

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)
Южный Федеральный университет
Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова
МОО «Женщины в науке и образовании»
Учебный центр «Знание»

**XXII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ.**

**VIII МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ
РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.**

**VII МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЙ СЕМИНАР
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ
И ПРОИЗВОДСТВЕ.**

27 мая – 3 июня 2014 г.
Пансионат «Моряк» Новороссийского
морского пароходства

Тезисы докладов

<http://conf-symp.sfedu.ru>
E-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4

XXII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». VIII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». VII Междисциплинарный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве». Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2014. — 216 с.
ISBN 978-5-87872-757-0

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Редакционная коллегия: проф. Б. И. Голубов, д.ф.-м.н. А. Н. Карапетянц, доц. Л. В. Новикова, к.ф.-м.н. Новиков В. В. мл. (ответственный редактор), проф. Г. Ю. Ризниченко.

Спонсор международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения» —
Российский фонд фундаментальных исследований,
проект 14-01-06025 г_2_2014

Спонсор VII междисциплинарного семинара «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве» — Российский фонд фундаментальных исследований, проект 14-07-06019 г_2_2014

Программный комитет: Л. В. Новикова (председатель), О. Г. Авсянкин, О. В. Губарь, И. С. Емельянова, Я. М. Ерусалимский, А. Н. Карапетянц, М. И. Карякин, В. А. Кузнецова, И. В. Мельникова, Г. Ю. Ризниченко, Е. А. Солодова, Ф. А. Сурков (Россия), Н. Д. Гернет, И. И. Ковтун (Украина), И. Н. Катковская (Беларусь).

Локальный комитет: Л. В. Новикова (председатель), Б. Г. Вакулов, А. В. Гиль, О. В. Губарь, Г. А. Зеленков, М. М. Цвиль.

Программный комитет симпозиума: акад. РАН Б. С. Кашин, чл.-корр. РАН С. В. Конягин, проф. А. В. Абанин, проф. С. В. Бочкарев, проф. И. Я. Новиков, проф. А. М. Седлецкий, проф. М. А. Скопина, проф. А. П. Хромов (Россия), проф. В. Г. Кротов (Беларусь), проф. А. М. Олевский (Израиль), проф. Н. Темиргалиев (Казахстан), проф. К. Осколков (США), проф. Э. А. Стороженко, проф. Р. М. Тригуб (Украина), проф. С. Г. Самко (Португалия).

Оргкомитет симпозиума: проф. Б. И. Голубов (председатель), д.ф.-м.н. О. Г. Авсянкин, проф. М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н. Карапетянц А. Н. (зам. председателя), проф. Т. П. Лукашенко, проф. В. А. Скворцов, проф. С. А. Теляковский, доц. Л. В. Новикова (секретарь).

Секции V, VI, VII, VIII конференции объединены в Междисциплинарный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве».

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

В. А. Абилов (Махачкала)
vladimirababil@yandex.ru
ОЦЕНКА КОНСТАНТ ЛЕБЕГА
РЯДА ФУРЬЕ-ЭРМИТА

В докладе будет дано другое определение констант ряда Фурье-Эрмита, ее оценка и применения в вопросах приближения функций.

R. Akgün (Balıkesir, Turkey)
rakgun@balikesir.edu.tr
APPROXIMATION BY PARTIAL SUM OF THE
TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES
IN ORLICZ SPACES

In the present work some Jackson-Stechkin type direct theorems of trigonometric approximation are proved in Orlicz spaces, generated by a quasiconvex function, with weights satisfying some Muckenhoupt's A_p condition. To obtain refined version of the Jackson type inequality we prove an extrapolation theorem, Marcinkiewicz multiplier theorem and Littlewood Paley type results.

As a consequence refined inverse Marchaud type inequalities are obtained. By means of a realization result we find an equivalence between the fractional order weighted modulus of smoothness and the classical weighted Peetre's K -functional.

REFERENCES

[1] Akgün R. Approximating polynomials for functions of weighted Smirnov-Orlicz spaces, J. Funct. Spaces Appl. 2012, V. 2012, Article ID 982360, pp. 1–41.

В. В. Арестов, М. А. Филатова (Екатеринбург)
Vitalii.Arestov@urfu.ru, MA.Filatova@urfu.ru
ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ
ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Будет обсуждаться задача Стечкина [1, 2] о наилучшем приближении оператора дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций ($0 \leq k < n$) линейными ограниченными операторами в пространствах $L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, на числовой оси $I = (-\infty, \infty)$ и полуоси $I = [0, \infty)$ и родственная задача об оптимальном восстановлении операторов дифференцирования на классах гладких функций, заданных с ошибкой. Этой тематике к настоящему времени посвящены обширные исследования, см. обзорную работу [3] и приведенную в ней библиографию.

На полуоси задача Стечкина изучена существенно хуже чем на оси. С. Б. Стечкин [1, 2] нашел ее решение в равномерной норме для $n = 2, 3$, $1 \leq k < n$. В. И. Бердышев [4] решил задачу Стечкина в пространстве $L_1(0, \infty)$ при $k = 1$, $n = 2$. В пространстве $L_2(0, \infty)$ даже в случае $k = 1$, $n = 2$ точное решение задачи до настоящего момента не было известно. Ранее А. Л. Рублев, Е. Е. Бердышева (1996) и авторы данного сообщения (2012) получили для значения задачи хорошие оценки, см. библиографию в [5]. В сообщении будет приведено, в частности, точное решение задачи в этом случае.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Стечкин С. Б.* Неравенства между нормами производных производной функции // Acta Sci. Math. 1965. Т. 26. № 3–4. Р. 225–230.
2. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
3. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.
4. *Бердышев В. И.* Наилучшее приближение в $L[0, \infty)$ оператора дифференцирования // Матем. заметки. 1971. Т. 9, вып. 5. С. 477–481.
5. *Арестов В. В., Филатова М. А.* О приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на классе дважды дифференцируемых функций в пространстве $L_2(0, \infty)$ // Тр. Ин-та. мат. мех. УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 35–50.

Н. Ю. Антонов (Екатеринбург)
 Nikolai.Antonov@imm.uran.ru
**О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ
 ЛАКУНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
 КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ**¹

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ — d -мерный тор, $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определенных на $\mathbb{T}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f , удовлетворяющих условию $\varphi(|f|) \in L(\mathbb{T}^d)$, через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, — значение $\mathbf{n}$ -й прямоугольной частной суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции f в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$. Рассматривается поведение последовательности $\{S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ при условии, что члены последовательности $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^d$, $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \dots, n_k^d)$, удовлетворяют условию

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq j \leq d, \quad (1)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ — положительные вещественные числа, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел.

В работе [1] доказано, что если

$$f \in L(\ln^+ \ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ \ln^+ L)(\mathbb{T}),$$

то любая лакунарная подпоследовательность последовательности (одномерных) сумм Фурье функции f сходится почти всюду. Из этого результата для случая $d \geq 2$ с помощью метода работы [2] можно получить следующее утверждение.

Теорема. Пусть последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^d$ удовлетворяет условию (1), $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}(\ln^+ \ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ \ln^+ L)(\mathbb{T}^d)$. Тогда последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ сходится почти всюду.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Di Plinio F. Lacunary Fourier and Walsh–Fourier series near L^1 // Collect. Math. 2014. В печати.
2. Антонов Н. Ю. О сходимости почти всюду последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 3–18.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00496) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1).

Ш. А. Балгимбаева (Алматы)
sc_s@mail.ru
**НАИЛУЧШИЕ m -ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ
КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ ¹**

Пусть $L_p(\mathbb{T}^d)$ ($1 \leq p < \infty$) — пространство функций $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$, суммируемых в степени p , с нормой $\|f\|_p$; здесь $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ — d -мерный тор. Наилучшим m -членным приближением функции $f \in L_p$ по системе $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L_p$ называется величина

$$\sigma_m(f, \Phi, L_p) = \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda = m, c_k \in \mathbb{R}} \left\{ \left\| f - \sum_{k \in \Lambda} c_k \phi_k \right\|_p \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для функции $f \in L_1$ через $\delta_s^\varepsilon(f) = \sum_{k \in \rho(s, \varepsilon)} \widehat{f}(x) e^{i(k, x)}$ обозначим двоичные пакки ее ряда Фурье; здесь $\rho(s, \varepsilon) := \varepsilon_1[2^{s_1}, 2^{s_1+1} - 1) \times \dots \times \varepsilon_d[2^{s_d}, 2^{s_d+1} - 1)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{-, +\}^d$, $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ℓ_θ ($1 \leq \theta \leq \infty$) — пространство числовых последовательностей $\{a_s^\varepsilon\} = \{a_s^\varepsilon : s \in \mathbb{N}_0^d, \varepsilon \in \{-, +\}^d\}$ с конечной нормой $\|\{a_s^\varepsilon\}\|_{\ell_\theta}$.

Определение. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d) \in (0, \infty)^d$. Тогда пространство Лизоркина – Трибеля $SF_{p\theta}^r = SF_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ есть совокупность всех функций $f \in L_p$ с конечной нормой

$$\|f\|_{SF_{p\theta}^r} = \|\|\{2^{(r, s)} \delta_s^\varepsilon(f)\}\|_{\ell_\theta}\|_p.$$

$SF_{p\theta}^r$ — единичный шар пространства $SF_{p\theta}^r$.

Не ограничивая общности считаем, что $r_1 = \dots = r_\nu < r_j, j = \nu + 1, \dots, d$, с некоторым $\nu \in \{1, \dots, d\}$. Пусть U^d — ортонормированная система типа кратных периодических всплесков, образованная сдвигами кратных ядер Дирихле (определение см. в [1]).

Теорема. Пусть $1 < p, q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$; вектор r такой, что $r_1 > \frac{1}{\min\{p, \theta, q\}} \cdot \frac{2}{\min\{2, q\}} - \frac{1}{q}$. Тогда верно соотношение

$$\sup\{\sigma_m(f, U^d, L_q) : f \in SF_{p\theta}^r\} \asymp m^{-r_1} (\log m)^{(\nu-1)(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ МОиН РК.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. approx. 2000. V. 16, № 3. P. 399–425.

Г. С. Бердников (Саратов)
evrointelligent@gmail.com

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫСОТОЙ НЕКОТОРЫХ ДЕРЕВЬЕВ И НОСИТЕЛЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ (N,M)-ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ¹

Мы рассматриваем КМА на локально-компактных группах Виленкина $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \{x = (\dots, 0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots) | \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x_i = \overline{0, p-1}, p \in \mathbb{N}, x_n \neq 0\}$$

. На группе определена операция покоординатного сложения по модулю p и она может быть представлена в виде $\mathfrak{G} = \bigcup_n \mathfrak{G}_n$, где $\forall n, \mathfrak{G}_{n+1} \subset \mathfrak{G}_n$. Также мы рассматриваем аннуляторы $\mathfrak{G}_n^\perp$ – множества характеров, обращающих группы $\mathfrak{G}_n$ в единицу.

Определение Мы будем называть маску $t_0(\chi)$ N -элементарной ($N \in \mathbb{N}_0$), если она постоянна на множествах вида $\mathfrak{G}_{-N}^\perp \chi$ и ее модуль $|t_0(\chi)|$ принимает только два значения: 0 или 1, причем $t_0(\mathfrak{G}_{-N}^\perp) = 1$. В этом случае, масштабирующую функцию $\varphi(x)$, построенную по этой маске, и ее преобразование Фурье мы также будем называть N -элементарными.

N -элементарная функция φ и ее преобразование Фурье называются (N, M) -элементарными, если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, т. е. $\text{supp}(\hat{\varphi}) \subset \mathfrak{G}_M^\perp$ и она постоянна на всех подгруппах вида $\mathfrak{G}_{-N+g}$.

Теорема Пусть $M, p \in \mathbb{N}, p \geq 3$. Также, пусть $E \in \mathfrak{G}_M^\perp$ – (N, M) -элементарное множество, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^\perp)$, $|\hat{\varphi}|(\chi) = \mathbf{1}_E(\chi)$, $\hat{\varphi}(\chi)$ – решение масштабирующего уравнения. Тогда существует дерево T особой структуры, которое порождает множество E и $\hat{\varphi}(\chi)$, причем его высота $\text{height}(T) = M + 2N$. Также можно утверждать обратное: что для любого такого дерева существует функция, удовлетворяющая тем же условиям.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. S.Ė. Lukomskii. Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups.
<http://arxiv.org/abs/1303.5635>
2. Ю.А. Фарков, «Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп», Матем. заметки, 82:6 (2007), 934–952.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

И. Л. Блошанский, Д. А. Графов (Москва)
 ig.bloshn@gmail.com, grafov.den@yandex.ru
**КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ
 ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ С
 « J_k -ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ
 ЧАСТИЧНЫХ СУММ»¹**

Пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, разложена в кратный интеграл Фурье $g(x) \sim \int \widehat{g}(\xi) e^{i(\xi x)} d\xi$, и $J_\alpha(x; g)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$, — собственный интеграл Фурье. Будем предполагать при этом, что $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^N$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$.

Пусть $M = \{1, 2, \dots, N\}$, $J_k = \{j_1, \dots, j_k\} \subset M$, $j_1 < \dots < j_k$, $1 \leq k \leq N - 2$, и пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \dots, k$. Символом $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$ обозначим N -мерный вектор у которого компоненты α_j , $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) обобщенных вещественных лакунарных последовательностей (данное понятие было введено в работе [1]), т.е. для $j \in J_k$: $\alpha_j = \alpha_j^{(\lambda_j)}$, $|\alpha_j^{(\lambda_j)} - n_j^{(\lambda_j)}| \leq \varrho$, где $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)} \geq q > 1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, ϱ — некоторая постоянная.

Обозначим $\mathbb{R}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$, и $\mathbb{T}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : -\pi \leq x_j < \pi \text{ при } j \in M \setminus J_k\}$.

Пусть Ω , $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$, $J_2 \subset M$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$. Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$.

Далее, фиксируем произвольную выборку J_k из M , $1 \leq k \leq N - 2$, и определим следующие множества

$$W = W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2],$$

$$W^0 = W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \quad (1)$$

В работе [2] И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой было введено следующее понятие.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N - 2$, $N \geq 3$.

1. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$ вида (1) такое, что $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ есть свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, если $W = W(W^0, J_k)$.

2. Свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ множества $\mathfrak{A}$, если для любого множества $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k)$ вида (1) такого, что $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widetilde{W}^0)$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

Далее, пусть измеримое множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $N \geq 3$, удовлетворяет следующим условиям на границу:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{\text{int}\mathfrak{B}}) = 0; \quad (2)$$

$$\mu_2 \text{Fr pr}_{(J_2)}\{\text{int}\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \quad (3)$$

здесь $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, μ_2 — мера на плоскости ($\text{int}P$ — множество внутренних точек, $\bar{P}$ — замыкание и $\text{Fr}P$ — граница множества P).

Теорема. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, и пусть J_k — произвольная выборка из M , $1 \leq k \leq N-2$. Если для выбранного J_k множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (2), (3), то на множестве $\mathfrak{A}$ в классе $L_p(\mathbb{R}^N)$, $p > 1$, для кратных интегралов Фурье, чьи "прямоугольные частичные суммы" $J_\alpha(x; g)$ имеют "номер" $\alpha = \alpha^{(\lambda)}[J_k]$, справедлива слабая обобщенная локализация **(СОЛ)** почти всюду тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$.

Заметим, что теорема в части достаточности справедлива без ограничений (2), (3).

Результат теоремы показывает, что для любого k , $1 \leq k \leq N-2$, справедливость или несправедливость СОЛ для кратных интегралов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм в классах L_p , $p > 1$, на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Блошанский И. Л., Графов Д. А. Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае «лакунарной последовательности частичных сумм» // Доклады РАН. 2013. Т. 450, № 3. С. 260–263.
2. Блошанский И. Л., Лифанцева О. В. Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // Доклады РАН. 2008. Т. 423, № 4. С. 439–442.

С. В. Бочкарев (Москва)

bochkarev@mi.ras.ru

**АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА,
ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВАМ И
ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ГРУППАМ ¹**

Рассматривается вопрос о том, чтобы получить возможно более широкое обобщение теоремы А. Н. Колмогорова о существовании расходящегося почти всюду тригонометрического ряда Фурье. Эта теорема, имеющая фундаментальное значение для современного гармонического анализа, была обобщена автором [1] на ортонормированные системы, определенные на отрезке, а затем в работе [2] распространена на ограниченные биортонормированные системы действительных функций, определенных на метрическом пространстве с борелевски регулярной внешней мерой.

В настоящем докладе установлена абстрактная теорема об усреднении по носителям delta-функций, дающая точную логарифмическую нижнюю оценку мажоранты отрезков соответствующего ряда Фурье по произвольной ограниченной биортонормированной системе комплекснозначных функций, определенных на измеримом пространстве. Отметим, что комплексный случай потребовал существенного усложнения предыдущей конструкции, в которой важную роль играют свойства верхнего предела последовательности действительных функций, в частности, теорема Фату для интеграла Лебега в абстрактном пространстве.

Абстрактная форма теоремы Колмогорова применена для построения расходящихся рядов Фурье по любым комплекснозначным ограниченным биортонормированным системам, определенным на метрических пространствах или топологических группах. При этом специальным образом аппроксимируются delta-функции с использованием теорем о дифференцировании неопределенного интеграла в соответствующих пространствах (см. [3], [4]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бочкарев С. В. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Мат. сб. Т. 98(140), № 3. С. 436–449.
2. Бочкарев С. В. Обобщение теоремы Колмогорова на биортогональные системы // Тр. МИАН, 2008, Т. 260. С. 44–56.
3. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М. : Наука, 1987.
4. Хьюит Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2, М.: МИР, 1975.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программ «Ведущие научные школы» (грант НШ-6431.2012) и «Современные проблемы теоретической математики» ОМ РАН.

С. С. Волосивец ¹(Саратов), Б.И. Голубов ² (Долгопрудный)
 VolosivetsSS@mail.ru, golubov@mail.mipt.ru
 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
 И ОБОБЩЕННЫЕ КЛАССЫ ЛИПШИЦА

Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$). Тогда ее преобразование Фурье определяется равенством

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Известно, что $\hat{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0$, т.е. $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Для $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим m -ю симметричную разность $\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + (2j - m)h/2)$. Если $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$ и $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, то величина $\omega_m(f, \delta) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^m f(x)\|$, называемая m -м модулем гладкости, конечна при всех $\delta > 0$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_m(f, \delta) = 0$. Обозначим через Φ множество непрерывных возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций ω , таких что $\omega(0) = 0$ и $\omega(2t) \leq C\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Если $\omega \in \Phi$ и $\int_0^\delta t^{-1} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, то будем говорить, что ω принадлежит классу Бари B . А если $\omega \in \Phi$ и $\delta^m \int_\delta^\infty t^{-m-1} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $m \in \mathbb{N}$, то будем говорить, что ω принадлежит классу Бари-Стечкина B_m (см. [1]). Определим классы функций $H^{\omega, m} = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \omega_m(f, t) \leq C\omega(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ и $h^{\omega, m} = \{f \in H^{\omega, m} : \omega_m(f, t) = o(\omega(t)), t \rightarrow 0\}$ для $\omega \in \Phi$.

Теорема 1. 1) Пусть $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m$, $m \in \mathbb{N}$ и выполнены условия

$$\int_y^\infty f(t) e^{-ixt} dt = O(\omega(y^{-1})), \quad \int_{-\infty}^{-y} f(t) e^{-ixt} dt = O(\omega(y^{-1})), \quad y > 0, \quad (1)$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\hat{f} \in H^{\omega, m}$. 2) Если в п. 1) в правых частях (1) условие $O(\omega(y^{-1}))$, $y > 0$, заменить условием $o(\omega(y^{-1}))$, $y \rightarrow +\infty$, то $\hat{f} \in h^{\omega, m}$.

Следствие 1. 1) Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m \cap B$, $m \in \mathbb{N}$, и выполнены условия

$$\int_0^y t^m f(t) e^{-ixt} dt, \quad \int_{-y}^0 t^m f(t) e^{-ixt} dt = O(y^m \omega(y^{-1})), \quad y > 0, \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

²Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\hat{f} \in H^{\omega, m}$. 2) Если в п. 1) в правых частях (2) условие $O(\omega(y^{-1}))$, $y > 0$, заменить условием $o(\omega(y^{-1}))$, $y \rightarrow +\infty$, то $\hat{f} \in h^{\omega, m}$.

Теорема 2. 1) Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B$ и

$$\int_{|t| < y} |t^m f(t)| dt = O(y^m \omega(1/y)), \quad y > 0. \quad (3)$$

Тогда $\hat{f} \in H^{\omega, m}$. 2) Если в пункте 1) вместо условия (3) потребовать выполнения условия

$$\int_{|t| < y} |t^m f(t)| dt = o(y^m \omega(1/y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

то $\hat{f} \in h^{\omega, m}$.

Условия (3) и (4) в некотором смысле необходимы для включения $\hat{f} \in H^{\omega, m}$ и соответственно для $\hat{f} \in h^{\omega, m}$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. 1) Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in H^{\omega, m}$, $m \in \mathbb{N}$ и $t^m f(t)$ сохраняет знак на $\mathbb{R}$. Тогда выполняется условие (3). 2) Если в пункте 1) условие $\hat{f} \in H^{\omega, m}$ заменить условием $\hat{f} \in h^{\omega, m}$, то выполняется условие (4).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.

М. Г. Григорян (Ереван, Армения)

gmarting@ysu.am

О БЕЗУСЛОВНОЙ И АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА ¹

Пусть E — измеримое множество и $C(E)$ — класс всех непрерывных функций, определенных на E . Пусть, далее $\omega(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ — неотрицательная функция с $\omega(+0) = 0$, через $H^\omega(E)$ обозначается класс всех тех функций $f(x) \in C(E)$ для каждой из которых модуль непрерывность $\omega(f, \delta)$ не превосходит $\omega(\delta)$.

Теорема 1. Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такое, что ее ряд Фурье-Хаара абсолютно сходится к ней почти всюду на $[0, 1]$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS _13-1A313.

Фурье вновь полученной функции по системе Хаара расположены в убывающем порядке.

Теорема 2. Для каждой неотрицательной функции $\omega(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$, $\omega(+0) = 0$ и для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in H^\omega(0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1]$, совпадающую с f на E такое, что ее ряд Фурье-Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на $[0, 1]$ и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Хаара расположены в убывающем порядке.

Теоремы 1 и 2 верны также для любой подсистемы $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ системы Хаара $\{h_n(x)\}_{n=0}^\infty$ следующего вида $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty = \{\chi_{s_k}(x)\}_{k=1}^\infty = \{\chi_n(x), n = 2^{k_j} + i, i = 1, \dots, 2^{s_j}, \text{ где } \{k_j\}_{j=1}^\infty \nearrow^\infty \text{ наперед заданная возрастающая подпоследовательность натуральных чисел.}$

Теорема 3. Для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ и для любого $0 < \epsilon < 1$ можно найти такую функцию $\tilde{f} \in L^\infty[0, 1]$, $\text{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, что ее ряд Фурье по подсистеме $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ системы Хаара абсолютно сходится к ней равномерно на $[0, 1]$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по подсистеме $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^\infty$ расположены в убывающем порядке.

Л. Де Карли (Майами), Д. В. Горбачев (Тула), С. Ю. Тихонов
(Москва, Барселона)
dvgmail@mail.ru

ТОЧНАЯ КОНСТАНТА В НЕРАВЕНСТВЕ ПИТТА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ГАНКЕЛЯ ¹

Неравенством Питта называется весовое неравенство для преобразования Фурье вида

$$\| |y|^{-s} \hat{F} \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \| |x|^t F \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1)$$

При $s = t = 0$ и $q = p'$, $1 \leq p \leq 2$, имеем классическое неравенство Хаусдорфа-Юнга.

Большой интерес представляют как порядковые, так и точные константы C в этом неравенстве. Точная константа в неравенстве Хаусдорфа-Юнга для целого четного p' была найдена К. И. Бабенко (1961), а для произвольного p — W. Beckner (1975). Beckner (2008) также нашел точную константу при $p = q = 2$ и $0 \leq s = t < n/2$.

¹Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045) и Фонда Дмитрия Зимина «Династия».

Как известно, пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ можно разложить в прямую сумму подпространств функций вида $F(x) = f(|x|)Y_k(x')$, где $x' = x/|x|$, $Y_k \in \Sigma_k$ — сферическая гармоника порядка $k \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому представляет интерес следующий точный результат [1].

Теорема 1. Пусть $F = fY_k$, где $Y_k \in \Sigma_k$ и $f(|x|) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда неравенство Питта (1) справедливо для $1 \leq p \leq q \leq \infty$ тогда и только тогда, когда $s = t + n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p'})$ и $(n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + \max\{\frac{1}{p'} - \frac{1}{q}, 0\} \leq t < \frac{n}{p} + k$.

При этом, если $p \leq 2$, $q = p'$ и $s = t = (n-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, то неравенство (1) справедливо с точной константой $C = (2\pi)^{\frac{n}{2}} C_{k,p} \times \sup_{Y_k \in \Sigma_k} \frac{\|Y_k\|_{L^q(S^{n-1})}}{\|Y_k\|_{L^p(S^{n-1})}}$,

$$\text{где } C_{k,p} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} \frac{p}{p'} \frac{\frac{(2k+n-1)p+2}{4p} \Gamma\left(\frac{(2k+n-1)p'+2}{4}\right) \frac{1}{p'}}{\frac{(2k+n-1)p'+2}{(p')} \frac{\frac{(2k+n-1)p'+2}{4p'} \Gamma\left(\frac{(2k+n-1)p+2}{4}\right) \frac{1}{p}}.$$

Эта теорема вытекает из близкого результата для преобразования Ганкеля порядка $n/2 + k - 1$ функции f , $n \geq 1$, $k \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Carli L., Gorbachev D., Tikhonov S. Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 408, no. 2. P. 762–774.

В. И. Иванов, А. В. Иванов (Тула)

ivaleryi@mail.ru

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОБОБЩЕННЫМИ КОНСТАНТАМИ ДЖЕКСОНА В L_2 НА ТОРЕ И ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ¹

Пусть $\mathbb{R}^d$ — d -мерное евклидово пространство, $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ — d -мерный тор, V, U — выпуклые центрально-симметричные тела в $\mathbb{R}^d$, $R, \tau > 0$, $E(RV, f)_2$ ($E^T(RV, f)_2$) — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ($f \in L_2(\mathbb{T}^d)$) целыми функциями экспоненциального типа (тригонометрическими полиномами) со спектром в теле RV , $M = \{\mu_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ — последовательность с абсолютно сходящимся рядом и нулевой суммой, $\omega_M(\tau U, f)_2$ ($\omega_M^T(\tau U, f)_2$) — обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ($f \in L_2(\mathbb{T}^d)$) со сдвигами в теле τU , определяемый разностным оператором

$$\Delta_t^M f(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \mu_s f(x + st),$$

$$D_M(RV, \tau U)_2 = \sup \left\{ \frac{E(RV, f)_2}{\omega_M(\tau U, f)_2} : f \in L_2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00045) и Госзадания Минобрнауки № 5414ГЗ.

— обобщенная константа Джексона для евклидова пространства,

$$D_M^T(RV, \tau U)_2 = \sup \left\{ \frac{E^T(RV, f)_2}{\omega_M^T(\tau U, f)_2} : f \in L_2(\mathbb{T}^d) \right\}$$

— обобщенная константа Джексона для тора.
Для евклидова пространства

$$D_M(RV, \tau U)_2 = D_M(V, R\tau U)_2.$$

Теорема. Если $R, \tau > 0$, $\frac{\tau}{R}U \subset \mathbb{T}^d$, то

$$D_M^T\left(RV, \frac{\tau}{R}U\right)_2 \leq D_M(V, \tau U)_2.$$

Вычислять обобщенную константу Джексона для евклидова пространства, как правило, проще, чем для тора. Неравенства Джексона для евклидова пространства автоматически дают неравенства Джексона для тора.

Ю. С. Крυσс (Саратов)
KrussUS@gmail.com

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ОПЕРАТОР РАСТЯЖЕНИЯ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ¹

Локальное поле положительной характеристики $F^{(s)}$ изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей $(\dots, \bar{0}, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}, \dots)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{a}_j \in GF(p^s)$. Операция сложения в $F^{(s)}$ определяется по координатам $a+b = (\bar{a}_i + \bar{b}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, умножения — по формуле: $ab = (\bar{c}_l)_{l \in \mathbb{Z}}$, $\bar{c}_l = \sum_{k+j=l} \bar{a}_k \bar{b}_j$.

Локальное поле положительной характеристики $F^{(s)}$ можно рассматривать как линейное пространство над $GF(p^s)$. Элементы вида $g_k = (\dots, \bar{0}_{k-1}, (1, 0, \dots, 0)_k, \bar{0}_{k+1}, \dots)$ образуют базис в $F^{(s)}$. Т.о. любой элемент $x \in F^{(s)}$ можно представить в виде: $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\lambda}_k g_k$, $\bar{\lambda}_k \in GF(p^s)$. Оператор растяжения A определяется равенством $Ax = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\lambda}_k g_{k-1}$. Однако базисную последовательность можно выбрать по-другому. Обозначим через F_{ks} подгруппу аддитивной группы $F^{(s)+}$ поля $F^{(s)}$: $F_{ks} = \{x \in F^{(s)} : x = \sum_{j=k}^{\infty} \bar{a}_j t^j, \bar{a}_j \in GF(p^s)\}$. Образует новые подгруппы $F_{(k+1)s-j}$, $j = \overline{1, s-1}$,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

так чтобы $F_{(k+1)s-j} = \prod_{l=0}^{p-1} (F_{(k+1)s-j+1} + l\bar{a}_j g_k)$, $j = \overline{0, s-1}$, $(\bar{a}_j)_{j=1}^s$ линейно независимые векторы из $GF(p^s)$. Рассмотрим базисную последовательность построенную следующим образом: $\tilde{g}_{(k+1)s-j} = \bar{a}_j g_k$. Определим оператор растяжения $\tilde{A}$ формулой: $\tilde{A}x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_k \tilde{g}_{k-1}$, $\mu_k \in GF(p)$.

Теорема 1. Для всех $x \in F^{(s)}$ справедливо равенство

$$Ax = \tilde{A}^s x, \quad (1)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятенцкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции (Обобщенные функции, выпуск 6). М.: Физматлит, 1966.

2. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups // J. Math. Anal. Appl. 385 (2012), С. 1162–1178.

Р. А. Ласурия (Сухум, Абхазия)

rlasuria67@yandex.ru

ГРУППЫ ОТКЛОНЕНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ L_p -ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $L_p(0, 2\pi) := \{f : \|f\|_p < \infty\}$, $p \geq 1$, при $p = \infty$, $\|f\|_\infty := \sup_x |f(x)|$, $\Delta_h^2 f(x) := f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$,

Обозначим

$$H_{\omega, p, 2} := \left\{ f \in L_p : \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h^2 f\|_p}{\omega(h)} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$\omega(h) > 0$ и возрастает — банахово пространство с нормой.

$$\|f\|_{\omega, p, 2} := \|f\|_p + \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h^2 f\|_p}{\omega(h)}.$$

Пусть, далее, $h_\alpha^{(n)}(f; x) := \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) \rho_k(f; x)$, $n \in N$, где $\alpha = \{\alpha_k(v)\}$, $k \in N$ — произвольная последовательность неотрицательных функций, невозрастающая по k при каждом фиксированном $v \in V \subset R$, $\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x)$, $S_n(f, x)$ — частная сумма ряда Фурье функции f .

Известно достаточно большое количество работ, посвященных вопросам приближения функций в обобщенных гёльдеровых пространствах $H_{\omega, p, 2}$ (библ. см. в [1]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть $0 \leq \beta < \eta \leq 1$. Тогда $\forall f \in H_{\omega,p,2} \subset H_{\omega^*,p,2}$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливо соотношение

$$\left\| h_{\alpha}^{(n)}(f) \right\|_{\omega^*,p,2} = O(1) \sup_{h>0} \frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)} \times \\ \times \left\{ n \alpha_n(v) (\omega(1/n))^{1-\beta/\eta} + \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(v) (\omega(1/k))^{1-\beta/\eta} \right\}, \quad n \in N.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ласурия Р. А. Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций Сухум.: АГУ, 2010. – 260 с.

Е. А. Лебедева (Санкт-Петербург), Е. Б. Постников (Курск)
ealebedeva2004@gmail.com postnicov@gmail.com
ОБРАЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВСПЛЕСКОВОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, НЕ ТРЕБУЮЩЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ
УСЛОВИЯ ДОПУСТИМОСТИ¹

Мы предлагаем новую формулу восстановления для интегрального всплескового преобразования. Она применима даже, если для анализирующего всплеска не выполняется условие допустимости.

Интегральное всплесковое преобразование на $L_2(\mathbb{R})$ определяется как [1]

$$W_{n,\psi} f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{n,a,b}(x)} dx,$$

где $n = 1$ или $n = 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$\psi_{1,a,b}(x) = \frac{1}{|a|} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \psi_{2,a,b}(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Теорема. Если $f, \psi, \omega \hat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ и $\hat{f}, \hat{\psi} \in L_1(\mathbb{R})$, то в каждой точке непрерывности функции f имеем

$$- \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_{1,\psi} f(a, b) da = \overline{\psi(0)} Hf(b), \quad - \int_{\mathbb{R}} \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial b} W_{2,\psi} f(a, b) da = \overline{\psi(0)} Hf(b),$$

где Hf преобразование Гильберта функции f . Если дополнительно $\text{supp } \hat{f} \subset [0, \infty)$, то

$$-i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_{1,\psi} f(a, b) da = \overline{\psi(0)} f(b), \quad -i \int_{\mathbb{R}} \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial b} W_{2,\psi} f(a, b) da = \overline{\psi(0)} f(b).$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00216).

Т. П. Лукашенко (Москва)
 lukashenko@mail.ru
**О БАЗИСАХ СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВАХ
 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ**¹

Обозначим через $\mathbb{T}_m^n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, пространство тригонометрических многочленов $T_m^n(x) = \sum_{k=m}^n c_k e^{ikx}$ с $c_k \in \mathbb{C}$, $m \leq k \leq n$.

Введем ядро $D_m^n(x) = \sum_{k=m}^n e^{i(kx-s_k)}$ с покомпонентными сдвигами $s_k \in \mathbb{R}$, $m \leq k \leq n$.

Теорема 1. Система сдвигов нормированных ядер

$$\sqrt{\frac{1}{2(n-m+1)\pi}} D_m^n \left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j \right), \quad (1)$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $n-m+1$, $j = 0, 1, \dots, n-m$, образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_m^n$.

Любой ортонормированный базис в $\mathbb{T}_m^n$, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена, $\{\varphi(x-j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (1) для некоторых покомпонентных сдвигов $s_k \in \mathbb{R}$, $m \leq k \leq n$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$ и не имеющего общих делителей с $n-m+1$.

В пространстве $\mathcal{T}_o^n$ действительных тригонометрических многочленов $T_0^n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ с коэффициентами $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, нормированные ядра (1) с $m = -n$, $s_0 = 0$ или $s_0 = \pi$, и с $s_{-k} = -s_k$, $1 \leq k \leq n$, образуют ортонормированный базис.

Любой ортонормированный базис в $\mathcal{T}_o^n$, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена $\{\varphi(x-j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (1) с теми же условиями $m = -n$, $s_0 = 0$ или $s_0 = \pi$, и с $s_{-k} = -s_k$, $1 \leq k \leq n$.

Теорема 2. В пространстве $\mathbb{T}_m^n \oplus \mathbb{T}_{-n}^{-m}$ тригонометрических многочленов $(T_m^n + T_{-n}^{-m})(x) = \sum_{k=m}^n c_k e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-m} c_k e^{ikx}$ с $c_k \in \mathbb{C}$, и в пространстве $\mathcal{T}_m^n$ многочленов $T_m^n(x) = \sum_{k=m}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ с $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, при $n > m > 0$ не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного многочлена $\varphi(x-j\alpha)$, $j = 0, \dots, 2(n-m)+1$.

Пусть $\mathbb{T}_m^n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, — пространство тригонометрических

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417), ГК (проекты 02.G25.31.0030 и 02.G36.31.0006) и программы НШ-1096.2014.1.

многочленов с компонентами от m до n

$$T_m^n(x) = \sum_{k=m}^n c_k e^{ikx}, \quad (2)$$

с комплексными коэффициентами c_k .

Это пространство размерности $n - m + 1$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Введем ядро

$$D_m^n(x) = \sum_{k=m}^n e^{ikx} = e^{imx} \frac{e^{i(n-m+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}, \quad (3)$$

а обобщённое ядро с покомпонентными сдвигами $\mathbf{s} = (s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$, где $s_k \in \mathbb{R}$, $k = m, m+1, \dots, n$, —

$$D_m^n(x) = \sum_{k=m}^n e^{i(kx - s_k)}. \quad (4)$$

Отметим, что при $n = -m \geq 0$ ядро $D_m^n(x)$ является увеличенным в 2 раза классическим ядром Дирихле (см. [3, с. 94], [4, с. 86] или [5, с. 98]).

Теорема 3. Система сдвигов нормированных обобщённых ядер

$$\mathfrak{D}_m^n \left(x - \frac{2\pi r}{n - m + 1} j \right) = \sqrt{\frac{1}{2(n - m + 1)\pi}} D_m^n \left(x - \frac{2\pi r}{n - m + 1} j \right), \quad (5)$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $n - m + 1$, $j = 0, 1, \dots, n - m$, образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_m^n$.

Любой ортонормированный базис в $\mathbb{T}_m^n$, состоящий из последовательных сдвигов одной функции $\{\varphi(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, имеет вид (3) для некоторых покомпонентных сдвигов $s_k \in \mathbb{R}$, $k = m, m+1, \dots, n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{Z}$ и не имеющего общих делителей с $n - m + 1$.

Пусть

$$T^n(x) = T_0^n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

тригонометрические многочлены с действительными (или комплексными) коэффициентами a_k , b_k . Они образуют пространство размерности $2n + 1$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (комплексных чисел $\mathbb{C}$).

Определение. Орторекурсивное разложение вектора f из гильбертова пространства H по последовательно задаваемым подпространствам осуществляется следующим образом: 1) положим $r_0 = f$; 2) если задан остаток приближения $r_{m-1} \in H$, $m \in \mathbb{N}$, и подпространство $H_m \subset H$, то

полагаем $\tilde{f}_m$ — ортогональная проекция r_{m-1} на H_m и $r_m = r_{m-1} - \tilde{f}_m$ — ортогональная проекция r_{m-1} на $H_m^\perp$ — ортогональное дополнение H_m в H . Рекурсивный ряд вектора f имеет вид $\sum_m \tilde{f}_m$.

Частные случаи этого определения даны в [1, 2]. Укажем, когда наилучшее возможное приближение разлагаемого вектора — частичная сумма орторекурсивного разложения.

Теорема 1. Если для каждого подпространства H_n , $n > 1$, системы подпространств $\{H_m\}_m$ выполняется условие разложения $H_n = \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n^\perp$, где $\mathcal{H}_n$ из линейной оболочки H_m , $m < n$, а $\mathcal{H}_n^\perp$ ортогонально ей, то для любого $f \in H$ все частичные суммы $S_n(f)$ орторекурсивного разложения приближают f наилучшим образом.

Замечание. Отметим два случая, когда условие разложения выполнено: 1) если $H_n \perp H_m$, $m < n$; 2) если $H_m \subset H_n$, $m < n$.

Теорема 2. Если для каждого подпространства H_n , $n > 1$, из системы подпространств $\{H_m\}_m$ выполняется условие разложения $H_n = \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n^\perp$, где $\mathcal{H}_n$ из линейной оболочки H_m , $m < n$, а $\mathcal{H}_n^\perp$ ортогонально ей, и линейная оболочка всех H_m всюду плотна в H , то для любого $f \in H$ орторекурсивный ряд $\sum_m \tilde{f}_m$ сходится к f .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. 2001. № 1. С. 6–10.
2. Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Доклады РАН. 2009. Т. 425, №6. С. 741–746.

Д. С. Лукомский (Саратов)
LukomskiiDS@info.sgu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ХААРА И ВИЛЕНКИНА К ВОПРОСУ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ¹

Данный доклад посвящен проблеме сжатия изображений. В последнее время при решении этой задачи широко используются вейвлет базисы [1]. Однако, до сих пор остается открытым вопрос о том, какой из базисов дает наилучший результат.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ алгоритмов сжатия изображений с помощью обобщенной системы Хаара и системы Виленикина. Так же проведено их сравнение с классическим дискретным косинус преобразованием Фурье. Обобщенные функции Хаара на нульмерных группах были введены в работе [2]. В [3] предложен способ построения

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

функций Хаара на произведении нульмерных групп. Он основан на сведении произведения групп к новой группе с новой основной цепочкой подгрупп. Такую основную цепочку можно выбирать разными способами, в результате получаются различные двумерные системы Хаара.

В докладе строится система Хаара, приводится быстрый алгоритм дискретного преобразования по этой системе. Приводится алгоритм быстрого дискретного преобразования Виленкина, основанный на той же идее сведения произведения групп к одномерной.

Для сравнения алгоритмов сжатия по таким системам с косинус-преобразованием была написана на С# программа, реализующая эти алгоритмы, вычислены среднеквадратичное отклонение MSE и коэффициент PSNR (пиковое отношение сигнала к шуму). Сравнительный анализ по этим системам и тригонометрической для традиционных тестовых изображений показывает, что применение системы Виленкина дает наилучший результат.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображения в действии. — Москва: изд-во Триумф, 2003.
2. *С. Ф. Лукомский* О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе, Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 9:1 (2009), 14–19.
3. *Sergei F. Lukomskii.* Haar system on a product of zero-dimensional compact groups// Central European Journal of Mathematics. (Cent. Eur. J. Math.), 9(3), 2011, 627–639.

С. Ф. Лукомский (Саратов)

LukomskiiSF@info.sgu.ru

ВСПЛЕСКОВЫЕ БАЗИСЫ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ¹

Методы гармонического и вейвлет анализа на локальных полях используют идеи, изложенные в монографии [1], и основаны на понятии первичного элемента. Мы хотим предложить иной подход к изучению как гармонического, так и вейвлет анализа, основанный на представлении поля $F^{(s)}$ и его группы характеров в виде линейного нормированного пространства над конечным полем $GF(p^s)$. Будем считать, что локальное поле положительной характеристики p состоящее из бесконечных в обе стороны последовательностей $a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots)$, $\mathbf{a}_j \in GF(p^s)$, с нормой $\|a\| = \frac{1}{p^{ns}}$, если $\mathbf{a}_n \neq 0$, в котором операция сложения $+$ и операция умножения на $\lambda \in GF(p^s)$ определены покоординатно. По определению $|\lambda| = 0$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

при $\lambda = \mathbf{0}$ и $|\lambda| = 1$ при $\lambda \neq \mathbf{0}$. В этом случае $\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|$, и выполнены все аксиомы линейного пространства.

В множестве характеров X поля $F^{(s)}$ можно ввести структуру линейного пространства. При этом внутренней операцией является произведение характеров, а внешней — возведение характера χ в степень $\mathbf{u} \in GF(p^s)$.

Теорема 1. *Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде $\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}$, где $\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = r_{k,s+0}^{a_k^{(0)}} r_{k,s+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{k,s+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$ — функции Радемахера.*

Теорема 2. *Положим по определению*

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}})^{\mathbf{b}} \stackrel{df}{=} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}\mathbf{b}}, \quad \chi^{\mathbf{b}} = \left(\prod_k \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} \right)^{\mathbf{b}} \stackrel{df}{=} \prod_k \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}}.$$

- 1) С такими операциями совокупность характеров является линейным пространством над полем $GF(p^s)$.
- 2) Последовательность функций Радемахера $(\mathbf{r}_k)$ образует базис пространства $(X, *, \cdot, GF(p^s))$.
- 3) При любых $k \neq j$ $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u}_{g_j}) = 1$, где g_j есть стандартный базис пространства $F^{(s)}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Taibleson M. H. Fourier Analysis on Local Fields. Princeton University Press, 1975.

Л. В. Новиков, С. А. Косаревская (Санкт-Петербург)
novik38@mail.ru, kossas13@mail.ru
КВАЗИВЕЙВЛЕТЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ
КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ

Во многих приложениях обработки сигналов и изображений, в частности, в аналитических приборах для научных исследований, дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) позволяет эффективно бороться с шумами и помехами, удалять систематические погрешности и т.п. [1]. Наблюдаемые сигналы аналитических приборов по своей природе квазистационарные: они представляют собой последовательность пиков (всплесков) известной формы с неизвестными случайными параметрами. Пики расположены в некотором интервале (по оси развертки). Их параметры (положение, ширина, высота, площадь) содержат информацию о свойствах исследуемых процессов, числе компонентов вещества, их составе, концентрации и т.п. С целью расширения круга задач, решаемых с помощью ДВП, в работе [2] предложено использовать вейвлеты, приспособленные к конкретным классам аналитических приборов и названные поэтому аппаратно-ориентированными. Эти вейвлеты позволяют улучшить такие важ-

нейшие характеристики приборов, как разрешающая способность и чувствительность. Они синтезируются с использованием модели сигнала известной формы, определяемой аппаратной функцией. Синтезированные таким образом вейвлеты удовлетворяют масштабирующему уравнению с некоторой погрешностью (с точностью до «инженерного нуля»), поэтому они получили название квазивейвлетов.

Однако, в некоторых приборах форма (в частности — ширина) пиков зависит от положения на оси развертки. Тем не менее, на основе методики, предложенной в [2], и в этом случае могут быть синтезированы квазивейвлеты. На первом этапе синтеза строится базис Рисса путем смещения с переменным шагом модели сигнала по оси времени таким образом, что остаётся постоянным скалярное произведение двух соседних пиков. При этом относительный шаг смещения должен быть минимальным, чтобы сохранить разрешающую способность анализа. Базис смещённых функций порождает ортогональный или биортогональный базис вейвлетов. Коэффициенты масштабирующего уравнения определяются по известным масштабирующим функциям. Они служат импульсными откликами фильтров в алгоритме ДВП при решении практических задач обработки сигналов.

Предлагаемые квазивейвлеты позволяют сохранить качество обработки сигналов с зависящей от развертки аппаратной функцией и, таким образом, повысить аналитические характеристики приборов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Shao X.-G., Leung A. K.-M., Chau F.-T. Wavelet: A New Trend in Chemistry.// Accounts of Chemical Research. 2003. V. 36. № 4. P. 276–283.
2. Novikov L. V. Modified Wavelets and Their applications// Journal of Communication Technology and Electronics. 2006. V. 51. № 11. P. 1337–1346.
3. Лев Новиков. Аппаратно-ориентированные вейвлеты. Palmarium Academic Publishing. 2013. 212 с. (<http://www.ljubljuknigi.ru/>)

Б. П. Осиленкер (Москва)

b_osilenker@mail.ru

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ В НЕПРЕРЫВНО–ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В докладе будут изложены результаты о рядах Фурье по многочленам, ортогональным в непрерывно-дискретных пространствах S (и их частного случая — нагруженных пространствах).

Задача изучения этих пространств была поставлена в классической монографии Р. Куранта и Д. Гильберта «Методы математической физики». Пространства S возникают в ряде проблем функционального анализа, теории функций, математической физики и вычислительной математики.

Например, при исследовании краевых задач с параметром в граничных условиях. В теоретической физике они возникают при исследовании оператора Шредингера с точечными потенциалами (потенциалами нулевого радиуса, дельта-потенциалами).

В прикладных задачах пространства S применяются при исследовании процессов с сосредоточенными нагрузками и сосредоточенными моментами. Например, в задачах о колебании нагруженных стержней и о распространении тепла в неоднородном стержне, на конце которого помещена сосредоточенная теплоемкость.

В непрерывно-дискретных пространствах Соболева вводятся системы ортогональных многочленов. Следует отметить, что ряд свойств этих многочленов существенно отличаются от соответствующих свойств классических ортогональных многочленов.

В докладе будут изложены результаты о поведении частных сумм и линейных методах суммирования рядов Фурье по многочленам, ортонормированным в пространствах Соболева, в частности, для методов Чезаро и Пуассона-Абея. Основную роль в доказательстве играют полученные представления ядер Фейера, Пуассона и Валле-Пуссена. Общие результаты демонстрируются на симметричных ортогональных многочленах Гегенбауэра-Соболева и нагруженных многочленах Якоби.

