную пару – символом $a \& b$. Разумеется, когда $a \neq b$, то $a \times b \neq b \times a$, но $a \& b = b \& a$.

Пусть ребро e представляет собой пару вершин a и b (упорядоченную или неупорядоченную). Вершины a и b называют *концевыми точками* или *концами* ребра e и говорят, что ребро e *соединяет* эти вершины. Еще говорят, что ребро e *инцидентно* вершинам a и b , которые, в свою очередь, *инцидентны* ребру e . Две вершины называются *смежными* вершинами, если они являются концевыми точками одного ребра, а два ребра называются *смежными* ребрами, если они имеют общую вершину. Таким образом, инцидентность есть отношение между разнородными объектами: вершина инцидентна ребру или ребро инцидентно вершине, а смежность — это отношение между однородными объектами: смежными могут быть только ребра или только вершины.

Теперь пусть ребро e есть упорядоченная пара вершин a и b . Тогда a называют *начальной вершиной* ребра e , а b — его *конечной вершиной*. В этом случае ребро e *выходит (исходит)* из вершины a и *входит (заходит)* в вершину b . Кроме того, необходимо различать *положительную инцидентность*, когда ребро выходит из вершины, и *отрицательную инцидентность*, если ребро входит в вершину.

Отношение инцидентности можно задать *списком ребер* графа. Каждая строка этого списка соответствует определенному ребру, в ней выписаны инцидентные ему вершины. Для неориентированного графа порядок записи вершин в строке может быть произволен,

для ориентированного графа первой записывается начальная вершина ребра и только потом записывается его конечная вершина.

Ребра графа, представляющие упорядоченные пары различных его вершин, обычно называют *дугами (ориентированным ребрами)*, а ребра, за которыми стоят неупорядоченные пары различных вершин, будем называть *звеньями (неориентированными ребрами)*. Ребра графа, отвечающие парам одинаковых вершин, называют *петлями*, и в этом случае $a \times a = a \& a$. Дуги, которым соответствуют пары $a \times b$ и $b \times a$, принято называть *противоположно направленными*. Иногда две противоположно направленные дуги заменяют одной *биориентированной* дугой, т.е. дугой, имеющей два направления.

Замечание. В определении 4.1. сказано, что каждое ребро графа есть неупорядоченная или упорядоченная пара элементов множества V . Следовательно, имеет место отображение ψ множества U в $U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Здесь U_1, U_2, U_3 соответственно – множество всех различных упорядоченных пар вершин графа, множество всех различных неупорядоченных пар его вершин и множество всех пар из одинаковых вершин (множества всевозможных дуг, звеньев и петель). Следовательно, на граф можно смотреть и как на совокупность двух множеств и одного отображения: $G = \langle V, U, \psi \rangle$.

Пример 4.1. Рассмотрим граф⁴ четвертого порядка $G = \langle V, U \rangle$, носитель которого $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, а сигнатура $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, где $u_1 = v_1 \& v_3$, $u_2 = v_2 \& v_3$, $u_3 = v_2 \& v_3$, $u_4 = v_2 \& v_4$, $u_5 = v_4 \& v_4$. Граф G – (4, 5) граф. Он имеет два кратных ребра, $u_2 = v_2 \& v_3$,

⁴ Этот граф показан на рис. 4.1.

$u_3 = v_2 \& v_3$ и одну петлю $u_5 = v_4 \& v_4$. Его ребро u_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2 , а вершина v_2 инцидентна трем ребрам – u_2 , u_3 и u_4 . Петля u_5 инцидентна только одной вершине v_4 . Вершины графа v_1 и v_3 будут смежными вершинами, а вершины v_1 и v_2 – нет. Смежными являются ребра u_2 , u_3 и u_4 , а ребра u_1 и u_5 – нет.

Простым (или *обыкновенным*) графом принято называть граф, не имеющий ни петель, ни кратных ребер. Граф с кратными ребрами и петлями коротко называют *псевдографом*. Граф из примера 4.1. – псевдограф. Псевдограф без петель именуется *мультиграфом*.

Граф, среди ребер которого есть и дуги и звенья, называют *смешанным графом*.

Граф, ребра которого являются либо дугами, либо петлями, называют *ориентированным графом* (или *орграфом*).

Заменяя все дуги орграфа дугами противоположно им направленными, получим орграф, *обратный* исходному орграфу.

Граф, ребрами которого могут быть только звенья либо петли, называют *неориентированным графом* (или *неографом*). В ситуациях, когда имеют дело только с неориентированными графами или когда исключены возможные недоразумения, допустимо звенья неориентированного графа называть просто «ребрами».

В прикладных задачах намного чаще приходится иметь дело только с простыми ориентированными или с простыми неориентированными графами, и в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, принято, опуская слово «простые», коротко называть

такие графы соответственно орграфами и графами (крайне редко – неографами).

Пусть $G = \langle V, U \rangle$ – оргграф, не имеющий кратных дуг. Множество дуг U оргграфа представляет собой некоторое подмножество прямого (декартова) произведения $V \times V$ и, следовательно, является бинарным отношением $\rho \subset V \times V$. Собственно говоря, в рассматриваемом случае оргграф $G = \langle V, U \rangle$ есть совокупность, которая состоит из множества вершин V и только что упомянутого отношения ρ . В литературе часто встречается следующее определение оргграфа без кратных дуг.

Определение 4.2. *Оргграф G – это совокупность $G = \langle V, \rho \rangle$, где V – непустое множество, элементы которого называют вершинами графа; ρ – бинарное отношение на множестве V , задающее дуги оргграфа.*

Выписанные выше соображения позволяют утверждать о равносильности обоих определений в случае оргграфа без кратных дуг.

Две противоположно направленные дуги, говорящие о наличии связи между вершинами графа в обоих направлениях, в некоторых практических задачах равноценны неориентированной связи между этими вершинами и могут быть заменены в этих задачах одним звеном. После такой замены в оргграфе мы приходим к смешанному графу. При решении ряда задач неориентированный или сме-

шанный граф бывает полезно преобразовывать в оргграф, подменяя каждое звено такого графа парой противоположно направленных дуг.

Заменяя две противоположно направленные дуги одним звеном и снимая ориентацию со всех остальных дуг оргграфа, получим неориентированный граф, который называют *неориентированным дубликатом* (иначе — *основанием*) исходного оргграфа.

При решении конкретных задач могут быть использованы графы различного вида. Все определяется спецификой самой задачи. Рассмотрим, например, задачу организации автомобильного движения в некотором городе. Схему организации движения автотранспорта представит ориентированный мультиграф, если вершинами графа считать перекрестки дорог, а его ребрам сопоставить полосы движения по дорогам, соединяющим перекрестки. Если при составлении схемы принимать во внимание возможность разворота на отдельных перекрестках, отображая такую возможность с помощью петли, то в этом случае схему организации движения будет представлять псевдограф. Полагая, что ребрам графа соответствуют дороги, связывающие перекрестки, различая при этом дороги с односторонним движением (дуги) и с двусторонним движением (звенья), придем к смешанному графу. Кстати, за вершины графа можно принять улицы города, интерпретируя перекрестки как ребра графа. Две вершины (улицы) связаны дугой, если имеется перекресток, по которому можно из первой улицы (вершины) непосредственно переехать на вторую улицу (вершину). Построенный таким образом про-

стой оргграф⁵ может быть полезен, например, при составлении оптимальных маршрутов проезда по городу.

Геометрические графы

Глава о графах начиналась с рассказа о неких рисунках и схемах, которые Д. Кёниг предложил называть графами. Тем не менее, в предыдущем пункте, где давались определения понятия графа, рисунки или схемы даже не упоминались. Дело в том, что выше речь шла о так называемых *абстрактных* графах, а рисунки и схемы представляют собой *геометрические* графы. Эти два понятия хотя и очень близкие, но, тем не менее, различные.

Определение 4.3. *Геометрический граф* G – это совокупность $G = \langle V, U \rangle$, где V – непустое множество точек пространства, а U – множество *простых* кривых (возможно, направленных), удовлетворяющих следующим условиям:

1. каждая замкнутая кривая множества U содержит только одну точку множества V ;
2. каждая незамкнутая кривая множества U содержит ровно две точки множества V , которые являются ее граничными точками;
3. кривые множества U не имеют общих точек, за исключением точек из множества V .

⁵ После замены противоположно направленных дуг соответствующими звеньями это будет простой смешанный граф.

Элементы множества V называют *вершинами* графа, а само это множество – *носителем графа*; элементы множества U называются *ребрами* графа, а само U – его *сигнатурой*.

Таким образом, геометрический граф есть просто геометрическая конфигурация или структура в пространстве, состоящая из множества точек, взаимосвязанных множеством простых (не имеющих точек самопересечения) кривых. На рис. 4.1 изображены два геометрических графа⁶.