Н. Л. Пачулия (Сухум, Абхазия)

nias-pachulia@rambler.ru

**ОЦЕНКИ СИЛЬНЫХ СРЕДНИХ МЕТОДА
ВАЛЛЕ-ПУССЕНА КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ**

Пусть N — множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $n \in N_0^j$, S_n — прямоугольная частная сумма порядка n ряда $\sum_{k \in N_0^j} a_k$, $S \in R = (-\infty, \infty)$,

$\rho_n = S - S_n$ — соответствующие отклонения, Φ — множество возрастающих непрерывных на $[0, \infty)$ функции φ удовлетворяющих условиям: $\varphi(0) = 0$; $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$. Далее, пусть

$$\Phi_\delta = \{\varphi \in \Phi : \varphi(2u) \leq a\varphi(u) \text{ } u \in [0, \sigma] \text{ , } \ln \varphi(u) = o(u^\delta), \text{ } u \rightarrow \infty\} \text{ , } \delta > 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_n \downarrow 0$, $\mu \in \Phi$, $j \in N$ и $\forall B \subset [n, n + \alpha_n] \cap N$

$$h_{n,r}^{(\mu)} = \frac{1}{r} \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(|\rho_{k\tau}|) \leq A\mu(F_n) \ln^j \frac{\alpha_n e}{r}, \text{ } \tau = (1, \dots, 1)$$

где r — мощность множества B , A от n — не зависящее число, $\mu \in \Phi$, $\alpha_n \uparrow \infty$, и $\alpha_n = o(n)$. Тогда, если $\varphi \in \Phi_{\frac{1}{j}}$, то

$$h_{n,\alpha_{n+1}}^{\varphi(\mu)} \leq A\varphi(\mu(F_n)).$$

Если же функция $\varphi \in \mu(u) = u^q$, $q \in (0, 1]$ и $\varphi(\mu) \notin \Phi_{\frac{1}{j}}$, то существует ряд, удовлетворяющий условию теоремы 1, для которого $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_{n, \alpha_n + 1}^{\varphi(\mu)} = +\infty$.

Пусть $S_m(f, x)$ – прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции f , $E_m(f)$ – ее наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка m .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C(T^j)$, $j \in N$, $T = [-\pi, \pi]$, $q \in (0, 1]$ и $\varphi \in \Phi_{\frac{1}{j}}$. Тогда $\forall x \in T^j$,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(|f(x) - S_{k\tau}(f, x)|^q) \leq A\varphi(E_{n\tau}^q(f)).$$

Будут приведены обобщения ранее полученных оценок сильных средних методов суммирования на кратные ряды Фурье.

С. Г. Пономарев (Воронеж)

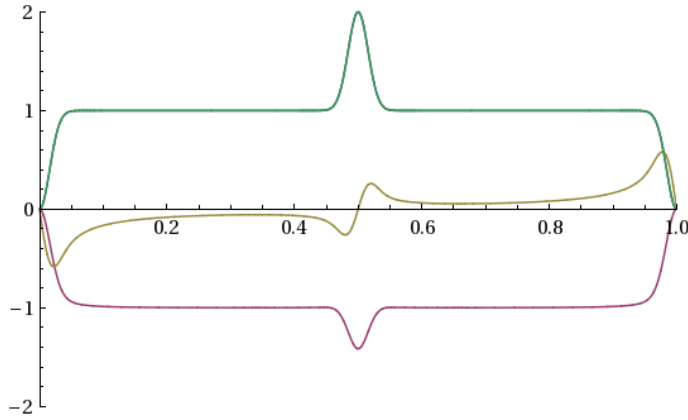
serggt1@gmail.com

СОХРАНЕНИЕ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Одна из проблем, возникающих при построении всплесков с компактным носителем, – это проблема, обозначенная в названии тезисов. Несмотря на то, что исследования этой проблемы ведутся уже давно, полученные результаты немногочисленны. Доклад содержит подробное изложение решения рассматриваемой проблемы для одного частного случая. А именно, пусть $P_n(\omega) = 1 - \cos^{2n+1}(2\pi\omega)$, $\omega \in [0, 1]$. Тогда по известной лемме Ф. Рисса существуют так называемые тригонометрические квадратные корни m_n такие, что $|m_n|^2 = P_n$. Доказательство леммы Ф. Рисса конструктивное и из него следует, что тригонометрический полином m_n не является единственным. Ясно, что $P_n(\omega) \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$, где $P(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \in \{0, 1\}; \\ 1, \omega \in (0, 1) \setminus \{1/2\}; \\ 2, \omega = 1/2. \end{cases}$

Утверждение. Существуют тригонометрические полиномы m_n такие, что $m_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$, где $|p|^2 = P$.

Графики $P_n, Re(m_n), Im(m_n)$ для $n = 51$:



С. Г. Прибегин (Одесса, Украина)

ivanpribegin@rambler.ru

**МЕТОД СУММИРОВАНИЯ РИССА ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p \leq \infty$**

Пусть $E_{2n}^+ = \{z = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n : y_j > 0, j = \overline{1, n}\}$,
 $f(z) = f(z_1, \dots, z_n) \in H^p(E_{2n}^+)$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ – угловые граничные
 значения функции f , $dx = dx_1 \dots dx_n$, $\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$,

$l > 0, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\binom{l}{m} = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(l-m+1)}$ – биномиальные коэффициенты,

$h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_h^l f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f(x + mh)$ – дробная раз-

ность, которая определена почти всюду при $((l \in \mathbb{N}) \wedge$

$(0 < p \leq \infty)) \vee \left((l \in (0; \infty) \setminus \mathbb{N}) \wedge \left(l > \left(\frac{1}{p} - 1 \right)_+ \right) \right)$, $\omega_l(f, \varepsilon)_p =$

$\sup_{\substack{|h_j| \leq \varepsilon, \\ j = \overline{1, n}}} \|\Delta_h^l f(x)\|_p$ и $\tilde{\omega}_l(f, \varepsilon)_p = \sup_{\substack{|h| \leq \varepsilon, \\ \tilde{h} = (h, \dots, h), h \in \mathbb{R}^n}} \|\Delta_{\tilde{h}}^l f(x)\|_p$ – модули гладкости

дробного порядка. Далее, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $t_j \geq 0$, $|t| = t_1 + \dots + t_n$,

$u + iv = (u_1 + iv_1, \dots, u_n + iv_n)$, $\langle u + iv, t \rangle = \sum_{j=1}^n (u_j + iv_j)t_j$,

$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(u + iv) e^{-\langle u + iv, t \rangle} du$ – преобразование Фурье функции f , $\varepsilon >$

$0, l > 0, \alpha > 0$ $R_{\varepsilon}^{l, \alpha}(f, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 - (\varepsilon|t|)^l)_+^{\alpha} \hat{f}(t) e^{i\langle x, t \rangle} dt$ – обобщённые сред-

ние Рисса.

Теорема. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p \leq \infty$. Тогда если $((l \in \mathbb{N}) \wedge (0 < p \leq \infty)) \vee ((l \in (0; \infty) \setminus \mathbb{N}) \wedge (\left(\frac{n}{[l]} < p \leq 1\right) \vee (n < [l] \leq \infty)))$ ($[\cdot]$ – целая часть числа) и $((0 < p \leq 1) \wedge (\alpha > \frac{n}{p} - 1)) \vee ((p > 1) \wedge (\alpha > n - 1))$ то имеет место следующая оценка

$$C_1(l; \alpha; p) \tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq \|f(x) - R_\varepsilon^{l\alpha}(f, x)\|_p \leq C_2(l; \alpha; p) \omega_l(\varepsilon, f)_p$$

В случае $n = 1$ и $l \in \mathbb{N}$ при $0 < p \leq 1$ эта теорема доказана А. А. Соляником в [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Soljanik B. C. On the order of approximation to function of $H^p(\mathbb{R})$ $0 < p \leq 1$ by certain of Fourier integrals. // Anal.Math. 1986. 12:1. С. 59–75.

М. Ю. Пришельцев (Воронеж)

mikhail.prisheltsev@gmail.com

АДАПТИВНОЕ ДВУМЕРНОЕ ВСПЛЕСК ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ ХААРА

Разработан программный комплекс, реализующий двумерное адаптивное преобразование Хаара для растровых изображений. Цель работы — исследование качественных и количественных показателей сжатия изображений при использовании разных наборов всплесков.

Помимо стандартных всплесков Хаара алгоритм имеет три других набора, образующих ОНБ (ортонормированный базис) в пространстве дважды интегрируемых функций (L2). На этапе всплескового преобразования RGB матриц (изображение раскладывается на три цветовые компоненты), алгоритм выбирает один из четырех наборов фильтров, минимизируя нормы конечных матриц. Алгоритм поддерживает многоуровневое всплесковое преобразование, тем самым уменьшая размер матрицы средних. Основное сжатие происходит на этапе квантизации.

Следующими за квантизацией шагами являются построение дерева Хаффмана и сохранение получившихся двоичных данных в файл. Восстановление изображения из файла происходит теми же этапами в обратном порядке.

Экспериментальные результаты сжатия в процентах от размера оригинального растрового изображения (L — количество уровней всплескового преобразования, Q — количество уровней квантизации):

L1 Q64 49-56%, L1 Q32 46-52%, L1 Q16 43-47%, L1 Q8 42-45%, L2 Q32 37%, L3 Q32 35%, L4 Q32 34%, L5 Q16 29%.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов. Теория всплесков. М. 2005.
- [2] Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М. 2005.

М. Ю. Пришельцев (Воронеж)
mikhail.prisheltsev@gmail.com
БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫЕ
ФИЛЬТРЫ ДОБЕШИ 9/7

В данной работе доказывается следующая конструктивная Теорема: Биортогональные всплески для случая Добеши (длины 9/7) алгоритма JPEG2000 имеют альтернативные комплекснозначные фильтры.

Доказательство ведется путем построения новых 9/7 масштабирующих функций. Их существование обусловлено альтернативной факторизацией многочлена, маски всплесков Добеши 9/7.

В работе подсчитаны показатели регулярности по Геллеру и Соболеву, а также границы Рисса оригинальных и полученных масштабирующих функций. Построены наборы фильтров разложения и восстановления. Проанализированы изображения, экспериментально сжатые новыми фильтрами.

Свойства фильтров (D - Добеши, K - комплекснозначные, Decomp - разлож, Reconst - восстановл):

Регулярность по Геллеру: 1.07 (D9/7 Decomp), 1.70 (D9/7 Reconst), 0.68 (K9/7 Decomp), 2.15 (K9/7 Reconst)

Регулярность по Соболеву: 1.41 (D9/7 Decomp), 2.12 (D9/7 Reconst), 1.01 (K9/7 Decomp), 2.58 (K9/7 Reconst)

Границы Рисса: $0.926 < 1.065$ (D9/7 Decomp), $0.943 < 1.084$ (D9/7 Reconst), $1.0 < 1.945$ (K9/7 Decomp), $0.4937 < 1.0$ (K9/7 Reconst)

Л И Т Е Р А Т У Р А

M. Unser. Mathematical Properties of the JPEG2000 Wavelet Filters. //IEEE Transactions on Image Processing, v. 12, 9, 2003. P.1080–1090.

S. Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, 1998.

В. В. Пырву (Москва)
slava.zyq@gmail.com
О ПРОБЛЕМЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ФУРЬЕ В АНАЛИЗЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ
КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ

В настоящее время в медицине в анализе квазистационарных квазипериодических биологических сигналов широко используемыми являются методы на основе преобразования Фурье. Одна из проблем применения преобразования Фурье на практике заключается в отсутствии удобных методов работы со всеми тремя амплитудными, частотными и фазовыми

характеристиками гармоник. Под анализом спектра биологического сигнала зачастую подразумевают лишь его амплитудно-частотные характеристики.

Ограниченное использование значений фаз гармоник спектра сигнала обусловлено несколькими сложностями. Одна из них связана с чувствительностью фаз к выбору границ временного интервала и к форме сигнала в этом интервале. Другая — с квазипериодичностью, квазистационарностью и индивидуальностью формы биологических сигналов. Эти факторы значительно усложняют применимость абсолютных значений фаз гармоник в сопоставлении результатов анализа спектров сигналов от различных биологических объектов.

В качестве решения данной проблемы предложено разбивать каждый анализируемый сигнал на совокупность периодических интервалов с индивидуальными фиксированными границами и в данной совокупности рассматривать показатели разброса фаз и амплитуд. Для удобств практического использования предложено представление амплитудно-фазовых разбросов в виде двумерных графиков, на комплексных плоскостях и в трехмерных пространствах. На примере электрокардиографических сигналов было показано, что характерные для индивида в здоровом состоянии зависимости разброса фаз и амплитуд от номера гармоники сохраняются для сигналов, зарегистрированных с промежутком в несколько дней.

Однако сегодня остаются открытыми вопросы о чувствительности фазовых характеристик к границам временного интервала и о поиске параметров стационарности и стабильности генерации биологического сигнала на основе всех трех амплитудных, фазовых и частотных характеристиках спектра.

Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий (Гродно, Беларусь)
rovba@grsu.by, k.smotritski@grsu.by

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Одним из классических способов построения ортогональных систем является использование производящей функции. Применение производящих функций для построения различных ортогональных систем алгебраических многочленов достаточно подробно описано. В случае систем рациональных функций ситуация значительно усложняется. В 1964 году М. М. Джрбашян и А. А. Китбальян [1] построили системы рациональных функций, обобщающих полиномы Чебышёва I и II рода. В работе [2] получена ортогональная система рациональных функций, обобщающая многочлены Якоби с весом $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$. Вместо рядов Тейлора здесь использовалось разложение по системе рациональных функций Такенака —

Мальмквиста

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha_n}z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где последовательность $\{\alpha_k\}_{k=0}^{+\infty}$ такая, что $\alpha_0 = 0$, $|\alpha_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$.

В настоящей работе этот метод применяется к построению обобщения многочленов Лежандра.

Функции, обобщающие многочлены Лежандра, определим с помощью формулы

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \overline{\varphi_n(z)} \frac{dz}{z},$$

где Γ — окружность $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$, такая, что $|\alpha_k| < \rho$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Получено явное представление функций $L_n(x)$. Показано, что $L_n(x)$ являются рациональными функциями от $\sqrt{1-2x\alpha_k+\alpha_k^2}$. Используя возможности математических пакетов, изучены некоторые свойства указанных функций.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбачян М. М., Китбалян А. А. Об одном обобщении многочленов Чебышева // Докл. АН АрмССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.
2. Ровба Е. А. Об одной ортогональной системе рациональных функций и квадратурах типа Гаусса // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. 1998. № 3. С. 31–35.

Т. В. Родионов (Москва)

ttvvrr@yandex.ru

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ И В L^p РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЁННОЙ T -СИСТЕМЕ ХААРА ¹

Классическая ортогональная система Хаара на отрезке $[0, 1]$ состоит из кусочно-постоянных функций, определяемых своими значениями на интервалах вида $((j-1)2^{-k}, j2^{-k})$, концами которых являются двоично-рациональные точки $j2^{-k}$, $j = 1, \dots, 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Т. П. Лукашенко предложил аналогичную систему, в определении которой используется произвольный счётный набор точек [1].

Пусть $T = \{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность попарно различных точек отрезка $[0, 1]$ с $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Положим $\alpha_n = \max\{t_m \mid t_m < t_n, m < n\}$, $\beta_n = \min\{t_m \mid t_m > t_n, m < n\}$ и определим *обобщённую T -систему Хаара* $\Phi_T = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом: $\varphi_1(x) = 1$ при $x \in$

¹Работа поддержана грантами НШ-3682.2014.1 и РФФИ 14-01-00417.

$[0, 1]$, а для $n = 2, 3, \dots$ полагаем

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta_n - t_n}}{\sqrt{(t_n - \alpha_n)(\beta_n - \alpha_n)}}, & \text{при } x \in (\alpha_n, t_n), \\ -\frac{\sqrt{t_n - \alpha_n}}{\sqrt{(\beta_n - t_n)(\beta_n - \alpha_n)}}, & \text{при } x \in (t_n, \beta_n), \\ 0, & \text{при } x \in (0, 1) \setminus [\alpha_n, \beta_n]. \end{cases}$$

Значения функций в концах отрезка определяются по непрерывности, а в точках разрыва — как полусумма пределов слева и справа.

В дальнейшем предполагаем, что T плотна в $[0, 1]$, т.е. для любых точек t_n, t_m с $t_n < t_m$ существует точка $t_k \in (t_n, t_m)$. Тогда на ортогональную систему Φ_T переносятся некоторые свойства системы Хаара, например, полнота, равномерная сходимости ряда Фурье всякой непрерывной функции [2], а также следующая

Теорема. Пусть $p \in [1, \infty)$ и $f \in L^p[0, 1]$. Тогда ряд Фурье функции f по системе Φ_T сходится к f почти всюду и в норме L^p . При этом для мажоранты $S^*(f, x)$ частных сумм ряда верны оценки $\|f\|_p \leq \|S^*(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p$ ($p > 1$) и $\mu\{x \in (0, 1) \mid S^*(f, x) > y\} \leq \frac{C}{y} \|f\|_1$ ($y > 0$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лукашенко Т. П. Рекурсивные ряды Фурье–Стилтьеса // Совр. пробл. теории ф-ций и их прил.: Мат. 16-й зимн. школы. Саратов, 2012. С. 108.
2. Плужникова А. А., Родионов Т. В. Об одном аналоге системы Хаара // Совр. пробл. . . . : Мат. 17-й зимн. школы. Саратов, 2014. С. 212–214.

А. И. Рубинштейн (Москва)

rubinshtein_aleksandr@mail.ru

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ И РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ ДВОИЧНОЙ ГРУППЫ

Для действительнзначных функций, определенных на двоичной группе $G = \{x = (x_1, x_2, \dots), x_k \in \{0, 1\}\}$ с групповой операцией $x \dot{+} y = (x_1, x_2, \dots) \dot{+} (y_1, y_2, \dots) = z = (z_1, z_2, \dots)$, где $z_k = (x_k + y_k) \pmod{2}$ справедливы, например, следующие утверждения:

Теорема 1. а) Для любого модуля непрерывности ω на G , то есть $\omega = \{\omega_n\} \searrow 0$ существует функция $f_\omega(x) : G \rightarrow \mathbb{R}$ из $H^\omega(G) = \{f(x) : |f(x \dot{+} h) - f(x)| \leq C_f \cdot \omega_n, h \in U_n = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\}\}$, для которой при всех $x \in G$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n^{-1}) \sup_{h \in U_n} |f(x \dot{+} h) - f(x)| \geq C' > 0$;

б) если $\sum_{k=t+1}^{\infty} \omega_k \leq q \cdot \omega_t$, $0 < q < 1$, $t = 0, 1, \dots$, то при всех $x \in G$ и $h \in U_t \setminus U_{t+1}$ $|f_\omega(x \dot{+} h) - f_\omega(x)| \geq 2(1 - q)\omega_t$.

Теорема 2. Для любой последовательности $\omega = \{\omega_n\} \searrow 0$, то есть произвольного модуля непрерывности в $H_p^\omega(G) = \{f(x) : \sup_{h \in U_n G} \int |f(x \dot{+} h) - f(x)|^p dx \leq \omega_n\}$

$f(x)|^p d\mu(x) \leq C_f \cdot (\omega_n)^p, 1 \leq p < \infty, n = 0, 1, \dots\}$ существуют такие $f_\omega(x) \in H_p^\omega(G)$ и $\{k(l)\}_{l=0,1,\dots}$, что при всех $m = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, $g_m^{(k)} = ((m)_{(2)}, 0, 0, \dots)$, $k \in \{k(l)\}$, $h \in U_k \setminus U_{k+1}$

$$\begin{aligned} & (\omega_k)^{-p} \int_{U_k + g_m^{(k)}} |f_\omega(x+h) - f_\omega(x)|^p d\mu(x) \geq \\ & \geq C \cdot 2^{-k} \int_G |f_\omega(x+h) - f_\omega(x)|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — система понтрягинских характеров группы G — система Уолша в нумерации Пэли. Имеет место

Теорема 3. Если ρ_{s-1} — число номеров $n_s \in [2^{s-1}, 2^s)$, $s = 1, 2, \dots$ таких, что $\left| \int_G f(x) w_{n_s}(x) d\mu(x) \right| \geq C \omega_{s-1}^{(2)}(f)$, где $f(x) \in H_2^\omega(G)$, то $\rho_{s-1} \leq 2^{-1} C^{-2}$.

Некоторые аналогичные результаты для тригонометрической системы автор установил в [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рубинштейн А. И. Об ω -лакунарных рядах и о функциях классов H^ω // Матем. сборник, 1964. Т. 65, вып. 2. С. 239–271.

Р. С. Сакс (Уфа)

romen-saks@yandex.ru

РЯДЫ ФУРЬЕ ОПЕРАТОРА РОТОР И ПРОСТРАНСТВА СОВОЛЕВА

Автор изучает свойства операторов ротор и градиент дивергенции в произвольной ограниченной области G с гладкой границей Γ , их спектральные разложения и краевые задачи.

Доказано, что в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ имеются подпространства $\mathbf{V}^0(G)$ и $\mathcal{A}_\gamma(G)$, в которых операторы ротор и градиент дивергенции являются самосопряженными. Откуда вытекает ортогональность собственных функций каждого из операторов в этих подпространствах и полнота совокупной системы в $\mathbf{L}_2(G)$.

Найдены необходимые и достаточные условия на $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(B)$ и $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma(B)$, при которых их ряды Фурье сходятся в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$. Методом Фурье при любых λ решена краевая задача для системы $\mathbf{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}$ в шаре B с условием $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0$. Имеются приложения [3, 4, 5].

Список литературы

[1] О.А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

- [2] Y.Giga, Z.Yoshida *Remark on spectra of operator rot.* // Math. Z. 1990. V. 204. P. 235–245.
- [3] Р.С. Сакс, *Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве* // Теоретическая и математическая физика 2010. Т. 162, No. 2, С. 196–215.
- [4] Р.С. Сакс *Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье* // Уфимский математический журнал 2011. Т. 3, No. 1, С. 53–79.
- [5] Р.С. Сакс, *Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса* Уфимский математический журнал 2013 Т. 5 №2 63–81

А. Ю. Трынин (Саратов)

atrynin@gmail.com

СИНК-АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ ¹

Поставим в соответствие каждой, принимающей конечные значения на множестве $x_{k,n} = \frac{\pi k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, функции f целую функцию LT_n по следующему правилу

$$\begin{aligned}
 LT_n(f, x) = & \cos nx \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ f(x_{k,n}) - \frac{(f(\pi) - f(0))k}{n} - f(0) \right\} \frac{\sin nx}{nx - k\pi} - \\
 & - \sin nx \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{f(x_{k+1,n}) + f(x_{k,n})}{2} - \frac{(f(\pi) - f(0))(2k+1)}{2n} - f(0) \right\} \times \\
 & \times \frac{\cos nx}{nx - (k + \frac{1}{2})\pi} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0).
 \end{aligned}$$

Значения этого оператора, также как и классических синк приближений

$$\begin{aligned}
 L_n(f, x) = & \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
 = & \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{1}
 \end{aligned}$$

интерполируют приближаемую функцию, т.е. для любых $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ $f(x_{k,n}) = LT_n(f, x_{k,n})$. Тем не менее, по сравнению с классическими синк-аппроксимациями (1), он существенно менее чувствителен к отсутствию гладкости приближаемой функции. Второе слагаемое компенсирует нежелательный «резонанс», в случае его появления, при аппроксимации негладких функций.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Теорема 1. Для любой непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции f справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - LT_n(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} = 0.$$

С. Н. Ушаков (Воронеж)
ushakowww@ya.ru

О КОНСТАНТАХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ НЕКОТОРЫХ ПОДСИСТЕМ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Системы функций вида $f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x) = \exp\left(-\frac{(x-k\omega_1)^2}{2}\right) e^{i m \omega_2 x}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ называются когерентными состояниями [1]. Нас интересуют их линейные комбинации $F(\omega_1, \omega_2, x) = \sum_{k,m} c_{k,m} f_{k,m}(\omega_1, \omega_2, x)$ (индексы в суммах здесь и в дальнейшем меняются от $-\infty$ до $+\infty$). Через u_F обозначим константу неопределённости [2, стр. 49], [3, стр. 103] для $F(\omega_1, \omega_2, x)$. Эта характеристика позволяет оценить локализованность функции как в частотной, так и во временной областях.

Теорема. Пусть выполнены условия

$$\omega_1 \omega_2 = 4\pi N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad c_{k,m} = c_k^{\omega_1} \cdot c_m^{\omega_2}, \quad c_k^{\omega_1} = c_{-k}^{\omega_1}, \quad c_m^{\omega_2} = c_{-m}^{\omega_2}.$$

$$c_{km} = O((k^2 + m^2)^{-1-\varepsilon}), \quad c_k = O(k^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

тогда верна формула

$$u_F = \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} + \omega_1^2 \frac{D_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_1^2}{4} \frac{C_{\omega_1}}{A_{\omega_1}} - \frac{\omega_2^2}{4} \frac{C_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} + \omega_2^2 \frac{D_{\omega_2}}{A_{\omega_2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$A_w = \sum_l q_l^w a_l^w, \quad C_w = \sum_l l^2 q_l^w a_l^w, \quad D_w = \sum_l q_l^w d_l^w,$$

$$a_l^w = \sum_{k'} c_{l+k'}^w c_{k'}^w, \quad d_l^w = \sum_{k'} k'^2 c_{l+k'}^w c_{k'}^w, \quad q_l^w = \exp\left(-\frac{l^2 w^2}{4}\right).$$

Замечание. Верхние индексы в коэффициентах означают зависимость от соответствующих параметров.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов. Курс лекций М. : МИР, 1966. 178 с.
2. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
3. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.

Л. П. Фалалеев, Г. К. Василина (Алматы, Казахстан)
v_gulmira@mail.ru
**О БИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ, РАЗРЕЖЕННЫХ
ПО ЛАКУНАМ**¹

Пусть $Bi(f, r, x)$ — бигармонический оператор [1,2], $D(f, r, x)$ — оператор, построенный по его суммам Фурье S_{n_k} , имеющим степенной порядок роста, $n_k = [k^\gamma]$, $k = 0, 1, \dots, N$, $[y]$ — целая часть y , $\gamma > 1$, Z_α — класс Зигмунда ($0 < \alpha \leq 2$).

Теорема 1. При $r \rightarrow 1-$ справедливы оценки ($0 < r < 1$)

$$\sup_{f \in Z_\alpha} \|f(x) - D(f, r, x)\|_{C_{2\pi}} = \begin{cases} O((1-r)^\alpha), & 0 < \alpha < \frac{1}{2\gamma}, \\ O(\sqrt{(1-r) \ln \frac{1}{1-r}}), & \alpha = \frac{1}{2\gamma}, \\ O(\sqrt{1-r}), & \frac{1}{2\gamma} < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

причем первая оценка точна по порядку.

Использование различных модификаций методов В.А. Баскакова для дискретных способов суммирования на классе Зигмунда при $\gamma = 1$ приводит к следующим результатам

$$\sup_{f \in Z_\alpha} \|f(x) - Bi(f, r, x)\|_{C_{2\pi}} = \begin{cases} O((1-r)^\alpha), & 0 < \alpha < \frac{3}{2}, \\ O(\sqrt{\ln \frac{1}{1-r}} (1-r)^{\frac{3}{2}}), & \alpha = \frac{3}{2}, \\ O((1-r)^{\frac{3}{2}}), & \frac{3}{2} < \alpha \leq 2, \end{cases}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Stark E. L. Nikolskii-Konstanten und Approximationsmaße im Hilbert-Raum. RWTH Aachen. 1978. 146 p.
2. Фалалеев Л. П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: материалы Всесоюзного симпозиума «Наука». Алма-Ата, 1976. С. 163–167.

¹Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ Комитета науки МОН РК.

Д. В. Фуфаев (Москва)

fufaevdv@rambler.ru

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ СЛУЧАЙ РЕГУЛЯРНОСТИ В
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ¹

Пусть $f(x) \in L^1([0, 1]^N)$. Ее неопределенным интегралом назовем функцию множества: $F(I) := \int_I f(x)dx$. В дальнейшем в качестве множеств

будем рассматривать брусы, т.е. множества вида $(a^1; b^1) \times \dots \times (a^N; b^N)$. Скажем, что система брусом $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, покрывающая $[0, 1]^N$ в смысле Витали, регулярна, если существует такое число $L > 0$, что для любого бруса $\Delta = (a^1; b^1) \times \dots \times (a^N; b^N)$, $\Delta \in \Xi$, справедливо неравенство: $\frac{\max\{b^1-a^1, \dots, b^N-a^N\}}{\min\{b^1-a^1, \dots, b^N-a^N\}} \leq L < \infty$.

Пусть $\mathbb{R}^N = \prod_{j=1}^D \mathbb{R}^{M_j}$, и P_j — ортогональный проектор на подпространство $\mathbb{R}^{M_j}$. Назовем систему Ξ D -регулярной, если регулярна каждая из систем $P_j(\Xi)$.

Теорема 1. Пусть $f \cdot \ln^{D-1}(|f| + 1) \in L^1([0, 1]^N)$, $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\Delta_k \subset [0, 1]^N$ — D -регулярная система брусом. Тогда

$$\lim_{\substack{\text{diam} \Delta \rightarrow 0 \\ x \in \Delta \in \Xi}} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(y)dy = f(x)$$

для почти всех $x \in [0, 1]^N$, где $|\cdot|$ — мера Лебега.

Случаи $D = 1$, N — теоремы Лебега и Иессена-Марцинкевича-Зигмунда соответственно (см. [1, гл. IV §6] и [1, гл. IV §13]).

Назовем мультииндекс $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ возрастающим ограниченно, если $\sup_{1 \leq i, j \leq N} \frac{n_i}{n_j} \leq L < \infty$, $\min_{1 \leq i \leq N} n_i \rightarrow \infty$, и возрастающим D -ограниченно, если (при подходящей перестановке координат) все мультииндексы $P_j(\mathbf{n})$ возрастают ограничено.

Теорема 2. Пусть $f \cdot \ln^{D-1}(|f| + 1) \in L^1([0, 1]^N)$. Тогда кратный ряд Фурье-Хаара по системе $\chi_{\mathbf{n}}(x) := \chi_{n_1}(x_1) \dots \chi_{n_N}(x_N)$ (см. [2]) суммируется D -ограниченно к f почти всюду на $[0, 1]^N$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сакс С. Теория интеграла. М.: Изд. «Факториал Пресс», 2004. 496 с.
2. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Изд. ЛКИ, 2008. 352 с.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ 14-01-00417 и НШ 1096.2014.1.

Ю. Х. Хасанов (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru
**ОБ ОТКЛОНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ
ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
ОТ ИХ ЗНАЧЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ**

Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция. В работе доказывается, что существует гармоническая регулярная и непрерывная для $\sigma \geq 0$ функция $U(\sigma, x)$, которая совпадает с $f(x)$ при $\sigma = 0$ и удовлетворяет равномерно условию

$$\|U(\sigma, x)\|_B = \sup_x |U(\sigma, x)|,$$

где

$$U(\sigma, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sigma}{\sigma^2 + (t-x)^2} dt \quad (\sigma > 0).$$

За меру отклонения функции $U(\sigma, x)$ от ее граничных значений $f(x)$ примем величину

$$\Delta(f; \sigma)_B = \|U(\sigma, x) - f(x)\|_B.$$

Отметим прежде всего некоторые свойства величины $\Delta(f; \sigma)_B$.

Если $U(\sigma, x)$ гармоническая функция и имеет своими граничными значениями функцию $f(x) \in B$, то

$$\Delta(f; \sigma_1 + \sigma_2)_B \leq \Delta(f; \sigma_1)_B + \Delta(f; \sigma_2)_B,$$

$$\Delta(f; n\sigma)_B \leq n\Delta(f; \sigma)_B,$$

где n — любое натуральное число.

Далее приводим утверждение, которое обеспечивает возможность оценивать поведение величины $\Delta(f, \sigma)_B$ в зависимости от свойств их граничных значений $f(x) \in B$. В качестве характеристики свойств граничных функций рассматриваются модули непрерывности.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция. Тогда справедлива оценка

$$\Delta(f, \sigma)_B \leq C\sigma \left\{ 1 + \int_0^1 \frac{\omega_k(f; t)}{t^2} dt \right\},$$

где C не зависит от σ .

И. А. Шакиров, М. Г. Ахмадиев (Казань)
iskander@tatngpi.ru
ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ
ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СЕМЕЙСТВУ
ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

В работах [1, 2] найдены явные виды функции Лебега, соответствующие семейству интерполяционных полиномов Лагранжа:

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{ctg} \frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right) \quad (c = 0); \quad (1)$$

$$\lambda_n^c(t) = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n} \sum_{k=n^*+1}^n \left(c - \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right) \quad (c > 0), \quad (2)$$

где $n^* = [(2n/\pi) \operatorname{arccctg} c]$, $[z]$ - целая часть числа z . В математической литературе для функции Лебега $\lambda_n^*(t)$ известно асимптотическое равенство вида $\lambda_n^* \cong (2/\pi) \ln n \sin nt + O(1)$ ($t \in T, n \rightarrow \infty$).

Используя явные виды (1) и (2) функции Лебега, в данной работе найдены асимптотические равенства, не содержащие неопределенную константу $O(1)$:

$$\begin{aligned} \lambda_n^* \cong 1 + \frac{2}{\pi} \ln n \sin nt, \quad \lambda_n^c(t) \cong 1 + \left[\frac{2}{\pi} \ln n + \left(1 + \frac{1}{2n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\pi} \operatorname{arccctg} c \right) \cdot c - \frac{1}{\pi} \ln(1 + c^2) - \frac{c}{\pi} t \right] \sin nt \quad (t \in T, c \geq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

В важном с точки зрения приложений случае интерполирования заданной функции $x(t) \in C[0, 2\pi]$ (т.е. при $c = 1$) для фундаментальной характеристики (2) верно следующее более простое асимптотическое равенство:

$$\lambda_n^1(t) \cong 1 + \left[\frac{2}{\pi} \ln n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{\pi} \ln 2 - \frac{1}{\pi} t \right] \sin nt \quad (t \in T) \quad (4)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // Известия вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88.
2. *Шакиров И. А.* О функциях Лебега, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа // Известия вузов. Математика. 2013. № 7. С. 77–89.

В. И. Щербаков
ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ СХОДИМОСТЯМИ РЯДОВ
ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЕННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА
И УОЛША (ПРАЙСА)

Пусть $p_0 = 1$; $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod_{k=0}^n p_k$; ($n = 0, 1, 2, \dots$) Обозначим через $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — систему Прайса [1] и через $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — обобщённую систему Хаара [3]; [4] и [5], упорядоченную согласно [7]. Можно показать, что мажоранты их ядер Дирихле, полученные Н. Я. Виленкиным [2] и В. И. Щербаковым (в [6] эта мажоранта обозначена как $q(t)$) идентичным со сходными оценками сверху и совершенно одинаковыми оценками снизу. В связи с этим В. А. Скворцов на одном из семинаров в МГУ по ортогональным и тригонометрическим рядам поставил вопрос: не будут ли сходимости рядов Фурье по этим системам одинаковыми в случае $\sup_n p_n = \infty$ либо хотя бы для достаточно быстро растущих последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. Тем более, что если $p_{n+1} \sim m_n$ ($n \rightarrow \infty$, то признаки сходимости Дини-Липшица [7] (соответствующими оценками снизу) у них совпадают.

Однако полного слияния между сходимостями рядов Фурье по этим системам не происходит ни при каких $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. Имеют место следующие теоремы

Теорема 1 Для любых $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ из сходимости рядов Фурье от некоторой интегрируемой функции по обобщённой системе Хаара следует сходимость её ряда Фурье по соответствующей системе Прайса.

Теорема 2 Для любых $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой по обобщённой системе Хаара сходится, а по соответствующей системе Прайса (в той же точке) расходится.

Отметим, что имеет место и

Теорема 3 Для любых $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ с $\sup_n p_n = \infty$ найдётся непрерывная функция, ряд Фурье которой по обобщённой системе Хаара расходится в некоторой точке.

Известно также (см., напр. [4]), что в случае $\sup_n p_n < \infty$ по обобщенной системе Хаара от любой непрерывной функции сходится к ней равномерно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] J. J. Price Certain groups of orthonormal step functions
Canadian Journal Mathematic v. 9 № 3, 1957 у., р. 417–425.
- [2] Н. Я. Виленкин: Об одном классе полных ортонормальных систем,
Известия АН СССР, серия математика т. 11, № 4 1947, С. 363–400.
- [3] Haar A Zur Theorie der Orthogonalischen Functionsysteme,
Mathematischen Annalen, b. 69, 1910 у., 331–371.

- [4] *Б. И. Голубов, А. И. Рубинштейн* : Об одном классе систем сходимости, Математический сборник, Новая серия, т. 71, вып. 1, 1966, С. 96–115.
- [5] *Б. И. Голубов*: Об одном классе полных ортонормальных систем, Сибирский математический журнал, т.IX, № 2, 1968 г., С. 297–314.
- [6] *В. И. Щербаков*: О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам Вестник МГУб серия: математика, механика. № 2, 1983 г., С. 37–42.
- [7] *В. И. Щербаков*: Признак Дини-Липшица по обобщённой системе Хаара, Современные проблемы теории функций и их приложения, материалы 17-й Международной Саратовской зимней школы, посвящённой 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова, Саратов, 27-е января–3-е февраля 2014-го года, Саратов, СГУ, 2014, С. 307–308.
- [8] *В. И. Щербаков*: О рядах Фурье по обобщённым системам Хаара и Уолша, «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Материалы Воронежской Зимней математической школы, Воронеж, ВГУ, 2013 г., С. 294–295.

Секция I
Дифференциальные
уравнения

А. И. Вагабов (Махачкала)
 algebra-dgu@mail.ru
**АСИМПТОТИКА ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ
 ЛИНЕЙНЫХ ОДУ N -ГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ W_P^N**

Рассматривается уравнение

$$\sum_{k_0+k_1 \leq n, k_0 < n} \lambda^{k_0} A^{k_0 k_1}(x) \frac{d^{k_1} y}{dx^{k_1}} - \lambda^n y = 0, \quad a < x < b. \quad (1)$$

$\frac{dA^{k_0 k_1}(x)}{dx}$ при $k_0 + k_1 = n$ и $A^{k_0 k_1}(x)$ при $k_0 + k_1 < n$ функции класса $L_p(a, b)$, $p > 1$. φ – корни уравнения

$$A^{0n}(x)\varphi^n + A^{1,n-1}(x)\varphi^{n-1} + A^{n-1,1}(x)\varphi - 1 = 0 \quad (2)$$

различны при всех x , отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x . Согласно этим условиям – плоскость разбивается на конечное число секторов S , с центром в начале, внутри каждого из которых при определенной нумерации φ -корней справедливы неравенства $Re\lambda\varphi_1 \leq Re\lambda\varphi_2 \leq \dots \leq Re\lambda\varphi_n$.

Теорема. В каждом из указанных секторов S уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений аналитическую по $\lambda \in S$, принадлежащую классу $W_P^n(a, b)$ и имеющую известное асимптотическое по λ представление

$$\frac{d^{k-i} y_i(x, \lambda)}{dx^{k-i}} = \lambda^{k-i} \exp\left(\lambda \int_a^x \varphi_i(\xi) d\xi\right) \left\{ \varphi_i^{k-i}(x) \eta_i + E_{ki}(x, \lambda) \right\}, k, i = \overline{1, n}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вагабов А. И. Об асимптотике по параметру решений дифференциальных систем с коэффициентами из класса L_q // Дифференц. ур-я. 2010. Т. 46, № 1. С. 16–22.

Э.Л. Газиев (Симферополь)

egaziev@list.ru

**О ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ
СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ С ИСКОМЫМ
ПАРАМЕТРОМ В УРАВНЕНИИ И УСЛОВИИ НА
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ ¹**

Изучается спектральная задача, возникающая в проблеме малых движений гидросистемы «идеальная жидкость–баротропный газ» в сосуде с твердой стенкой (см. [1]). На стенке должны удовлетворяться краевые условия типа Неймана, а на границе раздела жидкости и газа (поверхности Γ) — граничные условия типа Ньютона. Искомый спектральный параметр содержится в уравнении для области, занимаемой газом, и в граничном условии на Γ . В отличие от [2] рассматривается случай, когда поверхность Γ не является горизонтальной, поскольку угол смачивания δ на контуре смачивания, т.е. границе контакта "газ–жидкость–стенка", не равен прямому ($\delta \neq \pi/2$).

Предполагается, что гидросистема статически устойчива по линейному приближению, т.е. ее оператор потенциальной энергии является положительно определенным в некотором гильбертовом пространстве (см. [1], [3]). Введены определения обобщенных решений исследуемой задачи, установлены вариационные тождества для значений спектрального параметра. С использованием метода Ритца получено разложение искомого решения по специально выбранной системе функций, а именно пробными функциями являются собственные функции аналогичной задачи с горизонтальной Γ .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Газиев Э.Л., Копачевский Н.Д. Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–баротропный газ" // Украинский математический вестник. 2013. Т. 10, № 1. С. 16–53. (Translated: E. L. Gaziev, N. D. Kopachevsky. Small motions and eigenoscillations of a "fluid–barotropic gas" hydrosystem // Journ. of Math. Sciences (Springer). 2013. Vol. 192, No 4. P. 389–416.)

2. Газиев Э.Л. Собственные колебания гидросистемы "жидкость–газ" в цилиндрической области // Динамические системы. Симферополь, 2012. Т. 2(30), № 1–2. С. 3–22.

3. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.

¹ Автор благодарит Н.Д. Копачевского за постановку проблемы и внимание к работе.

Ю. А. Гладышев (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru
**О ИНТЕГРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ
ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА**

Обобщенные степени были введены Л. Берсом в 40-х годах XX века. В общем случае они определены на основе задания упорядоченного набора k линейных дифференциальных операторов $D_1, \dots, D_k$ (цикл операторов), имеющих правые обратные $I_1, \dots, I_k$ и непустые ядра, элементы которых названы обобщенными константами. Обобщенная степень Берса (ОСБ) [1] строится путем последовательного применения интегральных операторов I_k , так чтобы выполнялись правила дифференцирования, формально аналогичные правилам дифференцирования по обычному переменному x . В линейном пространстве L_B обобщенных степеней были введены многочлены и аналоги элементарных функций. В данном сообщении введены понятия скалярного произведения с весовой функцией, которая определена операторами D_k . Изучается простейший случай ОСБ с циклом второго порядка. Показано, что это скалярное произведение выражено через произведение ОСБ. Это дает возможность построить последовательность многочленов, выраженных как линейные комбинации ОСБ и ортогональные в пространстве L_B . В простейшем случае обычных операторов

$$D_1 = D_2 = \frac{d}{dx}$$

возвращаемся к полиномам Лежандра. Предложенный метод допускает различные обобщения. Найдены выражения скалярных произведений для функций определенных рядами ОСБ, формально аналогичным тригонометрическим и гиперболическим функциям. Эти интегралы дают возможность найти разложение в обобщенный ряд Фурье единым образом разложения по различным классам функций, типа функций Бесселя, Эрмита и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладышев Ю. А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложения // Калуга: КГУ, 2011. 201 с.

А. В. Глушак (Белгород)
aleglu@mail.ru
**ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ
АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ
ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ ¹**

Корректная постановка начальных условий для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad k > 0,$$

состоит в задании начальных условий (см. [1])

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0.$$

Если первое из начальных условий заменить на нелокальное условие вида

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{\nu, \beta} u(t) = u_1, \quad \nu = \frac{k-1}{2}, \quad \beta > 0$$

или вида

$$\lim_{t \rightarrow 1} I_{0+}^{\beta} u(t) = u_2, \quad \beta > 0,$$

где $I_{\nu, \beta}$ — оператор Эрдейи-Кобера (см. [2, § 18]) и I_{0+}^{β} — левосторонний интеграл Римана-Лиувилля (см. [2, § 2]), то такая задача, вообще говоря, не является корректной. В работе устанавливаются условия, налагаемые на оператор A и элементы u_1, u_2 , обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя // ДАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 587 – 589.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987. 688 с.

Р. З. Гумбаталиев, Ф. А. Кулиева (Баку, Азербайджан)
rovshangumbataliev@rambler.ru
**О НЕКОТОРЫХ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В
ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$P(d/dt)u(t) \equiv -\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 A^2 u + A_0 \frac{d^2 u}{dt^2} + A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u = f(t), \quad (1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00378 А-2013)

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

где $f(t)$ и $u(t)$ — вектор-функции, определенные почти всюду в R_+ , со значениями из H , производные понимаются в смысле теории распределений, A, A_0, A_1, A_2 — линейные операторы в H , $\omega^2 > 0$. Предположим, что операторы $B_j = A_j A_j^{-1}$ ($j = \overline{0, 2}$) ограниченные операторы в H .

Определение 1. Если $f(t) \in L_{2,\gamma}(R; H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(R; H_2)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+ и краевому условию (2) в смысле сходимости $\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_{3/2} = 0$, то вектор-функцию $u(t)$ будем называть регулярным решением задачи (1), (2). Если при любом $f(t) \in L_{2,\gamma}(R; H)$ существует регулярное решение задачи (1), (2) $u(t)$, для которого выполняется оценка $\|u(t)\|_{W_{2,\gamma}^2(R_+; H_2)} \leq \text{const} \|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H)}$, то задачу (1), (2) будем называть регулярно разрешимой.

Имеет место

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq \mu_0 E$ ($\mu_0 > 0$), операторы $B_j = A_j A_j^{-1}$ ($j = \overline{0, 2}$) ограничены в H и $|\gamma| < \mu_0$ и имеет место неравенство $K(\omega\gamma, \mu_0) = C_2(\omega\gamma, \mu_0) \|B_0\| + C_1(\omega\gamma, \mu_0) \|B_1\| + C_0(\omega\gamma, \mu_0) \|B_2\| < 1$, где

$$C_2(\omega\gamma, \mu_0) = \frac{\omega^2 \mu_0^2}{\omega^2 \mu_0^2 - \gamma^2}, \quad C_1(\omega\gamma, \mu_0) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \mu_0^2 - \gamma^2},$$

$$C_0(\omega\gamma, \mu_0) = \left(1 + \frac{\omega^2 \mu_0^2 \gamma^2}{(\omega^2 \mu_0^2 - \gamma^2)^2}\right)^{1/2}.$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

О. Ю. Данилова (Воронеж)

danilova_olga@hotmail.com

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КАРМАНА

Равновесные конфигурации продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае прямоугольной пластины описываются уравнениями Кармана [1]:

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2} [w, w] = 0 \quad (1)$$

при краевых условиях

$$\Delta w = w = \Delta \varphi = \varphi = 0 \mid_{\partial \Omega_a}. \quad (2)$$

Рассмотрен случай двухмодового вырождения, ранее исследованный в работах [2,3].

Применяется метод, основанный на функционально-аналитическом подходе, в соответствии с которым равновесия пластины отвечают точкам локального минимума функционала полной энергии пластины на некотором пространстве функций E .

Исследование такой задачи посредством одной из схем конечномерной редукции (схемы Ляпунова-Шмидта [4]) сводится к анализу поведения (ключевой) функции двух переменных, представляющей собой возмущение функции с особенностью двумерной сборки, четной по каждой переменной. Описаны bif-расклады для ключевой функции.

Наличие интегрального ограничения в этой схеме приводит к необходимости исследования функционала в окрестности краевой вырожденной критической точки [5] (то есть критической точки, лежащей на крае области $\{\int_{\Omega_a} \omega w dx dy \geq 0\}$). Описаны bif-расклады ключевой функции при наличии края.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехиздат. 1956.
2. *Holder E. J., Schaeffer D.* Boundary conditions and mode jumping in the Karman Equations// SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. N 3. P. 446 – 457.
3. *Сапронов Ю. И.* Двумодовая бифуркация решений уравнения Кармана// Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №6. С. 1078 – 1081.
4. *Сапронов Ю. И.* Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 101 – 132.
5. *Арнольд В. И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН. 1978. Т. 33, вып. 5(203). С. 91 – 105.

В. Б. Дыбин, Е. В. Бурцева, С. В. Козинкова (Ростов-на-Дону)

vladimir-dybin@yandex.ru

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА СОСТАВНЫХ КОНТУРАХ

Результаты данного обзора получены в рамках научного направления «Особенности представления единицы и сингулярные интегральные уравнения», анонсированного в 2012г. на XX Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» [1].

Построена конструктивная теория односторонней обратимости нётерова сингулярного интегрального оператора Римана в весовых пространствах Лебега на составных плоских контурах, являющихся объединением конечного числа непересекающихся замкнутых кривых (или прямых). Ориентация контура задана таким образом, что сингулярный интегральный оператор Коши, представляемый матрицей с операторными элементами, является инволюцией.

Алгебра символов состоит из функциональных векторов конечного порядка, элементы которых принадлежат некоторой распадающейся алгебре непрерывных функций, определённой на компонентах контура. Факторизация символа строится на основе факторизации его элементов на простых контурах.

Построено матричное операторное исчисление, обеспечивающее факторизацию оператора Римана. Вслед за этим строится теория его односторонней обратимости с предъявлением конструкций обратных операторов, дефектных подпространств, вычислением их размерностей и индекса оператора.

План.

1. Оператор Римана в области с конечным числом «дыр».
2. Оператор Римана на конечной системе концентрических окружностей.
3. Оператор Римана на паре параллельных прямых.

Приложения. Системы дискретных уравнений типа свёртки в пространствах последовательностей, суммируемых с показательными весами. Оператор Римана на системе окружностей, имеющих общую касательную в фиксированной точке.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Дыбин В. Б.* Особенности представления единицы и сингулярные интегральные уравнения с аналитическими символами. Тезисы докладов «XX Международной конференции Математика. Экономика. Образование». Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2012. С. 52–54.

2. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на системе концентрических окружностей и его приложения к одному классу систем уравнений в дискретных свёртках. Вестник Воронежского ГУ, Серия: Физика, Математика. №2/ 2012, С. 109–117.

3. *Козинкова С. В.* Сингулярный интегральный оператор на паре параллельных прямых. Магистерская диссертация. ЮФУ, Ростов н/Д, 2013, 61 с.

А. А. Елеуов, Н. Б. Закариянова, Р. А. Елеуова
(Алматы, Казахстан) eleuov@mail.ru
**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ
ПОРЯДКОВ НА ОТРЕЗКЕ**

В настоящей статье изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающимися граничными условиями. В данной работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализа для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающиеся граничные условия. Таким образом, результаты настоящей статьи

охватывают как распадающиеся так и нераспадающиеся граничные условия. Именно, в этом смысле основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [1], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

Вначале приведем известные результаты по прямой задачи спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. В работе [2], изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциям дифференциального оператора, положенного функциональном пространстве $L_2[0, b]$ при $b < \infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly = l(y) = y^{(n)}(x) + P_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + P_0(x)y(x) \quad (1)$$

с единственным ограничением (1) резольвентное множество оператора L — ненулевое множество. Не умаляя общности, полагаем, что комплексное число 0 принадлежит резольвентному множеству оператора L . Коэффициенты выражения $l(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$P_0(x) \in C[0, b], P_1(x) \in C^1[0, b], \dots, P_{n-2}(x) \in C^{n-2}[0, b] \quad (2)$$

Согласно известной теореме М. Отелбаева [3] область определения такого оператора описывается с помощью набора n функций $l_1(\cdot), \dots, l_n(\cdot)$ из пространства $L_2[0, b]$.

Литература

1. **Садовничий В.А., Кангужин Б.Е.** *О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями* // ДАН СССР. 1982. 267, № 2. С. 310–313.
2. **Наймарк М.А.** *Линейные дифференциальные операторы* // М.: Наука. 1969. 528 с.
3. **Дезин А.А.** *Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач.* // Труды МИАН имени В. А. Стеклова. 2000. Т. 299. 175 с.
4. **Кангужин Б.Е.** *Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке* // Автореферат дисс. док. физ.-мат. н. 2005. Алматы. КазНУ имени аль-Фараби. 45 с.

А. Н. Зарубин (Орел)
aleks_zarubin@mail.ru
**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ С
ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА**

Уравнения смешанного эллиптического-гиперболического опережающе-запаздывающего типа с параллельными линиями вырождения

$$U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn} y(2h - y)U_{yy}(x, y) =$$

$$= [R_x^\tau H(x) + R_x^{-\tau} H(2\tau - x)][H((2h - y)(y - h))U(x, y - h) +$$

$$+ H(y(h - y))U(x, y + h) + H(y(y - 2h))U(x, 2h - y)], \quad (1)$$

$0 < \tau, h \equiv \text{const}$, $H(\xi)$ — функция Хевисайда; R_x^Θ — оператор сдвига по $x : R_x^\Theta q(x) = q(x - \Theta)$; рассмотрим в области $D = D^+ \cup D^- \cup I_0 \cup I_1$, где

$$D^+ = \{(x, y) : 0 < x < 2\tau, 0 < y < 2h\} = \bigcup_{k, n=0}^1 D_{kn}^+ \cup J_0 \cup J_1 \text{ и } D^- =$$

$$\bigcup_{k, n=0}^1 D_{kn}^- \text{ — эллиптическая и гиперболическая части области } D, \text{ причем}$$

$$D_{kn}^+ = \{(x, y) : k\tau < x < (k+1)\tau, nh < y < (n+1)h\} (k, n = 0, 1), D_{kn}^- =$$

$$\{(x, y) : (-1)^n(2nh - y) + k\tau < x < (-1)^n(y - 2nh) + (k+1)\tau, -2nh -$$

$$\tau/2 < (-1)^n y < -2nh\} (k, n = 0, 1), \text{ а } J_0 = \{(x, y) : x = \tau, 0 < y < 2h\},$$

$$J_1 = \{(x, y) : 0 < x < 2\tau, y = h\}, I_n = \bigcup_{k=0}^1 I_{kn}, \text{ где } I_{kn} = \{(x, y) : k\tau < x <$$

$$(k+1)\tau, y = 2nh\} (n = 0, 1).$$

$$\text{Пусть } D_{kn} = D_{kn}^+ \cup D_{kn}^- \cup I_{kn} (k, n = 0, 1) \text{ и } D_k = \bigcup_{n=0}^1 D_{kn} (k = 0, 1).$$

Задача Т. Найти в области D функцию $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J_0) \cap C^2(D \setminus (J_0 \cup J_1 \cup I_0 \cup I_1))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$U(0, y) = U(2\tau, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2h, U(x, 2nh - (-1)^n(x - k\tau)) = \psi_{kn}(x),$$

$$k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2 (k, n = 0, 1), \text{ условиям сопряжения}$$

$$U(x, 2nh+) = U(x, 2nh-) = \omega_n(x), \quad 0 \leq x \leq 2\tau (n = 0, 1),$$

$$U_y(x, 2nh+) = U_y(x, 2nh-) = \nu_n(x), \quad 0 < x < 2\tau, x \neq \tau (n = 0, 1),$$

условиям согласования $\psi_{0n}(0) = 0$ ($n = 0, 1$), где $\psi_{kn}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. Если функции $\psi_{kn}(x) \in C[k\tau, (2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau, (2k+1)\tau/2)$ ($k, n = 0, 1$), абсолютно интегрируемы на $[k\tau, (2k+1)\tau/2]$ ($k =$

$0, 1)$, $\psi'_{kn}(x)$ при $x \rightarrow k\tau$ ($k = 0, 1$) допускает интегрируемую особенность, $\psi_{0n}(0) = 0$, то существует единственное при $h \leq 1/2$, $\tau \leq 1/\sqrt{2}$ решение $U(x, y)$ задачи T .

Единственность решения задачи T следует из полученных в D^- и D^+ на $y = 2kh$, $0 < x < 2\tau$ ($k = 0, 1$) неравенств соответственно $\beta_k = (-1)^k \int_0^{2\tau} \omega_k(x) \nu_k(x) dx \geq 0$ ($k = 0, 1$) и $\beta_0 + \beta_1 \leq 0$, $\beta_0 + \beta_1 + \iint_{D^+} [(1 - 2\tau^2 H(x-\tau)) U_x^2(x, y) + (1 - 4h^2 H(\tau-x) H(y-h)) U_y^2(x, y) + U^2(x, y)] dx dy \leq 0$.

Вопрос **существования решения** задачи T в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_{00}$ редуцируется к разрешимости разностного уравнения $(1 + iR_x^{2ih})(\nu(x) + \int_0^x \nu(t) \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{t(x-t)}) dt) = q(x)$, где $q(x) \in C^1(0, \tau)$.

Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону)

lvnovikova@sfedu.ru

О БИФУРКАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ

Рассмотрим дисперсионное уравнение в вязкой среде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u x \dots x}_{2m+1} = \nu u_{xx} + \varepsilon u + \Phi(u) \quad (1)$$

в случае периодических граничных условий

$$u(x + 2\pi, t) \equiv u(x, t).$$

Нелинейность $\Phi(u)$ предполагаем принадлежащей классу M , так что имеет место представление

$$\Phi(u)_n = \sum_{p+q+k=n} \Phi_{p,q,k}^n u_p u_q u_k,$$

где $|\Phi_{p,q,k}^n| < C|n|$ для всех целых p, q, k, n и некоторого $C > 0$.

Считаем ν, ε функциями одного параметра $\delta > 0$: $\nu = \nu_0 \delta$; $\varepsilon = \varepsilon_0 \delta$; $\nu_0, \varepsilon_0 > 0$.

Теорема. Пусть выполнены неравенства $\varepsilon_0, \nu_0 > 0$, $\operatorname{Re} \Phi_0^n < \Phi_0^0 < 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда для любого натурального числа k найдутся постоянные $\xi_k, \delta_k > 0$ такие, что для $\delta \in (0; \delta_k)$ уравнение (1) имеет два стационарных асимптотически устойчивых решения $u_\delta^\pm \in W_k$, причем $\|u_\delta^\pm \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \delta}{\Phi_0^0}}\|_{W_k} < \xi_k \delta$.

Гладкость стационарных решений $u_\delta^\pm$, таким образом, тем лучше, чем меньше значение параметра $\delta > 0$.

А. П.Рябушко, И. Т.Неманова, Т. А.Жур,
И. П.Боярина, О. Л.Зубко (Минск, Беларусь)
olgazubko@tut.by
РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В КОСМОСЕ

Белорусской школой по проблеме движения тел в космосе *впервые* выведены и проинтегрированы уравнения движения (УД) в постньютоновском приближении специальной теории относительности и общей теории относительности в задаче двух тел, одно из которых является звездой массой M , а второе — пробное тело массой покоя m_0 . Уравнения движения следующие:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma M_1 x}{r^3} = F_1^1 + F_2^1 + F_\rho^1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma M_1 y}{r^3} = F_1^2 + F_2^2 + F_\rho^2, \quad (1)$$

$$F_1^1 = \frac{\gamma A v}{c r^3} (-2x \cos \alpha + y \sin \alpha), \quad F_1^2 = \frac{\gamma A v}{c r^3} (-2y \cos \alpha - x \sin \alpha), \quad (2)$$

$$F_2^1 = \frac{\gamma A v^2}{2 r^3 c^2} [Cx - 1.5y \sin 2\alpha] + \frac{\gamma M_1}{c^2} \left\{ \frac{Bx}{r^3} + \frac{4}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dx}{dt} \right\}, \quad (3)$$

$$F_2^2 = \frac{\gamma A v^2}{2 c^2 r^3} [Cy + 1.5x \sin 2\alpha] + \frac{\gamma M_1}{c^2} \left\{ \frac{By}{r^3} + \frac{4}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dy}{dt} \right\}, \quad (4)$$

$$F_\rho^1 = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho x + E \left[4 \frac{dx}{dt} D - x v^2 - \frac{11 \gamma M_1 x}{2r} + \frac{3 \gamma M_1 x}{R} + \frac{3 \gamma M_1 R^2 x}{r^3} \right], \quad (5)$$

$$F_\rho^2 = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho y + E \left[4 \frac{dy}{dt} D - y v^2 - \frac{11 \gamma M_1 y}{2r} + \frac{3 \gamma M_1 y}{R} + \frac{3 \gamma M_1 R^2 y}{r^3} \right], \quad (6)$$

где γ — ньютоновская постоянная тяготения; $M_1 = M - A$, A — редуцирующая масса звезды; c, v — скорости света и пробного тела; ρ — плотность среды; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $B = 4\gamma M_1/r - v^2$; $C = 3 - 4 \sin^2 \alpha$; $D = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$; $E = \frac{4\pi \rho \gamma}{3c^2}$. Интегрирование системы ДУ (1) методами Пуанкаре-Эйнштейна-Изенфельда с использованием (2)-(6) приводит к следующему уравнению орбиты пробного тела в полярных координатах:

$$1/\tilde{r} = (1 + \tilde{e} \cos \Phi)/\tilde{p}, \quad (7)$$

$$1/\tilde{p} = [1 + 2A\gamma\varphi/c\sqrt{\gamma M p} + 3A^2\gamma\varphi^2/(c^2 M p)]/p_1, \quad (8)$$

$$\tilde{e} = e_1 \left[1 - \frac{A\gamma\varphi}{2c\sqrt{\gamma M p}} - \frac{A^2\gamma\varphi^2}{8c^2 M p} + e(1 + 3\pi\gamma\rho p^2/c^2\varphi^2)/e_1 \right] \cdot \frac{\tilde{p}}{p_1}, \quad (9)$$

$$\Phi = [1 + 2\pi\rho p^3/M_1 - 3\gamma M_1/(c^2 p) + 21\pi\gamma\rho p^2/c^2 - 6\pi\gamma\rho p^3/(c^2 R)]\varphi. \quad (10)$$

С. В. Исраилов (Грозный)
segitov@mail.ru
**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ
СИСТЕМЫ ОДУ С ЧАСТИЧНО ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ
АРГУМЕНТОМ**

Рассматривается система вида

$$y'_i = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1(\Delta_1(x)), \dots, y_k(\Delta_k(x))), \quad i = \overline{1, n}, \quad k > n \quad (1)$$

относительно точек области D : $x \in [a, b]$, $|y_i(x)| \leq d_i$, $|y_j(\Delta_j(x))| \leq d_j^*$, $d_i > 0$, $d_j^* > 0$ — данные числа $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$, в предположении непрерывности функций f_i , $i = \overline{1, n}$, по фазовым координатам, считается, что по $x \in [a, b]$ точка a является общей точкой сингулярности для правых частей f_i , $i = \overline{1, k}$, и каждая правая часть f_i , $i = \overline{k+1, n}$, имеет свою точку сингулярности $x_i \in (a, b)$, $i = \overline{k+1, n}$, в смысле работы [1]. Функции $\Delta_j(x)$, $j = \overline{1, k}$, создают ситуацию запаздывания аргумента. Специфика системы (1) порождает граничные условия

$$\begin{cases} y_i(a) = \varphi_i(a), & x \in E_0, \quad i = \overline{1, k}, \\ y_i(x_i) = 0, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

где $E_0 = \bigcup_{j=1}^k E_0^{(j)}$, $E_0^j = E\{\Delta_j(x), \Delta_j(x) < a, x \geq a\} \cup a$ — начальное множество и $\varphi(x) = (\varphi_i(x))_{i=1}^k$, $\varphi_j(a) = 0$, $j = \overline{1, k}$, непрерывная на нем начальная вектор функция. Из (2), когда $k = n$, имеем начальную сингулярную задачу, при $k = 0$ получим задачу Николетти с сингулярностями. Для $k < n$ задача является новой.

Допускается возможность представления

$$f_i(x, y_1(x), \dots) = \Phi_{1i}(x, y_1(x), \dots) + \Phi_{2i}(x, y_1(x), y_i(x), \dots)y_i(x), \quad (3)$$

$i = \overline{1, n}$, причем функции Φ_{ki} , $k = 1, 2$, $i = \overline{1, n}$, таковы, что

$$\begin{aligned} \Phi_{2i}(x, y_1(x), \dots) \operatorname{sign}(x - x_i) &\leq \psi_0(x), \\ |\Phi_{1i}(x, y_1(x), \dots)| &\leq \psi_0(x), \quad i = \overline{1, \ell}, \quad \ell \leq n, \\ \Phi_{2i}(x, y_1(x), \dots) \operatorname{sign}(x - x_i) &\geq \psi_i(x), \\ |\Phi_{1i}(x, y_1(x), \dots)| &\leq \varphi_i(x), \quad i = \overline{\ell+1, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) $\psi_0(x)$, $\varphi_0(x)$ непрерывны и суммируемы на $[a, x_i]$, $(x_i, b]$, и $\ell \leq n$. Функции $\psi_i(x)$ — положительные несуммируемые, непрерывные на $[a, x_i) \cup (x_i, b]$, а непрерывные на этом же множестве функции $\varphi_i(x)$ таковы, что $\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\varphi_i(x)}{\psi_i(x)} = 0$, $i = \overline{\ell+1, n}$. Тогда задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Исраилов С. В.* О сингулярной многоточечной краевой задаче // Уч. записки Азерб. гос. ун-та. Серия физ.-мат. н. 1963. № 3. С. 69–71.

Н. Д. Копачевский (Симферополь)

korachevsky@list.ru

АБСТРАКТНЫЕ СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

В предлагаемой лекции рассматриваются следующие проблемы.

1. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм. Обобщенные формулы Грина (примеры).
2. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач. Примеры для областей с липшицевой границей смешанных краевых задач для скалярных и векторных полей.
3. Абстрактные краевые задачи сопряжения (общий подход). Примеры краевых задач сопряжения для двух либо трех примыкающих друг к другу областей (конфигурации: разрезанный огурец, разрезанный банан, разрезанный арбуз и другие).
4. Абстрактные спектральные задачи сопряжения. Примеры. Операторные пучки, порожденные этими задачами.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". 2007. Т. 20(59), № 2. С. 3–12.
2. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 34. С. 5–44. (Translated: V. I. Voytitsky, N. D. Kopachevsky, P. A. Starkov. Multicomponent Conjugation (Transmission) Problems and Abstract Boundary-Value Problems // Journ. of Math. Sciences (Springer). 2010. Vol. 170, Issue 2. P. 131–172.)
3. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложения // Спектральные и эволюционные задачи: междунар. научн. журн. 2011. Т. 21, № 1. С. 2–39. (Proceedings of the 21-th Crimean Autumn Math. School-Sympos., KROMSH-2010, September 18–29, 2010, Sevastopol, Laspi, Vol.21, Issue 1).

Л. Г. Куракин, А. В. Курдоглыан (Ростов-на-Дону)

kurakin@math.rsu.ru, aik_kurdoglyan@mail.ru

Исследование устойчивости равновесий дифференциальных уравнений с двумя косимметриями в критическом случае с жордановой клеткой¹

Рассматривается система, обладающая двумя косимметриями [1]. В таких системах обычным объектом являются непрерывные двухпараметрические семейства равновесий. Спектр устойчивости меняется вдоль такого семейства, хотя всегда содержит точку ноль. Поэтому в условиях общего положения само семейство разбивается на устойчивые и неустойчивые по линейному приближению области, разделёнными граничными равновесиями. Устойчивость граничных равновесий зависит от нелинейных слагаемых системы.

Рассмотрена общая задача устойчивости граничного равновесия в критическом случае нулевого собственного значения кратности k ($k = 3, 4, 5$), когда ядро матрицы линеаризации двумерно. При этом используется стандартная схема исследования критических случаев устойчивости, состоящая из трёх этапов: 1) построение модельной системы; 2) исследование устойчивости её равновесия; 3) перенос условий устойчивости с модельной системы на полную.

Получен ряд новых условий неустойчивости. При этом в каждом из возникающих подслучаев в качестве модельной выбиралась квазиодно-родная система. Неустойчивость её равновесия доказывалась предъявлением растущего решения вида инвариантный луч. Для переноса условий устойчивости с модельной системы на полную использовалась теорема Э. Э. Шноля [2].

Данная работа является продолжением статьи [3], в которой исследован случай одной косимметрии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
2. Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. — Пушино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985, — 215 с.
3. Куракин Л. Г. Критические случаи устойчивости. Обращение теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией // Матем. заметки. 1998. Т. 63, № 4. С. 572–578.

¹Работа проведена в рамках базовой части государственного задания выполняемого Южным Федеральным университетом, проект 213.01 – 11/2014 – 1.

Ласунский А. В. (Великий Новгород)
Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
**КОНТРПРИМЕРЫ ПЕРВОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА
В НЕПРЕРЫВНОМ И ДИСКРЕТНОМ СЛУЧАЯХ**

По различным публикациям подобраны контрпримеры первого метода Ляпунова. Первая группа примеров показывает, что для линейных однородных систем дифференциальных и разностных уравнений в неавтономном случае не существует прямой связи между собственными числами $\lambda_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ матрицы коэффициентов $A(t)$ и устойчивостью системы. Приводятся примеры неавтономных линейных систем разностных уравнений со следующими свойствами: 1) собственные числа матрицы коэффициентов постоянные действительные числа по модулю меньше 1, но система неустойчива; 2) собственные числа матрицы коэффициентов постоянные действительные числа, среди которых одно по модулю больше 1, но система асимптотически устойчива; 3) если все собственные числа $\lambda_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ матрицы коэффициентов $A(t)$ по модулю отделены от единицы: $|\lambda_k(t)| \geq \gamma > 1$, то система обязательно неустойчива. Аналогичные примеры приводятся для линейных неавтономных систем дифференциальных уравнений. Вторая группа примеров касается теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и ее дискретного аналога. Примеры подчеркивают существенность правильности системы первого приближения в этих теоремах. Показано, что даже в случае асимптотической устойчивости линейной автономной системы тривиальное решение нелинейной системы можно сделать неустойчивым за счет выбора нелинейных членов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Былов Б. Ф. и др. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: изд-во СПбГУ, 1992. 240 с.
3. Ласунский А. В. Устойчивость и собственные числа линейных неавтономных систем разностных и дифференциальных уравнений // Математика в высшем образовании. 2010, № 8. С. 37–40.
4. Кузнецов Н. В. Устойчивость дискретных систем. Дисс. канд. физ.-мат. наук. СПбГУ, 2004. 86 с.

А. Э. Пасенчук (Ростов-на-Дону)
pasenchuk.mail.ru
ОБ ОБОБЩЕННОМ ЛОКАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ
ГОХБЕРГА-КРУПНИКА

Ниже приводятся некоторые применения обобщенного локального принципа Гохберга-Крупника, изложенного в [1]. В связи с этим мы пользуемся обозначениями и утверждениями, приведенными в [1].

Пусть B — банахова алгебра с единицей e , $m \in Z_+$. Обозначим через $L_0\{m, B\}$ банахову алгебру существенно измеримых на R B -значных функций $L_0\{m, B\} = \{\phi(x) : \|\phi\| = \int_R (|x| + 1)^m \|\phi(x)\| dx\}$ со стандартными линейными операциями и сверткой в качестве умножения. Обозначим через $L\{m, B\}$ стандартную унитаризацию банаховой алгебры $L_0\{m, B\}$. Для $A(x) = a + l(x) \in L\{m, B\}$: $a \in B$, $l(x) \in L_0\{m, B\}$ определено преобразование Фурье $(FA)(\lambda) = a + \int_R e^{i\lambda x} l(x) dx$. Совокупность всевозможных преобразований Фурье элементов из $L\{m, B\}$ определяет банахову алгебру $W_m(B) = \{FA : A \in L\{m, B\}, \|FA\| = \|A\|\}$, изометрически изоморфную алгебре $L\{m, B\}$.

Теорема Пусть, $\lambda_0 \in R$, $A(x) \in L\{m, B\}$. Тогда элемент $FA(\lambda)$ локально $M(\lambda_0)$ -эквивалентен значению $FA(\lambda_0)$, где $M(\lambda_0)$ семейство элементов банаховой алгебры $W_m(B)$ следующего вида $M(\lambda_0) = \{\mu(\frac{\lambda - \lambda_0}{\varepsilon})e, \varepsilon > 0\}$, а $\mu(\lambda)$ — гладкая на R финитная неотрицательная функция, тождественно равная 1 в некоторой окрестности точки λ_0 .

Следствие 1. Элемент $FA(\lambda) \in W_m(B)$ обратим (обратим слева, справа) в алгебре $W_m(B)$ тогда и только тогда, когда при любом фиксированном $\lambda_0 \in R$ значение $FA(\lambda_0)$ обратимо (обратимо слева, справа) в алгебре B .

Следствие 2. Элемент $A(x) \in L\{m, B\}$ обратим (обратим слева, справа) в алгебре $L\{m, B\}$ тогда и только тогда, когда при любом фиксированном $\lambda_0 \in R$ значение $FA(\lambda_0)$ обратимо (обратимо слева, справа) в алгебре B .

Литература

1. Пасенчук А. Э. Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности. Ростов-на-Дону: изд - во ЮФУ, 2013, 280 с.

А. А. Сагитов (Грозный)

segitov@mail.ru

**УСЛОВИЯ ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ
ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СИСТЕМЫ ОДУ
С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ**

В системе

$$y'_i = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1(\Delta_1(x)), \dots, y_n(\Delta_n(x))), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

считается, что правые части f_i , $i = \overline{1, n}$ непрерывные по всем аргументам в области $D: \{x \in [a, +\infty), |y_i(x)| \leq d_i, |y_i(\Delta_i(x))| \leq d_i^*, i = \overline{1, n}\}$. Функции $\Delta_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, также непрерывны на $[a, +\infty)$ и таковы, что в представлении $\Delta_i(x) = x - \Delta_i^*(x)$, $i = \overline{1, n}$, функции $\Delta_i^*(x)$, $i = \overline{1, n}$, создают ситуацию запаздывания [1]. Изучается краевая задача с условиями

$$\begin{cases} y_i(x) = \varphi_i(a), & x \in E_0, \\ y_i(a) = 0, \\ \varliminf_{x \rightarrow +\infty} y_i(x) = 0, & i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

где $E_0 = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $E_i = E\{x - \Delta_i^*(x), x - \Delta_i^*(x) < a, x \geq a\} \cup a$ — начальное множество, на котором задана непрерывная начальная вектор функция $\varphi(x) = (\varphi_i(x))_{i=1}^n$, причем $\varphi_i(a) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Считается, что существуют частные производные f'_{i, y_i} , непрерывные по всем аргументам в области D , что позволяет построить квазилинейную систему

$$\begin{aligned} y'_i &= \Phi_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1(\Delta_1(x)), \dots, y_n(\Delta_n(x))) y_i(x) + \\ &+ f_i(x, y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), 0, y_i(x), \dots, \\ &\dots, y_n(x), y_1(\Delta_1(x)), \dots, y_n(\Delta_n(x))), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

вместо системы (1). Здесь Φ_i , $i = \overline{1, n}$, строятся по данным f'_{i, y_i} , $i = \overline{1, n}$. Накладываются следующие основные ограничения:

$$\begin{aligned} |f_i(x, y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), 0, y_i(x), \dots, y_n(x), y_1(\Delta_1(x)), \dots, y_n(\Delta_n(x)))| &\leq \\ &\leq \psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1(\Delta_1(x)), \dots, y_n(\Delta_n(x))) \leq -\bar{\psi}_i(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь функции $\psi_i(x)$ непрерывны и интегрируемы в смысле Римана на $[a, +\infty)$, $\bar{\psi}_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны на $[a, +\infty)$, однако $\int_a^{+\infty} \bar{\psi}_i(x) dx = +\infty$,

$i = \overline{1, n}$. Допускается выполнение неравенства $\int_a^{+\infty} \psi_i(x) dx \leq d_i$, $i = \overline{1, n}$.

Применением принципа Шаудера доказывается теорема существования решения задачи (1), (2).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ахмадов К. Т., Исраилов С. В.* К теории начальной сингулярной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // ДАН Азерб. ССР. 1974. Т. 30, № 1. С. 12–15.

В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин (Москва)

vnsamokhin@mtu-net.ru

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ОБОБЩЕННО НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ

Рассматривается стационарная система уравнений пограничного слоя неньютоновской среды, модель которой предложена в [1]:

$$\nu(1 + 3k(u_y)^2)u_{yy} - uu_x - vu_y = -U(x)U_x(x), \quad u_x + v_y = 0. \quad (1)$$

Здесь $(x, y) \in D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, ν и k – положительные постоянные, $U(x)$ – заданная функция. Граничные условия:

$$u(0, y) = u_0(y), \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, y) \rightarrow U(x) \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Задача (1), (2) при $U(x) > 0$ изучена в [2], а при $U(0) = 0$, $U_x(0) > 0$ в [3].

Автомодельными решениями рассматриваемых задач являются такие, компонента $u(x, y)$ которых допускает представление

$$u(x, y) = U(x)f'_\eta(\eta, \beta(x)),$$

где функция $f(\eta)$ удовлетворяет аналогу уравнения Фалкнера–Скэн:

$$\left(1 + 3k \left(\frac{U(x)f''}{\delta}\right)^2\right) f''' + ff'' + \beta(x)(1 - (f')^2) = 0,$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\eta) \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow +\infty.$$

С помощью автомодельных решений изучено поведение решений уравнений пограничного слоя при $x \rightarrow \infty$, см. [4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, Физматлит, 1970. 288 с.

2. *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2010. Т. 28. С. 329–361.

3. Самохин В. Н. Пограничный слой обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки // Вестник МГУП. 2011. № 5. С. 13–23.

4. Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А. Асимптотика решений уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды при внешнем течении, близком к симметричному // Проблемы математического анализа, Июль 2011, Вып. 59. С. 123–128. 2010. Т. 28. С. 329–361.

Е. В. Сёмкина (Симферополь)

kozirno@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЗАДАЧЕЙ КОШИ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДИССИПАТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ¹

Рассматривается спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши

$$A \frac{d^2 u}{dt^2} + F \frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.$$

Это уравнение описывает малые движения диссипативной динамической системы в окрестности состояния равновесия. Здесь функция $u = u(t)$ со значениями в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ — это перемещения динамической системы, $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — оператор кинетической энергии, $B = B^* \gg 0$ — оператор потенциальной энергии, $F = F^* \gg 0$ — оператор диссипации. Движения системы являются свободными, если поле внешних сил $f(t) \equiv 0$.

Ассоциированная спектральная задача изучается в том частном случае, когда операторы кинетической энергии A и диссипации F являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии B

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^\beta, \quad \alpha > 0, \rho, \beta \geq 0.$$

При этом считаем, что $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, его собственные элементы образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а все собственные значения положительны и имеют предельную точку $+\infty$.

Это позволяет подробно изучить случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты, а также проследить, как видоизменяется (перестраивается) спектр этой задачи при возрастании ρ и различных α и β .

Необходимо отметить, что аналогичная спектральная задача для случая, когда оператор кинетической энергии системы $A = I$, была рассмотрена в монографии [1], и данное исследование проводилось на её основе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Приложения индефинитной метрики. // Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

¹ Автор благодарит Н. Д. Копачевского за постановку задачи, а также за руководство работой.

А. П. Солдатов (Белгород)
soldatov48@gmail.com
**ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ**¹

В докладе вводятся пространства Харди для решений эллиптических систем первого и второго порядка с постоянными (и только старшими) коэффициентами. Эт пространства являются аналогами известных пространств Харди H^p для аналитических функций и Харди – Смирнова h^p для гармонических функций. Пусть область D на комплексной плоскости ограничена гладким простым контуром Γ и ω – конформное отображение единичного круга на эту область. Обозначим $H^p(D)$ класс всех непрерывных в D функций $u(z)$, для которых конечна норма

$$|u| = \sup_{0 < r < 1} \left[\int_{|\zeta|=r} |(u \circ \omega)(\zeta)|^p |d\zeta| \right]^{1/p}. \quad (1)$$

Это пространство используется для решений $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ эллиптических систем

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

где матрица $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ постоянна и ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости, а также эллиптических систем

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. В последнем случае предполагается, что система слабо связана по терминологии А.В. Бицадзе.

Показано, что для каждого из этих случаев пространство $H^p(D)$ решений данных систем банахово относительно нормы (1) и его элементы u допускают почти всюду угловые предельные значения u^+ на границе, которые принадлежат $L^p(\Gamma)$. При этом L^p –норма функции u^+ эквивалентна (1).

¹Работа выполнена при поддержке Международного проекта (0113РК01031) Министерства образования и науки Республики Казахстан

Е. В. Чаплыгина (Орел)
lena260581@yandex.ru
ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ
ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ
ВЫРОЖДЕНИЯ

Уравнение

$$\begin{aligned} LU(x, y) &\equiv U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn} y(2h - y)U_{yy}(x, y) = \\ &= [R_x^\tau H(x) + R_x^{-\tau} H(2\tau - x)][H((2h - y)(y - h))U(x, y - h) + \\ &\quad + H(y(h - y))U(x, y + h) + H(y(y - 2h))U(x, 2h - y)], \end{aligned} \quad (1)$$

$0 < \tau, h \equiv \text{const}$; $H(\xi)$ – функция Хевисайда; R_x^θ – оператор сдвига по x : $R_x^\theta g(x) = g(x - \theta)$, рассматривается в области $D = \bigcup_{k=1}^4 D_k \cup I_1 \cup I_2$, где $D_1 = D_1^1 \cup D_1^{21} \cup D_1^{22}$, причем $D_1^1 = \{(x, y) : 0 < x < \tau, 0 < y < h\}$ и $D_1^{21} = \{(x, y) : -y < x < y + b, -\frac{b}{2} < y < 0\}$, $D_1^{22} = \{(x, y) : -y + b < x < y + \tau, -\frac{\tau-b}{2} < y < 0\}$ ($0 < b < \tau$) – под-области эллиптичности и гиперболичности области D_1 , D_2 – отображение D_1 относительно $y = h$; а $D_3 \cup D_4$ – отображение $D_1 \cup D_2$ относительно $x = \tau$; $I_1 = \{(x, y) : 0 < x < 2\tau, y = h\}$, $I_2 = \{(x, y) : x = \tau, 0 < y < 2h\}$.

Для уравнения (1) в области D поставлена задача Геллерстедта.

Теорема единственности доказана с помощью интегральных неравенств при ограничениях $\tau \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, h \leq \frac{1}{2}$ на величины отклонений.

Редукция уравнения (1) к системе

$$L\bar{U}^\pm(x, y) = A\bar{U}^\pm(x, y), \quad (2)$$

где $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\bar{U}^\pm(x, y)$ – вектор-функции в областях эллиптичности и гиперболичности области D_1 ; $A = \begin{pmatrix} Q & B \\ B & Q \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Q – нуль матрицы (2×2) , сводит построение классического решения задачи Геллерстедта для уравнения (1) с опережающе – запаздывающими аргументами и двумя параллельными линиями $y = 0, y = 2h$ вырождения к построению классического решения задачи Геллерстедта для системы (2) без отклоняющихся аргументов и с одной линией вырождения $y = 0$.

Доказательство существования решения связано с разрешимостью разностного уравнения

$$(1 + i \operatorname{sgn}(b - x)R_x^{2ih})(\nu(x) + \int_0^x \nu(t) \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{t(x-t)})dt) = q(x), \quad 0 < x < \tau,$$

где $i = \sqrt{-1}$; $I_0(s)$ - модифицированная функция Бесселя порядка ноль, $\nu(x) = U_y(x, 0)$.

Н. А. Чуешева (Кемерово)

chuesheva@ngs.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В работе [1] исследуются краевые задачи для уравнения $Au - Bu + Su = f(t, x)$, $t \in (0, 1)$, $x \in \Omega$, где $A = A(t, D_t)$ — обыкновенный дифференциальный оператор порядка $l \geq 2$, по переменной t ; оператор $B = B(x, D_x)$, порядка 2ν по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, является равномерно эллиптическим в $\bar{\Omega}$; $S = S(t, x, D_t, D_x)$ — дифференциальный оператор меньшего порядка, чем порядки A и B .

В работе [2] $A = A(t, D_t)$ — вырождающийся дифференциальный оператор второго порядка; оператор $B = B(x, D_x)$ порядка $2m$ по переменной x ; S является равномерно эллиптическим оператором второго порядка по переменным $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Задача. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, 1), t \in (0, 1)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{ttt} + u_{xxxxx} - c(t)u_{tt} - u_{xxxx} - u_t - |u|^\rho u = f(x, t), \quad \rho > 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями $u|_{t=0, t=1} = u_t|_{t=0} = u|_{x=0, x=1} =$

$$u_x|_{x=0, x=1} = u_{xx}|_{x=0, x=1} = 0. \quad (2)$$

Теорема. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия

1) $c(t) \in C^3[0, 1]$; 2) пусть существуют функция $a(t) \in C^3[0, 1]$, такая, что для функций $a(t)$, $b(t) = a(t) \cdot b(t)$ при любом $t \in [0, 1]$ выполняются условия: 1) $a'''(t) + b''(t) - a'(t) > 0$; 2) $3a'(t) + 2b(t) < 0$; 3) $a(t) > 0$; $t \in (0, 1)$ 4) $a'(t) < 0$; $t \in [0, 1]$ 5) $a(1) = 0$. Тогда решение задачи (1), (2), из пространства $H^{3,2}(D)$ существует.

Здесь пространство $H^{3,2}(D)$ — является замыканием пространства бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям (1), (2), по норме

$$\|u\|_{H^{3,2}(D)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_t\|_0^2 + \left\| \sqrt{a(t)} \cdot u_{tt} \right\|_0^2 + \|u_{xxx}\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 + \|u\|_{L^{\rho+2}(D)}^{\rho+2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуешев А. В. Об одном нелинейном уравнении смешанного типа нечетного порядка. // Вестник Новосиб. ун-та, серия «математика, механика, информатика». — Новосибирск, 2001. Т. 1, Вып. 1. С. 107–123.

2. Чуешева Н. А. Об одной краевой задаче для уравнения порядка $2m$. // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. Красноярск, 2006 г., № 4, С. 157–162.

Секция II

Теория функций

Н. Ф. Абузярова (Уфа)

abnatf@gmail.com

**ЗАМКНУТЫЕ ПОДМОДУЛИ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ
ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И
ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ**

1

Пусть $a, b \in [-\infty; +\infty]$, P_k – банахово пространство, состоящее из всех целых функций $\varphi(z)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)},$$

$y^\pm = \max\{0, \pm y\}$, $z = x + iy$. Положим $\mathcal{P} = \lim \text{ind } P_k$, в этом пространстве непрерывна операция умножения на независимую переменную z , т.е. $\mathcal{P}$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Элемент φ пространства $\mathcal{P}$ – целая функция вполне регулярного роста при порядке 1, с индикаторной диаграммой $[ic_\varphi; id_\varphi] \subset (ia; ib)$. Для замкнутого подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ определим его *индикаторный интервал* $I_{\mathcal{J}} = \langle c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}} \rangle$, где $c_{\mathcal{J}} = \inf_{\varphi \in \mathcal{J}} c_\varphi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}} d_\varphi$, $\varphi \in \mathcal{J}$;

« $\langle \rangle$ » обозначает скобку « $[\rangle$ » или « $(\rangle$ », в зависимости от того, какое из соотношений $a < c_{\mathcal{J}}$ или $a = c_{\mathcal{J}}$ имеет место, так же следует понимать скобку « $\rangle$ ».

Дивизор $n_\varphi(\lambda)$ функции $\varphi \in \mathcal{P}$ равен нулю если $\varphi(\lambda) \neq 0$, и $n_\varphi(\lambda) = m$, если λ – нуль φ кратности m . Дивизор подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ определяется формулой $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min_{\varphi \in \mathcal{J}} n_\varphi(\lambda)$. Обозначим $\Lambda_{\mathcal{J}} = \{(\lambda_k, m_k) : m_k = n_{\mathcal{J}}(\lambda_k) > 0, k = 1, 2, \dots\}$ – множество нулей подмодуля $\mathcal{J} \neq \{0\}$.

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым*, если для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и функции $\varphi \in \mathcal{J}$ условие $n_\varphi(\lambda) > n_{\mathcal{J}}(\lambda)$ влечет включение $\varphi/(z - \lambda) \in \mathcal{J}$.

Для функции $\psi_0 \in \mathcal{J}$ обозначим через $\mathcal{J}(\psi_0)$ замкнутый подмодуль в $\mathcal{P}$, состоящий из всех функций $\psi \in \mathcal{P}$, делящихся на ψ_0 , индикаторная диаграмма которых содержится в $iI_{\mathcal{J}}$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{J}$ – замкнутый устойчивый подмодуль в $\mathcal{P}$ с конечным множеством нулей $\Lambda_{\mathcal{J}}$. Тогда в $\mathcal{J}$ найдутся две функции φ_0 и ψ_0 , порождающие этот подмодуль в следующем смысле:

$\mathcal{J}$ есть замыкание в $\mathcal{P}$ множества $\{p\varphi_0 + q\psi_0\}$, $p, q \in \mathbb{C}[z]$, если интервал $I_{\mathcal{J}}$ компактен, или множества $\{p\varphi_0 + \mathcal{J}(\psi_0)\}$, $p \in \mathbb{C}[z]$, если интервал $I_{\mathcal{J}}$ не компактен.

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (грант №01201456408).

Р. Р. Акопян (Озерск, Екатеринбург)

R.Akopyan@oti.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ ПО ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ¹

Пусть $G = \{z : |z| < 1\}$, γ — измеримое подмножество единичной окружности Γ ; неотрицательная функция δ почти всюду определена на γ и $\delta \in L^\infty(\gamma)$; Q — класс аналитических и ограниченных функций, удовлетворяющих условию $\|f\|_{L^\infty(\Gamma \setminus \gamma)} \leq 1$. Для функции δ и метода восстановления T определим погрешность метода формулой

$$\tilde{\mathcal{U}}(T, \delta) = \sup \{|f(z) - Tq| : f \in Q, q \in L^\infty(\gamma), |f(\zeta) - q(\zeta)| \leq \delta(\zeta)\}.$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf \{\mathcal{U}(T, \delta) : T \in \mathcal{R}\} \quad (1)$$

есть величина наилучшего (оптимального) восстановления аналитической функции в точке z с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q , по их граничным значениям на γ , заданных с ошибкой δ . Задача состоит в вычислении величины $\tilde{\mathcal{E}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — функционала, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Теорема 1. Пусть $\delta \in L^\infty(\gamma)$, $\ln \delta \in L^1(\gamma)$; $\mathcal{R}$ — множество всех (или линейных) функционалов на $L^\infty(\gamma)$. Тогда

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{R}}(\delta) = \exp \left(\int_{\gamma} P(\zeta, z) \ln \delta(\zeta) ds \right).$$

При этом наилучшим методом восстановления является метод

$$\tilde{T}q := \int_{\gamma} P(\zeta, z) \frac{d(z)}{d(\zeta)} q(\zeta) ds,$$

где P — ядро Пуассона и d — функция, определяемая равенством

$$d(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln \delta(e^{it}) dt \right\}.$$

Отметим, что d — функция Сеге (см. [1, Гл. II, §6.]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М., Л.: ГИТТИ, 1950.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Г. С. Балашова (Москва)
 balashovags@mpei.ru
**О РЕГУЛЯРИЗАЦИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
 И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ**

Пусть имеется последовательность положительных чисел $\{M_n\}$, некоторые из них могут быть равны $+\infty$, но предполагается, что существует бесконечная последовательность конечных M_n . Для изучения свойств такой последовательности естественно попытаться заменить ее другой, более «регулярной» последовательностью. Известно, что большую пользу приносит регуляризация последовательности с помощью ломаной Ньютона, построенной для точек P_n с координатами (n, M_n) .

В некоторых вопросах (например, в вопросе эквивалентности классов бесконечно дифференцируемых функций) приходится рассматривать регуляризованные последовательности, связанные с первоначальной более глубоко, чем последовательность, полученная с помощью ломаной Ньютона. Для этого будем рассматривать регуляризацию последовательности относительно некоторой функции $\omega(t)$. Эта функция задана при $t \geq 0$: $\omega(0) \geq 1$, непрерывна и возрастает до бесконечности.

Приведем примеры таких регуляризаций последовательностей положительных чисел $\{M_n\}$, используемых при сравнении классов бесконечно дифференцируемых функций.

Определим класс $C_{(a,b)}(M_n)$ как множество бесконечно дифференцируемых на (a, b) функций $u(x)$, для каждой из которых существует константа $K = K(u) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in (a,b)} |u^{(n)}(x)| \leq K^n M_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |u(x)| \leq K(u).$$

Интервал (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным.

Введем следующие обозначения таких классов:

- 1) $C_0\{M_n\}$ на открытом ограниченном интервале;
- 2) $C_f\{M_n\}$ на ограниченном замкнутом или полуоткрытом фиксированном интервале;
- 3) $C_R\{M_n\}$ на всей числовой прямой;
- 4) $C_{dR}\{M_n\}$ на полупрямой.

В 1) и 2) случаях используется экспоненциальная регуляризация посредством логарифмов, т.е. регуляризация относительно $\omega(t) = e^t$.

В 3) и 4) случаях используется выпуклая регуляризация посредством логарифмов, т.е. регуляризация относительно $\omega(t) = \infty$. В результате получаются регулярные последовательности, определяющие классы, совпадающие с исходными.

Указанные регуляризации и некоторые их модификации позволили установить легко проверяемые алгебраические условия вложения пространств Соболева бесконечного порядка:

$$W_{(a,b)}^\infty\{a_n, p\} = \left\{ u(x) \in C_{(a,b)}^\infty : \rho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \|u^{(n)}\|_p^p < \infty \right\},$$

где $a_n \geq 0$ — числовая последовательность, $1 \leq p < \infty$ — некоторое число, $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве Лебега $L_p(a, b)$.

Р. А. Бандалиев (Баку, Азербайджан)

bandaliev@rambler.ru

А. Г. Исаев (Баку, Азербайджан)

isaev@mail.ru

**Об ограниченности некоторого сублинейного оператора в
весовом пространстве Лебега с переменным показателем.**

Теорема 1. Пусть $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{s}{n}$, $p > 1$, $\bar{p} < n/s$, $q \geq \bar{p}$ и $1 \in L_{\frac{p \cdot p(x)}{p(x)-\bar{p}}}(R^n)$.

Предположим, что $v(x)$ и $w(x)$ весовые функции определенные на R^n . Пусть T сублинейный оператор действующий ограниченно из пространства $L_{p(x)}(R^n)$ в пространство $L_{q(x)}(R^n)$ 2) такой, что для любой функции $f \in L_1(R^n)$ с компактным носителем и $x \notin \text{supp } f$

$$|Tf(x)| \leq C \int_{R^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-s}} dy, \quad 0 < s < n,$$

где $C > 0$ не зависит от f и x .

Более того, пусть весовые функции $v(x)$ и $w(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\sup_{t>0} \left(\int_{|y|<t} [v(y)]^{-\bar{p}'} dy \right)^{\frac{\alpha}{\bar{p}'}} \left\| \left(\int_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-\bar{p}'} dy \right)^{\frac{1-\alpha}{\bar{p}'}} \right\|_{L_{q(\cdot), \frac{w}{|\cdot|^{n-s}}(|\cdot|>t)}} < \infty,$$

$$\sup_{t>0} \left(\int_{|y|>t} [v(y)|y|^{n-s}]^{-\bar{p}'} dy \right)^{\frac{\beta}{\bar{p}'}} \left\| \left(\int_{|y|>|\cdot|} [v(y)|y|^{n-s}]^{-\bar{p}'} dy \right)^{\frac{1-\beta}{\bar{p}'}} \right\|_{L_{q(\cdot), w}} < \infty.$$

где $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

Далее, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\sup_{|x|/2 < |y| \leq 4|x|} w(y) \leq M \inf_{|x|/2 < |y| \leq 4|x|} v(x).$$

Тогда существует положительная постоянная C такая, что для всех $f \in L_{p(x), v}(R^n)$

$$\|Tf\|_{L_{q(\cdot), w}(R^n)} \leq C \|f\|_{L_{p(\cdot), v}(R^n)}.$$

Г. Г. Брайчев (Москва)

braichev@mail.ru

РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЯМИ НА ЛУЧАХ
ИЛИ В УГЛЕ ¹

В докладе будут представлены некоторые результаты теории целых функций, полученные в последнее время и касающиеся зависимости роста функции от плотностных характеристик и геометрических особенностей расположения ее нулей. Точнее, мы приведём минимально возможные значения для типа целой функции в ситуациях, когда нули функции расположены в некотором угле или на лучах с вершиной в начале координат, делящих комплексную плоскость на равные части, и имеют заданные верхние и нижние плотности (усредненные плотности), шаг или индекс лакуарности. Определим перечисленные характеристики.