Очевидно, что вершины любого абстрактного графа можно представить точками пространства, а его ребра отождествить с некоторыми простыми кривыми, соединяющими концы этих ребер. Поэтому любой абстрактный граф всегда эквивалентен (по отношению к свойствам, изучаемым в теории графов) некоторому геометрическому графу. Геометрический граф, эквивалентный в указанном выше смысле абстрактному графу, будем называть *изображением* этого абстрактного графа. Таким образом, геометрические графы можно рассматривать как удобное и наглядное представление абстрактных графов, а не просто как частный случай. Отметим только, что существует огромное количество вариантов расположения вершин геометрического графа в пространстве и не меньшее количество способов начертания его ребер. Следовательно, у абстрактного

⁶ Напомним, что, вообще говоря, геометрический граф – это пространственная конфигурация и принадлежать одновременно двум различным ребрам могут только точки, представляющие вершины графа («жирные» точки рисунка).

графа могут быть различные по виду изображения, на первый взгляд совершенно не похожие друг на друга. Оба графа на рис.4.1 являются изображениями абстрактного графа из примера 4.1. Не похожи и три изображения абстрактного графа, показанные на рис. 4.2.

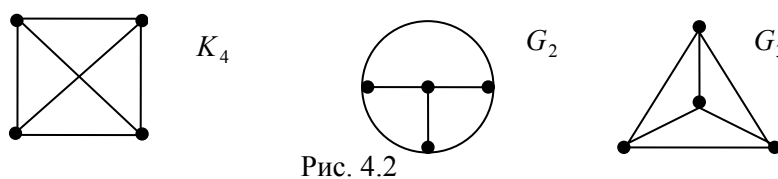


Рис. 4.2

Кстати, граф K_4 на рис.4.2 представляет собой неориентированный дубликат орграфа (рис. 4.3).

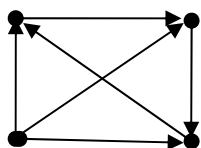


Рис 4.3

Хотя многие графы, представляющие реальные объекты, являются геометрическими графами, с точки зрения теории графов их единственная структурная особенность состоит в том, что с каждым геометрическим ребром связаны две (возможно, совпадающие) геометрические вершины. Теория графов построена с учетом именно этой особенности и не учитывает реальной природы вершин и ребер. Таким образом, нумерация вершин и ребер с фиксацией вершин концов каждого ребра и указанием его ориентации (в тех случаях, когда это необходимо) содержит всю информацию, достаточную для описания и геометрического графа, и абстрактного графа. Все понятия и определения, введенные выше для абстрактных графов, справедливы и для их изображений, т.е. для геометрических графов.

Теория графов построена с учетом именно этой особенности и не учитывает реальной природы вершин и ребер. Таким образом, нумерация вершин и ребер с фиксацией вершин концов каждого ребра и указанием его ориентации (в тех случаях, когда это необходимо) содержит всю информацию, достаточную для описания и геометрического графа, и абстрактного графа. Все понятия и определения, введенные выше для абстрактных графов, справедливы и для их изображений, т.е. для геометрических графов.

Заметим, что введение абстрактного графа позволяет не только избавиться от случайных геометрических характеристик, сохранив наиболее существенные комбинаторные свойства графа. Оно расширяет возможности приложения теории, так как многие реальные структуры имеют комбинаторные свойства, которые удобно рассматривать как граф. Например, в виде графа можно задать соотношения между отдельными работами, которые составляют сложные проекты. В этом случае ребра, после того как задана их ориентация, представляют отдельные работы, а вершины отражают последовательность их выполнения.

Взвешенные графы

Следующий шаг в описании связей между объектами с помощью графов состоит в приписывании ребрам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых *весами*. В простейших случаях это может быть порядковая нумерация ребер, указывающая на очередность их рассмотрения (приоритет или иерархия). Вес ребра может означать длину (пути сообщения), пропускную способность (линии связи), напряжение или ток (электрические цепи), количество набранных очков (турниры), валентность связей (химические формулы), количество рядов движения (автомобильные дороги), цвет проводника (монтажные схемы электронного устройства), характер отношения между людьми (сын, отец, подчиненный, учитель) и т. п.

Вес можно приписывать не только ребрам, но и вершинам. Например, вершины, соответствующие населенным пунктам, могут характеризоваться количеством мест в гостиницах, пропускной способностью станций техобслуживания. Вообще, вес вершины означает любую характеристику соответствующего ей объекта – атомный вес элемента в структурной формуле, цвет изображаемого вершиной предмета, возраст человека и т. п.

Определение 4.4. Графы, вершинам и (или) ребрам которых приписаны некоторые веса, называют *взвешенными* графами. Графы, вершины которых пронумерованы⁷, еще называют *помеченными* графами.

Особое значение для моделирования физических систем приобрели взвешенные ориентированные графы, называемые *графами потоков сигналов* или *сигнальными графами*. Вершины сигнального графа отождествляются с некоторыми переменными, описывающими состояние системы, а вес каждой вершины означает функцию времени или некоторой величины, характеризующую соответствующую переменную (*сигнал вершины*). Дуги отображают связи между переменными, и вес каждой дуги представляет собой численное или функциональное отношение, задающее передачу сигнала от одной вершины к другой (*передача дуги*). Сигнальные графы находят широкое применение в теории цепей и систем, а также во многих других областях науки и техники.

⁷ Например так, как у графа G_1 на рис. 4.1.

Степени вершин

Пусть G – неориентированный граф.

Определение 4.5. Степенью вершины a графа G будем называть число $\delta(a)$, равное количеству звеньев графа, инцидентных вершине a . Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 – *висячей*.

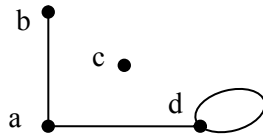


Рис.4.4

При подсчете звеньев, инцидентных вершине a , некоторую неопределенность вносят петли, так как их можно считать и как единственное, и как двойное звено. В зависимости от рассматриваемой

задачи, может оказаться более удобным как тот, так и другой способ подсчета. Чтобы не возникали недоразумения, следует в каждом случае указывать, считается петля *однократным* звеном или *двойным*.

Число $\delta(a, b)$, равное числу звеньев, соединяющих вершины a и b , назовем *кратностью* этих вершин. Если у графа нет кратных звеньев, то $\delta(a, b) = 0$ или $\delta(a, b) = 1$, при этом у неориентированных графов $\delta(a, b) = \delta(b, a)$.

У графа, представленного на рис. 4.4, $\delta(b) = 1$ (висячая вершина), $\delta(c) = 0$ (изолированная вершина) и $\delta(d) = 2$, если считать петлю однократным звеном. При этом $\delta(a, b) = \delta(a, d) = 1$, а $\delta(a, \tilde{n}) = \delta(b, c) = \delta(c, d) = 0$.

Выпишем несколько простых формул. Очевидно, что степень любой вершины графа a равна сумме кратностей всех пар вершин a, b :

$$\delta(a) = \sum_{b \in V} \delta(a, b).$$

Так как каждое звено графа принимается во внимание при вычислении степеней обоих его концов, то число звеньев графа $m = |U|$ связано со степенями и кратностью его вершин соотношением (лемма о рукопожатии):

$$2m = \sum_{a \in V} \delta(a) = \sum_{a, b \in V} \delta(a, b).$$

Эти формулы справедливы и при наличии у графа петель, если только при подсчете степеней вершин петли считать дважды. Из последней формулы следует, что сумма степеней всех вершин неографа всегда четна, следовательно,

$$\sum_{a \in V} \delta(a) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Сумма в левой части этой формулы, естественно, останется четной даже в том случае, когда отбрасываются все четные степени вершин. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *В конечном графе число вершин с нечетной степенью всегда четное.*

Это утверждение установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов.

Обратимся теперь к ориентированным графам.

mami

Определение 4.6. Полустепенью исхода (захода) вершины a графа G будем называть число $\delta^+(a)$ (соответственно $\delta^-(a)$), равное количеству дуг графа, исходящих из вершины a (заходящих в вершину a). Вклад каждой петли, инцидентной вершине a , равен 1 как в $\delta^+(a)$, так и в $\delta^-(a)$.

Очевидно, что для любого ориентированного псевдографа выполняется равенство:

$$\sum_{a \in V'} \delta^+(a) = \sum_{a \in V'} \delta^-(a) = m.$$

Вершину a , для которой $\delta^+(a) = 0$ называют *стоком*, а у которой $\delta^-(a) = 0$ — *истоком*.

На рис. 4.5 показан орграф, у которого $\delta^+(a) = \delta^-(a) = 1$, $\delta^+(b) = 0$, $\delta^-(b) = 3$, $\delta^+(c) = \delta^-(c) = 1$, $\delta^+(d) = 3$, $\delta^-(d) = 0$.

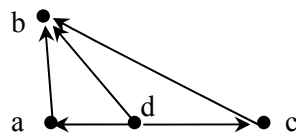


Рис. 4.5

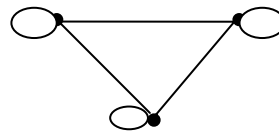


Рис. 4.6

Вершина b этого графа является стоком, а вершина d — истоком.

Типы конечных графов

Если граф не имеет ребер (т.е. $U = \emptyset$), то все его вершины изолированы, и он называется *пустым* или *нуль-графом*.