Тип $f(z)$ задается формулой $\sigma_\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Верхняя (нижняя) обычные и усредненные плотности последовательности при показателе ρ определяются равенствами

$$\overline{\Delta} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \quad \underline{\Delta}^* = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r^\rho}, \quad \text{где } n(r) \text{ и}$$
$$N(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt, \quad \text{— считающие функция нулей } f(z). \text{ Индексом лакуарности и } \rho\text{-шагом последовательности } \Lambda = \{\lambda_n\} \text{ называют величины}$$
$$l(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|}, \quad h_\rho(\Lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\lambda_{n+1}|^\rho - |\lambda_n|^\rho).$$

Отметим два следствия из общих теорем.

Для величины типа целой функции экспоненциального роста с чисто мнимыми (или вещественными) нулями справедливо точное неравенство

$$\sigma(f) \geq \frac{\pi \underline{\Delta}}{2} + \max_{a>0} \left\{ \frac{\overline{\Delta}}{\sqrt{a}} \ln \frac{1+a}{1+ak^2} - 2 \underline{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{(1-k)\sqrt{a}}{1+ak} \right\}, \quad k = \frac{\underline{\Delta}}{\overline{\Delta}},$$

Тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$, все нули которой лежат в угле раствора $2\theta \leq \pi$ удовлетворяет точной оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\overline{\Delta}^* \rho e}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(1 + 2a \cos \theta + a^2)}{a^\rho}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).

Л. Е. Бритвина (Великий Новгород)
Lyubov.Britvina@novsu.ru
**СВЕРТКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И
ПОРОЖДАЕМЫЕ ИМИ ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО
СДВИГА**¹

Данное исследование посвящено изучению сверточных конструкций различных интегральных преобразований. В частности, рассматриваются обобщенные свертки с весом, порождаемые интегральным преобразованием Ханкеля

$$F_{\nu}(x) = H_{\nu}[f](x) = \int_0^{\infty} f(t)tJ_{\nu}(xt) dt, \quad x \in \mathbf{R}_+. \quad (1)$$

Преобразование Ханкеля и его свертки интересны тем, что имеют многочисленные приложения к решению самых различных задач: вычисление интегралов, решение дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, решение задач математической физики с аксиальной симметрией и т.д.

В настоящее время существует два основных подхода к построению сверточных конструкций. Один из них основан на нахождении соответствующего оператора обобщенного сдвига. При другом подходе строится ядро обобщенной свертки (полисвертки) с использованием определения, которое было введено в 1967 году В. А. Какичевым.

В данной работе изучается вопрос эквивалентности данных двух подходов, изучаются операторы обобщенного сдвига, получаемые при построении обобщенных сверток с использованием второго подхода, рассматриваются их свойства и возможные приложения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Какичев В. А.* О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1967. № 2. С. 48–57.
2. *Britvina L. E.* Integral operators related to generalized convolutions for Hankel transform // Integral Transforms and Special Functions, Volume 20, Issue 10. 2009. P. 785–796.
3. *Britvina L. E.* Generalized convolutions for the Hankel transform and related integral operators // Math. Nach. 280, № 9-10. 2007. Pp. 962–970.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития НовГУ.

А. В. Буробин (Обнинск)

burobin@iate.obninsk.ru

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В C -ШКАЛЕ
ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННО ИНТЕГРИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ**

В работе [1] представлен общий подход к построению пространств обобщенно интегрируемых функций. При соответствующей модификации он позволяет получить пространства $C^{(\alpha)}([0, 1])$, $\alpha < 0$, как расширения пространства $C^{(0)}([0, 1])$.

В пространствах $C^{(\alpha)}([0, 1])$, $\alpha \leq 0$, изучаются свойства интегральных операторов K ,

$$Kf(x) = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt,$$

в общем случае с полярным ядром

$$K(x, t) = \frac{K_0(x, t)}{|x - t|^\gamma}$$

в зависимости от выбора параметров α и γ .

Характерно, что обычно рассматриваются ядра $K(x, t)$ с интегрируемой особенностью ($\gamma < 1$). В настоящем докладе исследуется возможность определения оператора K , когда особенность ядра не является интегрируемой.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Буробин А. В. Шкала банаховых пространств обобщенно интегрируемых функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. X Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». Ростов-на-Дону, 2002. С. 92.

Х. Х. Бурчаев (Грозный), В. Г. Рябых (Ростов-на-Дону),

Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону)

ryabich@aaanet.ru

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ¹**

Определение 1. *Пространством Бергмана (Харди) назовем множество функций $x(z)$, аналитических в $D : \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ с конечными нормами ($1 \leq p < \infty$)*

$$\|x\|_{A_p} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_D |x(z)|^p d\sigma(z) \right)^{1/p}, \quad \|x\|_{H_p} = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00065).

Рассматриваются линейные функционалы l_ω над $A_p(H_p)$ с ядром $\omega(z)$, аналитичным в D .

Определение 2. Функцию $f \in A_p(H_p)$ назовем экстремальной, если $\|f\| = 1$ и $l(f) = \|l\|$, $l \in A_p^*(H_p^*)$.

Ряд свойств экстремальных функций пространства $A_p(H_p)$ приведен в работах [1,2] Пусть F – внешняя функция функции f , $T = \{t : |t| = 1\}$. Доказывается

Теорема 1. Если $l_\omega \in A_p^*$, $1 \leq p < \infty$, $\omega^{(n-1)} \in \text{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $n \geq 1$, то $(|F(t)|^p)^{(n-1)} \in \text{Lip}\alpha$. Если $\omega^{(n-1)}$ удовлетворяет условию Зигмунда, то и $(|F(t)|^p)^{(n-1)}$ удовлетворяет этому условию.

Теорема 2. Если $l_\omega \in A_1^*$, производная $\omega'(z)$ непрерывна на $\bar{D}$, то функция $f(z)$ ограничена в D .

Теорема 3. Если $l_\omega \in A_p^*(H_p^*)$, $1 \leq p < \infty$, $\omega(z)$ аналитична в круге $D_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R, R > 1\}$, то экстремальная функция аналитична в том же круге.

Отметим, что теорема 1 является аналогом соответствующей теоремы из [2] относительно пространства H_p .

ЛИТЕРАТУРА

1. Carleson L., Jacobs S. Best approximation by analytic functions // Arciv Math. 1979. № 10. P. 219–229.
2. Рябых В. Г. Приближение аналитических функций неаналитическими // СМЖ. 2006. Т. 197, № 2. С. 86–94.

Б. Г. Вакулов (Ростов-на-Дону)

bvak1961@bk.ru

ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА С РАДИАЛЬНО ОСЦИЛИРУЮЩИМИ ВЕСАМИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В рамках весовых обобщённых пространств Гельдера $H^\omega(X, \varrho)$ с заданной мажорантой ω модуля непрерывности функций из этого пространства в работе исследуется действие гиперсингулярных интегральных операторов вида

$$(D^\alpha f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y \in \Omega: d(x, y) > \varepsilon} \frac{f(y) - f(x)}{d(x, y)^{N+\alpha}} d\mu(y), \quad x \in \Omega,$$

где α – комплексное число с $0 \leq \text{Re}\alpha < 1$. Здесь (X, d, μ) – квазиметрическое пространство с мерой μ и квазирасстоянием d , т.е. функцией $d : X \times X \rightarrow$

$[0, \infty)$ удовлетворяющей условиям

$$d(z, y) = 0 \iff z = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X,$$

$$d(x, y) \leq k[d(x, z) + d(z, y)], \quad k \geq 1.$$

Пространство (X, d, μ) называется *однородным*, если мера удовлетворяет условию удвоения $\mu B(x, 2r) \leq C\mu B(x, r)$. Мы предполагаем также, что (X, d, μ) таково, что все шары $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ измеримы и их меры удовлетворяют условию роста

$$\mu B(x, r) \leq Kr^N \quad \text{когда} \quad r \rightarrow 0, \quad K > 0.$$

Пусть также Ω - открытое ограниченное множество в (X, d, μ) . Для операторов D^α получены весовые оценки типа Зигмунда для радиально осциллирующих весов $\rho(x) = \phi(d(x, a))$, $a \in \Omega$ и более общих весов

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^n \phi_k(d(x, a_k)), \quad a_k \in \Omega.$$

На основе этих оценок изучается действие гиперсингулярных интегральных операторов D^α в весовых обобщённых пространствах Гёльдера с характеристиками ω , которые удовлетворяют некоторым условиям типа Зигмунда–Бари–Стечкина. Теоремы о действии получены также в терминах индексных чисел типа Орлича–Матушевской.

N. Virchenko, M. Chetvertak (Kyiv, Ukraine)

chetvertakMaria.math@gmail.com

ON ONE GENERALIZATION OF BESSEL' FUNCTION

4) Let us introduce the generalized Bessel function as a solution of the following differential equation

$$x^2 y'' + xy' + (x - \mu^2)(x + \omega^2)y = 0, \quad (1)$$

where $\mu, \omega \in \mathbb{Z}$.

Let us note, that the equation (1) 4) turn into Bessel equation in the case $\mu^2 = \omega^2 = \nu$.

We seek the solution of equation (1) in the next form:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \quad (2)$$

By substitution of the series (2) in the equation (1) we receive the following system of equations for the definition of the coefficients c_k : $c_n(k^2 - \mu\omega) + c_{k-2} + (b - a)c_{k-1} = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Let $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Then we have:

$$c_{2m} = -\frac{c_{2m-1}(b-a) + c_{2m-2}}{[(2m)^2 - \mu^2\omega^2]}, \quad m = 1, 2, \dots$$

After simple transformations and using relation [1] $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ we get:

$$y = J_{\mu,\omega}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \frac{2^{2m}}{(2^2 - \mu^2\omega^2) \dots [(2m)^2 - \mu^2\omega^2]} \quad (3)$$

or in other form:

$$J_{\mu,\omega}(x) = \Gamma\left(\frac{2-\mu\omega}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\mu\omega}{2}\right) {}_1F_2\left(1, \frac{2-\mu\omega}{2}, \frac{2+\mu\omega}{2}, -\frac{x^2}{4}\right), \quad (4)$$

where ${}_1F_2$ is the hypergeometric function [1].

Теорема 1. For $J_{\mu,\omega}(x)$ the following integral representation is valid:

$$J_{\mu,\omega}(x) = A \int_0^1 e^{t\left(-\frac{x^2}{4}\right)} (1-t)^{\frac{2-\mu\omega}{2}-1} dt \int_0^1 e^{\tau} \tau^{-1} (1-\tau)^{\frac{2+\mu\omega}{2}-1} d\tau,$$

where $A = \Gamma\left(\frac{2-\mu\omega}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\mu\omega}{2}\right)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *H. Batman, A. Erdelyi.* Higher transcendental functions // Vol. 1. 1953. 296 p.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

**КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО
ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В
 L_P -ПРОСТРАНСТВАХ**

Пусть

$$S_{\bar{\lambda}} = m^2 I + i \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \sum_{k=1}^n (1 - i\lambda_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0,$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k > 0$, $1 \leq k \leq n$.

Комплексные степени оператора $S_{\bar{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x) \in \Phi$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:

$$(\widehat{S_{\bar{\lambda}}^{-\alpha/2}} \varphi)(\xi) = \left(m^2 + \xi_{n+1} - |\xi'|^2 + i \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} \hat{\varphi}(x),$$

где $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Комплексные степени оператора $S_{\bar{\lambda}}$ с отрицательной действительной частью на функциях $\varphi(x) \in L_p$ реализованы в виде анизотропных потенциалов с нестандартной метрикой.

$$(H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h_{\bar{\lambda}}(y)\varphi(x-y)dy,$$

$$h_{\bar{\lambda}}(y) = \frac{2\exp(\frac{-\alpha-n}{4}\pi i)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{k=1}^n \sqrt{1-i\lambda_k}} (y_{n+1})_+^{\frac{\alpha-n-2}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{im^2 y_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda_k - i)y_k^2}{4(1+\lambda_k^2)y_{n+1}}\right\},$$

Показана ограниченность оператора $H_{\bar{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в L_q при $0 < \operatorname{Re} \alpha < n+2$, $1 \leq p < \frac{n+2}{\operatorname{Re} \alpha}$, $q = \frac{(n+2)p}{n+2-p\operatorname{Re} \alpha}$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $H_{\bar{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $H_{\bar{\lambda}}(L_p)$ в терминах оператора, левого обратного к $H_{\bar{\lambda}}$.

Б. М. Ибрагимова (Махачкала)

i.bella22@mail.ru

ОЦЕНКА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ВЕСА

Следуя Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянову ([1]), 2π -периодическим непрерывным знакочувствительным весом назовем упорядоченную пару $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ неотрицательных 2π -периодических непрерывных на всей оси функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$. Для непрерывной 2π -периодической функции $f(x)$ положим

$$|f|_p = \sup\{f^+(x)p_+(x) + f^-(x)p_-(x) : x \in (-\infty, +\infty)\},$$

где $f^+(x)$ и $f^-(x)$ — срезки функции $f(x)$.

При $p_-(x) \equiv p_+(x) \equiv 1$ величина $|f|_p$ совпадает с супремум-нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in (-\infty, +\infty)\}$.

Для непрерывной 2π -периодической функции $f(x)$ при заданном натуральном r через $\Delta_h^r(f, x)$ обозначим конечную разность порядка r с шагом h в точке x и определим при $\delta \geq 0$ модуль гладкости порядка r функции $f(x)$ с весом $p(x)$ равенством

$$\omega_r(\delta, f, p) = \sup\left\{ \left| (-1)^{r+1} \Delta_h^r(f, \cdot) \right|_p : |h| \leq \delta \right\}.$$

Обозначим также

$$\omega_r(f, \delta) = \sup\{\|\Delta_h^r(f, \cdot)\| : |h| \leq \delta\}, \quad \omega(p, \delta) = \max\{\omega_1(p_-, \delta), \omega_1(p_+, \delta)\}.$$

Теорема. Для непрерывных 2π -периодических функции $f(x)$ и знакочувствительного веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$ при любых натуральных n и r существует тригонометрический полином $T(x)$ порядка n такой, что

$$|T - f|_p \leq M(r) (\omega_r(1/n, f, p) + \omega_r(f, 1/n) \omega(p, 1/n)),$$

где $M(r) > 0$ не зависит от функции $f(x)$, веса $p(x)$ и от порядка n полинома $T(x)$.

При $r = 1$ аналог этого неравенства получен в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Вопросы единственности и устойчивости // Докл. РАН. 1993. Т. 333. С. 5–7.

2. Рамазанов А.-Р. К. О прямых и обратных теоремах теории аппроксимации в метрике знакочувствительного веса // Analysis Mathematica. 1995. Т. 21. С. 191–212.

А. В. Казанцев (Казань)

kazandrey0363@rambler.ru

МЕТОД В. А. ЗМОРОВИЧА В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛА И. П. МИТЮКА

Обобщенный приведенный модуль однолистной области G — функционал И.П. Митюка — был введен им в работе [1] и в односвязном случае имеет вид

$$m(z) = \frac{1}{2\pi} \ln h_f(z), \quad (1)$$

где f — однолистная параметризация G единичным кругом D , $h_f(z)$ — конформный радиус в смысле Г. Поля — Г. Сегё. Заявленная в названии доклада «драматургия» развивается на «сцене», предоставляемой традиционной казанской тематикой, связанной с внешней обратной краевой задачей в постановке Ф. Д. Гахова. Известно, что критические точки $a \in D$ функции (1) параметризуют решения соответствующей внешней задачи по формуле

$$F(z) = \int \left(\frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \right)^2 f'(z) dz; \quad (2)$$

особое значение имеет единственность критической точки (1). Рассмотрим два классических условия единственности.

Теорема С. Н. Кудряшова. Если функция (2) с некоторым $a \in D$ мероморфно отображает D на дополнение к выпуклой замкнутой области, то a — единственная критическая точка (1).

Теорема Х. Хиги. Если функция f голоморфно отображает D на выпуклую область, то функция (1) имеет не более одной критической точки в D , либо $f(D)$ — полоса.

Метод В. А. Зморовича [2] позволяет дать новые доказательства приведенных утверждений и строить их аналоги для двусвязного случая.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Митюк И. П. Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 110–119.
2. Зморович В. А. О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций // Укр. мат. журнал. 1952. Т. 4, № 3. С. 276–298.

Э. Н. Карабашева, П. Л. Шабалин (Казань)
enkarabasheva@bk.ru, pavel.shabalin@mail.ru ОБ
ОТОБРАЖЕНИЯХ НА ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ СО
СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН

В плоскости комплексного переменного строим конформное отображение верхней полуплоскости с заданными прообразами вершин на полиномиальную область с заданными углами при неизвестных вершинах в случае счетного множества вершин. Для построения такого конформного отображения используем частное решение однородной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним логарифмического порядка завихрением на бесконечности. После того, как структурная формула получена, в работе проводится доказательство того, что среди отображений этой формулой есть однолистные. Отметим, что эта структурная формула обобщает на случай бесконечного числа вершин формулу Шварца-Кристоффеля.

Задача построения отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин и конечным вращением касательной ранее была рассмотрена в работах Р. Б. Салимова и П. Л. Шабалина [1]. Там же обсуждалась однолистность отображений. В работе [2] приведено построение формулы конформного отображения на полигональную область со счетным множеством вершин и неограниченным вращением касательной. При построении использовалось решение однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка. Однолистность отображения не исследовалась. Здесь мы рассматриваем меньшую плотность последовательности точек разрыва коэффициентов, приводящему к логарифмическому завихрению краевого условия задачи Гильберта.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. Название статьи // Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 76–80.
2. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля // Сиб. журн. индустр. матем., 13:4 (2010), 109–117

И. А. Козлова, А. И. Савотин (Калуга)

irena1983.83@mail.ru

**МНОГОЧЛЕНЫ НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО**

В настоящей работе строятся многочлены наилучшего равномерного приближения функции Больцано с помощью подбора чебышевского альтернанса. В работе [1] рассматривался аналитический способ задания функции Больцано, согласно которому точки $x = \frac{1}{12}$, $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$ являются точками чебышевского альтернанса для многочлена наилучшего равномерного приближения первого порядка и $f(\frac{1}{12}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{3}) = -1$, $f(1) = 1$. Отсюда легко получить вид этого многочлена:

$$T_1(x) = \frac{6}{11}x - \frac{4}{11} \quad \text{и} \quad E_1(f) = \frac{9}{11}.$$

Аналогично могут быть получены многочлены наилучшего равномерного приближения следующих степеней:

Многочлены наилучшего приближения второго порядка:

$$T_2(x) = \frac{1664x^2}{385} - \frac{3676x}{1155} + \frac{199}{1260}$$

Чебышевский альтернанс образуют $(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}; \frac{25}{48}; \frac{23}{24})$, $E_2(f) = \frac{127}{220}$. Далее:

$$T_3(x) = -\frac{2403x^3}{455} + \frac{80x^2}{7} - \frac{614x}{105} + \frac{7}{18}$$

Альтернанс: $(\frac{1}{48}; \frac{1}{12}; \frac{1}{3}; \frac{25}{48}; \frac{5}{6})$, $E_3(f) = \frac{95}{182}$

$$T_4(x) = -\frac{64622592x^4}{10475465} + \frac{49274112x^3}{10475465} + \frac{69822208x^2}{10475465} - \frac{159465994x}{31426395} + \frac{2284460}{69138069}$$

Альтернанс: $(\frac{1}{48}; \frac{1}{12}; \frac{1}{3}; \frac{25}{48}; \frac{5}{6}; 1)$, $E_4(f) = \frac{1069927}{2095093}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Козлова И. А. Приближение функции Больцано многочленами Бернштейна // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1, ч. 2. Саратов. С. 56–59.

А. А. Кошелев (Екатеринбург)
Anton.Koshelev@urfu.ru
**ЗАДАЧА ЛАНДАУ – КОЛМОГОРОВА
ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ШАРЕ**

Оператор Лапласа Δ для дважды дифференцируемых функций $m \geq 2$ переменных есть сумма вторых частных производных. На классы менее гладких функций оператор Лапласа и его вторая степень распространяются по схеме Соболева (см., например, [1]). Рассмотрим неравенство Ландау – Колмогорова

$$\|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \leq K_m \sqrt{\|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \cdot \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}} \quad (1)$$

для непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^m$ функций f , для которых $\Delta^2 f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. В настоящее время известно большое количество точных неравенств такого типа для функций одной переменной; значительно меньше результатов получено для функций многих переменных (см. обзорную статью [2]). О. Кунчев [3] получил оценку сверху величины K_m , $m \geq 2$.

Оператор Лапласа инвариантен относительно сдвигов пространства $\mathbb{R}^m$, поэтому в левой части (1) вместо нормы $\|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^m)}$ можно рассмотреть значение $|\Delta f(0)|$. В связи с этим представляет интерес следующий аналог задачи Ландау – Колмогорова для единичного шара $\mathbb{B}^m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Положим

$$\omega_m(A) = \sup\{|\Delta f(0)| : \|f\|_{C(B^m)} \leq A, \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(B^m)} \leq 1\}.$$

В докладе будет выписано точное значение величины $\omega_m(A)$, $m \geq 2$, для $A \geq A_m$, где

$$A_m = \frac{1}{64m(m+2)}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
2. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.
3. *Kounchev O.* Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality // Multivariate Approximation. W. Haussmann et al. (eds.): Akademie Verlag, 1997. P. 123–132.

В. Г. Кротов, А. И. Порабкович (Минск)
 krotov@bsu.by, porabkovich@bsu.by
**ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НАИЛУЧШИХ
 ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОСТОЯННЫМИ В L^p , $p > 0$**

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и σ -конечной борелевской мерой μ , удовлетворяющей условию удвоения порядка $\gamma > 0$

$$\mu(B(x, R)) \leq c \left(\frac{R}{r} \right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R,$$

$$\mathcal{A}_\alpha^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B \leq 1} r_B^{-\alpha} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta d\mu(y) \right)^{1/\theta}$$

(r_B — радиус шара B , $I_B^{(\theta)} f$ — постоянная наилучшего приближения функции f в $L^\theta(B)$).

Теорема 1. Пусть $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $f \in L_{\text{loc}}^\theta(X)$. Тогда для почти всех $x \in X$ и любого шара $B = B(x, r)$

$$|f(x) - I_B^{(\theta)} f| \leq c r^{-\alpha} \left[\mathcal{A}_\alpha^{(\theta)} f(x) \right]^{1 - \frac{\alpha p}{\gamma}} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B [\mathcal{A}_\alpha^{(\theta)} f]^p d\mu \right)^{\alpha/\gamma}.$$

В случае $\theta = 1$ это было доказано в [1]. Теорема 1 имеет ряд интересных приложений, из которых отметим следующее.

Теорема 2. Пусть $p > 1$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда условие $\mathcal{A}_1^{(\theta)} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $\theta > 0$ влечет $f \in W_1^p(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение теоремы 2 тем сильнее, чем меньше θ . При $\theta = 1$ оно принадлежит А. Кальдерону [2].

Из другим приложений укажем (без точных формулировок) абстрактную форму свойства самоулучшения неравенства Пуанкаре, новые описания пространств Хайлаша–Соболева M_α^p , $0 < p \leq 1$, а также различные оценки для средних осцилляций функций.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. 2006. Т. 14, №1. С. 51–61.
2. *Calderón A. P.* Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. 1972. V. 44. P. 561–582.

З. М. Лысенко(Одесса, Украина)
ivanpribegin@rambler.ru
ПРОСТРАНСТВО БЕРГМАНА В ПОЛОСЕ

Пусть $S = \{(x, y) : |x| < \frac{\pi}{4}, y \in \mathbb{R}\}$ – полоса в комплексной плоскости, $A^2(S)$ –пространство Бергмана в S , состоящее из аналитических функций пространства $L_2(S)$, $E_k = \{(x, y) : x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4}, y \in \mathbb{R}\}$, $k = \overline{1, 2}$, $E = E_1 \cup E_2, \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. На E введём функцию

$$a(y) = (-1)^{k+1} \frac{\pi/4}{(\pi/4)^2 + y^2}, y \in E_k, k = \overline{1, 2}.$$

Введём унитарный оператор

$U_1 = M \otimes I : L_2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L_2(E, a(y) dy) \rightarrow L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(E, a(y) dy)$, где преобразование Меллина $M : L_2(\mathbb{R}_+, r dr) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$(M\psi)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} r^{-i\lambda} \psi(r) dr.$$

Пусть $A_1^2 = U_1(A^2(S)), B_S$ – проектор Бергмана пространства $L_2(S)$ на $A^2(S)$, I – тождественный оператор.

Теорема . 1. Унитарный оператор U_1 является изометрическим изоморфизмом пространства $L_2(S)$ на $L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(E, a(y) dy)$, при котором Бергманово пространство $A^2(S)$ отображается на

$$A_1^2 = f(\lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{2 \operatorname{sh} \pi \lambda}} \exp \left\{ -(\lambda + i)(-1)^{k+1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\pi/4} \right\}$$

где

$$y \in E_k, k = \overline{1, 2}, f(\lambda) \in L_2(\mathbb{R}).$$

2. Ортогональный проектор $B_1 = (M \otimes I) B_S (M^{-1} \oplus I)$ пространства $L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(E, a(y) dy)$ на образ A_1^2 имеет вид :

$$(B_1 \psi)(\lambda, y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2 \operatorname{sh} \pi \lambda}} \exp \left\{ -(\lambda + i) \operatorname{arctg} \frac{y}{\pi/4} \right\} \times \\ \times \int_E g(\lambda, y) \sqrt{\frac{\lambda}{2 \operatorname{sh} \pi \lambda}} \exp \left\{ -(\lambda - i)(-1)^{k+1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\pi/4} \right\} dy.$$

В. П. Микка, К. В. Микка, И. Э. Сунгурова, Г. И. Иванова
(Йошкар-Ола)

mikkav@marsu.ru

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
Ф. Д. ГАХОВА, КОГДА ЛОГАРИФМ ПРОИЗВОДНОЙ
ПОРОЖДАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПОДЧИНЕН
ОДНОЛИСТНЫМ**

Пусть S_p – семейство однолистных p -симметричных в E функций и

$$S_{n;\Phi_p(\zeta)} = \{f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \dots : \ln f'(\zeta) \prec \Phi_p(\zeta) \in S_p\}. \quad (1)$$

Выясним вопрос о единственности решения $\zeta = 0$ уравнения Ф. Д. Гахова

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}(1 - |\zeta|^2)^{-1}, \quad (2)$$

возникающего из требования замкнутости искомого контура во внешней обратной краевой задаче.

Теорема 1. *При любых $p \geq 1$ и $n \geq 2$ функции из $S_{n;\Phi_p(\zeta)}$ не обеспечивают единственности решения $\zeta = 0$ уравнения (2). В частности, таковыми будут экстремальные*

$$\ln f'(\zeta) = \zeta^n(1 - \zeta^{np})^{-2/p}. \quad (3)$$

Поэтому есть возможность определения радиуса $r_e[S_{n;\Phi_p(\zeta)}]$ единственности решения $\zeta = 0$ как наибольшего возможного значения параметра $r_0 > 0$, когда функции $\psi_{r_0}(\zeta) = \frac{1}{r_0}f(r_0\zeta) \in S_{n;\Phi_p(\zeta)}$ и уравнение (2) имеет единственное решение $\zeta = 0$.

Теорема 2. *Радиус $r_e[S_{n;\Phi_p(\zeta)}]$ единственности решения уравнения Ф. Д. Гахова находится как наибольшее возможное значение параметра $r_0 \in (0, 1)$ из соотношения*

$$nr_0^n r^{n-2}(1 - r^2)(1 + r_0^{pn} r^{pn})(1 - r_0^{pn} r^{pn})^{-\frac{2+p}{p}} = 2,$$

где $r = r_{n;p}(r_0) \in (0, 1)$ является наименьшим корнем уравнения

$$\begin{aligned} & n(1 - r^2)(1 + r_0^{pn} r^{pn})[1 + (1 + p)r_0^{pn} r^{pn}] - \\ & - (1 - r_0^{pn} r^{pn})[2(1 + r_0^{pn} r^{pn}) + pr_0^{pn} r^{pn}(1 - r^2)] = 0. \end{aligned}$$

Значение радиуса является неулучшаемым из-за функций (3).

При $n = 2$, $p = 1$ радиус единственности $r_e[S_{2;\Phi_1(\zeta)}] \approx 0,77418362$.

И. А. Моисеев (Москва)

bbsport@mail.ru

**Соотношения между уточнёнными характеристиками роста
последовательностей нулей целых функций**

При изучении зависимости роста целой функции от распределения последовательности ее нулей на плоскости важно исследовать зависимости между различными характеристиками, описывающими поведение последовательности ее нулей. Такое исследование проведено в работе Г. Г. Брайчева [1] для целых функций конечного положительного порядка, где получены точные соотношения в случае, когда изучаемые характеристики не обращаются в нуль или бесконечность (в этом случае соответствующие соотношения теряют содержательный смысл). Для учета такой ситуации мы обобщаем результаты работы [1] на случай уточненного порядка. Как хорошо известно, для каждой индивидуальной функции существует уточненный порядок, при котором относительные характеристики роста не обращаются в нуль и бесконечность. Введем рассматриваемые характеристики.

Пусть $h(x)$ — дифференцируемая на $\mathbb{R}_+$ функция, удовлетворяющая условию $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xh'(x)}{h(x)} = \rho \in (0, +\infty)$. Верхняя и нижняя обыкновенная, усреднённая, дискретная усреднённая плотности последовательности определяются равенствами:

$$\overline{\Delta}_h := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{h(r)}, \quad \underline{\Delta}_h^* := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{h(r)}, \quad \tilde{\Delta}_h := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{h(|\lambda_n|)}, \text{ где } n(r) \text{ и } N(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt, \text{ — обычная и усредненная считающие функции последовательности. Относительная плотность и индекс лакунарности задаются формулами } \underline{\nu}_h := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{n(r)}, \quad l := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|}.$$

Приведем некоторые неравенства, обобщающие на случай уточненного порядка соответствующие результаты из работы [1]:

$$\overline{\Delta}_h^* \leq \tilde{\Delta}_h \frac{e^{\rho \underline{\nu}-1}}{\rho \underline{\nu}}, \quad \underline{\Delta}_h^* \leq \tilde{\Delta}_h \frac{e^{\rho \overline{\nu}-1}}{\rho \overline{\nu}}, \quad \overline{\Delta}_h^* \geq \underline{\Delta}_h^* l^{\frac{\rho}{l^{\rho}-1}} \frac{l^{\rho}-1}{e \ln l^{\rho}}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Брайчев Г. Г. Точные соотношения между некоторыми характеристиками роста последовательностей // Уфимский математический журнал 2013. Т. 5, № 4. С. 17–30.

И. Х. Мусин (Уфа)
musin@matem.anrb.ru
О СОВПАДЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ БЕСКОНЕЧНО
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathcal{B}$ — множество непрерывных функций g на $[0, \infty)$ таких, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. Пусть g^* — сопряжённая по Юнгу функция к $g \in \mathcal{B}$: $g^*(x) = \sup_{y \geq 0} (xy - g(y))$, $x \geq 0$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{B}$ — неотрицательная неубывающая функция на $[0, \infty)$. Определим функцию ψ на $[0, \infty)$ по правилу: $\psi(x) = \varphi(e^x)$, $x \geq 0$.

Для $b > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$Q_{b,m}(\psi^*) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) :$$

$$N_{b,m}(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(1 + \|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! b^k e^{-\psi^*(k)}} < \infty\};$$

$$GS_{b,m}(\varphi^*) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_{b,m}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{-\varphi^*(b\|x\|)}} < \infty\}.$$

Пусть $Q_b(\psi^*) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_+} Q_{b,m}(\psi^*)$, $GS_b(\varphi^*) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_+} GS_{b,m}(\varphi^*)$ ($b > 0$) и

$Q(\psi^*) = \bigcup_{b>0} Q_b(\psi^*)$, $GS(\varphi^*) = \bigcup_{b>0} GS_b(\varphi^*)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $Q_b(\psi^*)$, $GS_b(\varphi^*)$, $Q(\psi^*)$, $GS(\varphi^*)$ — линейные пространства. Семейства норм $N_{b,m}$ и $q_{b,m}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) определяют локально выпуклые топологии в $Q_b(\psi^*)$ и $GS_{b,m}(\varphi^*)$, соответственно.

Наделим $Q(\psi^*)$ топологией индуктивного предела пространств $Q_b(\psi^*)$, а $GS(\varphi^*)$ — топологией индуктивного предела пространств $GS_b(\varphi^*)$.

Теорема. Пусть функция φ выпукла на $[0, \infty)$. Тогда пространства $Q(\psi^*)$ и $GS(\varphi^*)$ совпадают.

В докладе также будут доложены результаты о преобразовании Фурье функций из пространств, представляющих собой обобщения пространств Гельфанда-Шилова типа W .

Д. А. Полякова (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
forsites1@mail.ru
**О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ В
ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ФУНКЦИЙ**

Пусть $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ — пространство ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на конечном интервале I в $\mathbb{R}$, определяемое весом ω .

Работа посвящена изучению уравнения свертки

$$T_{\mu}f = g, \quad g \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I). \quad (1)$$

Здесь T_{μ} — оператор свертки в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$; μ — символ этого оператора, т. е. некоторая целая функция. Заметим, что как частный случай уравнения (1) содержат в себе дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)} = g$.

В работе [1] были установлены необходимые и достаточные условия на символ μ , при которых уравнение (1) имеет решение в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ при любой правой части $g \in \mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$. Затем в [2] был построен базис в пространстве решений однородного уравнения $T_{\mu}f = 0$.

В настоящей работе устанавливается вид частного решения уравнения (1). Именно, по символу μ специальным образом строится последовательность точек $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, что система экспонент $\{e^{-i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является абсолютно представляющей системой в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j e^{-i\nu_j x}$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\mu(\nu_j)} e^{-i\nu_j x}$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{(\omega)}^1(I)$ и его сумма f является решением уравнения (1).

Вместе с результатами из [2] данная теорема позволяет описать общее решение уравнений (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 14-01-31083.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абанина Д. А. Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 477–494.
2. Абанина Д. А. Экспоненциально-полиномиальный базис в пространстве решений однородного уравнения свертки на классах ультрадифференцируемых функций // Владикавк. мат. журн. 2011. Т. 13, № 3. С. 3–17.

Р. Б. Салимов (Казань), П. Л. Шабалин (Казань)

pavel.shabalin@mail.ru

**ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С РАЗРЫВНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ
ОСОБЕННОСТЬЮ ИНДЕКСА ¹**

Исследуется краевая задача Гильберта теории аналитических функций для полуплоскости D в ситуации, когда коэффициенты и правая часть краевого условия $a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t)$, $t \in L = \partial D$, имеют разрывы первого рода в точках двух монотонных последовательностей $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, сходящихся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно, а индекс задачи не существует как некоторая положительная степень логарифма на бесконечности. Считаем, что числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty,$$

сходятся, функция $\nu(t) = \arg[a(t) + ib(t)]$ имеет абсолютно непрерывную составляющую $\varphi_1(t)$, причем для некоторого $\alpha > 0$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \nu^- \ln^\alpha |t| + \tilde{\nu}(t), & t \in (-\infty, -1), \\ \nu^+ \ln^\alpha t + \tilde{\nu}(t), & t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

и неубывающую функцию скачков $h(t)$. Потребуем, чтобы положительные числа κ_k , κ_{-k} — дробные части разрывов функции $h(t)/\pi$ образовывали расходящиеся ряды, удовлетворяющие следующим условиям. Введем функции $n_+^*(x) = 0$, $x < t_1$, $n_-^*(x) = 0$, $x < -t_{-1}$,

$$n_+^*(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j, \quad t_{k-1} \leq x < t_k, \quad n_-^*(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_{-j}, \quad -t_{-k+1} \leq x < -t_{-k},$$

и потребуем выполнения следующих асимптотических равенств

$$n_+^*(x) = \Delta_+ \ln^{\kappa_+} x + o(\ln^{\kappa_+} x), \quad n_-^*(x) = \Delta_- \ln^{\kappa_-} x + o(\ln^{\kappa_-} x), \quad x \rightarrow +\infty,$$

κ_+ , κ_- — положительные постоянные.

Для такой постановки задачи Гильберта получены формулы общего решения однородной и неоднородной задач и проведено полное исследование разрешимости однородной задачи.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00636-а).

Ю. С. Солиев (Москва)

su1951@mail.ru

ОБ ОДНОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл [1]

$$Sf = S(f; z) = \frac{1}{\pi} \int \int_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad z \in G, \quad (1)$$

где G – круг $|z| < 1$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Приближенное вычисление сингулярного интеграла (1) рассматривалась в работах [2], [3]. Аппроксимировав плотность интеграла (1) полиномом $P_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ получим кубатурную формулу

$$Sf = S(P_n f; z) + R_n(f; z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} ((k-1)z^{k-2} - kz^{k-1}\bar{z}) + R_n(f; z), \quad (2)$$

где $R_n(f; z)$ — остаточный член. Через $H_\alpha^{(r)}$ обозначим класс функций $f(z)$, частные производные $\frac{\delta^r f}{\delta x^{r-k} \delta y^k}$, ($k = 0, 1, \dots, r$) которых удовлетворяют условию Гельдера с постоянной M и показателем α ($0 < \alpha \leq 1$). Пусть H_p ($1 < p < \infty$) — пространство Харди аналитических в G функций $f(z)$ с нормой

$$\|f\|_{H_p} = \lim_{p \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(pe^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < \infty)$$

. С помощью результатов работ [4], [5] доказывается, что если $f(z) \in H_p \cap H_\alpha^{(r)}(M)$ ($1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $r = 1, 2, \dots$), то для остаточного члена кубатурной формулы (2) справедлива оценка

$$\|R_n f\|_{H_p} \leq M \cdot O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad n \geq r-1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1998.
2. Солиев Ю. С. Конечномерные аппроксимации двумерного сингулярного интеграла Векуа. Современ. методы теории функций и смежные вопросы. Материалы Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 2013 г., стр. 218-219.
3. Солиев Ю. С. К приближенному вычислению двумерного сингулярного интеграла Векуа. Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского, т. 46, Казань, КГУ, стр. 407-410.
4. Смирнов В. И., Лебедев

Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.-Л., 1964. 5. Исмаилов А. Я., Мансуров М., Салаев В. В. О сингулярном интеграле теории аналитических функций по Векуа. ДАН СССР, 1974, 215, № 5, 1041–1044.

А. П. Старовойтов, А. В. Астафьева (Гомель)
 svoitov@gsu.by, astafeva@gsu.by

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$ -го порядка для набора экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют $k+1$ многочлен $A_n^0(z), A_n^1(z), \dots, A_n^k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^k A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0.$$

Для системы $\{e^{p z}\}_{p=0}^k$ такие аппроксимации введены в рассмотрение Эрмитом [1]. Гораздо позже, в работах К. Малера, П. Борвейна, В. Вилонского и др. авторов был обнаружен ряд замечательных свойств таких многочленов. В частности, с их помощью можно дать новое обоснование трансцендентности числа e .

Далее $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. В этом случае нами найдена асимптотика остаточного члена $R_n(z)$ и установлено, что для действительных $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ являются решением следующей экстремальной задачи:

при заданном n найти многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0, 1, \dots, k$ степени не выше n , со старшим коэффициентом многочлена $a_n^k(z)$ равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве

$$E_n = E_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k; \rho) = \min_{\{a_n^p(z)\}_{p=0}^k} \left\| \sum_{p=0}^k a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_{\rho},$$

где $\|h\|_{\rho} = \max\{|h(z)| : z \in D_{\rho}\}$, а $D_{\rho} = \{z : |z| \leq \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k$ – произвольные действительные числа. Тогда при $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$ и $n \rightarrow \infty$

$$E_n \sim \frac{n! \lambda^{n+1}}{(kn + n + k)!} \rho^{kn+n+k},$$

где $\lambda = \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermite C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques// Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – V. 21. – P. 289 – 308.

А. Н. Таныгина (Минск)

anast-minsk@yandex.ru

**УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА
НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНО ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ**

1

Пусть X и Y — банаховы пространства, f и g — определенные на замкнутом шаре $\overline{B(x_0, R)} \subset X$ и принимающие значения из Y нелинейные операторы, причем f дифференцируем в каждой внутренней точке шара $\overline{B(x_0, R)}$, а g — недифференцируемый оператор.

Доклад посвящен условиям устойчивости обобщенного метода Ньютона–Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1)$$

для приближенного решения нелинейных операторных уравнений с недифференцируемыми операторами вида

$$f(x) + g(x) = 0. \quad (2)$$

Оператор f предполагается удовлетворяющим модифицированному условию регулярной гладкости [1], в записи которого приращение производной оператора f мажорируется приращением скалярной функции, а оператор g — модифицированному условию Липшица вида

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)},$$

где $\psi(t)$ — неубывающая функция, $0 \leq t \leq R$.

Подобные условия были известны ранее лишь для случая, когда производная оператора f и оператор g удовлетворяют на $\overline{B(x_0, R)}$ классическому условию Липшица с некоторыми постоянными [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Забрейко П. П., Таныгина А. Н.* Модификация условия Гальперина–Ваксмана для решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона–Канторовича // Доклады НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.

2. *Зинченко А. И.* Об устойчивости одного метода приближенного решения уравнений с недифференцируемыми операторами // Труды семинара по функц. анализу. Воронеж, 1963. Вып. 7. С. 42–44.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф13М–036).

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)
Tileubaev@mail.ru
НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ФУНКЦИИ
ПРОСТРАНСТВУ БЕСОВА

Пусть фиксированы числа $1 < p < \infty$. Через $L_{p,\alpha}[0, \infty)$ обозначим пространство функций f , таких, что функция $f(x)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}$ принадлежит пространству суммируемых функций на полуоси с нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть $f \in L_{p,\alpha}$. Оператор обобщенного сдвига Ватсона-Лагерра [1] определим следующим образом

$$T_h(f, x, \alpha) = \frac{(\alpha+1)}{(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(R)V_{\alpha-\frac{1}{2}}(\sqrt{xh}\cos\theta)e^{\sqrt{xh}\cos\theta}\sin^{2\alpha}\theta d\theta$$

где $\alpha \geq 0, h \geq 0, R = x + h + 2\sqrt{xh}\cos\varphi, V_\alpha(t) = (\frac{t}{2})J^{\frac{1}{2}-\alpha}$, $\Gamma(t)$ - Эйлеров интеграл второго рода, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя первого рода. Для $f \in L_{p,\alpha}$ введем модуль непрерывности следующим образом

$$\omega(f, \delta)_{p,\alpha} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|T_h(f, x, \alpha) - f(x)\|_{p,\alpha}.$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha}$ обозначим наилучшее приближение в метрике пространства $f \in L_{p,\alpha}$ функции f алгебраическими многочленами степени не выше, чем $n-1$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha} = \inf_{P \in P_n} \|f - P\|_{p,\alpha}$$

Для $p, \theta \in [1, \infty)$ определим пространство

$$B(\theta, p, r) = \left\{ f : \|f\|_{\theta,p,r} = \|f\|_{p,\alpha} + \left(\int_0^1 t^{-\theta r-1} (\omega(f, t)_{p,\alpha})^\theta dt \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$$

Сформулируем достаточное условие принадлежности функции классу Бесова $B(\theta, p, r)$.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty, f \in L_{p,\alpha}, \theta \geq 1$. Тогда для $f \in B(\theta, p, r)$ достаточными являются следующие условия:

- a) $\sum_{k=1}^\infty k^{(r+1-\frac{1}{p})\theta-1} |\widehat{f}(k)|^\theta$ при $p \geq 2$ и $\frac{\theta}{p} \geq 1$;
- b) $\sum_{k=1}^\infty k^{\theta(r+1-\frac{2}{p})} |\widehat{f}(k)|^\theta$ при $p \geq 2$ и $0 < \frac{\theta}{p} \leq 1$;

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(\frac{1}{2}+r)-1} |\widehat{f}(k)|^{\theta} \text{ при } 1 < p \leq 2 \text{ и } \theta \geq 2 ;$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta r} |\widehat{f}(k)|^{\theta} \text{ при } 1 < p \leq 2 \text{ и } 1 \leq \theta \leq 2.$$

Сформулируем необходимое условие принадлежности пространству $B(\theta, p, r)$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta \geq 1$, $f \in B(\theta, p, r)$. Тогда

$$a) \text{ при } 1 < p \leq 2 \text{ и } \frac{\theta}{p} \geq 1 \text{ сходится ряд } \sum_{k=1}^{\infty} k^{(r+1-\frac{2}{p})\theta} |\widehat{f}(k)|^{\theta};$$

$$b) \text{ при } 1 < p \leq 2 \text{ и } 0 < \frac{\theta}{p} \leq 1 \text{ сходится } \sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+1-\frac{1}{p})-1} |\widehat{f}(k)|^{\theta};$$

$$c) \text{ при } p \geq 2 \text{ и } \frac{\theta}{2} \geq 1 \text{ сходится ряд } \sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta r} |\widehat{f}(k)|^{\theta};$$

$$d) \text{ при } p \geq 2 \text{ и } 0 < \frac{\theta}{2} \leq 1 \text{ сходится ряд } \sum_{k=1}^{\infty} k^{\theta(r+\frac{1}{2})} |\widehat{f}(k)|^{\theta}.$$

Полученные результаты являются аналогами теорем из работы [2].

Список литературы

1. Федоров В. М. Аппроксимация многочленами на полуоси // Тр. Международн. Конф. по конструктивной теории функций. Варна 31 мая–05 июня 1981 г. С. 181–183.

2. Potapov M. K., Berisha M. Modules of smoothness and Fourier coefficients of periodic functions of one variable // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1979. Vol. 26(40). P. 215–228.

М. И. Тулина (Горно-Алтайск)

aniram.ru@googlemail.com

ЭЛЕМЕНТЫ ГРУППЫ МОНОДРОМИИ ПРИ ВАРИАЦИИ ПО БАЗЕ КУБИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ¹

Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$.

Рассмотрим возмущенное дифференциальное уравнение

$$u^{(3)}(z) + Q_0(z)u^{(1)}(z) + (R_0(z) - \sum_{j=1}^d \mu_j r_j(z))u(z) = 0 \quad (1)$$

на поверхности $F = D/\Gamma$, где $r_1, \dots, r_d$ — базис кубических голоморфных дифференциалов в пространстве $\Omega^3(F)$, $d = 5g - 5$. Положим $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$. Обозначим через $U(z, 0, \mu) = {}^t(u(z, 0, \mu), v(z, 0, \mu), w(z, 0, \mu))$ три линейно независимых решения задачи Коши в точке z_0 , заданные условиями

$$U(z_0, 0, \mu) = {}^t(1, 0, 0); \quad U^{(1)}(z_0, 0, \mu) = {}^t(0, 1, 0); \quad U^{(2)}(z_0, 0, \mu) = {}^t(0, 0, 1), \quad (2)$$

для любого μ .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31109 мол-а).

Теорема 3.4.2. Для элементов группы монодромии уравнения (1) с нормировкой (2) на компактной римановой поверхности $F = D/\Gamma$ рода $g \geq 2$ верна точная вариационная формула

$$\begin{aligned} \chi(L, 0, \mu) = & \left[E + \sum_{|k|=1} B_{0;k}(Lz_0)\mu^k + \sum_{|k|=2} B_{1;k}(Lz_0)\mu^k + \dots \right. \\ & \left. + \sum_{|k|=n} B_{n-1;k}(Lz_0)\mu^k + \dots \right] \chi(L, 0, 0), \end{aligned}$$

где $L \in \Gamma$, при $\|\mu\| < \varepsilon$.

Литература

1. *Hejhal D. A.* Monodromy groups for higher-order differentials equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. v. 81, N 3, p. 590-592.

2. *Чуешев В. В.* Точная вариационная формула для группы монодромии на компактной римановой поверхности // Математические труды Института математики им. С. Л. Соболева, СО РАН. 2004. т. 7, № 2, С. 126–158.

С. М. Умархаджиев (Грозный)

umsalaudin@gmail.com

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА РИССА ИЗ ОБОБЩЁННОГО ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА В ОБОБЩЁННОЕ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВО МОРРИ

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ и w – вес на Ω . Классическое весовое пространство Морри $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w)$ определяется нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega, w)} := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(\bar{B}(x, r), w)}.$$

Теорема 1. Пусть $p_i, q_i \in [1, \infty)$ и v_i, w_i , $i = 1, 2$, веса на Ω . Если сублинейный оператор T ограничен из пространств Лебега $L^{p_1}(\Omega, v_1)$ и $L^{p_2}(\Omega, v_2)$ в пространства Морри $\mathcal{L}^{q_1, \lambda_1}(\Omega, w_1)$ и $\mathcal{L}^{q_2, \lambda_2}(\Omega, w_2)$ соответственно, то оператор T ограничен из $L^p(\Omega, v)$ в $\mathcal{L}^{q, \lambda}(\Omega, w)$, где p , q , λ и веса v, w определяются равенствами

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}, \quad \frac{\lambda}{q} = (1-t) \frac{\lambda_1}{q_1} + t \frac{\lambda_2}{q_2}, \\ v &= v_1^{(1-t)\frac{p}{p_1}} v_2^{t\frac{p}{p_2}}, \quad w = w_1^{(1-t)\frac{q}{q_1}} w_2^{t\frac{q}{q_2}}. \end{aligned}$$

Пусть $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$, и w – вес на Ω . Обобщённое гранд-пространство Морри $\mathcal{L}_{a,\nu}^{p,\lambda}(\Omega, w)$ определяется нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{a,\nu}^{p,\lambda}(\Omega, w)} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p-\varepsilon, \lambda-\nu\varepsilon}(\Omega, wa^\varepsilon)},$$

где ν есть действительное число и a — неотрицательна на Ω функция.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Пусть

1) $w \in A(p, q)$,

2) $a \in L^p(\mathbb{R}^n, w)$ и $a^\delta \in A(p - \delta, q_\delta)$ для некоторого $\delta \in (0, p - 1)$, где $\frac{1}{q_\delta} = \frac{1}{p - \delta} - \frac{\alpha}{n}$.

Тогда потенциал Рисса I^α ограничен из обобщённого гранд-пространства Лебега $L_a^{(p)}(\mathbb{R}^n, w)$ в обобщённое гранд-пространства Морри $\mathcal{L}_{a, \alpha}^{(p), \alpha p}(\mathbb{R}^n, w)$, где $A(p, q)$, $1 < p, q < \infty$, есть класс весов Макенхаупта-Уидена:

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [w(x)]^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

Т. М. Урбанович (Полоцк, Беларусь)

UrbanovichTM@gmail.com

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

где Γ — простой гладкий замкнутый контур на комплексной плоскости, коэффициенты a, b кусочно непрерывны на Γ .

Пусть задано конечное множество $F = F_+ \cup F_- \subset \Gamma$ и семейство $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$ неотрицательных вещественных чисел. Исключительный случай уравнения (1) возникает, когда функции $a \pm b$ допускают в точках $\tau \in F$ нули порядка α_τ :

$$(a + b)(t) = O(|t - \tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t \rightarrow \tau \in F_+,$$

$$(a - b)(t) = O(|t - \tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t \rightarrow \tau \in F_-.$$

Все исследования проводятся в весовых классах Гельдера. Получены условия разрешимости и явная формула решения уравнения (1) в предположении, что функции $(a \pm b)(t)$ допускают на контуре Γ конечное число нулей произвольных неотрицательных порядков.

JAVANSHIR J. HASANOV (Baku, Azerbaijan)
hasanovjavanshir@yahoo.com.tr, hasanov.javanshir@math.ab.az
Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the generalized
Morrey spaces with variable exponent

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $[1, \infty)$. An open set Ω is assumed to be bounded throughout the whole paper. We suppose that

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty, \quad (1)$$

where $p_- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) > 1$, $p_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty$.

Definition. Let $1 \leq p < \infty$. The generalized Morrey space $\mathcal{M}^{p(\cdot), \omega}(\Omega)$ is defined by the norms

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot), \omega}} = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p(x)}}}{\omega(x, r)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\tilde{B}(x, r))},$$

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p(\cdot), \omega, |\cdot|^\gamma}} = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p(x)}}}{\omega(x, r)} \|f\|_{L^{p(\cdot), |\cdot|^\gamma}(\tilde{B}(x, r))}.$$

We consider the potential type operators

$$I^{\alpha(x)} f(x) = \int_{\Omega} |x - y|^{\alpha(x) - n} f(y) dy, \quad 0 < \alpha(x) < n,$$

of variable order $\alpha(x)$.

Theorem. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open bounded set and p, q satisfying the log-condition and satisfy assumption (1), $\alpha(x_0)p(x_0) - n < \gamma < n(p(x_0) - 1)$, $\mu = \frac{q(x_0)\gamma}{p(x_0)}$, $-\frac{n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$, $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\inf_{x \in \Omega} \alpha(x) > 0$, $\sup_{x \in \Omega} \alpha(x)p(x) < n$, $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$ and the functions $\omega_1(x, r)$ and $\omega_2(x, r)$ fulfill the condition

$$\int_r^\ell t^{\alpha(x)} (t + |x - x_0|)^{-\frac{\gamma}{p(x)}} \omega_1(x, t) \frac{dt}{t} \leq C (r + |x - x_0|)^{-\frac{\gamma}{p(x)}} \omega_2(x, r).$$

Then the operator $I^{\alpha(\cdot)}$ is bounded from $\mathcal{M}^{p(\cdot), \omega_1(\cdot), |x - x_0|^\gamma}(\Omega)$ to $\mathcal{M}^{q(\cdot), \omega_2(\cdot), |x - x_0|^\mu}(\Omega)$.

И. Г. Царьков(Москва)

tsar@mech.math.msu.su

МНОЖЕСТВА, ОБЛАДАЮЩИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ
ВЫБОРКОЙ ИЗ ОПЕРАТОРА ПОЧТИ НАИЛУЧШЕГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ В НЕСИММЕТРИЧНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ ¹

Цель данной работы — охарактеризовать все замкнутые множества в полном симметризуемом пространстве, обладающих для любого $\varepsilon > 0$ непрерывной ε -выборкой относительно несимметричной полунормы.

Пусть на линейном действительном пространстве X определен однородный выпуклый неотрицательный функционал $p : X \rightarrow \mathbf{R}$ и при этом относительно полунормы $\|x\| = \max\{p(x), p(-x)\}$ пространство $\mathcal{X} = (X, \|\cdot\|)$ является полным. В этом пространстве рассмотрим непустое замкнутое множество M . Через $\varrho(x)$ обозначим $\inf_{y \in M} p(y - x)$. Множество всех непрерывных отображений $f : X \rightarrow M$ (относительно полунормы $\|\cdot\|$) будем обозначать как $C(X, M)$. Положим $V_0(x, r) = \{y \in X \mid p(y - x) < r\}$ ($x \in X, r \geq 0$).

Определение. Будем говорить, что множество M обладает непрерывной ε -выборкой относительно функционала p , если существует отображение $\varphi \in C(X, M)$ такое, что $p(\varphi(x) - x) \leq \varrho(x) + \varepsilon$.

Теорема 1. Следующие условия равносильны:

- а). Для любых $x \in X$ и $\delta > 0$ множество $V_0(x, \varrho(x) + \delta) \cap M$ является ретрактом $V_0(x, \varrho(x) + \delta)$;
- б). Для любых $x \in X$ и $\delta > 0$ множество $V_0(x, \varrho(x) + \delta) \cap M$ стягиваемо по себе в точку;
- в). $V_0(x, r) \cap M$ бесконечно связно для всех $x \in X$ и $r \geq 0$;
- г). Для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε -выборка для M ;
- д). Для любой полунепрерывной снизу функции $\psi : X \rightarrow \mathbf{R} : \psi(x) > \varrho(x)$ ($x \in X$) существует такое отображение $\varphi \in C(X, M)$, что $p(\varphi(x) - x) < \psi(x)$ для всех $x \in X$;
- е). Для любой полунепрерывной снизу функции $\theta : X \rightarrow (1, +\infty)$ существует такое отображение $\varphi \in C(X, M)$, что $\|\varphi(x) - x\| < \theta(x)\varrho(x, M)$ для всех $x \in X$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-01-00022-а).

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru
ОПЕРАТОРЫ ФАБЕРА
ДЛЯ ПОЛИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Через C^n обозначим n -мерное комплексное пространство, его точки $z = (z, z_2, \dots, z_n)$. Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \dots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \dots \times D_n^-$ — полицилиндрические области в C^n с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n$, где D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1 , ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k ; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi'_k(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$; $U^+ = \{w \in C^n : |w_k| < 1, k = 1, 2, \dots, n\}$ — поликруг в C^n , T^n — единичный тор.

Рассмотрим функцию $\tau(t)$, аналитическую в U^+ и имеющую почти всюду на торе T^n угловые граничные значения. Преположим, что функция $(\varphi^* \tau)(\zeta) = \tau(\varphi_1(\zeta_1), \varphi_2(\zeta_2), \dots, \varphi_n(\zeta_n))$ интегрируемая на остоле σ полицилиндрической области D^+ , т. е.

$$\int_{\sigma} |(\varphi^* \tau)(\zeta)| |d\zeta_1| \dots |d\zeta_n| = \int_{T^n} |\tau(t)| |(\psi'_1(t_1))| |(\psi'_n(t_n))| |dt_1| \dots |dt_n|. \quad (1)$$

Рассмотрим n -мерный интеграл типа Коши:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma} \frac{(\varphi^* \tau)(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^I}, \quad z \in D^+, \quad (2)$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \dots d\zeta_n$; вектор $(1, 1, \dots, 1)$ обозначим через I .

Если функции $\phi'_k(w_k) \in H^2(U_k^-)$, то условие (1) выполняется для любой функции $\tau(t) \in H^2(U^+)$. Тогда по формуле (2) каждой функции $\tau(t) \in H^2(U^+)$ ставится в соответствие некоторая функция $f(z)$, аналитическая в D^+ . Тем самым определяется интегральный оператор на множестве функций класса H^2 . Оператор, определяемый формулой (2), назовем оператором Фабера для полицилиндрической области D^+ в C^n и обозначим его через $\Phi = (\Phi \tau)(z)$.

Одно из основных свойств оператора Фабера состоит в том, что всякий многочлен n переменных $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$Q_{\Omega}(t) = \sum_{\ell \in \Omega} c_{\ell} t^{\ell} \quad (3)$$

преобразуется в многочлен по n переменным $z_1, z_2, \dots, z_n$ вида $\sum_{\ell \in \Omega} c_{\ell} \Phi_{\ell}(z)$, где $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$, Ω — некоторое подмножество целочисленной решетки

Z_+^n с неотрицательными координатами

$$\Phi_\ell(z) = \bigcup_{k=1}^n \Phi_\ell^{(k)}(z_k),$$

$\Phi_\ell^{(k)}(z_k)$ — многочлен Фабера одного переменного. Тем самым оправдывается название оператора.

Специфика многомерного случая проявляется в многообразии построения алгебраических полиномов в зависимости от конструкции множества Ω . Вместо многочлена (3) можно рассматривать кратный степенной ряд, тогда после применения оператора Фабера получаем кратный ряд Фабера. Далее исследуются граничные свойства оператора Фабера и оценки норм этого оператора в конкретных пространствах.

А. Ф. Чувенков (Ростов-на-Дону)
 chuvenkovaf@mail.ru

**О ВЛОЖЕНИИ ОБОБЩЁННЫХ ВЕСОВЫХ
 ГРАНД-ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННЫХ
 КВАЗИСТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

Рассматривается класс функций $f(x)$ на произвольном открытом множестве $\Omega \subseteq R^n$ с весом $\omega(x)$

$$K_M(\Omega, \omega) = \left\{ f : \rho(f, M, \omega) = \int_{\Omega} M(|f(x)|) \omega(x) dx < \infty \right\}$$

и пространство Орлича с нормой Колмогорова (Люксембурга), порождаемые квазистепенной N -функцией $M(u)$. Обозначим через $p = \min\{p_1, p_2\}$ — показатель, определяющий убывание (в нуле) или рост (в бесконечности) N -функции $M(u)$, где

$p_1 = \inf_{u>0} \varphi_M(u)$, $p_2 = \sup_{u>0} \varphi_M(u)$, $\varphi_M(u) = \frac{uM'(u)}{M(u)}$. Предполагаем, $1 < p < \infty$, что равносильно выполнению Δ_2 -условию для N -функций M и дополнительной к ней.

Определим обобщённое весовое гранд-пространство Орлича, порождаемое дополнительным весом $a(x) \in K_M(\Omega, \omega)$, следующим образом:

$$K_M^a(\Omega, \omega) =$$

$$\left\{ f \in K_M(\Omega, \omega) : \|f\|_{M,a} = \sup_{0 < \delta < 1-1/p} \left[\varrho(f, M^{1-\delta}, \delta M^\delta(a)\omega) \right]^{\frac{1}{1-\delta}} < \infty \right\}.$$

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$. Если

$$c = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \left[\frac{M(b(x))}{M(a(x))} \right]^{p-1} < \infty, \quad (1)$$

то справедливо вложение

$$K_{M)}^a(\Omega, \omega) \longrightarrow K_{M)}^b(\Omega, \omega),$$

причем $\|f\|_{M),b} \leq c\|f\|_{M),a}$.

Отметим, что условие (1) вытекает из условия

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \frac{b(x)}{a(x)} < \infty.$$

О. А. Чуешева (Кемерово)

simran@mail.ru

ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ С МАТРИЧНЫМИ ХАРАКТЕРАМИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая скалярных характеров на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики. В работе доказано существование матричных функций и дифференциалов для матричного характера, без условия регулярности функции, определяющей матричный этга-ряд Пуанкаре, на границе единичного круга $U \subset \mathbb{C}$. Пусть $F' = F \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ — поверхность типа (g, n) , $n \geq 0, g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в U и униформирующая поверхность F' . Тогда она имеет алгебраическое представление $\pi_1(F') \cong \Gamma' = \langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_n : \prod_{j=1}^g [A_j, B_j] C_1 \cdot C_n = 1 \rangle$. Характер ρ на Γ' это любой гомоморфизм из группы Γ' в группу $GL(m, \mathbb{C})$. Матричным (ρ, q) -дифференциалом на F' называется матричнозначный дифференциал $\omega(z)dz^q$ на U удовлетворяющий условию $\omega(Tz)T'(z)^q\rho(T) = \omega(z), T \in \Gamma', z \in U, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 1. Пусть $M(z)$ — матричнозначная мероморфная функция порядка $m, m \geq 2$, на U с конечным числом полюсов внутри круга и с условием $\int \int_U \|M(z)\| dx dy < \infty$, тогда для любых натуральных чисел $g \geq 2, n \geq 0, q \geq 0$ и матричного характера $\rho : \Gamma' \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ существует, отличный от тождественного нуля, мероморфный матричный (ρ, q) -дифференциал на F' , который задается формулой

$$\omega = \omega(z)dz^q = \sum_{T \in \Gamma'} M(T(z))T'(z)^q\rho(T)dz^q, T \in \Gamma', z \in U,$$

где $q + \lambda \geq 2$ и λ — вещественное число зависящее от q, g, n, m .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Iwasawa K.* Algebraic functions. — Trans. of Math. Monographs. V. 188. — New-York: Providence: Rhode Island, 1993. — 287 с.

Р. Ф. Шамоян (Брянск), С. М. Куриленко (Новозыбков)

rsham@mail.ru, sergkurilenko@gmail.com

О СЛЕДАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ¹

Пусть D — псевдовыпуклая область с гладкой границей в C^m , $H(D)$ — пространство голоморфных функций в D . $D^m = D \times \dots \times D$, $m \geq 1$, $H(D^m)$ — пространство голоморфных функций $F(z_1, \dots, z_m)$ в D^m (по каждой переменной в отдельности).

Далее, пусть $X \subset H(D^m)$, $Y \subset H(D)$ — квазинормированные подпространства типа Бергмана в $H(D^m)$ и $H(D)$, состоящие из аналитических функций. В докладе исследуется задача о нахождении следов на «диагонали» $(z, \dots, z)$ тех или иных X пространств.

Пусть $f \in X$, тогда мы показываем $f(z, \dots, z) \in Y$ и обратно, для любой функции $g \in Y$ существует такая функция f , что $f(z, \dots, z) = g(z)$, $z \in D$ и $f \in X$.

Отметим, что эта задача в случае единичного круга U ($D = U$) или единичного шара B ($D = B$) в C^n и в трубчатых областях над симметрическими конусами решалась различными авторами в последние годы (см. [3], [4]). Существенную роль во всех наших доказательствах, как и в указанных частных случаях играет так называемое R -разбиение (R -lattices) областей (см. [1], [2], [3]) и оценки для аналитических функций в них, полученные недавно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Abate M., Saracco A.* Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains // J. London Math. Soc. 83 (2011), 587–605.
2. *Abate M., Raissy J., Saracco A.* Toeplitz operators and Carleson measures in strongly pseudoconvex domains // Journal of Functional Analysis, 2013.
3. *Shamoyan R. F., Povpritz E. V.* Sharp theorems on traces in analytic spaces in tube domains over symmetric cones // Journal of Siberian Federal Universit, Mathematics and Physics 2013, 6(4), 527–538.
4. *Shamoyan R., Mihic O.* On trace of homomorphic functions on the unit polyball // Appl. Anal. D.Math 3, 2009, 198–211.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97508).

Секция III

Алгебра, топология, геометрия

В. И. Грачева (Нижний Новгород)

gratcevavi@yandex.ru

**ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ K_{af} – ЛИНЕАРИЗИРУЮЩЕГО
СООТВЕТСТВИЯ ПРЯМЫХ ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ
ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ**

В представленных тезисах продолжено начатое в работе [1] исследование вопросов, связанных с изучением характеристических направлений точечных соответствий Tn -мерных собственно евклидовых пространств $E_n, \bar{E}_n$ с использованием графика V_n отображения. Пространства $E_n, \bar{E}_n$ и поверхность V_n отнесены соответственно к реперам $\{x_1, \vec{e}_i\}, \{x_2, \vec{e}_{n+i}\}, \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_{n+i}\}$. Рассматривается случай, когда сеть Σ_n графика отображения ортогональна и при проектировании на E_n переходит в основание отображения. При этом отображение считается простым и для фиксированных значений i, j направления $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ не являются характеристическими. Доказана следующая теорема:

K_{af} -линеаризирующая прямая для прямой $[x_2, \vec{l}_1]$ перпендикулярна самой прямой при $s = -\frac{b_{ij}^{n+j}}{b_{jj}^{n+j}}$ тогда и только тогда, когда произведение скалярных проекций векторов вынужденной кривизны $\vec{b}_{ii}, \vec{b}_{jj}$ линий θ^i, θ^j графика на $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ соответственно равно произведению скалярных проекций вектора $\vec{b}_{ij}$ на направления $\vec{e}_i, \vec{e}_j$.

Пусть направления ω^i, ω^j основания отображения имеют характеристические направления. Тогда квадрат отношения коэффициентов искажения отображения T вдоль направлений $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ пропорционален отношению скалярных произведений вектора взаимной кривизны направлений $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ с векторами вынужденной кривизны линий θ^i, θ^j . В этом случае произведение скалярных проекций векторов $\vec{b}_{ii}$ и $\vec{b}_{jj}$ на $\vec{e}_i, \vec{e}_j$ соответственно будет обратно пропорциональным произведению абсцисс псевдофокусов прямой $[x, \vec{e}_j]$ вдоль направления $\vec{e}_i$ и прямой $[x, \vec{e}_i]$ вдоль направления $\vec{e}_j$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Грачева В. И. О некоторых случаях дифференцируемых отображений евклидовых пространств // Известия вузов. Математика. 1970. № 11(102). С. 22–30.

В. В. Казак (Ростов-на-Дону)

vkazak@pochta.ru

О КРИВИЗНЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе [1] Н. В. Ефимовым введено понятие сферического изображения двумерной поверхности R^2 , погруженной в трехмерное риманово пространство R_3 . В статье [2] он высказывает гипотезу, что в пространстве постоянной кривизны не существует поверхностей R_2 отрицательной кривизны с положительной кривизной сферического образа. В связи с этим в настоящей заметке дается формула для вычисления внутренней кривизны сферического изображения поверхности R_2 , погруженной в R_3 .

Определение. *Сферическим образом R_2 назовем, согласно Н. В. Ефимова, метрическое пространство с метрикой*

$$d\sigma^2 = (Dn)^2,$$

где D — знак абсолютного дифференцирования, а n — нормальный вектор к R_2 .

Имеют место следующие формулы. Внутренняя кривизна сферического образа $R_2 \subset R_3$ вычисляется по формуле

$$K_i^* = \frac{K_i}{K_i - K_R} - \frac{1}{w^*} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\varkappa_2 R_{2312}}{w^*} - \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\varkappa_1 R_{1312}}{w^*} \right],$$

где K_i — внутренняя кривизна R_2 , K_R — кривизна пространства R_3 ; w^* — дискриминант формы $d\sigma^2$; $\varkappa_1, \varkappa_2$ — главные кривизны поверхности; R_{2312}, R_{1312} — смешанные римановы кривизны объемлющего пространства, которые тождественно равны нулю, если риманово пространство имеет постоянную кривизну, и обращаются в ноль, если нормаль к поверхности совпадает с главным направлением объемлющего пространства. Внутренняя кривизна сферического образа поверхности R_2 в пространстве постоянной кривизны вычисляется по формуле: $K_i^* = \frac{K_i}{K_i - K_R}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ефимов Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сб. 1964. 64 (106):2. С. 286–320.
2. Ефимов Н. В. Поверхности с медленно изменяющейся гауссовой кривизной // УМН. 1966. Т. XXI, 5 (131). С. 3–58.

В. А. Попов (Москва)
vlapopov@gmail.com
**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ АФИННЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Рассмотрим локально заданную аналитическую аффинную связность Γ_{ij}^k на аналитическом многообразии M . Инфинитезимальные аффинные преобразования – это векторные поля $\xi^k(x)$ такие, что

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} \xi^l - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + \Gamma_{il}^k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \right) = 0.$$

Теорема 1. Пусть ζ – алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований на пространстве аффинной связности M , $\eta \subset \zeta$ – стационарная подалгебра, G – односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H \subset G$ – подгруппа с алгеброй Ли η . Тогда, если алгебра ζ не имеет центра, то подгруппа H замкнута в G и таким образом, определено однородное риманово пространство G/H .

В случае риманова многообразия локально заданная аффинная связность аналитически продолжается до аффинной связности непродолжаемого многообразия M такого, что любая изометрия между открытыми подмножествами M продолжается до изометрии всего многообразия. Для метрик, алгебра Ли векторных полей которых не имеет центра, определим квазиполное продолжение, как непродолжаемое многообразие M , которое не допускает нетождественных сохраняющих векторные поля Киллинга изометрий между своими открытыми подмножествами. Такое продолжение единственно, и каждая изометрия между открытыми подмножествами продолжается до изометрии всего M .

Данная работа является естественным продолжением работ [1], [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Popov V. On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Kharkov «Apostrof», 2011.
2. Попов В. А. Локально заданные изометрии псевдоримановых аналитических пространств. // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках. Издательская группа «Апостроф». Харьков. 2012.

E. V. Rubashkina (Moscow)

lerubac@yandex.ru

A SELF-INTERSECTION THEORY FOR A MANIFOLD

A universe of the intersection problem is sketched and explained. Minimum of the cardinality path components of intersection set are discussed.

In middle of the 1940's H. Whitney proved theorem: for any closed n -manifold M there is embedding M in N . N is Euclidean $2n$ -space. It followed than that self-intersection index equally 0.

This problem are explored in setting when smooth manifolds M and N are orientable or not, connected. M is n dimensional and closed, N is $2n$ dimensional and simply connected. Map f is homotopic to embedding, if n at least 3, for any mapping f from M to N .

In the paper recent developments will be described as well as their connection to Nielsen theory.

We will focus on the topological setting, and will assume that the spaces involved are compact, Hausdorff, path-connected and admit universal covering spaces.

REFERENCES

- [1] H. Whitney, The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space, The annals of mathematics, 45 (1945), 220–246.
- [2] J. Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Univ. Press, 1965.
- [3] C. K. Mc Cord, The three faces of Nielsen: Coincidences, intersections and preimages, Topology and its appl., 103 (2000), 155–177.
- [4] H. Schirmer, Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten, J. Rein Angew. Math. 194 (1955) 21–39.

А. В. Савинов, С. В. Умнова (Москва)

avsavinov@yandex.ru

T^1 -РАСШИРЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ

Пусть (P, M, π, G) – главное T^1 -расслоение над $\mathcal{AC}$ -многообразием с почти контактной структурой $\{\Phi, \eta, \xi, g\}$. Известно [1], что фиксация в пространстве расслоения связности внутренним образом индуцирует в нем $\mathcal{AH}$ -структуру, которая называется $\mathcal{AH}$ -расширением $\mathcal{AC}$ -структуры, заданной на базе.

Обобщенными структурами Кенмоцу (короче $\mathcal{GK}$ -структурами), называются $\mathcal{AC}$ -структуры, для которых выполняется равенство:

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(X)\Phi Y,$$

а многообразия, на которых заданы эти структуры, обобщенными многообразиями Кенмоцу ($\mathcal{GK}$ -многообразиями) [2].

Пусть (P, M, π, G) – главное T^1 -расслоение над $\mathcal{GK}$ -многообразием M . Тогда в тотальном пространстве расслоения будет индуцироваться ($\mathcal{AH}$ -структура), причем связь структурных тензоров будет выражаться равенствами:

$$\begin{aligned} B^{abc} &= C^{abc}; B^{ab0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}C^{ab}; & B^{ab}{}_c &= B^{a0}{}_0 = 0; \\ B^{0ab} &= \frac{2}{3\sqrt{2}}C^{ab} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega^{ab}; & B^{ab}{}_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}C^{ab} - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega^{ab}; \\ B^{0a0} &= -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega^a_0; & B^{a0}{}_b &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\delta^a_b + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\Omega^a_b. \end{aligned} \quad (2)$$

где слева от знака равно стоят компоненты структурных и виртуальных тензоров пространства расслоения, а справа компоненты антиувлечений структурных тензоров $\mathcal{AS}$ -структуры базы расслоения и компоненты 2-формы, представляющей характеристический класс главного тороидального расслоения.

Из (1) следует, что $\mathcal{A}$ -расширение $\mathcal{GK}$ -многообразия M является квазикелеровым ($\mathcal{QS}$) тогда и только тогда, когда

$$\Omega^{ab} = \sqrt{-1}C^{ab}; \Omega^a_b = -\sqrt{-1}\delta^a_b.$$

Более того, если каноническое T^1 -расширение является $\mathcal{QS}$ -структурой, то $\mathcal{GK}$ -структура является $\mathcal{SGK}$ -структурой II рода.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Савинов А.В. Главное тороидальное расслоение над нечетномерной базой // Научные труды МПГУ. Серия: Естественные науки. 2003, С. 95-99
2. Умнова С.В. О дифференциальной геометрии обобщенных многообразий Кенмоцу // Актуальные проблемы математики, физики, информатики и методики их преподавания (Юбилейный сборник 130 лет). — М.: Прометей, 2003, С. 111–113.

Секция IV
Теория вероятностей и
дискретный анализ

Н. И. Головки, О. В. Бондрова (Владивосток)
bondrova.ov@dvfu.ru
**НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ
СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В СМО
СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ¹**

Во многих областях практической деятельности люди сталкиваются с необходимостью пребывания в состоянии ожидания. Подобные ситуации возникают в очередях, в билетных кассах, в крупных аэропортах. Во всех перечисленных случаях имеем дело с массовостью и обслуживанием. Изучением таких ситуаций занимается теория массового обслуживания (ТМО).

Основной задачей теории ТМО является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания.

В данной работе рассматриваются модели систем массового обслуживания, которые применяются в прикладной области – в информационных сетях.

В работе исследована СМО типа $M/M/1$ с одним прибором, бесконечным накопителем с экспоненциальным законом обслуживания с параметром μ , то есть время обслуживания η распределено по закону $B_\eta(x) = P\{\eta < x\} = 1 - e^{-\mu x}$. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом, изменяющимся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства T , распределенными по экспоненциальному закону с параметром α . Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа плотность распределения $\varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx$.

В работе показано, что условие отсутствия перегрузок $b < \mu$ является достаточным условием, а условие $\bar{\lambda} < \mu$ является необходимым условием существования стационарного режима СМО, где $\bar{\lambda} = \int_a^b x\varphi(x)dx$ – среднее значение интенсивности входного потока в точках разрыва.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания // М.: Машиностроение. 1979.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00456).

И. В. Павлов, О. В. Назарько (Ростов-на-Дону)
pavloviv2005@mail.ru
ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПЛОТНОСТЕЙ И
ПОСТРОЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАННЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИХ БАЗИСОВ 1-ГО РОДА ¹

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ — фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω — произвольное множество, а $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ — возрастающая последовательность σ -алгебр на нем (фильтрация). Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathcal{F}_n$, называется деформацией 1-го рода (соотв., слабой деформацией), если при всех $n \in N = 0, 1, 2, \dots$ выполняются соотношения абсолютной непрерывности $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$ (соотв., соотношения эквивалентности $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \sim Q^{(n)}$).

Для D1 $\mathbf{Q}$ введем процесс плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, согласно формуле

$$dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n dQ^{(n)}. \quad (1)$$

В настоящей работе:

1) разработана методика преобразования деформаций 1-го рода к слабо деформациям и деформированных мартингалов 1-го рода к слабо деформированным мартингалам;

2) в случае атомарных σ -алгебр $\mathcal{F}_n$ получены (в терминах так называемых «связывающих» процессов) необходимые и достаточные условия на адаптированный процесс $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$, обеспечивающие существование деформаций 1-го рода $\mathbf{Q}$, удовлетворяющих соотношению (1), и описана процедура построения таких деформаций.

Основной в рамках пункта 1) является следующая

Теорема. Пусть $\forall n \in N$ σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ полна относительно $Q^{(n)}$, $\mathbf{Q}$ — деформация 1-го рода, а τ — марковский момент, определенный формулой $\tau = \inf\{n \geq 0 : h_n = 0\}$. Тогда «остановленная» деформация $\mathbf{R} = \left(\frac{Q^{(\tau \wedge n)}}{Q^{(\tau \wedge n)}(\Omega)}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n} \right)$ корректно определена и является слабой деформацией.

Проблематика пункта 2) для более общих σ -алгебр $\mathcal{F}_n$ связана с чрезвычайно трудной задачей продолжения меры с σ -подалгебры на σ -алгебру: даже процесс $h_n \equiv 1$ не всегда порождает деформацию 1-го рода.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00637а и 13-07-13159).

В. Н. Беркович, М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)

bvn06@yandex.ru, black_drive@smtp.ru

**АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОЦЕДУР
МНОГОМЕРНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ
КЛАСТЕРИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ**

При кластеризации объектов, возникают проблемы, обусловленные большим количеством массивов данных характеризующих объект. К тому же данные в разных массивах имеют разные типы, размерности и интервалы представления. Естественно, что программная реализация процедуры кластерного анализа (КА) **не имеет** универсального *алгоритма*. (Термин 'алгоритм' для конкретной процедуры будем записывать — *алгоритм*. Термин 'алгоритм' применительно к последовательности применения процедур, будем записывать — **алгоритм**). Степень адекватности результатов работы процедуры КА тем лучше, чем меньшее количество уникальных факторов, необходимых для отнесения объекта к тому или иному кластеру.

В статье описывается **алгоритм**, позволяющий - на первом этапе - унифицировать форму представления данных из разных **N** массивов. На втором этапе, выделить **n** факторов, определяющих уникальность признаков подобъектов кластера. На третьем этапе определить количество **k** кластеров. Реализуется **алгоритм** последовательным применением процедур многомерного статистического анализа. Первая процедура – переход к безразмерным величинам: каждый элемент массива нормируется на значение элемента, имеющего максимальное значение. Вторая процедура – нормализация данных; позволяет любой массив данных преобразовать в массив, в котором среднее значение равно нулю, а стандартное отклонение равно 1. Третья процедура – построение корреляционной матрицы; позволяет выявить группы, **значимо** коррелируемых параметров. Четвёртая процедура – факторный анализ (ФА); позволяет каждую из групп заменить одним или двумя факторами. Таким образом, происходит понижение размерности от **N** до **n**. Заключительным этапом является применение КА.

Предлагаемый **алгоритм** был апробирован при работе с объектами, каждый из которых описывался **N** = 50 параметрами. После применения ФА, было выявлено **n** = 7, практически, некоррелируемых факторов. Применение процедуры КА позволило выделить **k** = 4 кластера.

Секция V
Дискретная математика и
информатика

М. С. Беспалов (Владимир)

bespalov@vlsu.ru

ЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УОЛША¹

Основной прием цифровой обработки сигналов состоит в том, что исходный сигнал x (представленный в виде вектор-столбца) преобразуется линейным оператором F в выходной сигнал $y = F \cdot x$. Получатель сигнала y восстанавливает исходный $x = F^{-1} \cdot y$. Принято работать в классе ортогональных преобразований, определяемых условием $F \cdot F^* = N \cdot I$, где N - порядок матриц, I - единичная матрица. В случае дискретных преобразований Уолша $N = 2^n$ и пространства вещественные (то есть $F^* = F^T$).

Наиболее популярно дискретное преобразование Уолша в нумерации Адамара, заданное матрицей H_n Сильвестра-Адамара в виде кронекеровой степени матрицы $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Как строки, так и столбцы, этой матрицы H_n есть дискретные функции Уолша.

Определение. Назовем W -матрицей уровня n такую матрицу порядка $N = 2^n$, все строки которой есть различные дискретные функции Уолша и все столбцы которой есть различные дискретные функции Уолша.

Теорема. Множества W -матриц уровня n и невырожденных над полем F_2 бинарных матриц порядка n изоморфны.

Любая бинарная матрица задает систему образующих W -матрицы и поэтому служит кодирующей матрицей для W -матрицы.

В докладе рассматриваются принципы кодирования и декодирования W -матриц, их нормировка, степени нормированных матриц, собственные числа и собственные подпространства, спектральное разложение оператора. Предложены варианты быстрых алгоритмов. Приведены примеры классификации W -матриц уровня n . Предложен метод построения последовательности порождающих операторов для дискретных функций Уолша и найдены рекуррентные свойства элементов этой последовательности.

Все приведенные конструкции дискретного двоичного гармонического анализа допускают обобщение на случай дискретного p -ичного гармонического анализа.

¹ Доклад подготовлен в рамках проекта 14-11-00338 Российского научного фонда

С. И. Гуров (Москва)

sgur@cs.msu.ru

МОДЕЛЬ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ: ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Проблема оценки вероятности ошибочной классификации произвольного объекта одна из основных в теории обучения по прецедентам. В основном потоке публикаций по данной тематике рассматривается постановка задачи в рамках того или иного развития известной теории Вапника-Червоненкиса (VC -теория). В данной работе представлены результаты в решении указанной задачи, полученные с использованием новой информационной модели алгоритма классификации, свободной от положений VC -теории и классического статистического подхода к оценке вероятности случайных событий.

Для оценки вероятности P правильной классификации алгоритмом A произвольного объекта осуществляется тестирование алгоритма на контрольной выборке прецедентов. При этом единственными данными для оценки является информация о том, что на контрольной выборке длины n алгоритм совершил m ошибок. В подходах на основе VC -теории принимается Гипотеза: «Алгоритм классификации выбирается из фиксированного заранее семейства F ». Результатом этого становится необходимость решать непростые, а подчас и неразрешимые вопросы определения различных характеристик класса F , таких как ёмкость, функция роста, коэффициент разнообразия и др.

В основе предложенной модели лежит введение в рассмотрение параметра $0 \leq t \leq 1$ переобученности алгоритма и его статистическое оценивание. Крайние значения параметра означают: $t = 0$ удалось построить алгоритм, всегда правильно осуществляющий классификацию любого предъявляемого объекта; $t = 1$ построенный алгоритм выдаёт случайный (с вероятностью p — правильный) ответ о принадлежности объекта.

Предложенная информационная модель более адекватна классифицирующему алгоритму, чем классическая и не использует вышеприведённую Гипотезу являющуюся наиболее слабым местом VC -теории. На основе введённой модели получены более точные, чем классические, оценки надёжности классификации.

А. Г. Дьяконов (Москва), А. М. Головина (Москва)
djakonov@mail.ru, nastya_gm@mail.ru
**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ДАННЫХ С
КАТЕГОРИАЛЬНЫМИ (ФАКТОРНЫМИ) ПРИЗНАКАМИ**¹

В докладе даётся обзор методов решения задач классификации и регрессии с категориальными признаками. Категориальный (факторный, номинальный) признак – это признак, значения которого обозначают принадлежность объекта к какой-то категории (например, национальность, профессия, идентификационный номер, тарифный план, издательство и т.п.). В последние годы появились задачи, в которых почти все или даже все признаки категориальные. Одна из таких задач используется как тестовая для алгоритмов из обзора: задача Международного соревнования «Amazon.com – Employee Access Challenge» о построении рекомендательной системы для службы безопасности.

В докладе рассматриваются следующие модели алгоритмов:

Линейные алгоритмы, в которых ответ выражается в виде функции от линейной комбинации признаков нового (вещественного) признакового пространства.

Обобщения байесовских алгоритмов, основанные на кодировании категорий оценками вероятностей принадлежности к классам объектов категорий.

Сингулярное разложение матрицы бинарных признаков, которая является матрицей характеристических векторов принадлежностей к категориям.

Алгоритмы, основанные на близости, которые обобщают модель ближайших соседей kNN и алгоритмов вычисления оценок (ABO).

Тензорные разложения, в которых номера категорий интерпретируются как индексы многомерной матрицы.

Кодировки категориальных признаков в вещественные, которые позволяют применять стандартные алгоритмы, например, случайные леса (random forest).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дьяконов А. Г. Методы решения задач классификации с категориальными признаками // Прикладная математика и информатика. 2014 (в печати).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-07-00965).

Секция VI
Математические модели в
естественных науках, технике,
экономике и экологии

Н. В. Адукова, К. Н. Кудрявцев (Челябинск)
kudrk@mail333.com
**ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО
ПЛАНИРОВАНИЯ РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТА**

В работе исследуется дискретный аналог непрерывной модели управления рекламным бюджетом из [1], [2].

Рассматривается задача определения оптимального размера рекламных расходов $u[t]$ в момент времени t компании-монополиста. Динамика управляемой системы задается разностным уравнением:

$$x(t+1) = (1-\delta)x(t) + \rho u[t]\sqrt{1-x(t)},$$

где $x(t)$ – доля рынка, принадлежащая компании в некоторый момент времени t , $x(0) = x_0$; константа δ характеризует спад объема продаж при отсутствии рекламы; параметр ρ – коэффициент эффективности затрат на рекламу; $u[t]$ – расходы на рекламу в момент времени t .

Целью ЛПР является максимизация функционала

$$J(x, u) = \frac{mx(T)}{(1+r)^T} + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{mx(k) - cu^2[k]}{(1+r)^k}.$$

Здесь постоянная m – коэффициент перевода доли рынка $x(t)$ в ее «денежное» выражение, r – коэффициент дисконтирования, константа c характеризует стоимость рекламы.

С помощью метода динамического программирования Беллмана было построено оптимальное управление в виде

$$u^* = (u^*(0, x), u^*(1, x(1)), u^*(2, x(2)), \dots, u^*(T-1, x(T-1))),$$

где

$$u^*(k, x(k)) = \frac{m\rho\alpha_{k+1}\sqrt{1-x(k)}}{2c(1+r)^{T-k}}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1,$$

постоянные $\alpha_k = (1+r)^{T-k} + \frac{m\rho^2\alpha_{k+1}}{4c(1+r)^{T-k}} + (1-\delta)\alpha_{k+1}$, $\alpha_T = 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Sorger G.* Competitive dynamic advertising: a modification of the case game // Journal of Economic Dynamics and Control. 1989, № 13. pp. 55–80.
2. *Sethi S., Prasad A., He X.* Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model // Journal of Optimization Theory and Applications. 2008, № 139(2). pp. 351–360.

Ю. В. Афанасенкова (Калуга)

dvoryanchikova_y@mail.ru

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ
РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СИСТЕМЕ
КОНТАКТИРУЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ**

Изучение вопросов теплопроводности в системах контактирующих стержней связано с тем [1], что в технических устройствах приходится постоянно встречаться со случаем контакта двух и более стержней. Уточнение метода расчета процессов теплопередачи в таких системах требует знания потоков тепла вдоль стержня, которые могут быть значительными. В задачах термоупругости как стационарных, так и нестационарных необходимо знание поля температур, особенно вблизи линии контакта. В данной работе построены матрицы потоков P и матрицы потенциалов R для одного и контакта двух и более стержней.

Решение задач теплопередачи для системы стержней требует новых математических методов, так как связаны с большим разнообразием свойств стержней. Наиболее удачным математическим аппаратом является метод обобщенных степеней Берса (ОСБ), развитый применительно к задачам на графе в работах Гладышева Ю.А. [3].

Система стержней моделируется некоторым графом. Пусть граф имеет N вершин, среди которых L открытых и S закрытых. На открытых вершинах заданы значения первых производных по Берсу решения $T^{(i)}$

$$DT^{(i)} = I_i, i = 1, 2, \dots, L. \quad (1)$$

На закрытых вершинах заданы или значения температуры, или значения потоков, которые определены первыми производными по Берсу. На ребрах графа задано уравнение второго порядка для температуры. Система учитывает обмен с внешней средой.

В сообщении приведены основные уравнения для определения температур и потоков всех вершин графа. Знание этих величин дает возможность найти поле температур в любой точке i -го стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладышев Ю. А. К вопросу об использовании метода Фурье на геометрическом графе // Современные методы физико-математических наук. Т.1. - Орел, 2006. С.12-16;
2. Гладышев Ю. А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга, 1997 г.

В. П. Беркович (Ростов-на-Дону)

bvn06@yandex.ru

**ВОПРОСЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В
КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЯХ**

В рамках линейной модели динамической теории упругости исследованы вопросы локализации волнового процесса в окрестности свободной поверхности и ребра однородной клиновидной среды при её возбуждении источниками колебаний на свободной поверхности. На основе построения функционально-инвариантных решений для динамических уравнений теории упругости и использования вариационного принципа Гамильтона-Остроградского предложен метод изучения характера формирования волнового поля смещений при возбуждении однородной клиновидной среды источниками плоских стационарных и нестационарных колебаний. Переход от нестационарного случая колебаний к стационарному осуществляется с помощью известного принципа предельной амплитуды. Математически обоснована корректность применения этого принципа в рассматриваемых задачах. Получены выражения поля смещений точек поверхности клиновидной среды в явной форме. Представлены соотношения связи между геометрическими и динамическими характеристиками клиновидной среды, а также формулы расчета фазовых скоростей волн локализации и критических углов раствора, при которых эти волны появляются на границе клиновидной среды. Рассмотрен вопрос локализации волнового процесса на ребре клиновидной среды в случае возникновения пространственных колебаний. Для этого случая построены функционально-инвариантные решения специального вида для динамических уравнений теории упругости. Из полученных результатов вытекает, что процесс локализации волнового процесса в клиновидной среде зависит только от механических и геометрических параметров среды и не зависит от характера источников возбуждаемых колебаний. Описаны результаты численной реализации предложенного выше подхода.

Н. В. Боев, О. В. Панкратова(Ростов-на-Дону)

boyev@math.rsu.ru

**ДВУКРАТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ КОРОТКИХ ВОЛН ОТ
РАССЕИВАТЕЛЕЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ:
ЭЛЛИПСОИДА, ГИПЕРБОЛОИДА, ПАРАБОЛОИДА**

В архитектурной структуре помещений различного назначения наряду с плоскими отражателями, дифракция на поверхностях которых рассчитывается достаточно просто, могут присутствовать твердые неплоские отражатели канонической формы. Как правило, в практических схемах расчета акустики помещений граничные поверхности неплоских пространственных отражателей заменяются набором плоских граней вписан-

ного в поверхность или описанного около нее многогранника. В уточненных схемах расчета звуковых полей необходим явный учет искривленности поверхностей через параметры кривизны поверхностей отражателей в точках зеркального отражения и переотражения акустических волн. На основе полученной общей формулы для давления в двукратно отраженной высокочастотной акустической волне исследовано рассеяние волны на поверхностях канонической формы: сферы, цилиндра, трехосного эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперboloида, эллиптического и гиперболического параболоида. Общая формула получена на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа в приближении геометрической теории дифракции. Проведен качественный и количественный анализ амплитуды давления в переотраженной волне в зависимости от удаленности источника и приемника волны от поверхностей пространственных отражателей при различных траекториях акустической волны, представляющих собой ломаные линии, находящиеся в одной плоскости.

Е. М. Богатов (Старый Оскол), В. П. Богатова (Воронеж)
embogotov@inbox.ru, mverabog@mail.ru
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРИВЛЕКАТЕЛЬНОСТЬ
ЦЕНЫ НА НОМЕР В ОТЕЛЕ

Известно, что цены на номера в отелях во многих странах мира подвержены неконтролируемому разбросу. Знание истории наблюдений за этими ценами позволяют сконструировать индексы, с помощью которых легко определить, завысил (занизил) ли конкретный отель цену номера на данную дату или нет.

В соответствии со сложившейся в крупных туристических центрах практикой будем считать, что номер в отеле можно забронировать за N дней вперед. Будем фиксировать наблюдения за ценами на номера в отелях города. Для каждого i -го ($i = 1, \dots, K$) отеля наблюдения за ценами будут представлять собой многомерный случайный процесс $X_i(t)$ с дискретным временем $t = 1, \dots, N$. Проводя усреднение по истории наблюдений на каждый день, получим вектор *среднеаблюдаемых цен* $\vec{P}^i$, состоящий из компонент P_j^i . Через $P_j = \frac{\sum_i P_j^i}{K}$ будем обозначать среднюю цену на номер в отелях города.

Для определения степени привлекательности сегодняшней цены на номер в отеле вычислим две средневзвешенных относительных цены: (ср. с [1]) $S_j^i = \frac{P_j^i}{P_j}$ и $\hat{S}_j^i = \frac{\hat{P}_j^i}{\hat{P}_j}$. В последнем равенстве $\hat{P}_j^i$ - это *сегодняшняя* цена на номер в i -м отеле для j -го дня; $\hat{P}_j$ - *средняя цена* в момент $t=j$ или на j -й день (здесь j - сегодняшний и последующие дни до дня $j+N$).

Определим *A-индекс привлекательности цены* - как величину, равную

$$\Delta S_j^i = S_j^i - \hat{S}_j^i. \quad (2)$$

Тогда, если $\Delta S_j^i > 0$, то отель понизил цену относительно среднерыночной (цена номера *привлекательна* для потребителя).

В докладе будут также представлены различные обобщения формулы (1) для оценки степени привлекательности цены в будущем (за горизонтом бронирования).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Богатов Е. М., Богатова В. П. Об определении степени привлекательности цены за номер в отеле... // Вестник БУПК, 2013. №1. С. 251–255.

Е. В. Бухович, Р. Г. Мальцев, А. С. Магомадов (Краснодар)
evapo@bk.ru

МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ УДЕЛЬНОЙ ИЗОБАРНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ И ПЛОТНОСТИ ГАЗОВЫХ КОНДЕНСАТОВ В ЖИДКОЙ ФАЗЕ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ

Для современной науки представляет большой интерес исследование калорических свойств жидкостей. Нами были изучены удельная изобарная теплоемкость и плотность газовых конденсатов Ставропольского, Рыбальского, Юбилейного, Опошнянского, Щебелинского, Солоховского и Бухарского месторождений природного газа, в жидкой фазе, в широком диапазоне температур и давлений. Экспериментальная часть исследований проводилась на установке с адиабатным калориметром, в которой реализован метод монотонного разогрева. Относительная погрешность эксперимента не превышает 3 %.