Простой неориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется *полным*. Полный граф с n вершинами обозначают символом K_n (рис.4.2, граф K_4). Граф порядка n без ребер называется *пустым* и обозначается O_n . Граф O_1 называется *тривиальным*. Можно расширить полный граф до *полного графа с петлями*, добавляя петлю в каждой вершине (рис.4.6). В *ориентированном полном* графе имеются пары ребер, по одному в каждом направлении, соединяющие любые две различные вершины.

*Турниром*⁸ называется орграф, любую пару вершин которого соединяет только одна дуга. Турнир отличается от полного ориентированного графа тем, что у него нет противоположно направленных дуг.

Граф называется *однородным (регулярным) степени k* , если степени всех его вершин одинаковые и равны k . Однородный граф степени 1 называется *паросочетанием*. Примерами однородных графов могут служить графы, образованные вершинами и ребрами пяти первых правильных многогранников (или, так их называют, *платоновых тел*): тетраэдра и куба (степени 3), октаэдра (степени 4),

⁸ Состязание, правила которого предписывают всем его участникам встречаться друг с другом по одному разу и запрещают ничейный исход, обычно называют турниром. Поэтому турниром называли и граф, представляющий

додекаэдра (степени 3), икосаэдра (степени 5). Граф третьей степени называют *кубическим*, он обладает рядом интересных свойств и, в частности, всегда имеет четное число вершин. Три кубических графа изображены на рис.4.2.

Из выписанной выше формулы, связывающей число звеньев графа m со степенями его вершин, для случая однородного графа степени k (все $\rho(a) = k$, $a \in V$), получим:

$$2m = \sum_1^n k = n \cdot k.$$

Напоминаем, что $n = |V|$ – число вершин графа. Поэтому, если k нечетное число, то n должно быть четным, и, следовательно, у любого однородного графа нечетной степени (и кубического тоже) всегда четное количество вершин.

Орграф называется *однородным степени k* , если полустепени всех его вершин одинаковые и равны k : $\delta^+(a) = \delta^-(a) = k$. В этом случае

$$m = \sum_1^n k = n \cdot k.$$

Здесь, как и раньше, n и m – число вершин и дуг графа.

Если множество вершин простого графа V можно разбить на два непересекающихся подмножества (доли) V_1, V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) и

такое состязание: вершинами графа считаются все участники состязания, и для каждой пары вершин дуга идет от победителя к побежденному.

при этом не существует ребер, соединяющих вершины одного и того же подмножества, то такой граф называется *двудольным* (иначе – *биграфом*). Полный двудольный (у него каждая вершина из V_1 соединена с каждой вершиной из V_2). обозначают символом K_{n_1, n_2} где $n_1 = |V_1|$, $n_2 = |V_2|$. Граф $K_{3,3}$ изображен на рис 4.13.

Части графов

Еще раз напоминаем: любой граф есть совокупность множества вершин и множества ребер, при этом ребра фиксируют имеющиеся взаимозависимости между вершинами. Каждое ребро представляет конкретную пару вершин, между которыми установлена такая взаимосвязь. Игнорируя взаимосвязь между какими-то двумя вершинами, мы тем самым ликвидируем (удаляем) соответствующее ребро. Операция *удаления ребер* порождает новый граф, с теми же вершинами, но с меньшим числом ребер. Если по каким-то соображениям отпадает необходимость принимать во внимание определенную вершину графа, то ее следует удалить. Операция *удаления вершины* графа более сложная. Кроме самой вершины необходимо еще удалить и все те ребра графа, которые представляли связи удаленной вершины с другими вершинами графа, т.е. все инцидентные ей ребра.

Граф $H = \langle V', U' \rangle$, полученный в результате операций удаления вершин и (или) ребер графа $G = \langle V, U \rangle$, называется *частью* (иногда *подграфом*) графа G . Все вершины и ребра графа H явля-

ются одновременно вершинами и ребрами графа $G: V' \subset V, U' \subset U$. В этом случае говорят, что H содержится в G . Нуль-граф считается частью каждого графа. Граф H будет ориентированным или неориентированным в зависимости от того, каким является граф G .

Граф H_1 , изображенный на рис 4.8, получен в результате

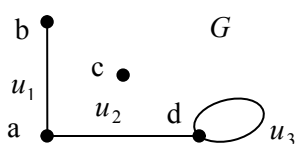


Рис.4.7

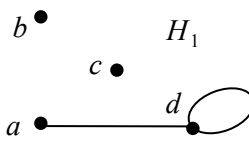


Рис 4.8

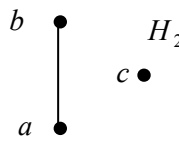


Рис 4.9

операций удаления ребра d графа G (этот граф задан на рис. 4.7), а граф H_2 , показанный на рис. 4.9, есть результат операций удаления у того же графа G вершины d .

Пусть A – некоторое подмножество множества вершин V графа G . Часть $H = \langle A, U' \rangle$ графа $G = \langle V, U \rangle$ называется *подграфом, порожденным (или индуцированным) множеством вершин A (вершинно-порожденным подграфом)*, если ребрами H являются только те ребра множества U , оба конца которых принадлежат A . Он получается из графа G в результате удаления всех вершин множества $V \setminus A$ и всех ребер, им инцидентных. Для единственной вершины a этот подграф состоит из самой вершины a и из петель вершины a , если они имеются.

Подграфом, порожденным множеством ребер E (реберно-порожденным подграфом), называют часть $H = \langle V', E \rangle$ графа G , где E – некоторое подмножество множества ребер U графа G , а V' есть множество всех вершин графа G , которые являются концами ребер множества E . Такой подграф получается из графа G удалением всех ребер множества $U \setminus E$ и последующего удаления всех изолированных вершин получившейся части.

Часть $H = \langle V, U' \rangle$ графа G называется его *остовным подграфом* или *суграфом*. Так как в этом случае $V' = V$, $U' \in U$, то суграф получается из графа G после удаления некоторых (или даже всех) его ребер.

Замечание. В некоторых работах понятия подграфа и части графа отождествляются, хотя есть исследователи, занимающиеся теорией графов, которые эти понятия различают, определяя *подграф* как часть, полученную в результате операции удаления у графа некоторых его вершин. Они пользуются только понятиями части, суграфа и подграфа (в указанном только что смысле). Заметим, что в этом случае любая часть H графа G есть суграф некоторого подграфа этого графа: вначале у исходного графа удаляем все вершины, не входящие в часть H (вместе с инцидентными им ребрами), а затем изымаем ребра найденного подграфа, которые не принадлежат H .

Звездный граф S_n , определяемый вершиной a , состоит из самой вершины a и всех n вершин графа G ей смежных, а его ребрами будут все ребра, инцидентные этой вершине.

Для каждой части H графа G существует единственная *дополнительная часть* графа G (*дополнение*) $\bar{H}$, состоящая из всех

ребер G , которые не являются ребрами H , и вершин, инцидентных этим ребрам: $\bar{H} = G \setminus H$.

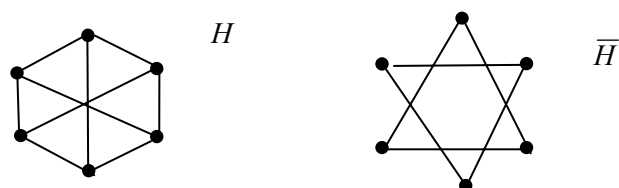


Рис. 4.10

На рис. 4.10 видим граф H , который есть суграф полного графа K_6 , и граф $\bar{H}$ – дополнение графа K_6 для суграфа H .

Пусть H_1 и H_2 – две части G . Сумма (объединение, наложение) этих частей $H = H_1 \cup H_2$ есть часть, состоящая из всех ребер (и вершин, им инцидентных), которые принадлежат или H_1 , или H_2 , или им обоим⁹. Пересечением частей графа H_1 и H_2 назовем часть графа $D = H_1 \cap H_2$, ребра которой являются ребрами H_1 и H_2 одновременно.

Две части H_1 и H_2 не пересекаются по вершинам, если не имеют общих вершин, а следовательно, не имеют и общих ребер, и две части не пересекаются по ребрам, если у них нет общих ребер. Часть H и ее дополнение $\bar{H}$ не пересекаются по ребрам, и $G = H \cup \bar{H}$.

⁹ Граф $\bar{H}$ на рис. 4.10, являющейся объединением двух треугольников, называется графом Давида.

Изоморфизм графов

Ранее было отмечено, что любой абстрактный граф идентичен, или, как говорят математики, изоморфен некоторому геометрическому графу. При изображении геометрических графов имеется большая свобода в размещении вершин и в выборе формы соединяющих их ребер. Поэтому может оказаться, что один и тот же граф представляется различными чертежами, разглядывая которые далеко не сразу можно осознать, что они являются изображениями одного и того же графа. Такие геометрические графы тоже называют изоморфными.

Изоморфизм графов формально определяется следующим образом.

Определение 4.7. Графы $G = \langle V, U \rangle$ и $G' = \langle V', U' \rangle$ *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин V и V' , что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра ориентированы, то и их направления также должны соответствовать друг другу.

Геометрический граф, изоморфный абстрактному графу, называют его *геометрической реализацией*.

Если графы G и H изоморфны, то пишут $G \sim H$ (тогда и $H \sim G$). Легко видеть, что отношение изоморфизма графов рефлекс-

сивно, симметрично и транзитивно и является отношением эквивалентности. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы эквивалентности так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы, как правило, отождествляют, и их можно изображать одним рисунком. Они могут различаться конкретной природой своих элементов, но именно это и игнорируется при введении понятия «граф». Нетрудно показать, что три графа, изображенные на рис. 4.2, изоморфны.

Из определения следует, что изоморфные графы могут различаться лишь обозначениями вершин и ребер, так как у них должно быть равное число вершин и ребер, соответствующие друг другу вершины обязаны иметь одинаковые степени и полустепени, и, разумеется, совершенно все равно, какую геометрическую реализацию графа выбирать для его изображения.

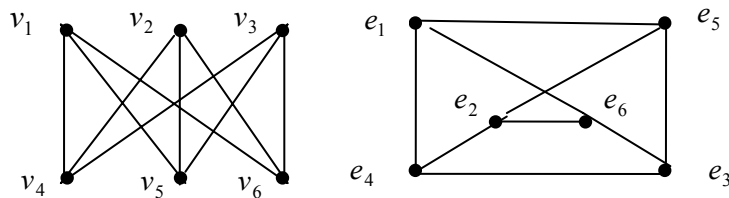


Рис 4.11

Оба графа на рис. 4.11 изоморфны, так как существует взаимно однозначное соответствие $v_i \leftrightarrow e_i$, сохраняющее смежность.

mami

Говорят, что граф H *изоморфно вкладывается* в граф G , если H изоморфен некоторой части графа G .

Замечание. Многие практические задачи приводят к необходимости распознавания изоморфизма и изоморфного вложения сложных структур, заданных в виде графов. С содержательной точки зрения изоморфизм графов структур означает тождественность функционирования самих структур, что допускает в некоторых случаях замену одной структуры другой, ей изоморфной. Однако для того чтобы выяснить, изоморфны ли два графа имеющие n вершин, в общем случае требуется выполнить $n!$ попарных сравнений, а для распознавания изоморфного вложения графа H , имеющего m вершин, в граф G , у которого n вершин, необходимо провести $C_n^m \cdot m!$ сравнений. Поэтому даже при относительно небольшом количестве элементов в графах (порядка 100) решение задачи об изоморфизме методом полного перебора практически не реально, необходимо использовать для этой цели специальные методы.

Плоские и планарные графы

Вообще говоря, не имеет значения, как нарисовать граф, поскольку все его изображения являются изоморфными графами и несут одну и ту же информацию. Однако встречаются ситуации, когда крайне важно, чтобы изображение графа на плоскости удовлетворяло определенным требованиям. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и иных путей, где нежелательны переезды.

mami

Определение 4.8. Геометрический граф назовем *плоским графом*, если он нарисован на плоскости так, что все линии, изображающие его ребра, пересекаются только в точках, соответствующих вершинам графа, т.е. любая точка пересечения таких линий есть вершина, инцидентная ребрам, которые эти линии изображают. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называют *планарным*.¹⁰

О планарных графах говорят, что они *укладываются на плоскости* (имеют *плоскую укладку*). Планарный граф можно уложить на плоскости, а плоский граф – это граф, уже уложенный на плоскости. Плоский граф есть изображение планарного графа, однако не каждое изображение планарного графа является плоским графом.

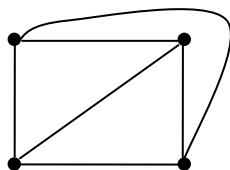


Рис. 4.11

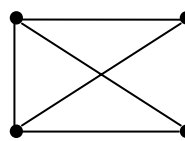


Рис. 4.12

 K_4

Пример плоского графа приведен на рис. 4.12. Изоморфный ему полный граф K_4 (рис. 4.13), укладываемый на плоскости, имеет два пересекающихся ребра, поэтому граф K_4 не является плоским – он только планарный.

На рис. 4.13. показаны *графы Понтрягина – Куратовского*, играющие фундаментальную роль в теории планарности графов. Они не являются планарными графами. Граф K_5 представляет собой

¹⁰ Планарный граф может не быть плоским графом, хотя среди его изображений плоский граф быть обязан.

полный граф наименьшего порядка, который, не являясь планарным графом (полные графы K_2 , K_3 , K_4 – планарные), становится планарным после удаления хотя бы одного его ребра. Вторым (двудольный граф $K_{3,3}$) является моделью известной задачи о трех домах и трех колодцах¹¹.

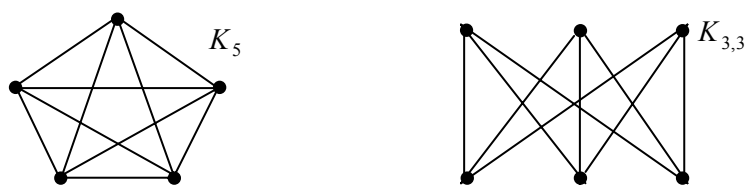


Рис 4.13

Для приложений чрезвычайно важно найти и описать необходимые и достаточные условия планарности графов. Следует отметить, что практическая проверка таких условий, как правило, является достаточно сложной задачей. Однако разработаны эффективные алгоритмы, позволяющие для любого заданного графа или найти его плоскую укладку, или установить, что граф не планарен. Достаточно очевидны следующие теоремы.

Теорема 4.2. *Любая часть (подграф) планарного графа есть планарный граф.*

Теорема 4.3. *Плоский граф не должен иметь в качестве своей части графы Понтрягина – Куратовского.*

¹¹ Надо проложить от домов к каждому колодцу дорожки так, чтобы они не пересекались, так как соседи желают пользоваться всеми тремя колодцами, но не хотят встречаться. Можно нарисовать восемь непересекающихся дорожек, но девятая обязательно пересечет хотя бы одну из этих восьми.

Для того чтобы сформулировать широко известный критерий планарности Понтрягина – Куратовского, необходимо ввести понятие гомеоморфизма графов. *Операция подразбиения ребра e* , образованного парой вершин a и b , состоит в удалении ребра e и добавлении двух новых ребер e_1 и e_2 , отвечающих парам вершин a , d и b , d соответственно. Здесь d – новая (дополнительная) вершина графа. На рис. 4.14 показан граф до операции подразбиения ребра e , а на рис. 4.15 изображен граф, получившийся в результате этой операции.

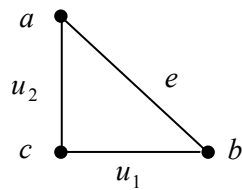


Рис.4.14

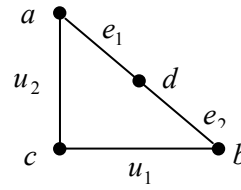


Рис.4.15

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

Фундаментальное значение в теории планарности имеет *критерий планарности Понтрягина – Куратовского*.

Теорема 4.4. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит частей, гомеоморфных графам Понтрягина – Куратовского.*

mami

Матричное представление графов

Пусть $G = \langle V, U \rangle$ – помеченный граф, имеющий n вершин и m ребер. Вершины и ребра помеченного графа пронумерованы. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ – вершины графа, а $u_1, u_2, \dots, u_m$ – его ребра. Отношение инцидентности можно определить матрицей $\|i_{ij}\|$, имеющей n строк и m столбцов. Столбцы соответствуют ребрам графа, а строки – вершинам. Если неориентированное ребро (звено) u_j инцидентно вершине v_i , то $i_{ij} = 1$. Когда ориентированное ребро (дуга) u_j инцидентно вершине v_i , то $i_{ij} = -1$, если вершина v_i – начало дуги, и $i_{ij} = 1$, если вершина v_i – конец этой дуги. Если ребро u_j является петлей и вершина v_i ей инцидентна, то $i_{ij} = 1$, для орграфа и неографа. Пусть ребро u_j (неважно, что это – звено, дуга или петля) не инцидентно вершине v_i , тогда $i_{ij} = 0$. Матрица, полученная таким образом, называется *матрицей инцидентности* графа. Каждый помеченный граф может иметь только одну матрицу инцидентности, а всякая матрица инцидентности полностью определяет соответствующий граф.

Матрицей смежности графа называют квадратную матрицу $\|a_{ij}\|$ размера $n \times n$, строкам и столбцам которой соответствуют вершины помеченного графа (первый столбец (строка) отвечает первой

вершине и т.д.), а ее элементы находятся по следующим правилам. Для неориентированного графа a_{ij} равно количеству ребер, инцидентных вершинам с номерами i и j . Петле в вершине i соответствует $a_{ii} = 2$. Для ориентированного графа a_{ij} равно количеству

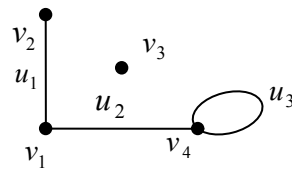


Рис.4.16

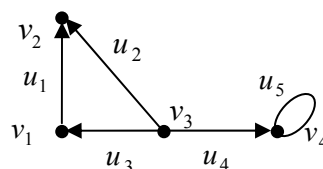


Рис 4.17

ребер, выходящих из вершины v_i и заходящих в вершину v_j . Петле в вершине i орграфа соответствует $a_{ii} = 1$.