На основании полученных данных удалось построить математические модели поведения удельной изобарной теплоемкости и плотности. Выяснилось, что удельная изобарная теплоемкость газовых конденсатов коррелирует с молярной массой и температурой, а корреляция с давлением практически отсутствует. Плотность же напротив – достаточно сильно зависит от давления. Математическая обработка производилась в приведенных координатах. Удельная изобарная теплоемкость рассматривалась как функция от температуры (приведенной температуры). Плотность – как функция от температуры и давления (приведенных). Относительная погрешность полученных расчетов не превышает 1,5 %. Также была произведена экстраполяция полученных математических моделей на газовые конденсаты других месторождений и чистые углеводороды – результаты оказались удовлетворительными.

T. A. Vasilyeva, E. I. Vasilev (Volgograd)
tatiana_vas@mail.ru
SD MULTI-IMPLICIT METHODS
FOR ODEs STIFF SYSTEMS

The new set of absolutely stable difference schemes for a numerical solution of ODEs stiff systems is submitted. The main feature of the set is the multi-implicit finite differences with the second derivatives of the desired solution. The schemes with 4, 6 and 8 orders of accuracy in detail are considered. The testing results of difference schemes on the Hill's problem and the Kreiss stiff system are shown. The procedure of automatic selection of an integration step with the control of accuracy is submitted. The considerable advantage in efficiency of the high order schemes with the automatic step selection is shown.

Difference schemes with these coefficients are of the 4th, 6th and 8th-order approximation. The last two were first studied in [1]. We shall call them MISD4, MISD6 and MISD8 respectively (Multi-Implicit Second Derivative).

Report will present the results of testing these methods on the task of Hill, which was carried out in [1]. Processed integration system of four first order differential equations in a small area in time $t \in [0, 2]$ with the different steps τ and calculated the difference between the rate of numerical solutions to the control (exact) solution at the final moment $t = 2$. Monitoring solution previously calculated as accurately as possible.

Summarizing the above results, we note that the proposed multi-implicit scheme with the second derivative of the constant errors are small, have the A- stable and can implement an effective adaptive changes in the automatic integration step with precision control. These benefits more than offset their main disadvantage of increasing the computational cost of one step of integration compared to other known methods for stiff differential equations.

Список литературы

- [1] E. I. Vasilev, T. A. Vasilyeva, M. N. Kiseleva. Multi-implicit SD-methods for stiff systems of differential equations. Vestnik of the Volgograd State University, V. 1, Mathematics Physics, 2012, (2) 17.

Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону)
РАСЧЁТ СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ЕВРОПЕЙСКОГО
ОПЦИОНА-КОЛЛ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ (B,S)-РЫНКА СО
СЛУЧАЙНЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ В
СЛУЧАЕ НЕСАМОФИНАНСИРУЕМЫХ СТРАТЕГИЙ

Рассмотрим следующую модель (B,S)-рынка:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \\ dB_t &= rB_t dt, \\ t &\in [0, T]. \end{aligned}$$

Заданы начальные условия: $S_t|_{t=0} = S_0, B_t|_{t=0} = B_0$. Фильтрация $F_t = \sigma(W_s, s \leq t)$, F_0 состоит из двух событий: достоверного и невозможного и пополнено всеми событиями с нулевыми вероятностями.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} \min X_0 \\ d\left(\frac{X_t}{B_t}\right) &= \gamma_t d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + d\left(\frac{C_t}{B_t}\right) \\ X_T &\geq f_T. \end{aligned}$$

Процесс $(C_t)_{t=0}^T$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dC_t = C_t(adt + bdW_t).$$

Решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} X_t &= C_t + B_t E^*\left(\frac{f_T - C_T}{B_T} / F_t\right) = V(t, S_t), \\ \gamma_t &= \frac{\partial V}{\partial x}(t, S_t) - \frac{C_t b}{S_t \sigma}. \end{aligned}$$

В качестве финансового обязательства рассмотрим Европейский опцион-колл:

$$f_T = (S_T - K)^+.$$

Тогда формула для справедливой цены примет вид:

$$\begin{aligned} X_0 &= \\ C_0 + S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - C_0 e^{(a-r)T}, \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Белявский Г.И., Данилова Н.В. Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Расчёты и финансовые приложения//Lambert Academic Publishing, 2012.

В. Л. Дильман, А. Н. Дияб (Челябинск)

dilman49@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ РАСТЯГИВАЕМОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ

Исследуются граничные задачи для системы уравнений пластического равновесия дискрето-неоднородной полосы из жестко-пластического материала, моделирующие ее напряженное состояние в критический момент нагружения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (1)$$

Здесь τ_{xy} , σ_x и σ_y — касательное и нормальные напряжения, $k = k(x, y)$ — ступенчатая (размерная) функция. Это параметр пластичности, характеризующий неоднородность прочностных свойств полосы. Полоса находится под растягивающей нагрузкой в условиях плоской деформации. Точки пересечения линий разрыва функции k (контактных границ участков различной прочности) друг с другом и с границей полосы являются особыми (в них касательные напряжения разрывны). Система (1) является квазилинейной и имеет гиперболический тип. Условия равновесия на контактных границах после нормировки функции k приводят к условиям сопряжения на них — внутренним граничным условиям. Более прочные участки могут в критический момент оставаться жесткими, а могут пластически деформироваться. Метод решения задачи сопряжения [1] позволяет определять, при каких значениях геометрических и механических параметров более прочные участки в критический момент находятся в пластическом состоянии. Искомые напряжения разрывны на некоторых кривых [2], проходящих через особые точки. Эти кривые являются интегральными кривыми обыкновенных дифференциальных уравнений, метод нахождения которых основан на исследовании полей характеристик в окрестностях особых точек. Допускается наличие дефекта в неоднородной полосе. Предлагаемый подход в ряде частных случаев позволяет вычислять критическую нагрузку, а также исследовать влияние расположения дефекта на ее величину.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дильман В. Л., Карпета Т. В. Напряженное состояние пластического слоя с переменным по толщине пределом текучести при плоской деформации // Известия ВУЗов. Математика. 2013. № 8. С. 34–43.
2. Дильман В. Л. Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 89–102.

В. П. Димитров, Л. В. Борисова, И. Н. Нурутдинова
(Ростов-на-Дону)
kaf-qm@donstu.ru
**О ПОДХОДАХ К ПРИНЯТИЮ РЕШЕНИЙ ПРИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКЕ**

Одной из важнейших задач в области техники является разработка и внедрение машин нового, интеллектуального типа. Как правило, такие машины являются сложными многоуровневыми иерархическими системами, функционирующими в условиях внешней среды, отличающейся изменчивостью и неопределенностью. Примером такой системы служит зерноуборочный комбайн, эффективность работы которого зависит от успешного решения задачи управления технологическим процессом. Поиск оптимальных решений по технологической регулировке комбайна определяется спецификой рассматриваемой предметной области, особенностью которой состоит в том, что внешние факторы, показатели качества работы, параметры технического состояния и некоторые регулируемые параметры представлены качественными показателями. Эффективность реализации процессов принятия решений при управлении сложными техническими системами определяется моделью представления знаний об объектах предметной области и их отношениях. В настоящее время не предложен формально-логический подход, позволяющий создать адекватное математическое описание процесса принятия решений при управлении технологическим процессом комбайновой уборки. В данной работе рассматривается задача корректировки технологических регулировок. Идентификация взаимосвязей между внешними признаками нарушения техпроцесса комбайновой уборки, причинами и методами устранения этих нарушений показала, что имеется более 40 признаков нарушения технологического процесса, для устранения которых может быть использовано ещё большее количество параметров. В этих условиях перспективным является использование моделей, имитирующих процесс принятия решений экспертом по управлению технологическим процессом. Один из подходов основан на использовании аппарата теории нечётких множеств и заключается в принятии решений в результате нечёткого логического вывода на основе правил, содержащихся в базе знаний экспертной системы. Альтернативным подходом может быть принятие решения на основе применения критериев, используемых в «играх с природой», таких как критерии Лапласа и Сэвиджа. Их использование предполагает построение матриц эффективности и рисков, на основе оценок и анализа нечёткой экспертной информации. В работе дано математическое обоснование, методика применения критериев и пример её использования для устранения одного из типичных нарушений в работе зерноуборочного комбайна.

А. С. Жук (Новороссийск)

zhuk@nightmail.ru

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В УПРАВЛЕНИИ СУДНОМ

При решении задач управления судном важную роль играют определение или оценивание множеств возможных фазовых состояний судна как динамической системы в различные моменты времени, которые относятся к фундаментальным задачам теории управления. Такие множества называются множествами достижимости и могут быть использованы в задачах оптимального управления судном, прогнозирования движения судна, оценивания предельных возможностей системы управления судном и др. С одной стороны, знание множеств достижимости движения судна позволяет решать многие задачи управления судном, в частности, задачи оптимального управления судном. С другой стороны, методы оптимального управления, в первую очередь, принцип максимума Понтрягина, дают возможность в ряде случаев исследовать и построить множества достижимости. Построение множества достижимости движения судна можно выполнить по следующей технологии. Сначала необходимо решить задачу Коши для сопряженной системы (3) с начальными условиями (4) и определить $p_2(t)$. Зная $p_2(t)$, определим оптимальное управление $u^* = \beta^*$ из условия принципа максимума Понтрягина, в силу которого оптимальное управление $u^*(t)$ доставляет наибольшее значение функции Гамильтона (2). И, наконец, решим задачу Коши для системы (1), подставляя в (1) β^* , в результате получим оптимальную фазовую траекторию $\omega^*(t)$. Решая серию подобных задач, изменяя значение параметра ϕ в промежутке $[0, T]$ с заданным шагом $\Delta\phi$, получим семейство оптимальных траекторий, исходящих из начала координат. Точки $(\omega_1(T), \omega_2(T))$ принадлежат границе множества достижимости $D(T, 0, 0)$ за время T . Соединив последовательно точки $(\omega_1(T), \omega_2(T))$, соответствующие соседним значениям ϕ , получим кривую, аппроксимирующую границу множества достижимости $D(T, 0, 0)$.

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2; \quad \dot{\omega}_2 = -2r'\omega_2 - q'\omega_1 - s'_{31}\dot{\beta} + s'_\omega\beta; \quad (1)$$

$$H = p_1\omega_1 - 2r'p_2\omega_2 - q'p_2\omega_1 - s'_{31}p_2\dot{\beta} + s'_\omega p_2\beta; \quad (2)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_1} = q'p_2; \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_2} = -p_1 + 2r'p_2. \quad (3)$$

$$p_1(0) = \cos \phi; \quad p_2(0) = \sin \phi, \quad (4)$$

где ω_1 – угловая скорость судна; $2r' = r_{31}' + q_{21}'$; $q' = r_{31}'q_{21}' - r_{21}'q_{31}'$; $s'_\omega = q_{31}'s_{21}' - q_{21}'s_{31}'$; q_{21}' , r_{21}' , s_{21}' , q_{31}' , r_{31}' , s_{31}' – гидродинамические коэффициенты корпуса судна и руля; β – угол перекладки руля; p_i – сопряженные переменные (обобщенные импульсы); ϕ – параметр, который принимает значения в промежутке $[0, 2\pi]$ с заданным шагом $\Delta\phi$. Знание множеств

достижимости движения судна в свою очередь позволяет решать многие задачи управления судном, в частности, определение закона управления по заданному движению судна. Кроме того, знание множеств достижимости играет важную роль для планирования и прогнозирования движения судна, а также оценивания возможностей управляющего комплекса и при оценке маневренных качеств и управляемости судна. Предлагаемая технология построения множеств достижимости движения судна способствует эффективному решению указанных задач.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
2. Жук А. С. Численно-аналитический метод построения области достижимости движения судна // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 2. С. 69 – 72.
3. Жук А. С. Кондратьев С. И. Методы управления судном на основе множеств достижимости // Навигация и гидрография. 2013. № 36.

**М. И. Журавлёва (Ростов-на-Дону), П. А. Лапина
(Ростов-на-Дону)**

zhurmari@mail.ru, polina_azarova86@mail.ru

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С НЕОГРАНИЧЕННЫМ РОСТОМ

Для двухсекторного рынка труда используем нелинейную динамическую модель, в которой будем рассматривать контингенты занятых в государственном и частном секторах экономики. Классический вид модели «хищник-жертва» для двух популяций имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b_1x + c_1xy \\ \frac{dy}{dt} = b_2y - c_2xy \end{cases} \quad (1)$$

где x — численность занятых в государственном секторе экономики; y — численность занятых в негосударственном секторе экономики; t — время; $-b_1$ и b_2 темпы автономного «роста» первого и второго секторов соответственно; c_1 и c_2 — характеризуют взаимодействие секторов друг с другом.

Данная модель имеет две точки равновесия: $x_1^* = 0$, $y_1^* = 0$ и $x_2^* = \frac{b_2}{c_2}$, $y_2^* = \frac{b_1}{c_1}$.

Точка (x_1^*, y_1^*) является седловой точкой, а положение равновесия — неустойчивым положением. Точка (x_2^*, y_2^*) является центром, а положение равновесия устойчиво.

Последнее подтверждает выбор знаков в модели, и означает, что для устойчивого функционирования подобной системы темпы автономного «роста» двух секторов должны быть разных знаков. Т. е. государственный

сектор без взаимодействия с частным сектором стремится к распаду, в то время как частный сектор без взаимодействия с государственным сектором — к неограниченному расширению. Для модели (1) конкуренции с неограниченным ростом выберем следующие параметры системы: $b_1 = 5$, $c_1 = 10$, $b_2 = 5$, $c_2 = 10$.

При указанных параметрах положением равновесия, отличным от начала координат, является точка с координатами: $x^* = 0.5$, $y^* = 0.5$, которая является **центром**.

Если теперь рассмотреть положение равновесия, которое совпадает с началом координат ($x^* = 0$, $y^* = 0$), то особая точка $(0, 0)$ является **седлом**.

Л. Н. Землянухина, Л. И. Сантылова (Ростов-на-Дону)
zemlid45@mail.ru, SantylovaLyubov@mail.ru
ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И УСЛОВИЯ КУНА–ТАККЕРА

Целью любого инвестора является обеспечение максимальной доходности инвестиций при минимальном риске. Математическая модель модифицированной задачи выбора оптимального портфеля имеет вид:

$$\begin{aligned} D(x) = (Vx, x) \rightarrow \min \\ \mu(x) = (m, x) \rightarrow \max \\ \begin{cases} (e, x) = 1, \\ b^1 \leq Ax \leq b^2, \\ x \geq \ell. \end{cases} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} D(x) = (Vx, x) \rightarrow \min \\ \begin{cases} (e, x) = 1, \\ (m, x) = \mu, \\ b^1 \leq Ax \leq b^2, \\ x \geq \ell. \end{cases} \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}_n$ — портфель, m — вектор ожидаемых доходностей бумаг, V — ковариационная матрица, $e = (1, \dots, 1)$, ℓ — вектор, компоненты которого могут быть отрицательные. Для нахождения всех Парето-оптимальных решений (эффективных портфелей) и эффективной границы в критериальной плоскости (D, μ) построенную задачу сводят к однокритериальной с параметром в правой части $\mu \in [\min m_i, \max m_i]$, используя для этого функцию $\mu(x)$.

Предложен итерационный алгоритм построения эффективных портфелей $x(\mu)$ (кусочно-линейная вектор-функция) и эффективной границы $D(\mu)$ (кусочно-квадратичная функция), полученный из условий Куна–Таккера с применением метода линейного параметрического программирования, который сводится к решению последовательности задач вида ($z_B = (x_B, \nu_B)$ — вектор базисных переменных)

$$\begin{cases} Bz_B = a\mu + b, \\ x_B \geq \ell_B, \nu_B \geq 0, \\ (x_B - \ell_B, \nu_B) = 0. \end{cases}$$

Кроме того, алгоритм позволяет найти эффективный портфель, обеспечивающий максимум функции предпочтения, представляющей собой доходность портфеля $x \in X^*$ на единицу риска. Алгоритм допускает рассмотрение безрискового актива (задача Тобина). Алгоритм программно реализован.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Брусов П. Н. и др. Финансовая математика: учебное пособие. М.: КНОРУС, 2010.

Ю. С. Ивченко (Новороссийск)
juliya1977_08@mail.ru

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАВИСИМОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА В РФ ОТ МИРОВЫХ ЦЕН НА НЕФТЬ

В качестве исходных данных исследования были взяты квартальные данные ВВП в млрд. руб. в текущих ценах и квартальные значения мировых цен на нефть марки Brent в долларах за баррель за период с 1999 по 2013 годы. Исследование проводилось с помощью пакета EViews 6, предназначенного для эконометрического моделирования временных рядов.

Поскольку график квартальных значений ВВП показал мультипликативную сезонность, было решено перейти к аддитивной сезонности путем логарифмирования значений ВВП, таким образом, откликом модели явился натуральный логарифм ВВП. В построенной эконометрической модели учтен линейный тренд с константой, сезонность с помощью dummy-переменных, автокорреляция первого порядка с помощью ar-добавки и влияние фактора цены нефти.

Коэффициент детерминации по модели составил 99,8%, т.е. на 99,8% построенная модель объясняет изменение результирующей переменной. Все переменные модели значимы: вероятности их t-статистики меньше 0,05. Уравнение в целом значимо: вероятность F-статистики меньше 0,05. Остатки модели нормально распределены, в них отсутствует автокорреляция, и они по тесту Бейша-Пагано-Годтфри гомоскедастичны. Средняя относительная ошибка аппроксимации равна 0,6%. Построенную модель следует признать качественной и адекватной, пригодной для изучения моделируемого процесса и прогнозирования.

Согласно построенной модели, увеличение цены одного барреля нефти марки Brent в среднем приводит к росту ВВП РФ на 0,2%.

Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева (Симферополь)
kopachevsky@list.ru, szz2008@mail.ru
**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ
КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ
С ОТВЕРСТИЯМИ В ДНИЩЕ**

Изучается плоская (двумерная) проблема малых движений идеальной капиллярной жидкости, частично заполняющей открытый сосуд с вертикальными стенками (кювету). Предполагается, что отверстия в днище расположены на оси Ox , ось сосуда совпадает с осью Oz , а ускорение $\vec{g}$ силы тяжести направлено сверху вниз.

Для нахождения верхней и нижних частей (Γ_0 и $\Gamma_i, i = \overline{1, m}$) равновесной свободной поверхности жидкости получена задача Коши для системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

С использованием выражения для второй вариации потенциальной энергии и операторного подхода, см. [1–3], получены соответствующие спектральные задачи, доказаны утверждения о свойствах операторных коэффициентов, структуре и локализации спектра, базисности системы собственных элементов, получены спектральные признаки статической и динамической устойчивости гидросистемы. Показано, что устойчивость гидросистемы теряется на сдвиговых возмущениях поверхности Γ_0 , т.е. когда она сдвигается как единое целое вдоль оси Oz . Для проблемы собственных колебаний доказана

Теорема. Пусть $\lambda_1(\mathcal{B})$ — минимальное собственное значение оператора потенциальной энергии $\mathcal{B}$. Если $\lambda_1(\mathcal{B}) > 0$, то система динамически устойчива; при $\lambda_1(\mathcal{B}) < 0$ система динамически неустойчива, причем устойчивость теряется на сдвиговых возмущениях Γ_0 ; границе области динамической устойчивости соответствует условию $\lambda_1(\mathcal{B}) = 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тютцов А. Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. К.: Наукова думка, 1992. 592 с.
2. Копачевский Н. Д., Ситшаева З. З. О равновесии и устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде // Нелинейные колебания. 2014. Т. 17, № 1. С. 46–59.
3. Kopachevsky N. D., Krein S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics, Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Basel: Birkhauser Verlag, 2001. 384 p.

Копытина Е. В. (Ростов-на-Дону)
eugenia.kopytina@gmail.com
**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФОНДОВОГО
РЫНКА С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ**

Фондовый рынок — сложная динамическая система с большим количеством явных и скрытых закономерностей. Факторы, оказывающие влияние на движение рынка зачастую непредсказуемы и случайны. Оценить их с помощью статистических методов не представляется возможным и поэтому рациональным решением при составлении прогноза является нейросетевой анализ.

Искусственная нейронная сеть, по сути, является универсальным аппроксиматором нелинейных многомерных функций. Следовательно, построив определенную нейросетевую модель, мы получим набор правил, для принятия решений в реальном времени.

Первоначальная модель была создана на основе классической трехслойной персептронной сети с использованием оконного метода формирования обучающей выборки. Сеть с сигмоидальной активационной функцией обучалась алгоритмом обратного распространения ошибки.

В качестве входных данных подавались нормированные значения приращения и объема торгов в течение часа 17:40–18:35, а выходное значение сравнивалось с приращением цены открытия. Сеть (24,30,1) обучалась на 64 днях. На тестовой выборке сеть демонстрировала неудовлетворительные результаты – около 50 % «угаданных» направлений изменения.

Следующая попытка улучшения была связана с идеей о полном обучении сети в течение всего торгового дня. То есть на вход подавались данные за предыдущий час - на выходе приращение через 15 минут. Солидный размер обучающей выборки (6435 образов) приводил к «зависанию» процесса обучения в многочисленных локальных минимумах.

Были приняты следующие допущения:

- 1) Главными параметрами системы считать цену открытия и объем торгов в каждый момент времени.
- 2) Достаточно прогнозировать только направление изменения цены сделки.
- 3) Эффективней всего выбирать краткосрочный период.

Также необходимо учитывать не только динамику дня, но и общую тенденцию месяца. В модель были внесены изменения: отдельно выделили «распределяющую» сеть для месячного тренда и множество сетей для каждого дня. Из последнего множества в результате анализа выделяется наименьшее количество сетей, покрывающих весь тренд, которым соответственно присваиваются порядковые номера и в обучающую выборку заносится определенный вид предыдущего месячного тренда.

А. Н. Кудинов, В. Н. Рыжиков, В. П. Цветков, И. В. Цветков
(Тверь)

mancu@mail.ru

РОСТ НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ В МОДЕЛИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

Сложность описания динамики роста народонаселения несомненно связана с тем, что человеческое общество предельно сложная система. Важнейшим вопросом демографии является возможность возникновения катастроф в данном процессе. В этих точках могут происходить сильные скачки роста или убывания численности народонаселения. Актуальным является ответ на сколько в тот или иной период эволюции человечества оно отстоит от точек катастроф. В настоящей работе модель роста народонаселения строится на основе концепции мультифрактальной динамики (МФД) [1]. Согласно МФД тренд процесса $\bar{y}(t)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией, на каждом из участков которой $\bar{y}(t) = \eta(D_0 - D)(t - t_0) + \bar{y}(t_0)$, (t_0 — начальный момент времени участка, D - фрактальная размерность кривой на том же участке, η, D_0 — параметры модели). Величина $\bar{y}(t)$ измеряется в млрд. человек, η — млрд. человек/год, время t — в годах. Существенным отличием данной модели от других является формирования тренда на конечном временном интервале, а не локально. Нами были проведены вычисления параметров модели МФД для процесса роста народонаселения с 1950 года по настоящее время. На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

тенденция уменьшения D со временем соответствует увеличению скорости роста народонаселения. Значения D_1, D_2, D_3 оказались существенно меньше равновесного значения $D_0 = 1,61$, соответствующего нулевой скорости роста народонаселения, а также еще дальше от критической точки $D_k = 0,85$ и точки бифуркации $D_b = 1,78$ [1], в которой может происходить быстрый скачек численности народонаселения как с ростом так и понижением ее. Следовательно, скачков больших в численности народонаселения в ближайшее время быть не должно.

Литература

1. A. N. Kudinov, V. P. Tsvetkov and I. V. Tsvetkov. Cafas tropkes in the Multi-FractalDynamics of Social-Economomic System. Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 18, № 2, 2011, P. 149–155.С.П.

А. Н. Кудинов, Д. Ю. Лебедев В. Н. Рыжиков, В. П. Цветков,
И. В. Цветков (Тверь)

mancu@mail.ru

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ RR-ИНТЕРВАЛОВ СЕРДЕЧНОГО РИТМА НА ОСНОВЕ ХОЛТЕРОВСКОГО МОНИТОРИРОВАНИЯ

Одним из методов функциональной диагностики является наблюдение за динамикой RR -интервалов. Для анализа таких интервалов в настоящее время разработана методика анализа их variability, для чего чаще всего применяется временной и спектральный математический анализ последовательных RR -интервалов [1]. Однако результаты всех этих методов оказываются подчас весьма противоречивыми, а их прогностическое значение может быть недостаточно достоверным. На наш взгляд, наиболее адекватным методом исследования динамики RR -интервалов является анализ мгновенного сердечного ритма (МСР), предложенный в [2] и определяемый как $y_i = 60/T_{RR_i}$, (где i – номер текущего RR -интервала $i = 1, \dots, n$, T_{RR_i} – его величина). В данном докладе мы дадим более строгое обоснование фрактальности (самоподобия) кривых МСР. В ней будут приведены конкретные временные интервалы T_k и вычислено значение фрактальной размерности D_k на них. Будет показано на конкретном примере, что зависимость длины кривой МСР L_k от масштаба δ имеет степенной характер $L_k = L_0\delta - D_k$ с точностью 4–6 %. Такое отклонение опытных данных от степенного характера говорит о том, что такую кривую вполне можно считать достаточно близкой к фрактальной (самоподобной). Это позволяет проводить исследования на основе математической модели мультифрактальной динамики [2], что и будет сделано в данном докладе.

Литература

1. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (Методические рекомендации) // Вестник аритмологии 2001. 24. 65–87.

2. А. Н. Кудинов, Д. Ю. Лебедев, В. П. Цветков, И. В. Цветков. Математическая модель мультифрактальной динамики и анализ сердечных ритмов. *Математическое моделирование, Том 26, 2014 (в печати)*.

А. Н. Кудинов, Е. В. Чусова (Тверь)

lioness@pop3.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ МЕДИЦИНЫ

В работе представлено применение метода сопряженных уравнений [1] к задачам в области медицины. В частности проведено исследование модели, описывающей рост опухоли и процесс взаимодействия клеток опухоли

и химиотерапевтического средства. В ходе применения метода сопряженных уравнений [1] к модели, описывающей рост опухоли было показано, что система имеет седло в начале координат при всех значениях параметров; положения равновесия решения существуют при

$$-\lambda_1\lambda_2 + \frac{\alpha_1\lambda_2y^{2/3}}{c} \cdot \frac{c-2x-x^2}{(1+x)^2} + \frac{2\alpha_2\lambda_1xy^{-1/3}}{3(1+x)} + \frac{2\alpha_2\alpha_1x^2y^{1/3}}{3c(1+x)^2} > 0$$

Также можно отметить, что размер области устойчивости увеличивается при убывании величины $\lambda_1\lambda_2^2/\alpha_1\alpha_2^2$. Если выполнены условия $\lambda_1 > 2/3\lambda_2$ и $\alpha_2 > 3/2\alpha_1y$, то решение системы будет устойчивым и будет иметь место устойчивость невозмущенного состояния.

При исследовании процесса взаимодействия клеток опухоли и химиотерапевтического средства было показано, что невозмущенное движение будет устойчиво, если будут выполнены условия

$$\begin{cases} x < y \\ \theta x + \alpha y > u \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > y \\ \theta x + \alpha y < u \end{cases}$$

В данной статье применение первого метода Ляпунова сводится к исследованию линеаризованных уравнений, в результате чего делается вывод о характере устойчивости системы. А применение метода сопряженных уравнений показывает, что он может быть применен ко всем задачам динамической устойчивости, уравнения которых сводятся к уравнению второго порядка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кудинов А. Н., Катулев А. Н., Кузнецов А. Ю. Исследование устойчивости автономных нелинейных динамических систем // Материалы XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. 2010. С. 110–112.

К. Н. Кудрявцев, Е. В. Мешков (Челябинск)
kudrk@mail333.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТА В ДУОПОЛИИ

В работе предлагается дискретный аналог модели оптимизации рекламного бюджета в дуополии, предложенный Sethi в [1]. А именно, рассматривается рынок, на котором доминируют два продавца, продвигающих различные марки одного товара. Примером такого рынка может служить конкуренция между компаниями Pepsi и Coca-cola. Математическая модель взаимодействия этих компаний представляет собой многошаговую бескоалиционную игру двух лиц, динамика управляемой системы в которой задается системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\delta)x_1(t) + \rho_1u_1[t]\sqrt{x_2(t)} - \rho_2u_2[t]\sqrt{x_1(t)} + \frac{\delta}{2}, \\ x_2(t+1) &= (1-\delta)x_2(t) - \rho_1u_1[t]\sqrt{x_2(t)} + \rho_2u_2[t]\sqrt{x_1(t)} + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Здесь момент $t = 0, 1, \dots, T - 1$, $x_i(t)$ – доля рынка, занимаемая i -ой фирмой ($i = 1, 2$) в момент времени t , $x_i(0) = x_{i0}$ – заданные начальные значения; константа δ характеризует спад объема продаж при отсутствии рекламы; параметр ρ_i – коэффициент эффективности затрат на рекламу; $u_i[t]$ – расходы на рекламу игрока i в момент времени t .

Цель i -го игрока — выбрать свою стратегию так, чтобы максимизировать значение своей функции выигрыша, задаваемой функционалом

$$J_i(x, u) = \frac{m_i x_i(T)}{(1+r)^T} + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{m_i x_i(k) - c_i u_i^2[k]}{(1+r)^k},$$

где r – коэффициент дисконтирования, m_i , c_i константы.

С помощью специальной модификации [2] метода динамического программирования построен явный вид ситуации равновесия по Нэшу и равновесных выигрышей.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Sethi S., Prasad A., He X.* Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model // Journal of Optimization Theory and Applications. 2008, № 139(2). pp. 351–360.
2. *Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н.* Уравновешивание конфликтов и приложения. – М.: URSS, 2012. – 303 с.

М. Е. Мазуров (Москва)

mazurov37@mail.ru

О ПРИЛОЖЕНИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕЙРОДИНАМИКЕ

Специфическое свойство почти-периодических функций — существование ε -почти-периодов — позволяет осуществить избирательную обработку информации, закодированной в импульсных потоках, сократить избыточность информации. В импульсных потоках от сенсорных элементов частота следования импульсов обычно пропорциональна амплитуде внешних сигналов. Работа показывает возможности приложения рядов Фурье почти-периодических функций в задачах нейродинамики. Как известно, эффективность моделирования с применением рядов Фурье зависит от того, насколько удачно выбранная система функций аппроксимирует изучаемое явление. Например, для исследования процессов, близких к гармоническим, эффективным является использование тригонометрических рядов Фурье, а для исследования процессов, близких к почти-периодическим функциям, эффективным является использование рядов Фурье почти-периодических функций [1–4].

Рассмотрены приложение рядов Фурье почти-периодических функций для исследования нейродинамики. Одним из основных процессов нейро-

динамики, повторяющимся многократно мириады раз, является суммирование на синапсах нейрона электрических импульсов, приходящих по дендритам [2].

Специфическое свойство почти-периодических функций — существование ε -почти-периодов — позволяет осуществить избирательную обработку информации, закодированной в импульсных потоках, сократить избыточность входной информации. Импульсные потоки от сенсорных элементов имеют неравномерную структуру, частота следования импульсов, вначале более быстрая, постепенно замедляется. Начальная частота следования импульсов обычно пропорциональна амплитуде внешних сигналов [2]. Поэтому на обработку информации в импульсных потоках влияет начальный сдвиг импульсов. Данная работа обосновывает некоторые эффективные возможности приложения рядов Фурье в задачах нейродинамики, дает перспективы для создания новых видов математических моделей динамических нейронов.

Список литературы

- [1] Левитан Б. М. Почти-периодические функции. // ГИТТЛ. 1953. 396 с.
- [2] Анохин К. В., Бурцев М. С., Ильин В. А., Киселев И. И., Кукин К. А., Лалман К. В., Параскевов А. В., Рыбка Р. Б., Сбоев А. Г., Твердохлебов Н. В. Современные подходы к моделированию активности культур нейронов *in vitro* // Математическая биология и биоинформатика. 2012. Т. 7. № 2. С. 372–397.
- [3] Мазуров М. Е. Геометрический метод исследования решения диофантовых неравенств в задачах о синхронизации релаксационных колебаний // ИВУЗ. сер. Математика. 1989. № 7. С. 13–20.
- [4] Мазуров М. Е. Решение диофантовых неравенств в задачах о синхронизации релаксационных колебаний // ЖВМ и МФ АН СССР. 1991. Т. 31. № 11. С. 1619–1636.

И. В. Павлов, И. В. Цветкова, В. В. Шамраева (Ростов-на-Дону)
 pavloviv2005@mail.ru, pilipenkoiv@mail.ru, shamraeva@mail.ru
**КРИТЕРИЙ СОВПАДЕНИЯ МНОЖЕСТВА
 НЕВЫРОЖДЕННЫХ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР И
 МНОЖЕСТВА МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР,
 УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОСУХЕ**¹

Рассмотрим одношаговый (B, S) -рынок, заданный на $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, причём $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, а $\mathcal{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i , $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Рассмотрим $\mathbf{F}$ -адаптированный случайный процесс $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^1$ ($Z_0 = a$, $Z_1(A_i) = b_i$, $i \in \mathbb{N}$).

Обозначим через $\mathcal{P}^*$ множество невырожденных мартингальных мер процесса Z . Предположим, что $\inf_i b_i < a < \sup_i b_i$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$. Важную роль в теории хааровских интерполяций играют мартингальные меры, удовлетворяющие ослабленному свойству универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ, [1,2]).

Теорема. $\mathcal{P}^* = \text{ОСУХЕ}$ тогда и только тогда, когда

- 1) последовательность $\{b_i\}$ содержит лишь два различных числа, каждое из которых имеет бесконечную кратность;
- 2) последовательность $\{b_i\}$ состоит из трёх различных чисел, причём одно из них имеет кратность 1, а два остальных имеют бесконечную кратность, а число $Z_0 = a$ расположено между значением кратности 1 и значением бесконечной кратности.

Вопрос о совпадении $\mathcal{P}^*$ и ОСУХЕ рассматривался в работе [1], однако автором был выпущен из рассмотрения случай 2). Этот случай был изучен в статье [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Данекянц А. Г. О специальных хааровских интерполяциях мартингалов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, приложение, 2005, № 3, С. 3–20.
2. Павлов И. В., Шамраева В. В., Цветкова И. В. Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров // Вестник РГУПС, 2012, № 3. С. 177–181.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №13-01-00637а и (для первого соавтора) №13-07-13159.

Г. Н. Пащенко (Алматы)

galina_pashenko@mail.ru

**ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ПРОЦЕССА ВАРКИ СТЕКЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ**

Одной из областей применения инструментов теории искусственных нейронных сетей является моделирование сложных технологических процессов. К моделям предъявляются особые требования, так как они должны отражать информационные и функциональные зависимости между технологией производства и свойствами получаемой продукции.

Постановка задачи формулируется следующим образом: необходимо с помощью многослойных нейронных сетей построить модель функциональных взаимосвязей между технологическими факторами и показателями качества продукции, а также другими требуемыми показателями в сложном технологическом процессе варки стекла.

Модель строится на основе многослойного персептрона. Моделируемыми технологическими параметрами были выбраны концентрации содержания определенных оксидов, влияющих на скорость протекания технологического процесса. В качестве моделируемых показателей качества технологического процесса были выбраны основные характеристики свойств полученной продукции: твердость стекла и его толщина. Построение модели функциональных взаимосвязей между технологическими факторами и показателями качества продукции в сложном технологическом процессе варки стекла с помощью нейросетевого аппарата осуществлялось по разработанному алгоритму [1]. Проведено обучение полученной модели в приложении Neural Network Toolbox системы MATLAB.

Таким образом, с использованием многослойных нейронных сетей построена модель функциональных взаимосвязей между технологическими факторами и показателями качества продукции в сложном технологическом процессе варки стекла. Полученная модель позволяет успешно применять ее в решении различных задач, способствуя повышению качества продукции.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Пащенко Г. Н.* Построение нейросетевой модели для технологического процесса варки стекла // Проблемы информатики. Новосибирск. 2013. № 4. С. 56–59.

А. Ю. Переварюха (Санкт-Петербург)

madelf@pisem.net

**БИСТАБИЛЬНАЯ ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ
ВОСПРОИЗВОДСТВА ВОДНЫХ БИОРЕСУРСОВ ¹**

Доклад об моделировании эффективности воспроизводства водных популяций в рамках теории формирования пополнения и о возникающих нелинейных эффектах. Предлагаемые модели анализируются в инструментальной среде как непрерывно-дискретные динамические системы. Описываются взаимоисключающие выводы, возникающие при попытках биологической интерпретаций динамики двух применявшихся в ихтиологии дискретных итерациях с бифуркациями удвоения периода. С использованием гибридного автомата разработан метод исследования влияния изменений эколого-физиологических стадий развития молоди на характер воспроизводства. Существует концепция о зависимости между запасом и пополнением. Зависимость $R = aSe^{-bS}$ описывает снижение численности пополнения при увеличении запаса, когда повышенная плотность становится негативным фактором, увеличивающим смертность. Созданы модели на основе данных об искусственном и естественном воспроизводстве рыб для выяснения диапазона их устойчивости к интенсивному промыслу. Формализован эффект резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации и влияние роста на темп убыли численности поколения:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta) N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k + \zeta}, \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)}, \end{cases} \quad (1)$$

где S – запас; $w(t)$ – уровень размерного развития $N(t)$; g – параметр объема доступного корма; $\theta(S) \rightarrow 1$ при $S \rightarrow \infty$ эффекта резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации; ζ – не зависящие от численности ограничения; $k \in [\frac{1}{2}, 1)$; $c < 1$ – степень выраженности эффекта Олли; α – коэффициент компенсационной смертности; β – декомпенсационной; $t \in [0, T]$ – специфичный интервал уязвимости. Дальнейшее развитие с точки зрения этапности развития рыб привело к моделям в виде системы ОДУ с изменяемой правой частью, алгоритмически представленных в гибридном автомате [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. СПб.: БХВ, 2006. 224 с.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-07-00066).

Родин В. А., Синегубов С. В., Тростянский С. Н. (Воронеж)
rodin_v@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В докладе приводятся некоторые новые авторские особые случаи применения логнормального распределения в разных прикладных задачах.

1. Моделирование работы пункта централизованной охраны (ПЦО) крупного городского района. На основе эмпирических данных изучались информационные потоки ПЦО крупного городского района [1]. По эмпирическим данным построены разные модели распределений и проведена статистическая проверка выдвигаемых гипотез. Проверялись: гамма-распределение, бета-распределение и логнормальное распределение. Параметры определялись с помощью статистических оценок. Наилучшие результаты по верификации получены для логнормального распределения.

2. Граница изменения суммы сбора подоходного налога. Анализ данных экономической статистики показал [2], что легальные доходы населения имеют логнормальную плотность распределения. Это дало возможность прогнозировать с помощью моделирования финансовый эффект от введения прогрессивного подоходного налога. Кроме того показано, что с вероятностью близкой к единице сумма дохода физического лица должна не превосходить среднюю величину дохода в 90 раз. Превышение этой границы можно считать косвенным указанием на возможные нетрудовые доходы рассматриваемого физического лица.

3. Материальный ущерб от пожаров и взрывов. Исследования, проведенные в работе [3] показали, что величина материального ущерба от пожаров и взрывов корректно описываются логнормальной моделью распределения. Используя статистические данные ГПС МЧС по Воронежской области для объектов торговли и для зданий производственного назначения за период с 2009 по 2012 г. построены квантили – диаграммы и линии тренда для объектов торговли и для зданий производственного назначения. Величина достоверности аппроксимации в интервале (0,93–0,98).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Синегубов С. В., Родин В. А. Применение метода наименьших квадратов для выравнивания экспериментальных данных, характеризующих поток информации интенсивного режима работы ПЦО // Вестник Воронежского института МВД России. Воронеж: Изд-во ВИ МВД РФ, 1999. № 2(4), С. 152–155.

[2] А. В. Суворов / Проблемы анализа дифференциации доходов населения и построения дифференцированного баланса денежных доходов и расходов населения. // Проблемы прогнозирования. — 2001. — № 1. — С. 58–74.

[3] С. Н. Тростянский, Ю. Н. Зенин, А. В. Калач, С. В. Скрыль / Математическое моделирование риска возникновения пожаров на хозяйственных объектах. // Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация. — № 4. — 2013. — С. 28–33.

А. Г. Рунов (Москва)

aleksey-genadevi4@yandex.ru

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИСТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ РЕЗЕРВУАРА

Задачи исследования законов истечения жидкости из резервуара возникает при изучении широкого класса прикладных проблем современного естествознания, включая гидравлику и гидромеханику.

Математическая модель процесса истечения жидкости из резервуара сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Нахождение общего решения такого уравнения невозможно. Однако в частных случаях для известных законов увеличения площади отверстия и скорости истечения возможно определение априорных оценок исследуемого процесса. Наличие регулируемых отверстий у резервуаров существенно усложняет процесс комплексного исследования жидкости.

Гидродинамическое моделирование процесса истечения жидкости из резервуаров основано на эквивалентной замене резервуаров сложной формы более простыми.

В основе такой замены лежат принцип равенства интегральных показателей заменяемых резервуаров. Основным интегральным показателем процесса истечения жидкости из резервуара является время истечения.

Эталонным резервуаром выбран открытый сверху цилиндр с малым отверстием на дне. Все гидродинамические характеристики такого сосуда известны. Для сравнения с эталоном выбраны цилиндры с постоянными (нерегулируемыми) и переменными (регулируемыми) отверстиями на дне и боковой поверхности резервуара. Для каждого из рассмотренных резервуаров найден эталонный цилиндр с фиксированным временем истечения жидкости из него.

Представленные результаты служат теоретической основой инженерных расчётов процесса истечения жидкости из цилиндрических резервуаров.

Список литературы

- [1] Зотов В.А. Исследование операций в прикладной гидродинамике - В кн. Московская международная конференция по исследованию операций. — М.; МАКС Пресс, 2007, С. 122–123.

- [2] Зотов В.А. Нелинейная декомпозиция процесса истечения жидкости из резервуара. Обозрение прикладной и промышленной математики, 2007, Т. 14, вып. 6, С. 533–534.

М. Ю. Сартасова (Челябинск)

sartasova@math.susu.ac.ru

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Рассматривается разработка математической модели импульсного электромагнитного поля, создаваемого излучателем наносекундного импульса. Математическая модель позволяет рассчитывать поля на любых расстояниях от излучателя, состоящего из нескольких линейных вибраторов, с любым пространственно-временным распределением тока. Модель основывается на электродинамических соотношениях, описывающих физические процессы, происходящие при работе излучателя.

Вычисления производятся с использованием процедуры триангуляции по поверхности и по объему излучателя, учитывающие скин-эффект. Для аппроксимации функции тока применяются тетракубические сплайны. Путем интегрирования сплайна производится расчет потенциала в области, где необходимо вычислять параметры поля. Для подинтегральных функций находятся первые, вторые и смешанные производные от сплайна, построенного для векторного потенциала. Интегрируя полученные функции вычисляются компоненты полей H и E .

На основе построенной модели разработан алгоритм, реализованный на языке C++ с применением библиотеки передачи сообщений MPI. Программа рассчитывает напряженности электромагнитного поля в точке наблюдения. Исходными данными являются параметры излучателя и наносекундного импульса. Пользователь может задавать геометрические параметры вибраторов, временной интервал, шаг дискретизации, величину погрешности исходных данных, параметры для расчета скин-эффекта. В программе реализован вывод в графическое окно графиков эталонных функций и полученных решений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сартасова М. Ю.* Математическая модель и алгоритм для расчета импульсного электромагнитного поля. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2013. №6. С. 408–410
2. *Сартасова М. Ю.* Численное моделирование импульсного электромагнитного поля. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2014. №1. С. 150–155

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru
**ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЭФ НА
СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ**

Выполнено исследование на существование и единственность краевой задачи, представляющей собой одномерную математическую модель изоэлектрического фокусирования (ИЭФ) водного раствора амфолитов в естественных градиентах pH [1]. Исходная краевая задача, рассматриваемая на отрезке $[0, l]$ относительно N неизвестных функций концентраций амфолитов $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_N(x)$, а также функции кислотности $\psi(x)$, приведена к специальной операторной форме:

$$\psi = \Phi(\psi, \xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N); \quad \xi_k = F_k(\psi, \xi), \quad k = 1, \dots, N; \quad (1)$$

$$\Phi(\psi, \xi) = \frac{1}{2} \ln \left| \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k}{\varphi_k} \exp(\psi_k) \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k}{\varphi_k} \exp(-\psi_k) \right|, \quad (2)$$

$$F_k(\psi, \xi) = m_k \frac{\varphi_k(\psi) \exp \left(\lambda_0 \int_{x_k I}^x \frac{\theta_k}{\sigma} dx \right)}{\int_0^l \varphi_k(\psi) \exp \left(\lambda_0 \int_{x_k I}^x \frac{\theta_k}{\sigma} dx \right) dx}, \quad (3)$$

$$\theta_k = \frac{\text{sh}(\psi - \psi_k)}{\delta_k + \text{ch}(\psi - \psi_k)}, \quad \sigma = \sum_{k=1}^N \mu_k \xi_k \frac{d\theta_k}{d\psi} + 2k_w \mu \text{ch}(\psi - \psi_0); \quad (4)$$

$\varphi_k = \delta_k + \text{ch}(\psi - \psi_k)$ — вспомогательная функция; λ_0 — большой параметр; $x_k I$ — изоэлектрическая точка k -го амфолита; $\psi_k, \delta_k, \mu_k, k_w, \mu$ и ψ_0 — известные электрохимические параметры системы ИЭФ.

В соответствии с теорией операторных уравнений, задача (1)–(4) имеет единственное решение ψ, ξ , если отображения Φ, F_k являются сжимающими, то есть их дифференциалы Фреше $\Phi'_\psi, (F_k)'_{\xi_k}$ не превосходят по норме единицы. Установлено, что условие $\|\Phi'_\psi\| < 1$ выполняется всегда на банаховом пространстве функций ψ, ξ , непрерывных на отрезке $[0, l]$. В то же время аналогичное условие для $(F_k)'_{\xi_k}$ выполняется при совокупности алгебраических ограничений, налагаемые на электрохимические параметры системы ИЭФ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сахарова Л. В. Исследование механизма трансформации гауссовского распределения концентраций при аномальных режимах изоэлектрического фокусирования // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 1. С. 30–36.