Пример 4.2. Неориентированный граф, изображенный на рис. 4.16, имеет следующие матрицы инцидентности (матрица I) и смежности (матрица A):

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.3. Орграф, изображенный на рис. 4.17, имеет следующие матрицы инцидентности (матрица I) и смежности (матрица A):

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mami

4.2. Связность

Маршруты

Рассматривая геометрический граф, можно зафиксировать некоторую вершину и, последовательно двигаясь по смежным ребрам, перейти в другую вершину или вернуться в исходную. Конечно, по ориентированному ребру перемещение допустимо только в направлении его ориентации. Последовательность ребер, по которым можно двигаться непрерывным образом, играют в теории графов фундаментальную роль.

Определение 4.9. Последовательность из n ребер графа (не обязательно различных) называется *маршрутом длины n* , если любые два рядом стоящие в этой последовательности ребра смежные¹². Кроме того, если эти два рядом стоящие ребра ориентированные, то в инцидентную им вершину ребро, стоящее слева, должно входить, а ребро, стоящее справа, из нее выходить.

Пусть маршрут задан ребрами $u_1, u_2, \dots, u_n$ и ребру u_i соответствует пара вершин v_{i-1}, v_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. Говорят, что маршрут *замкнут*, если $v_0 = v_n$, и *не замкнут*, если $v_0 \neq v_n$. Для не замкнутого маршрута вершина v_0 называется *начальной* вершиной, а вершина v_n — *конечной*. В этом случае говорят, что маршрут со-

¹² Некоторые авторы задают маршрут последовательностью вершин и ребер. Если граф не имеет кратных ребер, то маршрут можно задать последовательностью вершин.

единяет вершины v_0 и v_n . Еще говорят, что вершина v_n связана с вершиной v_0 .

Любая вершина, инцидентная двум рядом стоящим ребрам маршрута, называется *внутренней* или *промежуточной* вершиной. Так как ребра и вершины в маршруте могут повторяться, то внутренняя вершина может также оказаться начальной или конечной вершиной.

Маршрут неориентированного графа называют *неориентированным маршрутом (составной цепью)*, а маршрут орграфа называют *ориентированным маршрутом (составным путем)*. Если все ребра незамкнутого маршрута попарно различны, то такой маршрут неориентированного графа называется *цепью*, а орграфа – *путем*. Если попарно различны все вершины незамкнутого маршрута, то такой маршрут неориентированного графа называется *простой цепью*, а орграфа – *простым путем*. Если попарно различны все ребра замкнутого маршрута, то такой маршрут неориентированного графа называется *циклом*, а орграфа – *контуром*. Замкнутый маршрут, в котором попарно различны все вершины, кроме первой и последней, называется в неориентированном графе *простым циклом*, а в орграфе – *простым контуром*.

Маршрут назовем *нетривиальным*, если он содержит хотя бы одно ребро; для систематичности рассуждений вводится еще *нуль-маршрут*, вообще не содержащий ребер, – этот маршрут состоит только из одной вершины графа.

На рис.4.18 приведен пример составной цепи, на рис.4.19 приведен пример пути, а на рис.4.20 – пример простой цепи¹³.

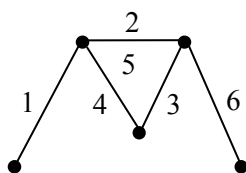


Рис.4.18

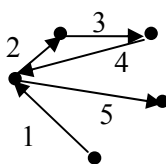


Рис.4.19

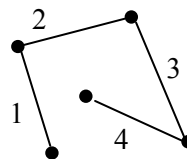


Рис.4.20

Связные компоненты

Пусть задан неориентированный граф. Граф называется *связным*, если любые две несовпадающие вершины графа соединены маршрутом. Очевидно, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы произвольная фиксированная вершина графа соединялась маршрутом с каждой из оставшихся вершин этого графа.

Отношение связности рефлексивно (вершина всегда связана сама с собой), симметрично (из связности вершины a с вершиной b следует связность вершины b с вершиной a) и транзитивно (если вершины a , b и вершины b , c связаны, то связаны и вершины a , c). Таким образом, отношение связности для вершин есть отношение эквивалентности. Поэтому существует такое разбиение множества вершин графа на попарно непересекающиеся подмножества

¹³ Здесь числа – это номера соответствующих ребер.

(классы эквивалентности), что все вершины в каждом подмножестве связаны, а вершины из различных подмножеств не связаны. Каждое

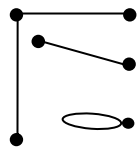


Рис.4.21

такое подмножество вершин графа вместе с ребрами, инцидентными этим вершинам, образует связный подграф. Следовательно, неориентированный граф представим единственным образом в виде объединения непересекающихся

связных подграфов. Эти подграфы называют *связными компонентами* рассматриваемого графа. Связный граф является своей единственной компонентой связности. На рис.4.21 изображен граф, который имеет три компоненты связности.

Теперь обратимся к ориентированному графу. Если в орграфе существует маршрут, связывающий вершины a и b , то говорят, что вершина b *достижима* из вершины a . Любая вершина считается достижимой из себя самой. Вершина орграфа называется *источником*, если из нее достижима любая вершина орграфа.

Связность ориентированных графов определяется в принципе так же, как и неориентированных, то есть без учета направления дуг. Специфичным для орграфа (или смешанного графа) является понятие *сильной связности*.

Орграф называется *сильным* (или *сильносвязным*), если любые две его вершины достижимы друг из друга. Орграф называется *од-*

носторонним (или *одностороннесвязным*), если для любой пары его вершин, по меньшей мере, одна из них достижима из другой.

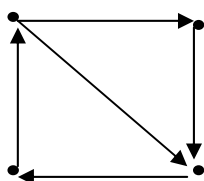


Рис.4.22

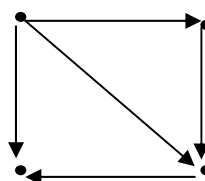


Рис.4.22

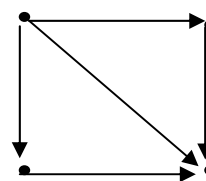


Рис.4.22

Орграф называется *слабым* (или *слабосвязным*), если связным графом является его неориентированный дубликат. На рис. 4.22 изображен сильный орграф, на рис. 4.23 – односторонний, а на рис. 4.23 – слабый. Поскольку вершина графа достижима из себя, то одновершинный орграф будет одновременно и сильным, и односторонним, и слабым. Каждый сильный орграф является односторонним, а каждый односторонний – слабым. Очевидно, что две любые несовпадающие вершины сильного орграфа принадлежат некоторому контуру.

В некоторых задачах существенно требование сильной связности графа. Например, граф, представляющий план города с односторонним движением по некоторым улицам, должен быть сильно связанным, так как, в противном случае, нашлись бы вершины (площади и перекрестки), между которыми нельзя было бы проехать по городу без нарушения правил движения.

Маршрут, содержащий все вершины орграфа, называется *остовным*.

Теорема 4.5. *Орграф является сильным тогда и только тогда, когда в нем есть осто́вный контур, является односторонним тогда и только тогда, когда в нем есть осто́вный путь.*

Отношение взаимной достижимости вершин орграфа рефлексивно, симметрично и транзитивно. Как отношение эквивалентности оно разбивает множество вершин орграфа на классы эквивалентности, объединяя в один класс все вершины, достижимые друг из друга. Вершины, входящие в такие классы, вместе с дугами, им инцидентными, обе концевые вершины которых принадлежат этому же классу, образуют подграфы, называемые *сильными* (или *сильно-связанными*) компонентами орграфа.

Орграф называется *несвязным*, когда его неориентированный дубликат не является связным графом.

Орграф, изображенный на рис. 4.25, имеет четыре сильные компоненты с множествами вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6, v_8\}$, $\{v_7\}$, $\{v_9\}$. В орграфе могут быть дуги, не входящие ни в одну из его сильных компонент, например, дуги $v_3 \times v_5$, $v_4 \times v_6$, $v_9 \times v_2$, $v_9 \times v_7$ и $v_9 \times v_8$ у орграфа на рис. 4. 25.

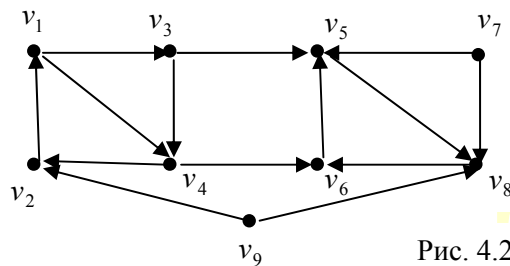


Рис. 4.25

Вершинная связность и реберная связность

Сопоставляя, например, полный граф шестого порядка и его любой связный суграф, интуитивно ясно, что сам полный граф «сильнее» связан, чем его суграф. Далее речь пойдет о понятиях, характеризующих степень связности графа.

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют неким технологическим объектам¹⁴, а ребра показывают, какие объекты могут взаимодействовать либо непосредственно друг с другом, либо опосредованно через другие объекты.¹⁵ Технологическая система, представленная этим графом, считается функционирующей, если каждая пара ее объектов связана между собой. В этом случае система должна иметь связный граф. Важной характеристикой системы является ее надежность (живучесть), под которой обычно понимается способность системы функционировать при выходе из строя одного или нескольких объектов и (или) нарушения связи между некоторыми из них. Очевидно, что менее надежной следует считать ту систему, которая перестает функционировать при выходе из строя меньшего количества ее элементов. Оказывается, оценить степень надежности такой системы могут помочь те понятия, о которых упоминалось чуть выше и которые сейчас будут определены.

¹⁴ Это могут быть станки, технологические операции и т. п.

¹⁵ Например, существуют соответствующие технологические маршруты.

Определение 4.10. Числом вершинной связности (или просто числом связности) $\chi(G)$ графа G называется число, равное наименьшему числу вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Граф G , представленный на рис. 4.26, связан, но он перестает быть связным, если удалить вершину 4. Поэтому $\chi(G) = 1$.

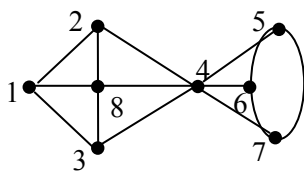


Рис. 4.26

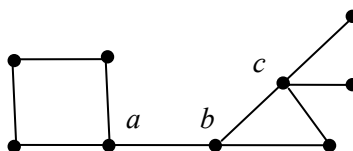


Рис. 4.27

Можно нарушить связность графа, удаляя некоторые его ребра (дуги). У графа G (рис. 4.26) для этого придется удалить не менее трех ребер. Например, граф G распадается на две компоненты после удаления ребер $4\&5$, $4\&6$, $4\&7$.

Определение 4.11. Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа G называется число, равное наименьшему числу ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Число реберной связности одновершинного графа полагается равным нулю.

Выше мы показали, что для графа G (рис. 4.26) $\lambda(G) = 3$.

Вершина v графа G называется *точкой сочленения* (разделяющей вершиной), если граф $G - v$, полученный после операции удаления у графа G вершины v , имеет больше компонент связности,

mami

чем сам граф G . В частности, если G связан и v – точка сочленения, то $G - v$ не связан.

Ребро u графа G называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности графа.

Таким образом, точки сочленения и мосты – это своего рода «узкие места» графа¹⁶. Граф на рис. 4.27 имеет три точки сочленения – это вершины a , b , c , и один мост – ребро $a \& b$.

Возвращаясь к технологической системе, речь о которой шла вначале, отметим, что число вершинной связности и число реберной связности ее графа отражают чувствительность системы к повреждениям, а точки сочленения и мосты графа системы указывают на наиболее уязвимые места системы.

Граф называется *неразделимым*, если он связный и не имеет точек сочленения. Граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения, является *разделимым* и называется *сепарабельным*. Он разбивается на блоки, каждый из которых представляет собой максимальный неразделимый подграф.

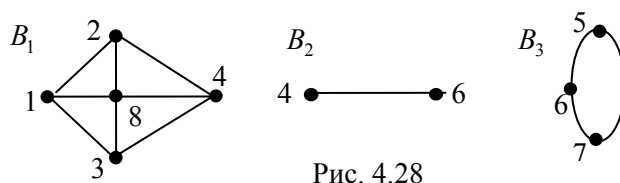


Рис. 4.28

На рис. 4.28 показаны блоки B_1 , B_2 , B_3 графа на рис. 4.26.

¹⁶ С точки зрения связности.

Если $\delta(G)$ есть минимальная степень вершин графа G , то очевидно, что $\lambda(G) \leq \delta(G)$, поскольку удаление всех ребер, инцидентных данной вершине, приводит к увеличению числа компонент связности графа.

Теорема 4.6. Для любого графа G справедливы неравенства:

$$\chi(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Граф G называется k -связным, если $\chi(G) \geq k$, реберно- k -связным, если $\lambda(G) \geq k$.

Граф G , изображенный на рис. 4.26, 1-связен и реберно-3-связен.

Расстояния

Пусть G – связный неориентированный граф. Так как любые две вершины графа a и b связаны, то существуют простые цепи с концами a и b . Таких цепей может быть несколько. Их длины являются неотрицательными целыми числами. Следовательно, между вершинами a и b должны существовать простые *цепи наименьшей длины*. Длина цепи наименьшей длины, связывающей вершины a и b , обозначается символом $d(a, b)$ и называется *расстоянием* между вершинами a и b . По определению $d(a, a) = 0$.

Нетрудно убедиться, что введенное таким образом понятие расстояния, удовлетворяет аксиомам метрики:

mami

1. $d(a, b) \geq 0$;
2. $d(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;
3. $d(a, b) = d(b, a)$;
4. справедливо неравенство треугольника:

$$d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c).$$

Для фиксированной вершины графа a расстояние до наиболее удаленной от нее вершины: $e(a) = \max_{v \in V} d(a, v)$, называют *эксцентриситетом* (максимальным удалением) вершины a .

Диаметром графа G называют число $d(G)$, равное расстоянию между наиболее удаленными друг от друга вершинами графа:

$$d(G) = \max_{a, v \in V} d(a, v).$$

Простая цепь, длина которой равна $d(G)$, называется *диаметральной цепью*. Очевидно, что диаметр графа равен наибольшему среди всех эксцентриситетов вершин графа. Вершина v называется *периферийной*, если $e(v) = d(G)$.

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа G называют его *радиусом* и обозначают $r(G)$:

$$r(G) = \min_{a \in V} e(a) = \min_{a \in V} \max_{b \in V} d(a, b).$$

Так как диаметр графа равен наибольшему из эксцентриситетов вершин, а радиус — наименьшему, то радиус графа не может быть больше его диаметра. Вершина v называется *центральной*, если

$e(v) = r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называют его *центром*. Центром графа может быть одна вершина или несколько вершин. Есть графы, центр которых совпадает с множеством всех его вершин. Например, центр простой цепи состоит из двух вершин при четном числе ее вершин и из одной – при нечетном, а у любого цикла все вершины являются центральными.

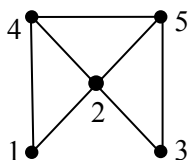


Рис 4. 29

Для иллюстрации обратимся к графу на рис. 4.29. Здесь

$$\begin{aligned} d(1, 2) = d(1, 4) = 1, \quad d(1, 3) = d(1, 5) = 2, \\ d(2, 3) = d(2, 4) = d(2, 5) = 1, \quad d(3, 4) = 2, \\ d(3, 5) = 1 \quad d(4, 5) = 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$e(1) = e(3) = e(4) = e(5) = 2, \quad e(2) = 1, \quad d(G) = 2, \quad r(G) = 1.$$

Вершина 2 является центром графа, а все остальные его вершины – периферийные. Цепь 1, 2, 3 – одна из диаметральных цепей.

Для связного орграфа расстояние $d(a, b)$ между вершинами a и b определяется как расстояние между вершинами a и b в неориентированном дубликате этого графа.

Задача нахождения центральных вершин графа постоянно встречается в практической деятельности. Пусть, например, вершины графа соответствуют небольшим поселкам, а его ребра – дорогам между ними. Требуется оптимально разместить по этим населенным пунктам, скажем, магазины. В подобных ситуациях критерий оптимальности обычно заключается в оптимизации «наихудшего» случая, то есть в минимизации расстояния от магазина до наиболее уда-

ленного поселка. Такой подход к оптимизации предполагает размещение магазинов в поселках, которые представляют центральные вершины графа¹⁷.

Обходы графов

Уже отмечалось, что начало теории графов связывают с задачей о кенигсбергских мостах. Эта знаменитая в свое время задача состоит в следующем. Семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининграда) были расположены на реке Прегель так, как изображено на рис. 4.30. Задача состоит в том, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя только один раз по каждому мосту.

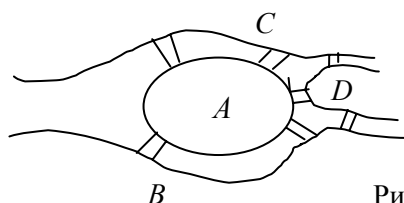
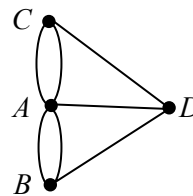


Рис. 30



Так как в задаче существенны только переходы через мосты, план города можно свести к изображению графа (точнее, мультиграфа), в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – раз-

¹⁷ При решении подобных задач, а это *минимаксные задачи размещения*, как правило, приходится еще учитывать и другие обстоятельства. В нашей задаче это может быть качество дорог, время и стоимость проезда и прочее. Все это можно учитывать, используя понятие взвешенного графа.

личным разделенным частям города, которые обозначены буквами A, B, C, D (рис. 4.30, справа). Эйлер показал, что нельзя пройти по одному разу по всем кенигсбергским мостам и вернуться назад. В своей работе, опубликованной в 1736 году, он сформулировал и решил следующую общую проблему теории графов: при каких условиях связный граф содержит цикл, проходящий через каждое его ребро.

Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым* графом. Такой граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

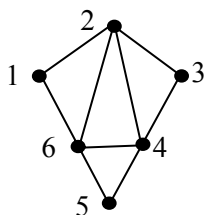


Рис. 4.31

Например, граф, изображенный на рис. 4.31, является эйлеровым, поскольку он содержит эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 2, 6, 1. В этом графе есть и другие эйлеровы циклы. Ясно, что любые два таких цикла отличаются друг от друга только порядком обхода ребер.

Теорема 4.7. (Л. Эйлер, 1736 г.) *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

Цепь называется *эйлеровой*, если она содержит все ребра графа.

Теорема 4.8 (Л. Эйлер, 1736 г.) *Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связан и число вершин нечетной степени равно 0 или 2.*

В 1859 году известный ирландский математик У. Гамильтон предложил занимательную игру-головоломку «Кругосветное путе-

шествие». Она состоит в следующем: каждой из двадцати вершин додекаэдра приписывается название одного из крупных городов мира. Нужно, переходя от одного города к другому по ребрам додекаэдра, посетить каждый город один раз (только один раз) и вернуться

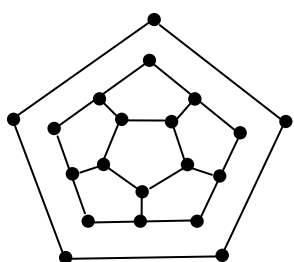


Рис. 4.32

в город, с которого началось «путешествие». Эта задача сводится к отысканию в графе додекаэдра (рис. 4.32) простого цикла, проходящего через каждую вершину этого графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если он имеет простой цикл, содержащий все вершины графа. Простые циклы и простые цепи, включающие в себя все вершины графа, также называют *гамильтоновыми*. На рис. 4.33 показаны примеры гамильтоновых циклов («жирные» линии) для двух простых графов.

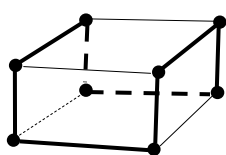
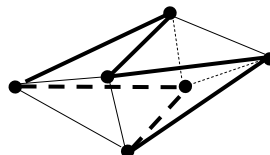


Рис. 4.33



Классическая интерпретация задачи о гамильтоновых циклах — *задача о шахматном коне*: можно ли, начиная из произвольного поля на шахматной доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы, пройдя через каждое из шестидесяти четырех полей доски, вернуться в исходное положение. Как практическую задачу, связанную с гамильтоновыми циклами, можно назвать известную зада-

чу о коммивояжере: коммивояжер должен побывать в каждом из n городов по одному разу, выехав из одного из них и вернувшись в него же. При этом, зная расстояние между любыми двумя городами, надо определить кратчайший маршрут, то есть требуется найти в полном взвешенном графе гамильтонов цикл минимального веса.

Еще одна задача о применении гамильтоновых цепей. Есть станок, на котором должно быть выполнено n операций. Переход от выполнения одной операции к выполнению другой операции возможен только после переналадки станка. На переналадку станка для выполнения операции i после операции j необходимо t_{ij} часа. Считается, что $t_{ij} = t_{ji}$. Необходимо найти такой маршрут выполнения операций, чтобы время каждой переналадки не превосходило величины T . Данная задача сводится к задаче отыскания гамильтоновой цепи в графе, вершины которого представляют выполняемые операции, а ребра связывают только вершины (операции), требующие время переналадки менее T .

Несмотря на «похожесть» в определениях для эйлеровых и гамильтоновых циклов, соответствующие теории, устанавливающие критерии существования и алгоритмы поиска таких циклов, имеют мало общего. Теорема Эйлера (теорема 4.7) позволяет легко установить, является ли граф эйлеровым. Разработаны алгоритмы¹⁸, позволяющие достаточно просто найти эйлеровы циклы эйлерова графа. Что касается гамильтоновых графов, то здесь положение дел суще-

ственно иное. Ответить на вопрос, является ли некий граф гамильтоновым, как правило, очень трудно. Общего критерия, подобного критерию Эйлера, здесь нет. Но, как оказалось, среди множества всех графов эйлеровых графов ничтожно мало, а вот гамильтоновых графов достаточно много.

4.3. Деревья и лес

Свойства деревьев

Определение 4.12. Граф T называется *деревом*, если он связный и не имеет циклов¹⁹. *Лесом* называют граф, связные компоненты которого являются деревьями. В частности, дерево не может иметь петлю и кратных ребер.

Вершину графа, инцидентную только одному его ребру, называют *концевой* (или *висячей*) вершиной²⁰, а ребро, инцидентное концевой вершине, будем называть *концевым ребром* графа.

Среди различных деревьев выделяют два важных частных случая: *последовательное дерево*, представляющее собой простую цепь, и *звездное дерево* (или *куст*), в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами.

Пусть множество V содержит n вершин. Связав эти вершины ребрами так, чтобы отсутствовали циклы, получим некоторое де-

¹⁸ Например, алгоритм Флери [8].

¹⁹ Обычно полагают, что дерево имеет не менее двух вершин.

²⁰ Напомним, ее степень равна 1.

рево, *покрывающее* данное множество вершин. Для двух вершин существует одно покрывающее дерево – сами вершины и ребро, их связывающее. С увеличением n число различных деревьев t_n быстро увеличивается²¹: $t_n = n^{n-2}$.

Деревья считаются *существенно различными*, если они не изоморфны. Всего деревьев с четырьмя вершинами 16, из них существенно различных только 2; деревьев с шестью вершинами 1296, а существенно различных всего 6, но уже при $n = 20$ насчитывается около миллиона существенно различных деревьев.. На рис. 4.34 приведены существенно различные деревья с четырьмя и с шестью вершинами:

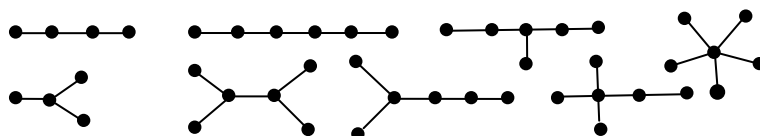


Рис. 4.34

Среди графов n -го порядка (с n вершинами) без кратных ребер полный граф имеет наибольшее количество ребер, а дерево (n -го порядка) – наименьшее. Дерево содержит минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным.

Теорема 4.9. *Каждое дерево с n вершинами имеет в точности $n - 1$ ребро.*

► Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой добавляемой вершины с одной из уже имеющихся

²¹ Формулу вывел А. Кэли при изучении химических изомеров.

вершин необходимо еще одно ребро. Если же добавить два ребра, то есть соединить новую вершину с двумя вершинами, из уже рассмотренных вершин, то обязательно образуется цикл. Следовательно, для минимальной связи n вершин необходимо и достаточно $n - 1$ ребер. ◀

Нетрудно убедиться в справедливости следующих теорем.

Теорема 4.10. *Граф является деревом тогда и только тогда, когда каждая пара различных вершин графа соединяется одной и только одной простой цепью.*

Теорема 4.11. *У каждого дерева найдется висячая вершина.*

Теорема 4.12. *При удалении любого ребра дерева²² оно распадается на связные компоненты, являющиеся либо изолированными вершинами, либо деревьями. При добавлении в дерево любого нового ребра в нем образуется простой цикл, и оно перестает быть деревом.*

Дерево на рис. 4. 35 при удалении ребра u распадается на лес из двух деревьев T_1 и T_2 , а после добавления ребра e превращается в циклический граф G .

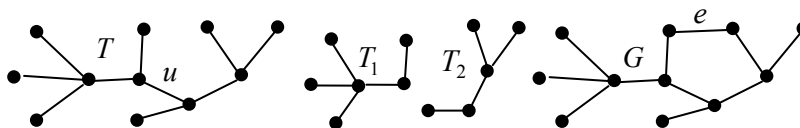


Рис. 4. 35

²² Из любого связного графа, который не является деревом, можно удалить некоторые ребра, не нарушая связности (например, ребро, входящее в цикл).

Рассматриваются также деревья с ориентированными ребрами (дугами). Ориентированное дерево называется *прадеревом с корнем* v_0 , если существует простой путь между вершиной v_0 и любой

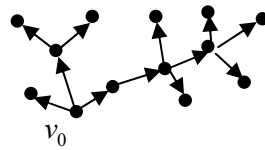


Рис. 4.36

другой его вершиной (рис. 4.36). Прадерев может иметь только один корень.

Типы вершин дерева и его центры

Рассмотрим дерево T с n вершинами. Назовем его концевые вершины *вершинами типа 1*. Теперь удалим все вершины типа 1 и концевые ребра. В результате получим связный граф без циклов T_1 , то есть опять дерево, но с уже меньшим количеством вершин. Концевые вершины дерева T_1 назовем *вершинами типа 2* в дереве T . Аналогично определяются вершины типов 3, 4 и т. д. Легко видеть, что дерево может иметь либо одну вершину максимального типа, либо две таких вершины. Типы вершин дерева T , изображенного на рис. 4. 37, записаны рядом с соответствующими вершинами. Здесь же показаны последовательные этапы процедуры, позволяющей их определить. Это дерево имеет две вершины максимального типа. Если у дерева T удалить одну из вершин типа 2 и ребра, ей инци-

дентные, то получившееся при этом дерево будет иметь уже только одну вершину максимального типа.