Старинец В.В. (Москва)
vstarinets@mail.ru
КВАНТОВАНИЕ ВЕКТОРНОГО МОДУЛЯ

В собственном подпространстве $\mathcal{V}_\lambda(\mathbb{B}_\lambda) = \text{Lin}\{\epsilon^k e_\mu E(p; x)\}_\lambda$ J -самосопряженного в пространстве Крейна $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbb{B})$ ($4n$ -компонентных элементов $f_\mu^k(x)$ с индефинитной метрикой $[f, g] = \text{Reg} \int_{\mathbb{B}} \bar{g}_\mu^k J_n^{ks} f^{s\mu} d^4x$, $\mathbb{B} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_3^+ \cap \mathbb{R}_3^+)$) оператора Даламбера D , отвечающем собственному значению $\lambda = p^\mu p_\mu = \pm m_0^2$, проводится квантование амплитуд a_μ разложений решения $\Phi_\mu(x) = 2\sqrt{\pi} \text{Reg} \int_{\mathbb{B}} d^4p \delta(p^2 - \lambda) a_\mu(p) E(p; x)$ уравнения $(D - \lambda)\Phi_\mu = 0$ (удовлетворяющего дополнительному условию $\partial^\mu \Phi_\mu = 0$) по «плоским» волнам из $\mathcal{V}_\lambda(\mathbb{B}_\lambda)$ (где $\mathbb{B}_\lambda$ — гиперповерхность $x_0 = \text{const}$ для $\lambda > 0$ или гиперповерхность $r = \text{const}$ для $\lambda < 0$), являющемся пространством Крейна с индефинитной метрикой $[f, g]_\lambda = i \text{Reg} \int_{\mathbb{B}_\lambda} \bar{g}_\mu^k J_n^{ks} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu f^{s\mu} d\sigma_\nu(x)$. Различаются квантования следующих типов. (1) *Простое параболическое* квантование ($n=1, J_n=1$), при котором одномодульные состояния операторов заряда Q и импульса P_μ (отвечающие их вещественным собственным значениям) позитивны; *эллиптическое* квантование ($n=1, J_n=1$), при котором одномодульные состояния этих операторов (отвечающие их вещественным собственным значениям) негативны. (2) *Кратно-параболическое* квантование ($n > 1, J_n^{ks} = \delta^{k, n-s+1}$). Рассмотрены простейшие случаи: (А) одномодульные состояния для каждого из операторов Q и P_μ образуют n -мерную невырожденную жорданову цепочку, отвечающую вещественным собственным числам; (В) одномодульные состояния для каждого оператора образуют по две m -мерные ($n=2m, m \geq 1$) кососвязанные нейтральные жордановы цепочки, отвечающие вещественным собственным числам. (3) *Гиперболическое* квантование ($n=2m, m \geq 1, J_n = \tau_2 \otimes J_m$), при котором парам комплексно-сопряженных собственных чисел операторов Q и P_μ отвечают пары m -мерных нейтральных кососвязанных жордановых цепочек. Исследуются коммутационные соотношения и функции распространения регулярных и сингулярных суперпозиций операторов модульных полей.

Л и т е р а т у р а

1. Старинец В. В. Сингулярные операторы Штурма-Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. Ч. 1,2. — М.: Изд-во МГУП. 2010.
2. Старинец В. В. Квантование скалярного модуля. // Вестник МГУП. 2012. Вып. 3. С. 45–187.

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)

black_drive@smtp.ru

**ПЕРСПЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ В ЛОГИСТИКЕ:
НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК
И ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ ТЕРМИНАЛА**

Л. В. Канторович за разработку математического аппарата **линейного** программирования был удостоен Нобелевской премии. Достоинством предложенного им алгоритма была единственность и оптимальность получаемого решения. Алгоритм поиска оптимального решения реализован, в частности, в Excel. Нелинейные модели, обладая гораздо большей степенью адекватности реальным процессам, не имеют универсального метода решения. В силу этого порождается много проблем для поиска и доказательства оптимальности полученного решения. Компромиссным решением является применение в нелинейных моделях вогнуто/выпуклых функций. В этом случае, модель, являясь нелинейной, имеет только один экстремум. Поэтому, если решение найдено, то оно является оптимальным. Для поиска оптимального решения можно использовать соответствующий модуль в Excel. В статье рассматривается модель транспортных перевозок, в которой стоимость перевозки единицы груза **зависит** от степени загрузки контейнеровоза. Это соответствует реальной ситуации. Учёт нелинейных эффектов, привёл к существенному изменению «линейного оптимального» плана перевозок.

Перспективным направлением для анализа и прогнозирования эффективности работы терминала является имитационное моделирование. Модели этого вида, несмотря на «вероятностное содержание», адекватно описывают работу терминала. В статье рассматриваются этапы создания и работы с моделью. Например, зная величину предстоящего увеличения сезонного грузопотока, можно промоделировать необходимую степень увеличения производительности труда. На основании этого выбрать способы для достижения требуемой производительности. Работа с моделью осуществляется инструментарием Excel.

**О. Э. Яремко, Е. С. Могилева
ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ
СВЯЗНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ**

Построение аналитического решения обратной задачи для уравнения диффузии дробного порядка по времени и идентификация параметров фрактальной модели диффузии рассматривалось ранее авторами [1], [2]. Здесь исследуется задача для связанной модели диффузии определить матричный аналог коэффициента диффузии λ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\partial_t u(x, t) = \lambda^2 \partial_{xx}^2 u(x, t), x > 0, t > 0 \quad (1)$$

где $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$, с начальными условиями

$$u(0, t) = Ae^{i\omega t}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Решение задачи (1)–(2) имеет вид $u(x, t) = \exp\left(i\omega Et - \lambda^{-1}(i\omega)^{\frac{1}{2}}x\right) \cdot A$, где E — единичная матрица, λ^{-1} матрица обратная к λ . Отсюда следует, что матрично-значная функция [3]

$$\hat{u}(x, t) = \exp\left(-\lambda^{-1}\omega^{\frac{1}{2}}x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos\left(\omega tE - \lambda^{-1}\omega^{\frac{1}{2}}x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) A \quad (3)$$

(3) — решение системы уравнений (1) с краевым условием $\hat{u}(0, t) = A \cos \omega t$. Поставим задачу: определить матрицу диффузии λ по известным значениям. $A_0 = \hat{u}(x_0, t_0)$, $A_1 = \hat{u}(x_0, t_1)$, где $t_1 - t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$.

Решая систему уравнений (3) находим:

$$\lambda = -\left(\ln\left((c_0A^{-1})^2 + (c_1A^{-1})^2\right)\right)^{-1} \sqrt{2\omega}x_0 \quad (4)$$

Логарифм матрицы определяется, следуя [4].

Список литературы:

1. Могилева Е. С. Идентификация параметров фрактальной модели диффузии с реализацией в среде Matlab // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: Сб. статей XII Междунар. Научно-техн. конф.; Пенза: ПДЗ, 2012; с. 43-46.
2. Яремко О. Э., Могилева Е. С. Моделирование потенциальных полей в средах с тонким включением методом деформирующих операторов // Пенза, 2013.
3. Bhatia, R. (1997). Matrix Analysis. Graduate Texts in Mathematics **169**. Springer
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

Секция VII
Математическое
программирование,
управление и теория игр

А. Б. Зинченко, Я. А. Голубева (Ростов-на-Дону)
zinch46@mail.ru
**КООПЕРАТИВНОЕ ИНВЕСТИРОВАНИЕ С
ДИСКРЕТНЫМИ ВКЛАДАМИ**

Кооперативные инвестиционные игры помогают выбрать партнеров и комбинацию вкладов, обеспечивающую наибольшие выплаты. Устойчивость кооперации во многом зависит от того, какую долю общего дохода получит каждый инвестор.

В докладе рассматриваются однопериодные инвестиционные игры, допускающие произвольные неотрицательные вклады и вклады, кратные целым положительным числам. Примером вклада первого типа является банковский депозит, второй тип интерпретируется как вложение в производственные технологии. Доказывается, что значения характеристической функции ν соответствующей кооперативной игры (N, ν) вычисляются с помощью задачи о ранце - простейшей задачи целочисленного линейного программирования.

Известное достаточное условие

$$\frac{\vartheta(N)}{\vartheta'(N)} = \max_{\emptyset \neq S \subset N} \frac{\vartheta(S)}{\vartheta'(S)} \quad (1)$$

непустоты S -ядра многопериодной инвестиционной игры (N, ϑ) использует релаксированную игру (N, ϑ') , где $\vartheta'(S)$ определяется задачами линейного программирования, соответствующими задачам для $\vartheta(S)$. Для рассматриваемой игры (N, ν) получено явное выражение $\nu'(S)$, $S \subseteq N$, через капиталы $K_1, \dots, K_n$ инвесторов и максимальную процентную ставку p_{max}

$$\nu'(S) = (p_{max} + 1)k(S), \quad k(S) = \sum_{i \in S} K_i, \quad (2)$$

а также соответствующее (1) достаточное условие

$$\frac{\nu(N)}{k(N)} = \max_{\emptyset \neq S \subset N} \frac{\nu(S)}{k(S)}$$

сбалансированности игры (N, ν) . Несмотря на то, что условия (1)-(2) выведены с учетом специфики инвестиционных игр, большинство сбалансированных игр (N, ϑ) и (N, ν) им не удовлетворяет. Численный эксперимент показал, что часть таких игр удовлетворяет достаточному условию, выведенному первым автором для общей кооперативной игры с трансферабельной полезностью.

К. Н. Кудрявцев (Челябинск)

kudrk@mail333.com

СИЛЬНЫЕ ГАРАНТИИ В МНОГОШАГОВЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматривается многошаговая кооперативная линейно-квадратичная позиционная игра при неопределенности

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,2}, \mathcal{Z}, \{\mathcal{J}_i(U, Z, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (1)$$

В (1) интервал продолжительности игры $[0, K]$ ($K > 0$ — целое число) делится числами $\{0, 1, \dots, K-1, K\} = \mathbf{K}$ на K частей единичной длины. Фазовый вектор $x \in \mathbf{R}^n$, *позицией игры* (1) в момент времени k будет пара $(k, x) \in \mathbf{K} \times \mathbf{R}^n$, задана априори начальная позиция $(t_0, x_0) \in \{0, 1, \dots, K-1, K\} \times \mathbf{R}^n$. Изменение *управляемой системы* Σ во времени описывается разностным векторным уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + u_1 + u_2 + z, \quad x(t_0) = x_0, \quad (k = t_0, t_0+1, \dots, K-1), \quad (2)$$

где A — постоянная $n \times n$ -матрица ($A \in \mathbf{R}^{n \times n}$), $u_i \in \mathbf{R}^n$ — управляющее воздействие игрока i ($i = 1, 2$), $z \in \mathbf{R}^n$ — неопределенный фактор.

Стратегию $U_i(k)$ игрока i в момент времени $k = 0, 1, \dots, K-1$ отождествляем с n -вектор-функцией $u_i(k, x) = P_i(k)x$, где $P_i(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, множество таких стратегий $U_i(k)$ обозначим через $\mathfrak{A}_i(k)$. Множество ситуаций $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Множество неопределенностей $\mathcal{Z}$ в игре (1) с начальной позицией (t_0, x_0) будет

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \{Z = (Z(t_0), Z(t_0+1), \dots, Z(K-1)) \mid Z(k) \div z(k, x, u_1, u_2) = \\ = Q(k)x + R_1(k)u_1 + R_2(k)u_2 \quad \forall Q(k), R_1(k), R_2(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}\}. \end{aligned}$$

Квадратичная *функция выигрыша* i -го игрока

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i(U^*, Z^*, t_0, x_0) = x'(K)C_i x(K) + \\ + \sum_{k=t_0}^{K-1} (u'_i[k]D_i(k)u_i[k] + z'[k]L_i(k)z[k]) \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

значение которой и есть *выигрыш* этого игрока.

Для игры (1), аналогично бескоалиционному варианту [1], формализован и построен сильно гарантированный дележ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: URSS, Красанд 2013. 368 с.

Е. З. Мохонько (Москва)

mohon@ccas.ru

**О НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ИГРЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАСОМ ВРЕМЕНИ
НАБЛЮДЕНИЯ**

В работе выясняется, какие ситуации равновесия, существующие при непрерывном наблюдении за ходом дифференциальной игры, сохраняются при введении ограничений на возможность получать информацию.

Важность и актуальность темы работы проистекает из-за важности динамических моделей принятия решений, возрастающего числа людей, использующих такие модели и необходимости всестороннего изучения способов получения и содержания информации, на основании которой принимаются решения.

В данной работе рассматривается некоторая неантагонистическая дифференциальная игра с фиксированным временем окончания. Правые части уравнений, описывающих игру, зависят только от управлений игроков. Предполагается, что выполнены все ограничения, необходимые для существования ситуации равновесия в позиционных стратегиях [1].

Игроки могут применять стратегии [2], позволяющие получать информацию о позиции дискретным и непрерывным способами. Дискретное и начало непрерывного наблюдения обходятся игроку в фиксированную величину времени. Стоимость непрерывного наблюдения равна отрезку наблюдения. Суммарный запас времени, который игрок может потратить на наблюдения, ограничен. Он меньше длительности игры.

Рассматриваются такие ситуации равновесия, которые порождают равновесные траектории, являющиеся решениями уравнений при постоянных на протяжении всей игры управлениях.

Находится некоторое множество управлений. Равновесные стратегии из [2], соответствующие этим управлениям, определяют такой режим получения информации, при котором суммарное время наблюдения не превышает имеющегося запаса времени наблюдения. Найденное множество управлений наибольшее для данного запаса.

Этот результат может являться основой для изучения влияния изменений стоимости одной проверки на найденное множество управлений, а также для получения аналогичных результатов для более сложных видов управлений.

Литература

[1] Кононенко А. Ф. Структура оптимальных стратегий в динамических управляемых системах // Ж. вычисл. математ. и матем. физ. 1980. Т. 20, № 5. С. 1105–1116.

[2] Кононенко А. Ф., Мохонько Е. З. О процессе получения информации в неантагонистических дифференциальных играх // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1982, 20 с.

И. С. Стабулит (Челябинск)
irisku76@mail.ru
СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ
ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ
В ОДНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ

Рассматривается кооперативная игра двух лиц без побочных платежей при неопределенности в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle.$$

Здесь 1 и 2 — порядковые номера игроков, $X_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ — множество стратегий x_i у i -го игрока ($i = 1, 2$), ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$, неопределенные факторы $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$, $f_i(x, y)$ — функция выигрыша i -го игрока.

Используя примененный в [1] (для бескоалиционных игр) подход, основанный на построении аналога векторного максимина, определим понятие сильно гарантированного по исходам и рискам решения (СГИРР) в игре Γ . Формализацию проведем в три этапа:

Этап 1. Следуя принципу Сэвиджа, для каждой функции выигрыша $f_i(x, y)$ определим функцию риска $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$).

Этап 2. Каждой ситуации $x \in X$ и каждому игроку $i = 1, 2$ поставим в соответствие единственную непрерывную на X вектор-функцию $y^{(i)}(x) : X \rightarrow Y$ такую, что

$$\begin{aligned} f_i(x, y^{(i)}(x)) &= \min_{y \in Y} f_i(x, y) = f_i[x], \\ \Phi_i(x, y^{(i)}(x)) &= \max_{y \in Y} \Phi_i(x, y) = f_i[x] \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Этап 3. Игре Γ сопоставим кооперативную игру двух лиц без побочных платежей (без неопределенностей) — «игру гарантий»

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x]\}_{i=1,2} \rangle,$$

и найдем для нее дележ $f^e = (f_1^e, f_2^e) = (f_1^e[x], f_2^e[x]) \in \mathbf{R}^2$, ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$, доставляющую этот дележ и вектор $\Phi^e = (\Phi_1^e, \Phi_2^e) = (\Phi_1^e[x], \Phi_2^e[x])$. Полученную тройку (x^e, f^e, Φ^e) и назовем СГИРР игры Γ .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: URSS, Красанд 2013. 368 с.

Секция VIII
Информационно-
коммуникационные
технологии в науке,
образовании и производстве

Г. А. Самигулина, А. С. Шаяхметова (Алматы, Казахстан)
galinasamigulina@mail.ru, asemshayakhmetova@mail.ru
ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ
СИСТЕМЫ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ ЛЮДЕЙ С
ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

На сегодняшний день актуальным является эффективное применение IT-технологий с использованием последних достижений в области искусственного интеллекта. Появление мощных персональных компьютеров высокой производительности с большой емкостью памяти и необходимость обработки огромных массивов информации привели к бурному развитию новых интеллектуальных технологий дистанционного обучения на основе нейронных сетей, генетических алгоритмов, искусственных иммунных систем [1] и т. д.

Исследования посвящены разработке интеллектуальной системы дистанционного обучения (ИСДО) для людей с ограниченными возможностями на основе нейросетевого и иммунносетевого подходов для изучения новейших технологий в режиме удаленного доступа с использованием вычислительных кластеров (суперкомпьютеров) в лабораториях коллективного пользования.

Эффективность обучения на основе ИСДО зависит от многих факторов обучающегося (память, заинтересованность, базовое образование и т. д.). При этом существуют дополнительные требования к ИСДО для людей с ограниченными возможностями в зависимости от их физических и психологических особенностей. Внедрение разработанной ИСДО улучшает качество обучения, что способствует социальной адаптации этих людей в обществе. Использование подхода искусственных иммунных систем [2] позволяет прогнозировать результаты обучения и оперативно управлять процессом получения знаний в реальном масштабе времени.

В разработанной интеллектуальной системе решается задача построения иммунносетевой модели обучающегося и создания оптимальной модели обучения. Данная технология позволяет эффективно осваивать новейшие информационные технологии людьми с ограниченными возможностями на дорогостоящем оборудовании в режиме удаленного доступа, повышает доступность и качество образования.

ЛИТЕРАТУРА

G. Samigulina, Z. Samigulina. Intellectual systems of forecasting and control of complex objects based on artificial immune systems. Monograph. — Yelm, WA: Science Book Publishing House, USA, 2014. — 172 p.

Samigulina G. A. Development of the decision support systems on the basis of the intellectual technology of the artificial immune systems // Automatic and remote control. — Springer, 2012. — Vol. 74, — №2. — P.397–403.

Т. И. Семенко, Е. В. Семенко, О. В. Скворцова (Новосибирск)
semenko_ti@mail.ru, skv-ok@yandex.ru
ОБ ОПЫТЕ СОЗДАНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
ИНТЕРАКТИВНОГО ИНТЕРНЕТ-КУРСА ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ В НОВОСИБИРСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ ПЕДАГОГИЧЕСКОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ

С 2008 года на кафедре математического анализа НГПУ ведется работа над проектом по созданию интерактивного интернет-курса высшей математики. Технически проект реализуется на основе модульной объектно-ориентированной динамической учебной среды Moodle, размещен он на сайте ДО ИФМИЭО НГПУ <http://do.nspu.ru>. Курс строится таким образом, что допускается возможность его использования в различных режимах: под полным контролем преподавателя (при обучении студентов очной формы), с частичной самостоятельностью студента (для студентов - заочников), при полном самостоятельном (дистанционном) изучении математики. Весь курс состоит из отдельных блоков (модулей), посвященных различным разделам математики. Каждый модуль включает: теорию с набором вопросов для самоконтроля; практикум «Учебное занятие» (важнейший элемент модуля, так как он является интерактивным, и траектория его прохождения корректируется в зависимости от того, какие ответы дает студент); набор индивидуальных заданий; online-тест для контроля результатов обучения. Прохождение студентом каждого модуля означает полное изучение соответствующего раздела — от первоначального знакомства с теорией до завершающего мини-экзамена в виде итогового теста. За те шесть лет, что курс функционирует, его использовали в той или иной степени около 1000 студентов, накоплена и хранится большая статистика по прохождению студентами отдельных элементов курса. Курс постоянно меняется - как за счет добавления новых разделов, так и за счет совершенствования, большего наполнения контентом уже имеющихся. В конкурсе E-learning Industry Trends (EIT-2011), проводившемся в рамках V Международной конференции по вопросам обучения с технологий e-learning «MOSCOW Education Online 2011», разработанный нашей группой на то время контент для сетевого интерактивного курса «Высшая математика», был удостоен первого места.

Е. В. Филимонова (Ростов-на-Дону)

alex1990@rambler.ru

**НАСТРОЙКА АВТОМАТИЧЕСКОГО ФОРМИРОВАНИЯ
СЛОЖНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОТЧЕТНОСТИ В
<1С: БУХГАЛТЕРИИ 8> (РЕД. 3.0)**

Фирма «1С» выпустила версию 8.3 платформы «1С:Предприятие». В новой платформе реализованы многие функции и механизмы, представляющие интерес как для разработчиков, так и для пользователей. В данной работе мы хотели бы проанализировать их на примере статистической отчетности.

На текущий момент насчитывается около 200 видов форм статистической отчетности и каждая форма содержит в среднем от 30 и более самых разнообразных показателей. До настоящего времени автоматического заполнения статистической отчетности в программах «1С:Предприятие» не предусматривалось, хотя для большинства показателей информация присутствует в учетной системе. Сложность состоит в существенном отличии представления данных учетной системы от данных, необходимых для заполнения статистических форм.

Пользователи «1С:Бухгалтерии 8» (ред. 3.0) получили возможность автоматического формирования некоторых наиболее распространенных форм статистической отчетности. Показатели, необходимые для заполнения статистических форм, называются «объектами наблюдения». Для привязки информации, присутствующей в учетной системе, к объектам наблюдения, мы предлагаем рассмотреть определенный алгоритм настройки заполнения статистических отчетов. Для составления статотчетности в «1С:Бухгалтерии 8» предназначена группа отчетов «Статистика».

Осуществлять настройку форм статистики можно как непосредственно при заполнении конкретной формы статистики, так и воспользовавшись встроенным в «1С:Бухгалтерию 8» (ред. 3.0) сервисом «Календарь бухгалтера». Для этого необходимо открыть список налогов и отчетов по кнопке настройки Календаря, выбрать нужные формы раздела «Статистическая отчетность», нажать кнопку «Записать» и закрыть для сохранения настроек Календаря. После этого в «Календаре бухгалтера» появится самостоятельная задача: «Настроить заполнение форм статистики».

В ней можно будет делать «Настройку заполнения форм статистики» как по отдельно выбранной форме, так и для всех доступных форм сразу. Данный механизм настройки заполнения форм статистического наблюдения предоставляет пользователю «1С:Бухгалтерии 8» (ред. 3.0) универсальный инструмент, который позволит организовать статистический учет на предприятии с учетом его специфики.

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)

black_drive@smtp.ru

**ИНФОРМАТИКА: НАУКА, ИНЖЕНЕРИЯ,
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОР, СОЦИАЛЬНЫЙ ФЕНОМЕН,
УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА**

Процессы в ПРИРОДЕ подчиняются определённым законам. Суть, т.е. семантика информации, этих зависимостей, является 'скрытой информацией'. Она проявляется в сигналах, т.е. в различных синтаксических формах.

С появлением homo sapiens «скрытая информация» становится поэтапно «информацией для нас», что отразим в следующей формулировке: *Информация — это результат умственной деятельности субъекта, обусловленная внешним воздействием сигналов, и/или “внутренним” мыслительным процессом.* В определении чётко обозначена граница между Сигналами, существующими **вне** субъекта; и Знаниями, Мыслью, являющейся результатом **умственной** деятельности субъекта.

Отсюда вытекает двухуровневая роль Информатики. Имея дело с Сигналами (**Знаниями**), она выступает как Инженерия (**Наука**); в ВУЗах изучается Бакалаврами (**Магистрами**). Развиваемый подход приводит к двухуровневому пониманию информационного процесса: **Мысль** → Сигнал → **Мысль**. Соответственно, рассматриваются два уровня ИТ. При определении ИТ на уровне работы со Знаниями, рассматриваются этапы эволюции Интеллектуальных систем (ИС). Анализируется проблема моделирования с помощью ИС интуиции homo sapiens.

Показано, что в т.н. информационном обществе члены сообщества имеют дело с обработкой Сигналов; нет прорыва в области Знаний. Отсюда логически следуют негативные последствия, как в экономике, так и в социальном воздействии ИТ.

Секция IX
Институциональная
организация экономических
систем

Губогло Т. М. (Ростов-на-Дону)
tatyana389@list.ru
**ИННОВАЦИОННАЯ СФЕРА РАЗВИТИЯ
ИНСТИТУТА СОБСТВЕННОСТИ**

Ни для кого не секрет, что интернет объединяет миллионы людей в единый виртуальный мир. Всемирная паутина позволяет любому жителю планеты использовать виртуальный мир для обмена различными объектами виртуальной собственности. Свобода доступа пользователей интернета к ресурсам сети не ограничивается государственными границами или национальными доменами.

Интернет является и средой игровых развлечений. Виртуальные игры удовлетворяют коммуникативную, игровую и социальную потребности человека. В процессе игры человек эмоционально привязан к своему виртуальному персонажу и вместе с ним переживает все победы и поражения. Виртуальная игра является «микромиром», а виртуальный персонаж ассоциируется с «микроЯ», и человек в игре проделывает всё то, что он сделал бы в реальной жизни. В виртуальной «жизни» в различных тематических играх геймер обеспечивает себя не только едой, одеждой, мебелью, но также оружием, снаряжениями, военной техникой и т.д.. Для продвижения персонажа игроку необходимо приобретать или продавать, обменивать заработанные баллы (золото, рубли) на улучшенные характеристики персонажа или техники. Таким образом развиваются отношения виртуальной собственности не только между игроками, но и между игроком и создателями игры.

Исследования Mail.ru Group в России показывают, что около 87% российской интернет-аудитории играет в компьютерные игры чаще одного раза в месяц. Говоря о потребностях, следует добавить, что проведенный исследователями Mail.ru Group анализ мотивации игроков показывает, что компьютерные игры чаще всего позволяют расслабиться (около 62% людей играют, чтобы расслабиться и отвлечься от повседневной рутины), получить удовольствие (33% играют, чтобы получить эстетическое удовольствие от сюжета игры и персонажей).

Статистика показывает, что популярность виртуальных игр ежедневно растет. Сами того не осознавая, игроки становятся главным связующим звеном в зарождающихся и полноценно развивающихся отношениях виртуальной собственности. Объекты виртуальной собственности настолько важны для самих пользователей, что геймеры не только осуществляют равнозначный обмен объектами, но также проявляют оппортунистическое поведение по отношению к объектам виртуальной собственности. Единственное, и, пожалуй, самое существенное отличие процессов мошенничества и краж объектов виртуальной собственности по сравнению с объ-

ектами реальной собственности состоит в отсутствии ответственности за совершенные действия.

Дикусар Г. С. (Ростов-на-Дону)
Dikusar_Galina@mail.ru
**ВОЗМОЖНОСТИ МОТИВИРОВАНИЯ
РАБОТНИКА В РОССИИ**

Наука менеджмент вобрала в себя около сотни общепризнанных мировым сообществом теорий мотивации. Наиболее известная из них — классическая, долгое время оправдывавшая себя в странах с рыночной экономикой, считающая основой мотивацией материальное вознаграждение труда. Но два десятилетия рыночной экономики в России показали, что эта функция мотивации не эффективна для российской ментальности. Финансовые стимулы эффективны в зоне частного предпринимательства, особенно малого бизнеса. Для государственных и крупных предприятий необходимо применять так называемые стимулы-мотиваторы, определяющие раскрытие творческого потенциала, обеспечивающего прогресс. Система оплаты труда должна учитывать важнейший фактор, отличающий одного работника от другого, — индивидуальные заслуги и успехи на производстве.

Выражение «незаменимых работников нет», уместно, когда речь идет о потребностях в работнике низкой квалификации, когда же работа требует специализированных навыков и знаний, издержки, связанные с потерей квалифицированного персонала, могут быть слишком высоки. В этом случае и проявляются особенности мотивации российского работника — персональные заслуги должны определять разницу статусов при равной оплате труда. Если, например, квалифицированному менеджеру или строителю поставить зарплату на порядок выше, чем у коллег, это может привести даже к обратному эффекту, так как в силу природного коллективизма среднестатистический российский работник может почувствовать себя неловко в подобной ситуации.

Зато большое значение российские работники придают социальным привилегиям, которыми они могут пользоваться по мере роста заслуг перед предприятием. К такого рода привилегиям могут относиться совокупность возможностей, определяющих благоустройство жизни работника: бесплатное пользование информационными и коммуникативными ресурсами, служебные компьютеры, гаджеты, машины, тем более квартиры, которые после определенной выслуги могут перейти в частную собственность работников, повышение квалификации работников и обучение их детей, путевки в дома отдыха, лечение работников и членов их семей, кредиты, займы, ссуды, даже такие мелочи, как подарок в виде фирменных часов или отпуск по требованию — и российский работник будет предан компании многие годы.

Грамотная мотивационная политика способна повысить эффективность использования трудовых ресурсов.

В. Д. Дмитриева (Ростов-на-Дону)
riyachan2807@gmail.com

ОСОБЕННОСТИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ ОТ ПОТРЕБЛЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ БЛАГ

Целью любого игрока является получение удовлетворения от самого игрового процесса (геймплея), который представляет собой решение ряда последовательных задач, поставленных производителями и определенных исходя из мифа, лежащего в основе игры.

Э. Кастронова строит свою теорию рынка игр в сравнении ее с теорией игр, показывая ее несостоятельность и неприменимость к виртуальным мирам настольных и компьютерных игр, поэтому, по его мнению, самым интуитивно понятным подходом будет рассмотрение рынка игр как рынка простых долгосрочных товаров развлечений.

Э. Кастронова сравнивает потребность в играх с потребностью в книгах — такое же оплачиваемое и приносящее радость развлечение.

В виртуальном мире структура потребления подчинена архетипу. Реализуемый в киберпространстве каждый архетипический образ имеет собственный набор ценностей.

Ориентируясь на эти архетипические образы и стереотипы человеческого поведения в определенных ситуациях (включая экономические паттерны), гейм-дизайнеры используют разнообразные игровые приемы и механики, которые зачастую сами становятся стереотипами в игровой среде.

Э. Кастронова рассматривает проблему мотивации к игре на примере обычного паззла. Исследуя спрос на игровое время, он сталкивается с парадоксом природы ограничений: в реальной экономике потребители платят за снятие любых ограничений, однако на рынке игр они готовы платить за создание препятствий. При этом, как отмечает Э. Кастронова, паззл с 900 миллионами кусочков не вызовет желания у потребителя приобрести его, так как его сборка физически невозможна; паззл, состоящий из двух кусочков, также непривлекателен в глазах покупателей, так как он слишком легкий и неинтересный, но головоломка с сотней элементов уже обладает повышенной сложностью, что увеличивает желанность такого паззла и соответственно платежеспособный спрос на него.

Данный парадокс основан на экономической модели поведения человека, предполагающей конфликт между желаниями и возможностями homo consumens и, соответственно, максимизацию функции полезности при определенных заданных ограничениях, которые и определяют спрос в конечном итоге.

Если предположить, что за решение паззла предлагают награду (такой наградой может быть и просто удовлетворение от решения задачи), то

среди одинаковых по сложности предпочтительнее тот, за который награда самая большая. Таким образом, удовлетворенность игрока, максимизирующего свою полезность, представляет собой зависимость получаемого награждения, сложности пазла и оптимальности решаемой задачи для каждого игрока.

А. Ф. Капитанова (Ростов-на-Дону)

kapitanova.af@mail.ru

ИНСТИТУЦИОНАЛИЗМ КАК ИНСТРУМЕНТ ИЗУЧЕНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ТРАНСНАЦИОНАЛЬНЫХ КОРПОРАЦИЙ

Конкурентоспособность товара определяется с одной стороны ценой товара, а с другой — его качеством, причем последнее в современной экономике имеет более важное значение в виду того, что усиливающаяся конкуренция, меняющиеся технологии и покупательский спрос усложняют возможность получения высокой прибыли за счет изменения цены.

Производители могут существовать, только получая прибыль, через завоевание признания потребителя. Важнейший способ этого достичь — постоянное повышение качества товаров. Однако практика показывает, что предлагаемые товары резко теряют в качестве.

В рамках институционального подхода важное значение имеет концепция власти. В ключе изучения поведения ТНК концепция отражает проявления власти производителя над потребителем.

По мере развития производства и усложнения потребностей формирование лояльности бренду становится одним из важнейших способов накопления рыночной власти у ТНК. Высокое качество и длительный срок службы товара могут быть факторами, препятствующими интересам ТНК. Благодаря незначительным изменениям внешнего вида и других нефункциональных свойств товаров легче добиться роста их продаж, и, следовательно, финансовых поступлений.

Практикуемое корпорациями формирование у потребителей склонности к постоянной замене товаров положительно влияет на рост конкурентоспособности, дальнейшее расширения размеров ТНК и рост их активов.

Д. С. Мамаева (Новочеркасск)

Dinka-9089@mail.ru

ИНСТИТУТ ОТЦОВСТВА В СОВРЕМЕННОЙ РОССИИ

На современном этапе экономического и политического развития страны всё чаще правительство стало обращать внимание на такой социальный институт как семья. Особым типом семей я бы хотела выделить так называемые неполные семьи: с одной матерью или отцом. Всё чаще наблюдаются случаи, когда мать остается одна с ребенком по ряду причин: отец и мать развелись, или отец погиб, пропал и т. д. Но не реже встречается и

иная картина, когда ребенка оставляют на отца. Такие отцы называются «одиночки».

Российским законодательством такое понятие не предусмотрено. Несмотря на это, трудовое законодательство не оставляет такую категорию граждан без внимания, вводя одиноких отцов, воспитывающих детей без матери, в защищенную законом группу. В России по официальной статистике из всего количества неполных семей доля семей с одинокими отцами составляет всего 6%. Но существуют регионы, где это соотношение несколько другое — например, в Якутии на каждые 600 одиноких матерей приходится 250 вдовых и разведенных отцов.

Существует ряд причин, из-за которых мужчины становятся одинокими: развод, гибель жены и отказ жены от ребенка. Тот факт, что Россия ратифицировала Конвенцию МОТ №156 «О равном обращении и равных возможностях для трудящихся мужчин и женщин: трудящихся с семейными обязанностями», сделало легально возможным распространение льгот и гарантий, предусмотренных для матерей-одиночек на одиноких отцов и лиц с семейными обязанностями.

Одиноким отцом имеет льготы по оплате за содержание ребенка в образовательных учреждениях, реализующих основную общеобразовательную программу дошкольного образования: 20% — на первого ребенка, 50% — на второго ребенка, 70% — на третьего и последующих детей.

В Москве отец-одиночка пользуется бесплатным отпуском по рецептам врачей молочных продуктов детского питания детям до двух лет (до 15 лет — если они страдают хроническими заболеваниями, перечень которых утвержден правительством Москвы).

Дети до трех лет, которых воспитывает одиноким отцом, пользуются бесплатными лекарственными средствами по рецептам врачей. Если дети отца-одиночки учатся в образовательных учреждениях, то им положено бесплатное двухразовое питание и обеспечение бесплатными учебниками. Предусмотрена льготная плата за обучение детей (от 7 до 18 лет) в школах искусств.

Существует еще ряд льгот для отцов-одиночек и их детей, но, к сожалению, не все они могут использоваться таким мужчиной. Пожалуй, это и есть основная проблема современного одинокого отца, когда гарантии от государства предоставляются, но возможность их использования сводится к нулю.

Список литературы

[1] Трудовые права «отца-одиночки» // Сайт Центр социально-трудовых прав URL: <http://trudprava.ru/expert/article/genderart/739>

М. В. Попов (Ростов-на-Дону)

glonas@list.ru

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ В ОНЛАЙН-ИГРАХ

На современном этапе аудитория различных онлайн-овых компьютерных игр постоянно увеличивается. Так, в виртуальном мире компьютерной игры «Мир танков» по последним данным, в российском кластере игры зарегистрировано 17 млн. игроков, а одновременно в игре во всем мире собирается от 815 000 до 1 000 000 игроков; в игре World of Warcraft на 2007 г. было зарегистрировано 10,3 млн. пользователей по всему миру; в игре Star Wars The Old Republic на 2011 г. было зарегистрировано более миллиона пользователей; количество пользователей игры My Lands в 2011 г. составило 150 тыс. аккаунтов (количество активных игроков — 100 тыс., а одновременный онлайн-сеанс достигает 50 тыс. игроков).

Игроки имеют различную систему ценностей и взглядов, что напрямую влияет на их поведение. Применительно к нашему исследованию мы выделяем следующие типы поведения игроков: «геймеры-дельцы» — игроки-профессионалы, использующие игру для получения материальных благ, например, прокачивая персонажей с целью продажи (World of Warcraft, Lineage, Aion); занимаясь фермерством или добычей различных игровых ресурсов для обмена их на реальные деньги (My Lands, World of Warcraft); участвуя или поддерживая маркетинговые акции (World of Tanks, World of Warplanes, Warface) и т.п.; «члены-сообщества» — самые преданные участники игры, воспринимающие ее как доминирующую форму развлечений, тем самым формирующие стабильный спрос на товары, предлагаемые в игре (своего рода «товарный фетишизм»); «геймеры-нейтралы» — данному типу геймеров игра заменяет другую форму развлечений, в свою очередь, подобные игроки выполняют важную функцию — наполняют игру участниками, которые потенциально могут перейти в другие группы; «геймеры-лимитеры» — у данного типа игроков интенсивно меняются интересы, поэтому они надолго не задерживаются в игре, но склонны к разовым актам потребления (импульсивным покупкам).

Отдельно необходимо отметить, что на современном этапе в некоторых играх виртуальные блага создаются специально для игроков, ориентированных на получение различной по типу полезности от виртуальных благ. Так, например, видеобозреватель и профессиональный игрок проекта World of Tanks К. Ладанин отмечает, что премиумная виртуальная техника подразделяется на три группы: «спорт-техника» — танки, ориентированные на достижение определенного спортивного результата, например, увеличение статистики побед, увеличение статистики убитых противников; «фарм-танки» — ориентированные на зарабатывание внутриигровых денег; «фан-танки» — ориентированные на получение максимального удовольствия от игры (гедоническая ориентация).

В заключение необходимо отметить, что исследование группового состава игроков в виртуальных мирах компьютерных игр имеет большое значение для экономической теории, так как онлайн-игр формируют новые группы товаров и сферы приложения труда.

Н. Н. Розова (Ростов-на-Дону)

rozova25@yandex.ru

ФЕНОМЕН КОРПОРАТИВНОЙ СОЦИАЛЬНОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТИ

Корпоративная социальная ответственность (КСО) — это концепция управления бизнесом, предполагающая ответственность предпринимателя за результаты своей деятельности перед работниками, акционерами, инвесторами, поставщиками, а также перед населением той территории, на которой осуществляется его деятельность. Стабилизация российской экономики и политической ситуации в стране, рост производства и экспансия российских компаний на международные рынки в начале 2000-х гг. заложили основы практики КСО в России. Российский бизнес стал активно участвовать в глобальных инициативах по социально ответственному бизнесу и, в первую очередь, в Глобальном Договоре ООН, созданном в 1999 году для соответствия деятельности компаний десяти всеобщим принципам в области прав человека, трудовых отношений, охраны окружающей среды и противодействия коррупции. Весной 2004 года Президент РФ В. В. Путин в Послании Федеральному Собранию отметил, что задачами для социально ответственного бизнеса являются «безусловная и полная уплата налогов, участие крупного бизнеса в реализации жизненно важных проектов, в том числе концентрация внимания на самых насущных для граждан страны проблемах». В этом же году Российским союзом предпринимателей и промышленников была разработана Социальная хартия российского бизнеса. Этот документ подвел первые итоги общественно-политической дискуссии о КСО, оформив своего рода стандарт ответственного ведения бизнеса для российских компаний. На 01.06.2012 г. к Социальной хартии присоединилось более 241 компаний и организаций, объединяющих более 6 млн. работников. В 2009 году Программа Развития ООН совместно с Министерством экономического развития РФ начала осуществление пятилетнего проекта, направленного на более широкое вовлечение частного бизнеса в решение проблем социально-экономического развития России путем присоединения российских компаний к Глобальному договору (ГД) ООН. Основная цель данного проекта — разработка и реализация проектов по минимизации экономических, социальных и экологических последствий глобального экономического кризиса для участников российской Сети Глобального договора на территориях, где они действуют. Проявления социальной ответственности российскими предпринимателями становятся массовыми, что позволяет нам рассматривать

КСО как формирующуюся на наших глазах норму поведения субъектов хозяйствования.

Н. В. Чеботарева (Ростов-на-Дону)
nv_chebotareva@mail.ru
ЭВОЛЮЦИЯ ПЛАТЕЖНЫХ СРЕДСТВ

Под влиянием современных социокультурных процессов расширяется область применения различных денежных инструментов, обладающих новыми свойствами и функциональными особенностями. Все более популярным средством платежа становятся электронные деньги. Деньги как воплощение материального мира трансформируются в виртуальную форму, сохраняя свои функции. Развитие производительных сил приводит к тому, что в обществе, живущем деньгами, исчезают сами деньги как материальный объект. Сегодня деньги — это электронный ветер в компьютерной сети, поляризация магнитной частицы на жестком диске, цифры на экране монитора.

Наиболее отличающимся от различных видов электронных денег является криптовалюта — вид цифровой валюты, эмиссия и учет которой происходит автоматически на основе криптографических методов (или на основе генерации численных кодов и алгоритмов). Первой и наиболее популярной из криптовалют является биткоин (англ. Bitcoin, bit — единица информации, coin — монета) электронная валюта, созданная в 2009 году. Принципиальное отличие биткоина от других видов электронных денег в том, что биткоин не выступает иной формой денег, он не обеспечен ничем, его эмитентом является не конкретное лицо, а участники системы. На сегодняшний день стоимость 1 биткоина равняется примерно \$640 и меняется каждую секунду. Биткоин — это первая электронная валюта, которая получила ценность, не являясь изначально обычным товаром, удовлетворяющим потребности, и не имея обеспечения в виде существующих валют.

Особенностью электронных денег является то, что вместе с современными средствами коммуникаций они стали способом глобального контроля населения. Финансовая история любого человека становится абсолютно прозрачной для владельцев платежных систем и государства. Одним нажатием на клавишу компьютера можно обнулить или заблокировать любой счет или кредитную карту. Но как невозможно учесть количество выпущенных бумажных денег, так и еще сложнее подсчитать количество электронных денег. Товары и услуги приобретаются за виртуальные цифры на дисплее компьютера. Все происходящее начинает напоминать глобальную компьютерную игру в цивилизацию. К чему это все приведет, мы сможем увидеть уже в обозримом будущем.

В. Е. Шумилина (Ростов-на-Дону)
Vera333@mail.ru
МОДЕЛЬ НАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ
ФИНАНСОВОГО УЧЕТА

Исследование национальных систем бухгалтерского учета проводится для решения четырех основных задач: 1) выявление влияния на организацию и методику бухгалтерского учета основных культурных особенностей и традиций в сфере бухгалтерского учета; 2) установление основных различий в организации финансового учета: учет активов, обязательств, капитала, доходов, расходов, остатков производственных ресурсов, результатов; 3) установление общих черт и их группировка: использование интернациональной модели финансового учета производственной и финансовой оптики; 4) совершенствование российской системы финансового учета в соответствии с накопленным опытом, социальными и бухгалтерскими ценностями в рамках действующей бухгалтерской системы. Национальные системы характеризуются наличием 9 классификационных признаков, идентифицируемых около 100 подпризнаками: методы отражения и оценки активов; методы учета обязательств; методы учета и защиты капитала; подходы к отражению доходов; учет расходов; отражение и оценка остатков производственных ресурсов; методы определения результатов; использование интернациональной модели финансового учета. В отношении методов отражения и оценки активов выделены 14 классификационных подпризнаков: переоценка основных средств; метод оценки запасов; метод оценки долгосрочных инвестиций; амортизация гудвилла и других нематериальных активов и др. Второй идентификационный признак модели национальных систем финансового учета рассматривает обязательства как определяющий элемент стоимости предприятия. Третий идентификационный признак модели определяет методы учета и защиты капитала, который формируется уставным капиталом, резервным капиталом и нераспределенной прибылью. Четвертый идентификационный признак характеризует подходы к отражению доходов. Пятый идентификационный признак модели национальных систем финансового учета раскрывает учет расходов, которые сгруппированы в три направления: учет затрат по элементам; учет затрат по элементам и центрам ответственности; учет затрат в финансовом учете по статьям калькуляции. Модель национальных систем бухгалтерского учета в части расходов позволяет разделить все обследованные страны на две используемые оптики: производственная оптика в двух вариантах (Россия, Китай, Германия, Нидерланды); финансовая оптика (Австралия, Бразилия, Франция, Япония, Швеция, Швейцария, ОАЭ, Великобритания, США, Канада). Шестой идентификационный признак модели национальных систем финансового учета рассматривает производственные запасы и их использование в определении результатов по производственной и финансовой оптике. Седьмой идентификационный

признак модели национальных систем финансового учета сводится к методам определения финансового результата.

Таким образом, предлагаемая модель национальных систем финансового учета, которая группирует основные национальные системы по определяющим признакам финансового учета (активы, обязательства, капитал, доходы, расходы, остатки производственных ресурсов, финансовые результаты), позволяет систематизировать национальные учетные системы на две оптики: производственную (Россия, Германия, Китай, Нидерланды) и финансовую (Австралия, Бразилия, Франция, Япония, Швеция, Швейцария, ОАЭ, Великобритания, США).

Секция X
Потенциал и перспективы
экономического развития
России

О. В. Губарь (Ростов-на-Дону)

gubar_olga@list.ru

**ВИРТУАЛЬНАЯ ЭКОНОМИКА КОМПЬЮТЕРНЫХ ИГР:
ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО
ЭКСПЕРИМЕНТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Информационные и коммуникационные технологии породили новую реальность — виртуальные миры компьютерных игр, в которых сложились социально-экономические отношения. Эти сформировавшиеся в виртуальной среде вполне реальные социально-экономические отношения мы называли симулятивной экономикой.

Симулятивная экономика намного реальнее, чем кажется, и производители виртуальных игр это понимают. Так, исландский разработчик EVE Online (многопользовательский космический симулятор) имеет в своем штате эксперта по хозяйственной деятельности доктора экономических наук Э. Гудмундссона. Он рассказывает, что на начальном этапе игры игрокам была предоставлена вселенная, созданная по физическим принципам реального мира, и они сами стали вести в ней хозяйственную деятельность в полном соответствии с классическими идеями А. Смита о разделении труда как основе роста производительности. За годы игры сформировался рынок, сложился хозяйственный механизм: спрос, предложение, цена, сезонность цен, ценовая рестрикция и дискриминация, налоги, рента и инфляция — все это сформировалось в экономике EVE и приводится в действие геймерами/аватарами без осязательного контроля с внешней стороны (производителей игры и государств). В ходе хозяйственной деятельности в симулятивной экономике формируется общество. Между членами общества по поводу присвоения благ формируются отношения собственности, которые, как и в реальности, являются системообразующими, так как в них участники общественного производства выступают представителями определенных социальных групп.

Институциональная среда виртуальных и реальных миров различается, но экономические законы действуют те же, и бихевиористские модели идентичны. Симулятивная экономика может стать областью экспериментальной экономической теории, позволит изучать эволюцию институтов виртуального мира и возможных последствий их влияния на реальную экономику. Проведение подобных экспериментов в симулятивной экономике позволит сократить количество этапов эксперимента, избавиться от временных лагов между моментом совершения какой-либо операции и оценкой ее результатов. Метод компьютерных симуляций, позволяющих увидеть со стороны конкретную экономическую модель, существующую в данной виртуальной среде, может стать основным методом изучения и объяснения окружающей действительности.

Л. В. Карташева (Ростов-на-Дону)

kartasheva@mail.ru

АНАЛИЗ УРОВНЯ ТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В данной работе создана экспертная система для оценки уровня торгового предприятия. Экспертные системы — это прикладные системы искусственного интеллекта, в которых база знаний представляет собой формализованные эмпирические знания высококвалифицированных специалистов (экспертов) в какой-либо узкой предметной области. Они предназначены для помощи экспертам (или их замены) в силу дефицита профессиональных экспертов, недостаточной оперативности в решении задач, отсутствия достоверной информации.

Прежде всего, при создании экспертной системы, необходимо собрать все относящиеся к делу факты. Факты собираются в процессе исследования рынка, изучения объектов торговли и качества торгового предприятия. Экспертные системы находят все большее применение в коммерческой деятельности, собирая, суммируя знания и опыт высококвалифицированных специалистов и используя их в практической деятельности неограниченное число раз.

В данной работе составляется ряд вопросов, ответы на которые дадут значения весовых факторов. Это могут быть, например, такие вопросы:

1. Процент работников с высшим образованием.
2. Возраст обслуживающего персонала.
3. Имеется ли автостоянка возле данного торгового предприятия.
4. Имеет ли данное торговое предприятие автоматические двери.
5. Площадь торгового зала.
6. Оснащенность компьютерами и т.д.

Каждый ответ на вопрос отмасштабирован согласно шкале важности от 1 до 10. Чем больше число, тем важнее положительный ответ на этот вопрос для решения задачи об уровне торгового предприятия. Эти числа и называются весовыми факторами.

Каждому положительному или отрицательному ответу на поставленный вопрос ставится в соответствие значение весовой функции. Значения весовых функций суммируются и, в зависимости от величины полученной суммы, формируется ответ об уровне данного торгового предприятия.