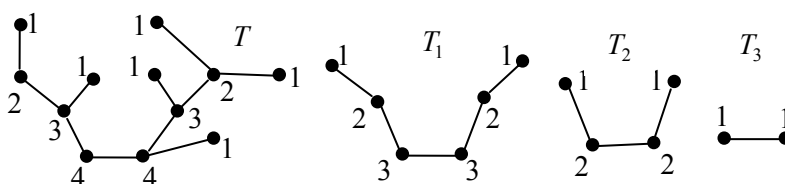


Рис. 4. 37

Пусть вершина типа k есть вершина максимального типа. Из определения типа вершин дерева следует, что эксцентриситет единственной вершины максимального типа равен ее типу, то есть равен k , а эксцентриситет каждой из двух вершин максимального типа равен $k - 1$. При этом эксцентриситет любой вершины не максимального типа будет обязательно больше. Поэтому центрами любого дерева являются его вершины максимального типа, следовательно, дерево имеет либо один, либо два центра. Нетрудно убедиться, что диаметральные цепи в деревьях проходят через его центр или через оба центра, если их два. В первом случае длина диаметральной цепи равна $2k - 2$, а во втором $2k - 1$.

Корневые деревья

Произвольно зафиксируем некоторую вершину v_0 дерева T и назовем ее *корнем* дерева. Само дерево в этом случае будем называть *деревом с корнем* или *корневым деревом*.

Иногда полезно, руководствуясь какими-либо соображениями, выделять в дереве T некоторую определенную цепь P , кото-

рую обычно называют *стволом* дерева. Корень дерева обычно является одной из концевых вершин ствола. Каждая концевая вершина дерева a связана с ближайшей вершиной b ствола единственной цепью. Эту цепь называют *ветвью* дерева, выходящей из вершины b в вершину a . При отсутствии у дерева ствола, ветвями дерева называют цепи, связывающие концевые вершины дерева с его корнем.

Корневые деревья естественно ориентировать, если в этом есть необходимость, *от корня*. Все ребра, инцидентные корню дерева, считаются исходящими из корня и заходящими в вершины, смежные корню. Все ребра дерева, инцидентные вершинам, удаленным на расстояние 1 от корня, считаются исходящими из этих вершин и заходящими в вершины, им смежные. Процесс ориентации ребер продолжается подобным образом до тех пор, пока не будут ориентированы все ребра дерева. Полученное в результате такой ориентации дерево с корнем называется *ориентированным деревом*. В нем все ребра имеют направление от корня. Если поменять направления всех дуг ориентированного дерева на противоположные (*к корню*), то получившийся в итоге ориентированный граф называют *сетью сборки*.

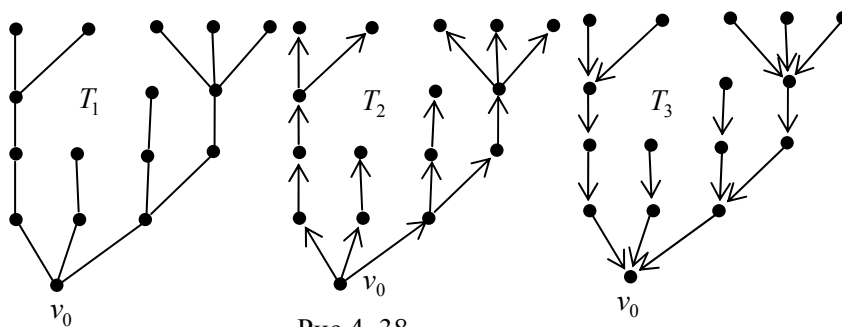


Рис 4. 38

На рис. 4. 38 приведены примеры дерева с корнем T_1 , его ориентированного дерева T_2 и сети сборки T_3 .

Деревья графов

Пусть дерево T является подграфом графа G . Ребра графа G , которые принадлежат дереву T , называются *ветвями* дерева T , а ребра, не принадлежащие дереву T , – *хордами* относительно дерева T . Если T есть суграф G , то есть вершины дерева T совпадают с вершинами графа G , то говорят, что дерево T *покрывает* граф G . В этом случае дерево T называют *остовом* или *каркасом* графа G .

Существует простой способ определить количество различных остовов мультиграфа G с n вершинами. Для этого нужно записать

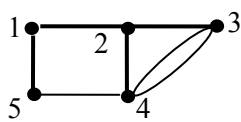


Рис. 4.39

матрицу A размера $n \times n$, по главной диагонали которой выписаны степени вершин, а элементы $a_{ij} = a_{ji}$ равны взятому со знаком минус числу ребер, связывающих вершины

i и j , $i \neq j$ ²³. Вычислив минор любого элемента главной диагонали матрицы A , получим искомое число возможных остовов графа²⁴.

Например, для графа на рис. 4.39 имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \dot{I}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 50.$$

Следовательно, существует 50 различных деревьев, покрывающих этот граф. Один из 50 остовов мультиграфа G изображен на рис. 4.39 жирными линиями.

Экстремальные графы

Класс практических задач, достаточно успешно решаемых методами теории графов, требует связать n пунктов наиболее экономичным образом. Например, необходимо построить автомобильные дороги, связывающие n дачных поселков, так, чтобы их суммарная длина была наименьшей. Любые два поселка должны быть связаны дорогой либо непосредственно, либо дорогами, проходящими через другие поселки. Похожие задачи возникают при прокладке водопроводов, газопроводов, линий связи и т. п.

На языке теории графов задачи такого рода формулируются следующим образом. Каждому ребру u_i полного графа с n вершинами приписывается вес μ_i , выражающий численно расстояние, стоимость или иную величину, характеризующую взаимосвязь между каждой парой вершин графа. Требуется выявить такой остов этого графа, чтобы суммарный

²³ Такая матрица называется матрицей Кирхгофа мультиграфа G .

²⁴ Следствие теоремы Кирхгофа.

вес ветвей остова $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ был минимальным (или максимальным). Та-

кой остов графа называют его *экстремальным деревом*.

Поскольку полный граф K_n покрывает n^{n-2} различных основных деревьев, то решение этой задачи полным перебором вариантов потребовало бы чрезвычайно больших вычислений даже при относительно малых n . Уже при $n \geq 9$ таких вариантов больше миллиона.

Для решения задач такого рода разработаны достаточно эффективные алгоритмы. Далее мы воспользуемся одним из них – алгоритмом Дж. Краскала. Его суть состоит в следующем. На первом шаге выбирается первая ветвь искомого остова – это ребро графа с наименьшим (наибольшим) весом. Затем на каждом следующем шаге рассматривается минимальное (максимальное) по весу ребро и, если оно не образует цикла с ранее выбранными ветвями, вводится в остов. Построение заканчивается после отбора для остова $n - 1$ ребер.

Теорема 4.13. Алгоритм Краскала позволяет построить экстремальный граф любого связного графа.

Пример 4.3. Необходимо построить автомобильные дороги, связывающие девять поселков так, чтобы их суммарная длина была наименьшей. Любые два поселка должны быть связаны дорогой либо непосредственно, либо дорогами, проходящими через другие поселки. Известно расстояние между поселками (в км):

	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8	П9
П1	25	13	32	34	35	49	19	14
П2		12	31	59	60	73	34	40
П3			19	47	48	61	32	27
П4				65	66	80	51	46
П5					26	15	28	48
П6						19	54	35
П7							42	61
П8								33

На первом шаге выбираем самый короткий участок искомой сети дорог, связывающей поселки. Это дорога длиной 12 км между поселками П1 и П2. Затем добавляем к ней дороги между П1 и П3 (13 км), П1 и П9 (14 км), П5 и П7 (15 км), П3 и П4 (18 км). Следующее минимальное расстояние между поселками равно 19 км. Такого расстояния между П1 и П8 и между

П6 и П7. Так как обе эти дороги не образуют цикла с уже отобранными дорогами, то обе они добавляются в список. Следующие по длине (25 км и 26 км) дороги между П1, П2 и П5, П6 нельзя добавлять в наш список – иначе появятся циклы: П1, П2, П3, П2 или П5, П6, П7, П5. Восьмая и последняя дорога искомого минимального остова имеет длину 28 км, она проходит между П5 и П8. Минимальный остов, связывающий девять поселков, изображен на рис. 4.40. Минимальная длина дорог, связывающих поселки, равна 138 км.

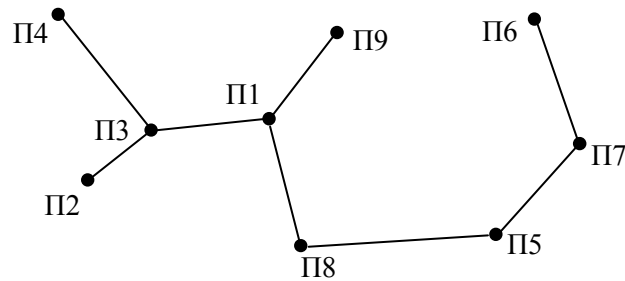


Рис.4.40

Экстремальное дерево может быть построено для произвольного графа, а не только для полного графа. Например, связи между некоторыми вершинами могут быть нежелательными или недопустимыми.