Разделяя базу знаний системы на отдельные группы, можно исключить те, в которые предприятие, рассматриваемой экспертной системы, в какой-то определённый момент времени не входит. Информация локализуется по группам и уже не представляется столь громоздкой и неуправляемой. Соответственно, упрощаются и задачи программирования. Исследование торгового предприятия проводится в зависимости от того, к какой классификационной группе по форме собственности оно относится (частная фирма, государственное предприятие, муниципальное предприятие)

Программа, реализующая описанный подход, написана на языке Visual Basic. Состоит программа из четырех частей:

1. Получение данных;
2. Расчеты полученных данных;
3. Анализ полученных данных;
4. Вывод результата.

Программа на языке Visual Basic, реализующая описанный подход, использует весовые факторы, подсчитывая их суммы. Она позволяет провести тестирование различных торговых предприятий и оценить их уровень.

Покромкин К. Р. (Новочеркасск)

kirillpok@yandex.ru

**ВЛИЯНИЕ ПОЛИТИЧЕСКОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ НА
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ
ГОСУДАРСТВЕННЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ РФ И
УКРАИНЫ**

Единая централизованная хозяйственная система СССР в условиях федеративного административно-территориального устройства страны предполагала тесные производственные и научные связи наряду с региональным разделением труда. Существовали целые отрасли промышленности, ритмичное и стабильное функционирование которых было невозможно без плотного взаимодействия между предприятиями отдельно взятых союзных республик.

Социально-политический распад СССР 1991–92 гг. повлек за собой разрыв устойчивых экономико-географических связей между предприятиями РФ и Украины. Наряду с приватизацией гражданского сектора экономики шел процесс реорганизации экономических субъектов стратегических отраслей промышленности и создание новых государственных форм собственности в условия рыночной системы.

Несмотря на вышеуказанные факторы, кооперационные связи соседних дружественных государств РФ и Украины сохранялись и позволяли полностью не утратить советское хозяйственное наследие и совместно производить конкурентоспособную продукцию (сельхозмашиностроение, самолетостроение, двигателестроение).

События 2013–2014 годов в Украине, политический кризис и преддефолтное состояние национальной экономики спровоцировали нестабильность в сложившейся кооперационной системе производства. Современные военно-политические и финансовые факторы неустойчивости в Украине оказывают значительное негативное влияние на темпы и объемы взаимозависимого производства с участием государственных компаний обеих стран. Под вопросом оказалось планируемое создание объединенных хозяйственных структур в авиапромышленном комплексе, ракетно-космической

отрасли, сельхозмашиностроении, оборонно-промышленном комплексе в целом.

Таким образом, принципиально важно совместными усилиями и путем диалога преодолеть факторы негативного влияния для стабилизации рассматриваемой проблемы. Необходимо углублять научно-техническое сотрудничество двух государств, оптимизировать трансграничные хозяйственные связи, реорганизовать систему финансирования взаимозависимых производств для сохранения и дальнейшего развития выпуска высокотехнологичной конкурентоспособной продукции на базе государственных предприятий России и Украины.

А. П. Ремонтов, С. Г. Разуваев, С. В. Трубицков (Пенза)
remontov@mail.ru

АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ КАДРОВОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ СТРАТЕГИИ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Разработка стратегии устойчивого развития промышленного предприятия машиностроительной отрасли, требует учета проблем и факторов, препятствующих его развитию, к числу основных из них следует отнести:

острый дефицит высококвалифицированных кадров, для реализации программ стратегических преобразований, в условиях неблагоприятного воздействия внешних факторов;

морально устаревшую систему управления трудовыми ресурсами; недостаточно развитую систему кадрового резерва и опережающего обучения кадрового ресурса.

Таким образом, в современных условиях одной из задач разработки и освоения новых подходов к формированию стратегии устойчивого развития промышленного предприятия является формирование системы управления трудовыми ресурсами, включающей в себя весь комплекс мероприятий необходимых для превращения имеющихся трудовых ресурсов в «инвестиционный потенциал» предприятия.

Актуальность данной задачи подтверждается принятым Правительством РФ курсом на развитие машиностроительного комплекса России на инновационной основе. В документе одно из значимых мест отведено вопросам усиления роли трудовых ресурсов в стратегии устойчивого развития предприятия.

В данной работе авторами предложен алгоритм эффективного взаимодействия промышленных предприятий с техническими вузами, реализация которого позволит, используя научно-техническую базу вузов и производственную базу предприятий, готовить востребованных квалифицированных специалистов. Предложенный алгоритм опробован в процессе сотрудничества Пензенского государственного технологического университета с инновационными предприятиями-партнерами Пензенского реги-

она, которые в соответствии со своими планами модернизации сформировали для университета заявку на проведение повышения квалификации и переподготовки специалистов.

О. В. Сулименко (Ростов-на-Дону)
sultan2711@mail.ru
ВЫВОЗ КАПИТАЛА ИЗ РОССИИ

Вывоз капитала из России впервые стал осуществляться с конца XIX века — с тех пор как русские предприниматели начали вкладывать капитал в промышленность и торговлю близлежащих стран. В современной России экспорт капитала возобновился и приобрел преимущественно нелегитимный характер, за что был назван «бегством» или «утечкой» капитала. В 90-е гг. объем вывоза капитала из России не превышал \$25 млрд. в год, и к началу 2000 г. величина прямых российских инвестиций за рубежом составляла \$20 млрд. В период стабилизации и роста экономики начала 2000-х гг. объем вывоза капитала снизился и даже компенсировался ввозом. В кризисный 2008 г. вывоз капитала превысил \$130 млрд. и в последние три года не опускается ниже \$60 млрд. в год.

В первое десятилетие XXI века в структуре вывоза российского капитала преобладали прямые инвестиции, объем которых к 2013 г. достиг \$406, 295 млрд. (30% ВВП РФ) и обеспечил России восьмое место в списке развитых стран и второе место среди развивающихся стран — крупнейших международных инвесторов. Рост объема вывоза капитала из России происходит на фоне сокращения объемов глобального рынка прямых иностранных инвестиций (ПИИ) почти вдвое: до кризиса 2008 г. объем ПИИ составлял \$1,9 трлн., а в 2013 г. — \$1 трлн. Подобные масштабы вывоза капитала и приобретения активов за рубежом позволяют говорить о формировании параллельной российской экономики, основными субъектами которой являются ведущие российские компании.

В последние годы сформировался так называемый «второй эшелон» экспортеров ПИИ — это ведущие представители отраслей с невысокой капиталоемкостью, крупные компании несырьевых отраслей на начальных стадиях интернационализации своего бизнеса, а также средние компании с уже разветвленными сетями зарубежных дочерних структур. В 2012 году российские предприниматели приобрели зарубежных активов на сумму более \$139 млрд., при этом 20% сделок были заключены на сумму более \$100 млн. Большая часть капитала была направлена на приобретение предприятий тех же видов деятельности, что и бизнес покупателей, что свидетельствует о стремлении расширить занимаемый сегмент рынка. При этом снижается доля капитала, вывозимого сырьевыми компаниями (с 43% в 2011 г. до 31% в 2012 г.) и растет доля капитала, вывозимого предприятиями телекоммуникаций, предоставляющими медиа и финансовые услуги.

Таким образом, вывоз российского капитала сформировал за пределами России активы, совокупная стоимость которых равна годовому ВВП страны.

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)

black_drive@smtp.ru

**СПЕЦИФИКА СТРУКТУРЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ
РАЗВИТИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ
ОТНОШЕНИЙ В РОССИИ**

Образовавшаяся из хаоса «перестройки» структура социально-экономических отношений (СЭО) — **Инверсна** структуре СЭО экономически развитых стран (ЭРС). В ЭРС (**России**) законы рыночной экономики являются определяющими (**Подчинёнными**), а законы теневой экономики — подчинёнными (**Определяющими**). Формулировка системно определяющего закона очень проста: «Все процессы в СЭО направлены на дальнейшее **ускоренное** обогащение членов теневой экономики!». Ускоренно можно обогатиться только за счёт распродажи природных ресурсов; доступа к финансовым потокам; использование дешёвой рабочей силы.

Это **СИСТЕМНО**, т.е. объективно неизбежно, означает: **ПРИНЦИПИАЛЬНУЮ НЕВОЗМОЖНОСТЬ** трансформации сырьевой экономики, в экономику, базирующейся на высоких технологиях; борьбу коррумпированных, неподсудных кланов за доступ к финансовым потокам; дальнейшую стагнацию в науке, образовании, промышленности, аграрном секторе и т.д.; ухудшение экологической обстановки, уменьшение продолжительности жизни россиян, сокращение численности коренного населения; эмиграцию «умов» в ЭРС, миграцию неквалифицированной рабочей силы.

Необходимым условием трансформации Российской структуры СЭО является формирование реального среднего класса производителей. Для преодоления сопротивления коррумпированных кланов необходимо использовать позитивный опыт социально-экономических преобразований, проводимых в Китае.

Л. В. Юсупова (Грозный)

yusupova.lolita@mail.ru

О ПЕРСПЕКТИВАХ РАЗВИТИЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ В ЧЕЧЕНСКОЙ РЕСПУБЛИКЕ

Высокая инвестиционная привлекательность является одним из ключевых факторов позитивного имиджа любого региона, наличие которого может значительно увеличить приток внешних финансовых ресурсов в регион. Инвестиционный рейтинг региона поддерживаются позитивной динамикой ключевых индикаторов, хорошей кредитной историей, низким уровнем долговой нагрузки.

Чеченская Республика обладает значительными конкурентными преимуществами, в числе которых выгодное географическое расположение, богатая сырьевая база, демографический потенциал и другие.

В настоящее время в Чеченской Республике преобладают государственные инвестиции. Чеченская Республика — «золотое дно» для частных инвестиций, остаются открытыми много кратко- и долгосрочных проектов, привлекательных для инвестиций. Возникает вопрос — почему частные инвесторы не торопятся делать вложения в экономику ЧР? Полагаем, что основным фактором привлечения инвестиций в Чеченской Республике могут стать государственные гарантии инвесторам в случае форс-мажорных ситуаций. Таким образом, имеющая высокий инвестиционный потенциал экономика Чеченской Республики находится в зависимости от социально-политической обстановки в регионе в целом.

Инвестиции, направленные на создание рабочих мест обязательно будут высокоэффективными в связи с тем, что в регионе сохраняется достаточно высокий уровень безработицы и самое молодое население России — средний возраст жителей республики менее 23 лет.

Изучение и анализ действительной ситуации инвестиционной политики ЧР позволили установить, что, несмотря на разработанные Правительством и специальными комиссиями по инвестиционным отношениям нормативной правовой базы сохраняются некоторые объективные и субъективные проблемы, требующие решения:

доработка нормативной правовой базы в части обеспечения гарантий и государственной поддержки инвесторам; разработка инвестиционных проектов и площадок; поддержка государства на продвижение готовой продукции на всероссийский рынок; оживление рынка страхования в республике; создания адекватной модели налогового механизма кадровое обеспечение инвестиционной политики; проведение международных, всероссийских выставочно-ярмарочных мероприятий и семинаров, рекламных акций. предоставление инвесторам особых гарантий со стороны государства в случае форс-мажорных ситуаций в регионе.

Секция XI
Современные проблемы
образования

И. А. Байгушева (Астрахань)

iabai@mail.ru

**О ГОТОВНОСТИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ВУЗА К
РЕАЛИЗАЦИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ
НАПРАВЛЕННОСТИ КУРСА**

Модернизация отечественной системы высшего профессионального образования обуславливает потребность в развитии профессиональной компетентности преподавателя вуза, отвечающей современным вызовам времени. Даже высокий уровень научно-математической и методической подготовки преподавателя не обеспечивает ожидаемого обществом результата обучения в вузе – специалиста, способного к системному применению математических знаний, умений и ценностных установок для успешного решения профессиональных задач.

Реализация концепции профессионально направленной математической подготовки экономистов в вузе [1] требует специальной подготовки преподавателей математических дисциплин. Готовность преподавателей к реализации концепции профессионально направленной математической подготовки экономистов в вузе имеет два аспекта: 1) овладение обобщенными методами решения типовых профессиональных задач (ТПЗ) экономистов; 2) овладение методикой обучения студентов обобщенным методом решения ТПЗ экономистов. Поэтому преподаватель должен не только соответствовать требованиям ФГОС ВПО по направлению «Экономика» к кадровому обеспечению учебного процесса, но и обладать следующими специальными компетенциями:

- владеет обобщенными методами решения ТПЗ экономиста;
- способен выбрать определенные типы профессиональных задач экономиста при изучении конкретных модулей математической дисциплины;
- способен разрабатывать системы псевдопрофессиональных задач определенного типа для решения в рамках учебных модулей;
- способен выделять математические знания учебных модулей, необходимые для решения ТПЗ экономистов;
- способен разрабатывать методы решения конкретных ТПЗ экономиста, опираясь на обобщенные методы их решения;
- владеет методикой обучения студентов обобщенным методом решения ТПЗ экономистов на всех этапах этого процесса.

Разработана программа курса повышения квалификации для преподавателей математических дисциплин, целью которого является решение этих задач.

ЛИТЕРАТУРА

Байгушева И. А. Концептуальные положения профессионально направленной математической подготовки экономистов в вузе // Высшее образование сегодня. 2013. № 2. С. 60–62.

В. Г. Боловин, Т. В. Гусева (Астрахань)

push_igrok@mail.ru

ПОДГОТОВКА ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ В РОССИЙСКОЙ СИСТЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Условия создания подготовки инженерных кадров зависят от инновационных систем уровня сетевых условий нескольких вузов, объединенных единой целью. Эта цель обусловлена необходимостью народного развития хозяйственных и государственных программ. Российская система образования была, как бы, локомотивом всемирной науки, поскольку инженерная подготовка кадров России велась системно и целенаправленно, это и являлось основной целью Российской государственности.

Приоритетные направления развития научно-технологических комплексов создавались трудом кадров научно-технического состава России. Усилия, прилагаемые для работы в этом направлении, обеспечивали выполнение поставленных наукой задач. Острой проблемой при подготовке инженерных кадров в Российской системе образования по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса является нехватка ресурсов для материально-технического обеспечения современной научной базы вузов.

Инженерные кадры подготовленные в данное время будут работать на следующие века и развитие технологических комплексов освоятся лишь тогда, когда подготовленные сегодня кадры инженеров усвоят, что от них зависит будущее науки и техники. Когда эти условия будут работать и развиваться далее это приведет к тому, что новое время будет воспринимать данные реалии.

Сетевое взаимодействие вузов при подготовке инженерных кадров России дает новый импульс тому, что вузы России совместными усилиями достигнут ощутимых, более реальных достижений, поскольку общественные обсуждения данной тематики являются предпосылкой научно-технологических результатов.

Роснаука нуждается в научных кадрах инновационной России, также возникает необходимость разработки сетевых моделей подготовки кадров высшей квалификации, которые будут восстановлены благодаря естественному процессу воспроизводства научных кадров.

Повышение качества подготовки научных кадров высшей квалификации может быть достигнуто на основе внедрения образовательных программ, реализуемых на принципах: единства, образовательного и научно-го процессов, непрерывности многоуровневого образования, в системе «бака-

лавриат – магистратура – аспирантура», использования компетентного и междисциплинарного подходов, применения прогрессивных образовательных технологий.

Основой образования должны стать не столько факты и учебные предметы, сколько способы мышления и деятельности. Интегрированная система инженерного образования варьируется на сочетаниях обучения в рамках дневной формы обучения с работой студента на базовом предприятии.

Т. Л. Борзунова (Москва))

t.borzunova@mail.ru

ОПЫТ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ ДИСЦИПЛИН

Получение большего объема знаний неразрывно связано с необходимостью совершенствования методики преподавания профилирующих дисциплин с применением новых образовательных технологий, таких как обучающие программы, электронные учебники, тестовые средства. При их создании используются программа создания электронных учебников RoboHelp и программа тестового контроля MYTESTX. Для проведения практических занятий по финансовым дисциплинам, существует широкий спектр компьютерных математических пакетов (Maple, Mathematica, MathCad, MathLab, Statistica и др.). Все они требуют знакомства с приемами работы в них. А количества выделенных аудиторных часов для изучения дисциплины ограничено. Поэтому при изучении дисциплин Математическое программирование экономических задач, Финансовая математика, Анализ данных, Бизнес анализ и других, целесообразно использование табличного процессора MS Excel. Полезно изучить связь MS Excel с другими офисными приложениями, иметь возможность передавать данные другим программам (например, MathCad), а также иметь возможность получения информации из внешних баз данных (например, dBase) или преобразовывать информацию рабочего листа в html-файл для интернета.

Анализ применения новейших информационных технологий в процессе преподавания финансовых дисциплин позволяет сделать вывод о том, что улучшается не только мотивация студентов при изучении дисциплины, но и уровень усвоения материала повышается, что позволит в дальнейшем использовать полученные навыки на практике и тем самым автоматизировать работу специалиста

Р. М. Гаврилова, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
galina.kostezkaya@gmail.com
К ВОПРОСУ О САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

В связи с резким сокращением количества часов по ДУ на физическом факультета ЮФУ возникала необходимость обратить особое внимание на самостоятельную работу студентов (С.Р.С.), как внеаудиторную, так и аудиторную, которая являясь важной формой образовательного процесса, должна стать его основой.

Для внеаудиторной работы нами составлена база заданий по всем типам ОДУ разного уровня сложности: здесь и задания, где необходимо просто определить тип уравнения и указать метод его решения, и задания, где нужно решить уравнения и найти частное решение (это особенно важно при решении задач) и творческие задания, где используя знания лекционного материала, необходимо решить задачу типа: зная фундаментальную систему решений уравнения составить уравнение, доказать линейную независимость заданной системы функций и др. Учитывая, что мы имеем дело со студентами-физиками, особое внимание уделяется задачам по нахождению математических моделей некоторых задач с физическим содержанием; при этом рассматриваются такие задачи, математические модели которых могут быть представлены в виде ДУ различных типов. Это несомненно повышает мотивацию к получению знаний и интерес студентов к изучаемому курсу. Аудиторная С.Р.С. реализуется в основном при проведении практических занятий и частично во время чтения лекций (здесь можно проводить экспресс-опрос с оценкой по конкретным темам (max 5–10 мин.), тестовый контроль и др.). Весь курс разбит на три модуля и в каждом из них проводится по две мини-самостоятельные работы по теме с использованием заданий из имеющейся базы. При этом у преподавателя появляется возможность осуществлять контроль с одной стороны и повысить активность студентов с другой.

В конце модуля проводится контрольная работа, которая является одним из основных видов С.Р.С.

Для успешной реализации данной методики организована информационно-компьютерная помощь. На сайте ЮФУ размещены необходимые методические материалы, которые регулярно пополняются по мере изучения тем. При обучении используется рейтинговая система, которая обеспечивает наибольшую информационную продуктивность самостоятельной познавательной деятельности студентов.

Т. В. Гусева (Астрахань)

toma.28.01.53@mail.ru

**МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В ПОДГОТОВКЕ
СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ В ОБЛАСТИ
ГРАФИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН**

В свете решений Министерства высшего образования России о переходе на новые образовательные стандарты ФГОС 3+, вновь появляется необходимость изменять структуру и содержание традиционных курсов в рамках дисциплины «Инженерная графика». В Астраханском государственном техническом университете данная дисциплина реализуется курсами: «Начертательная геометрия», «Инженерная и компьютерная графика», которые адаптируются к направлениям подготовки отдельных институтов (факультетов) университета. Модернизация и переход к содержательным новациям сложное дело. Необходимо совершенствовать методическую базу, создавать обучающие программы, помогающие студентам изучать дисциплину.

На кафедре «Механика и инженерная графика» АГТУ в течении ряда лет ведется работа по разработке АОК (автоматизированных обучающих курсов) по начертательной геометрии и инженерной графике. Представленный автоматизированный обучающий курс по теме «Позиционные задачи на поверхности» является продолжением этой работы. Программа предназначена для обучения и проверки знаний студента. Она позволяет организовать самостоятельную работу студента, что дает возможность использовать ее в качестве методического издания для изучения дисциплины студентами дистанционного и заочного индивидуального обучения.

Л. А. Демехина, Н. В. Демехина (Ростов-на-Дону)

nelly3nelly@gmail.com

**РАЗРАБОТКА НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ В УСЛОВИЯХ
СЛОЖИВШЕГОСЯ КРИЗИСА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Профильное образование будущих учителей физики заканчивается в бакалавриате педагогического ВУЗа курсом теоретической физики, систематизирующим и обобщающим накопленные знания. В нем анализируются основные понятия, фундаментальные законы и общие методологические принципы, лежащие в основе современной физической картины мира.

При общем упадке физико-математического образования, постоянно сокращающемся объеме часов для аудиторных занятий предложены такие методы организации учебного процесса, которые позволяют сочетать простоту изложения со строгим доказательством основных теоретических

положений, чтобы при обучении преподавались не только знания, но и содержащийся в них способ логического мышления, основанный на применении математического аппарата, что создает теоретическую основу для преподавания физики в средней школе и ВУЗе.

К примеру, такой раздел теоретической физики, как электродинамика, насыщен мировоззренческими проблемами, но требует применение простого математического аппарата. Однако, скорректированное его изложение, как показывает опыт преподавания, способствует вовлечению студентов в самостоятельную деятельность.

Традиционное изложение электродинамики постулированием уравнений Максвелла заменено работой по построению этих уравнений, основанному на математической обработке экспериментальных фактов, лежащих в основе электродинамики, с учетом принципа суперпозиции, инвариантности, трансформационных свойств и законов сохранения.

Такой подход к изучению теоретической физики повышает фундаментальный характер физического образования, обеспечивает понимание сути явлений, развивает физическое и понятийное мышление студентов.

Н. В. Зеликин (Москва)

n-zl@sdo.msu.ru

**МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ:
МЕЖФАКУЛЬТЕТСКИЙ КУРС БИЗНЕС - КОНСАЛТИНГА
В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

В структуре междисциплинарного образования МГУ прочное место заняло направление «межфакультетские учебные курсы». Успешно завершился первый год осуществления этой важной инициативы руководства МГУ. Такие курсы в каждом семестре активно посещают более 10 тысяч студентов. Результаты этой программы вышли за пределы первоначально поставленной цели, и показывают стремление будущих выпускников не только расширить свой научный кругозор, но и повысить вероятность трудоустройства по той или иной привлекательной профессии (см. <http://edu.msu.ru/mfk/>). По данным Центра трудоустройства и работы с выпускниками МГУ от 10 до 70% выпускников различных факультетов университета не находят работы по специальности (см. <http://career.msu.ru/>). В то же время экономика страны остро нуждается в квалифицированных специалистах. На примере курса «Введение в бизнес-консалтинг» (управление предприятиями и информационно-математические платформы систем управления) механико-математического факультета МГУ можно видеть, насколько важна интеграция базовых учебных дисциплин, таких как математика, теоретическая информатика и экономика. Стремление студентов познакомиться с наиболее востребованными профессиями четко прослеживается по набору на курсы экономической направленности. Особенно продуктивно обучение основам экономики (в частности — на

уровне создания систем управления предприятиями) для студентов с математической, физической и информационно-теоретической подготовкой, поскольку им предстоит преодолеть разрыв между хорошо усвоенными теоретическими знаниями и повседневной практикой управления бизнес-объектами. Личный опыт автора, выпускника МГУ, бизнес-консультанта и преподавателя с 15-летним стажем, показывает, что профессиональная подготовка бизнес-консультантов из числа выпускников МГУ наиболее успешно происходит на основе обучения основам бизнеса в определенном объеме и по специальным методикам, учитывающим базовую подготовку выпускников. Каждому студенту должна быть предоставлена возможность выбора определенного набора курсов, отвечающего высоким стандартам обучения, с одной стороны, и потребностям реальных предприятий всех форм собственности и видов деятельности. Программа МФК явно демонстрирует наиболее эффективные направления совершенствования учебного процесса, дает богатый материал для анализа и выработки практических шагов.

С. И. Иноятлов (Навои, Узбекистан)

s.i.inoyatov@mail.ru

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ И ПОДГОТОВКИ КАДРОВ В РЕСПУБЛИКЕ УЗБЕКИСТАН

С приобретением Республикой Узбекистан статуса независимости все сферы нашей жизни стали претерпевать глубокие изменения. Эти изменения потребовали адекватной перестройки всей системы образования, изменение целей, задач, содержания деятельности образовательных учреждений.

За годы независимости в системе народного образования республики произошли большие преобразования. Принят ряд документов, касающихся образования и воспитания подрастающего поколения. Среди них Конституция Республики Узбекистан (8 декабря 1992 года), Закон «Об образовании» и «Национальная программа по подготовке кадров» (29 августа 1997 года).

Вышеназванные документы перед работниками образования поставили задачи: изменить содержание работы средней школы, создать национальную школу, которая будет строить учебно-воспитательную работу на основе общечеловеческих ценностей и национально-культурных традиций исторического опыта узбекского народа.

Закон «Об образовании» Республики Узбекистан определил целью образования развитие интеллектуального и научного потенциала республики, формирование всесторонне развитой свободной личности, осознающей ответственность перед обществом, семьей, государством.

«Национальная программа по подготовке кадров» является стратегической основой в осуществлении государством кадровой политики, служит

гарантом делу развития целостной системы подготовки на всех уровнях высококвалифицированных, конкурентоспособных кадров, формирования общественно-активной личности.

В республике впервые разработана, не имеющая прецедента новая модель системы подготовки кадров, которая вобрала в себя соответствующий опыт развитых стран, учла собственные недостатки и проблемы в этой сфере, национальные особенности. Программа отражает новый подход к формированию модели подготовки кадров, в ней раскрываются как система в целостном виде, так и её компоненты в отдельности, их цели, функции, направления условия, этапы реформирования – системы непрерывного образования, а также результаты, ожидаемые от реализации «Национальной программы».

Одним из первых результатов реализации принятой модели стал переход к обязательному бесплатному 12-летнему образовательному циклу, включающему программу 9-летнего общеобразовательного и 3-летнего среднего специального профессионального образования. В настоящее время в Узбекистане функционируют 9779 школ, 1400 профессиональных колледжей и 143 академических лицеев, в которых обучение осуществляется в тесном взаимодействии с производственными предприятиями. После 12-летнего обязательного образования каждый по своему желанию может продолжать обучение в высших учебных заведениях для получения звания бакалавра (4 года) и магистра (2 года). Важное место в реформировании образовательного процесса и подготовки высококвалифицированных кадров, востребованных на рынке труда, занимают высшие учебные заведения республики. Их число за годы независимости выросло в 2 раза, и сегодня в 69 университетах и вузах обучаются свыше 230 тысяч студентов.

Накопленный опыт и результаты проводимых в Узбекистане реформ в сфере науки и образования были обсуждены на международной конференции (февраль 2012 г.) «Подготовка образованного и интеллектуально развитого поколения — как важнейшее условие устойчивого развития и модернизации страны», в работе которой участвовали более 1000 участников, в том числе 270 представителей из 48 государств мира и 8 международных организаций и образовательных фондов. Итак, на протяжении многих веков древняя земля Узбекистана оставалась очагом просвещения и науки, одним из центров мировой цивилизации, а стремление к знаниям всегда являлось неотъемлемой частью менталитета народов многонационального Узбекистана.

В. В. Казаченок, Н. И. Громко, А. А. Буславский (Минск)
Kazachenok@bsu.by
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИЗАЦИИ
УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Сегодня активность учителя часто сопровождается массовой пассивностью учеников на уроке. Можно указать, по крайней мере, на три важных причины, требующих от учителя адекватного подхода к обучению.

Первая: изменились время, общество и визуальная среда, в которой растет ребенок. Он приходит в школу и ему требуется не только аудиальный и статичный способ восприятия, но и визуальный, динамичный, интерактивный. Многие учителя жалуются: дети не могут долго слушать учителя. Ученик думает быстрее, чем предполагает традиционное (классическое) преподавание. Обратите внимание: все вокруг нас динамичнее: песни быстрее поют, фильмы перенасыщены событиями и трюками. . . Мы часто ловим себя на бессмысленном переключении сотен телевизионных каналов. . . Вторая причина вытекает из первой: если скорость реакций ученика при восприятии в традиционном уроке не всегда подчинена управлению учителем, значит, необходимо предусмотреть возможность «ведения» ученика самими мультимедийными средствами, существенно влияющими на усиление информационного взаимодействия. Третья причина связана с осознанием, что в информационном пространстве растет объем информации. Ученик не может справиться с нарастающим линейным потоком данных. И информационная перенасыщенность требует специальной подготовки учебной информации перед тем, как ее предъявить учащимся.

В связи с этим отбор и структурирование содержания образования при его информатизации должны быть направлены на преодоление основного противоречия современной системы образования: между традиционностью содержания и инновационностью использования (доступ, технологии, воспроизведение). Таким образом, парадигма образования, направленная на последовательные технологии обучения, становится все менее востребованной. Главным становится адаптация процесса обучения к личности учащегося и его познавательным способностям. В основе такой технологии лежат два основных правила: переход от контроля к самоконтролю и увеличение доли самостоятельной работы обучающихся. И новую роль преподавателя характеризуют, прежде всего, как наставничество.

А. Н. Карапетянц (Ростов-на-Дону)
karapetyants@gmail.com
СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В РАЗВИТИИ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ:
МИФ ИЛИ РЕАЛЬНОСТЬ

В последнее время на различных образовательных, в основном зарубежных, форумах, конференциях и интернет-площадках развернулась широкая дискуссия, вызванная несостоятельностью современного образовательного пространства, его несоответствием реалиям и вызовам современности. Достаточно упомянуть выступления сэра Кена Робинсона (Sir K. Robinson) и других экспертов на TEDTalks — (<http://www.ted.com/>). Эта дискуссия была порождена статьей Майкла Барбера (M. Barber) опубликованной в марте 2013 года в соавторстве с Кейтелиной Доннелли и Саадом Ризви (K. Donnelly, S. Rizvi) под названием «Лавина надвигается: Высшее образование ждет революция» (An avalanche is coming: Higher education and the revolution ahead). Ссылка: <http://www.ippr.org/publication/55/10432/an-avalanche-is-coming-higher-education-and-the-revolution-ahead>.

Доклад, в контексте вышесказанного, затрагивает современные тенденции в образовании, обусловленные развитием сетевых технологий и технологий анализа больших массивов данных, а также все большим вторжением виртуального в реальный мир. Источники, помимо указанных ранее — лекции экспертов МШУ «Сколково» и Агентства стратегических инициатив (АСИ), доклад «Эпоха «гринфилда» в образовании» Центра образовательных разработок МШУ «Сколково» (2013 г., авторы А. Волков, Д. Конанчук), а также отчет стран ОЭСР — Education at a Glance, 2013 г.

Л. Т. Кутукова, А. Е. Прохорова (Якутск)
kutukova.imi@gmail.ru
О КОНТРОЛИРУЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ
СТУДЕНТА

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) Министерства образования и науки Российской Федерации третьего поколения предусматривает переход от формата «teaching» («обучаемый») к формату «learning» («обучающийся»). Этот переход напрямую связан с проблемой организации и активизации самостоятельной работы студента (СРС). Для решения этой проблемы в учебных планах направлений и специальностей были увеличены часы СРС.

В учебно-методическом комплексе дисциплины (УМКД) «Математический анализ» направления 010100.62, ранее разработанном нами, материалы СРС (темы коллоквиумов, рекомендуемый перечень тем рефератов и тем курсовых работ по материалам теоретического блока УМКД,

комплект формирующих заданий по практикуму лабораторных занятий) содержатся в его диагностическом блоке. Сейчас к внеаудиторной СРС добавлена аудиторная контролируемая самостоятельная работа (КСР) студента в объеме 25 часов на 4 семестра, которая входит также в диагностический блок.

КСР — это аудиторное занятие, на котором реализуется субъектная деятельность студента под руководством и контролем преподавателя по уже пройденному материалу дисциплины [1]. На таком занятии осуществляется обратная связь (студент-преподаватель), и студент самообучается, углубляет свои знания и устраняет пробелы, выполняя данное ему индивидуальное задание.

По дисциплине «Математический анализ» предусмотрено выполнение студентом курсовой работы, и нами проводится резидуальный контроль (контрольные работы для проверки остаточных знаний по материалам каждого семестра, первого года обучения и всего курса обучения). В докладе будет представлена организация и методика проведения КСР по выполнению этих видов деятельности студента. Результат работы студента на КСР-занятии оценивается в баллах и отражается в рубежно-рейтинговом контроле успеваемости.

Литература

А. В. Купавцев. Контролируемая самостоятельная работа – новое явление в образовательной практике высшей школы // Alma mater (Вестник высшей школы). — 2014. — № 12. — С. 56–61.

А. Б. Маманазаров (Ташкент, Узбекистан)

abduhakim_bazarovich@mail.ru

ПЕРСПЕКТИВЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РЕСПУБЛИКЕ УЗБЕКИСТАН

Образование является основой интеллектуального, культурного, духовного, социального, экономического развития общества и государства. Целью образования является всестороннее развитие человека как личности и наивысшей ценности общества, развитие его талантов, умственных и физических способностей, воспитание высоких моральных качеств, повышения образовательного уровня народа, обеспечение квалифицированными специалистами.

Поэтому современный этап экономических и социальных реформ предусматривает в качестве приоритетных направлений государственных расходов инвестиции на поддержание систем жизнеобеспечения населения страны, где расходы на образование составляют 10–12% всего бюджета республики. Расходы на образование являются именно такими инвестициями, поскольку развитие всех отраслей экономики напрямую зависит от уровня образованности общества. Ведь первостепенная роль в деле воспитания подрастающего поколения всегда принадлежала системе образова-

ния, которая является одним из основных и неотъемлемых конституционных прав граждан Узбекистана.

Сегодня деятельность государства в данной области приняла масштабный, грандиозный характер, поскольку произошла модернизация образования, осуществляемая при активном содействии общества. Этот процесс привел к достижению нового качества образования, которое определяется его соответствием актуальным и перспективным запросам современной жизни страны. При этом ведущую и определяющую роль в формировании и развитии экономической структуры современного общества играет государственное регулирование, осуществляемое в рамках экономической политики страны. Поэтому одним из наиболее важных механизмов, позволяющих государству осуществлять экономическое и социальное регулирование, является финансовая система общества. Ведь развитие социальной инфраструктуры повышает качество жизни населения, что является, в конечном счете, основой роста национальной экономики страны, а также укрепления социальной стабильности в обществе.

Система непрерывного образования Республики Узбекистан состоит из учебных заведений, научных, научно-методических учреждений, научно-производственных предприятий, государственных и местных органов управления образованием. Государство гарантирует гражданам общедоступность и бесплатность среднего, среднего специального, профессионального образования, а также бесплатность высшего и послевузовского профессионального образования в государственных образовательных учреждениях в пределах государственных образовательных стандартов.

Государственные образовательные стандарты позволяют сохранять единое образовательное пространство и представляют собой систему норм, определяющих обязательный минимум содержания основных образовательных программ. Реализация государственных гарантий права граждан на образование обеспечивается путём создания системы и соответствующих условий для получения образования. В настоящее время понятие «система образования» трактуется как совокупность факторов, обеспечивающих реализацию его социальных функций: сеть образовательных учреждений; образовательные стандарты; образовательные программы; ресурсное обеспечение (кадровое, научное, методическое, материальное, финансовое); сотрудничество с другими отраслями экономики и т. д.

В этих условиях наиболее приемлемым является создание качественно новой модели подготовки конкурентоспособного специалиста, реализация потенциальных возможностей которого в целом поможет поднять уровень экономики страны на более высокие показатели.

Мамуров Б. Б. (Бухара, Узбекистан)

b.b.mamurov@mail.ru

ОСНОВЫ ВОСПИТАНИЯ МОЛОДЕЖИ В УЗБЕКИСТАНЕ

В программных документах по реформированию системы образования Узбекистана поставлена цель — образование в республике должно достичь такого уровня, при котором оно будет в состоянии обеспечивать опережающую подготовку конкурентоспособных кадров.

Новое поколение должно обладать способностью ставить и решать задачи на перспективу, высокой культурой мышления и умением самостоятельно ориентироваться в политической и социально-экономической жизни.

Также актуально для республики является задача создания максимальной возможности для развития личности подрастающего поколения. Именно эта задача является определяющей для построения Воспитание — процесс целенаправленного формирования личности. Это специально организованное, управляемое и контролируемое взаимодействие воспитателей и воспитанников, конечной своей целью имеющее формирование личности, нужной и полезной обществу.

Сегодня главная цель средней общеобразовательной школы — способствовать умственному, нравственному, патриотическому, эмоциональному и физическому развитию личности, всемерно раскрывать ее творческие возможности, формировать гуманистические отношения, обеспечивать разнообразные условия для расцвета индивидуальности ребенка с учетом его возрастных особенностей. Установка на развитие личности растущего человека придает «человеческое измерение» таким целям школы, как выработка у молодых людей осознанной гражданской позиции, готовности к жизни, труду и социальному творчеству, участию в демократическом самоуправлении и ответственности за судьбу страны и человеческой цивилизации. Реализуя принцип общественной направленности воспитания, важно добиваться практически-мотивированного взаимодействия с воспитанниками.

А. А. Мелкумян (Москва)

amelkumyan6@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНДЕРНОЙ АСИММЕТРИИ В ВЫСШЕМ ТЕХНИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ НА ПРИМЕРЕ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРОВ-НЕФТЯНИКОВ

В докладе представлены результаты гендерного анализа данных компьютерной статистической обработки оценок успеваемости и социологического опроса студентов и абитуриентов Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина.

Студентки инженерных факультетов университета представляют большую (в среднем 30%) и с каждым годом растущую группу. Химический и геологический факультеты традиционно привлекают больше девушек (50% и 40%), чем факультеты вычислительной техники (30%), инженерной механики (25%), трубопроводного транспорта (20%) и разработки месторождений (15%). Существуют «девичьи» инженерные специальности, такие, как экология, стандартизация, техника безопасности и пр. Анализ успеваемости показывает, что даже по традиционно «мужским» дисциплинам девушки часто учатся значительно лучше. Так, оценки «хор» и «отл» по физике по итогам второго-третьего семестров обучения имеют соответственно 50%–60% девушек и 35%–40% юношей.

Осенью 2013 года был проведен социологический опрос о проблемах нефтяного инженерного образования и последующей профессиональной реализации. Были опрошены две социальные группы: слушатели подготовительных курсов и студенты университета. Ответы на некоторые вопросы имели значимую разницу в зависимости от гендерной и социальной принадлежности опрошенных. Так, на вопрос «Кому будет труднее устроиться на работу по специальности — а) юношам, б) девушкам, в) нет разницы?» ответ «б» дали 20% юношей и 50% девушек среди абитуриентов, 50% юношей и 100% девушек среди студентов, и ни один человек не выбрал ответ «а»!

Оценивая динамику успеваемости и результаты опроса, можно сказать, что девушки более ответственно относятся к выбору профессии и обучению. Более широкое привлечение девушек в технические специальности позволит поднять качество инженерного образования. В то же время девушки ясно осознают, что существующие гендерные стереотипы приводят к дискриминации при приеме на работу и замедляют карьерный рост в выбранной ими специальности.

Н. В. Новинская, В. Ю. Новинский (Астрахань)

novinskii@bk.ru

**ОБЩИЕ ТЕНДЕНЦИИ ФОРМИРОВАНИЯ
ТЕРМИНОВ-ЭПОНИМОВ (НА УЧЕБНОМ МАТЕРИАЛЕ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ «ЭКОЛОГИЯ» И «АРХИТЕКТУРА»)**

Термины-эпонимы, т. е. термины, образованные от имен собственных, давно и прочно заняли свое место в разных областях знания, таких как философия, физика, химия, геология и других. Стоит отметить, что термины-эпонимы представлены в языке науки неизменяемыми, производными и сложными словами, а также составными наименованиями. Изучение терминов-эпонимов в экологии и архитектуре (не исследованных ранее) позволило установить, что в этих областях они представлены такими же образованиями.

Например, в экологии — это непроизводный термин кларк (по фамилии американского ученого Ф. У. Кларка), который послужил основой создания целого ряда терминологических единиц (кларковое число, кларк элемента и других); производные термины пастеризация, пастеризованный (по фамилии ученого Луи Пастера); сложный термин ультрапастеризация; составные наименования правило Вант-Гоффа, закон толерантности Шелфорда, правило Аллена и многие другие.

В архитектуре можно выделить непроизводные термины жаккард, тюдор, кульман, ватман, мансарда (названных по фамилиям изобретателей); производный термин чурригереско (стиль, названный по имени архитектора Хосе Бенито де Чурригера и его братьев); сложные термины неочурригереско, стретч-жаккард; составные наименования формула Витрувия, стиль Тюдоров, Нарышкинский стиль и другие.

Как показал анализ, составные наименования преобладают в данных областях знания так же, как и в других науках. Производные термины и сложные слова представлены небольшим количеством образований. Однако в архитектуре, в отличие от экологии, выявлено достаточное количество непроизводных терминов.

Е. А. Раенко (Горно-Алтайск)

raenko_elena@mail.ru

О ПРОБЛЕМАХ ИЗУЧЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ И ВУЗЕ

Многолетняя работа авторов с учащимися средней школы и студентами физико-математических факультетов показала, что как в школе, так и в вузе существуют серьезные проблемы в изучении вероятностно-статистических понятий и методов. С включением стохастической линии в базовый школьный курс математики эти проблемы только усугубились.

Анализ отечественной и зарубежной научно-методической литературы и экспериментальные данные многих исследователей свидетельствуют о том, что мышление ребенка, его научная картина мира строятся на вероятностной основе.

Через развитие собственных вероятностных структур ребенок должен входить в мир научно - теоретического мышления. При этом не понятийные, а образные структуры являются центром его психического развития (М. Монтессори, С. Френе, А. М. Лобок, М. Холодная и др.) Следовательно, нужно строить такую модель обучения, в которой развитие стохастических представлений у детей должно идти непрерывно: детский сад–начальная школа–средняя школа–ВУЗ. В детском саду и начальной школе должна быть раскрыта генетическая основа, те реальные процессы и явления, которые служат источником для возникновения комбинаторно - статистических понятий, которые, в свою очередь, должны быть основой для изучения вероятностных моделей реального мира [1], [2].

В существующих к настоящему времени учебниках (Дорофеев В.Г., Шарыгин И.Ф., Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Бунимович Е.А., Мордкович А.Г., Зубарева И.И. и др.) реализуются различные подходы к выстраиванию вероятностно-статистической линии, начиная с 5-го класса, т.е. дидактический принцип преемственности в изучении этой линии пока не реализован.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Пуркина В. Ф.* Развитие начальных математических представлений у детей дошкольного возраста. Г-Алтайск. 1996. 214 с.
2. *Виленкин Н. Я., Петерсон Л. Г.* Математика 1–3 кл. 1996.
3. *Булъчев В. А., Бунимович Е. А.* Изучение теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики // Математика в школе. 2003. № 4.

А. Н. Румянцев, Т. Г. Румянцева (Ростов-на-Дону)
rumhome@aaanet.ru

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Обсуждается опыт внедрения в курс программирования лабораторного компьютерного практикума, содержащего различные элементы визуализации. Принцип наглядности при изучении информатики и программирования можно реализовать различными способами. С использованием наглядных представлений можно облегчить понимание сложных действий, представленных в форме абстрактных алгоритмов.

Информатика и программирование относятся к наиболее быстро развивающимся областям знаний. Эти дисциплины являются одними из основных при подготовке профессионалов для многих естественных и технических направлений. Считаем, что значительную часть аудиторного времени, предназначенного для закрепления материала, необходимо отвести на выполнение лабораторных работ, связанных с изучением дискретных структур данных, проблемами их модификации и алгоритмами их обработки.

Лабораторные работы с использованием визуализации позволяют глубже понимать основные положения базовых алгоритмов обработки структур данных, способы представления данных и отношений. При выполнении таких работ важным является возможность активного участия обучающихся в исследуемых процессах. Такие занятия вооружают методами решения широкого круга задач. Визуализация может быть статической и динамической. Простейшие подходы и в том, и в другом случае могут быть реализованы с использованием средств первоначального обучения.

В лабораторных работах рассматривались различные способы представления такой основополагающей структуры как множество. При этом

предлагалось обработку множеств проводить с использованием стандартных средств языков программирования, имеющих существенные ограничения, а также с применением битовых шкал, массивов битовых шкал, с помощью упорядоченных линейных списков. При этом предлагается исследовать уже имеющиеся варианты визуализации, а также предложить свои способы с использованием изучаемых программных средств.

Изучение алгоритмов сортировки и поиска для массивов, последовательностей и других структур для размещения и поиска данных важно для понимания компьютерных методов обработки больших объёмов данных. Применение визуализации позволяет наглядно показать сходство и различие методов внутренней сортировки, а также простого и естественного слияния. Интерес вызвала реализация операций над множествами с применением алгоритмов типа слияния. Здесь имеется много вариантов визуализации, однако свои, даже простые подходы к решению этих задач, трудно переоценить при оценке эффективности процесса обучения.

Использование визуализации при выполнении лабораторных и самостоятельных работ способствовало более твёрдому закреплению изучаемых алгоритмов, повысило уровень программирования, что является важным для студентов технических специальностей. Другим важным достижением было углубление степени владения компьютером и компьютерными технологиями.

Изученные на практике приёмы и правила алгоритмизации могут служить основой для разработки программ практической направленности, а также для формирования культуры алгоритмизации.

Садулаева Б. С. (Грозный)

sadulaeva@mail.ru

ОБ АКТУАЛИЗАЦИИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ

В условиях новых образовательных стандартов, при сокращении аудиторного фонда практически на все дисциплины, в том числе и дисциплины профильной подготовки остро стоит проблема качества образования.

В формировании специальных компетенций студентов актуально органичное соотношение фундаментальности и практико-ориентированности образования, поскольку компетентность предстает как синтез когнитивного, предметно-практического и личностного опыта. Формирование специальных компетенций будущих бакалавров происходит в результате перевода теоретических знаний в конкретные практические умения, что требует создания комплекса компетентностно-ориентированных задач и индивидуальных заданий. Решение отдельных компетентностно-ориентированных задач позволяет студентам осознать необходимость применения междисциплинарных знаний в профессиональной деятельности и способствует

формированию специальных компетенций, характеризующихся высоким уровнем обобщения, умения осуществлять формализацию знаний.

Контрольно-измерительные материалы для определения качества сформированности компетенции состоят из трех частей, соответствующих трехкомпонентной структуре самой компетенции, ее гностическому, функциональному и методологическому компонентам, и позволяют измерить и описать уровень развитости каждого из компонентов компетенции.

Для оценки уровня достижения результатов обучения в соответствии с тарификатором (ТАФО), предложенным Ю. Т. Татуром и Ю. Г. Фокиным, целесообразно разработать дескрипторы гностического, функционального и методологического уровней компетенций и тестов, позволяющих проводить в рейтинговой системе мониторинг результатов обучения и обеспечивать индивидуальную работу и самокоррекцию обучающихся.

Выявление наличия приращений уровней достижений результатов обучения и сформированности специальных компетенций осуществляется решением двух сопряженных задач: 1) описать планируемый результат в совокупности его признаков настолько определенно, чтобы не возникало возможности его различных толкований; 2) создать инструментарий, позволяющий выявлять соответствующие признаки и определять их количественный показатель.

Для оценки уровня достижения результатов обучения в условиях компетентностного подхода целесообразно использовать следующие критерии оценивания: критерий достижения уровня развитости компонентов компетенции и результатов обучения; критерий полноты сформированности конкретной специальной компетенции.

Садулаева Р. С. (Грозный)
sadulaeva.r@mail.ru

О ДУХОВНО-ПРАВСТВЕННОМ ВОСПИТАНИИ СТУДЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЩЕСТВА

Одной из центральных задач общества является раскрытие максимальных духовных возможностей каждого представителя подрастающего поколения, совершенствование всех молодых людей, поднятие их на неизмеримо более высокие ступени развития. Известно, что полнота духовно-нравственного воспитания строится на «трех китах»: гуманизм, ответственность, научность.

Наука уже сегодня создала условия, благодаря которым на людей обрушивается лавина сведений. Информация стала средством возбуждения или успокоения. Привычка к поглощению огромной массы информации уже начинает в ряде случаев выходить за пределы просвещения, и, по сути, превратилась в допинг, разрушающий психику и нервы человека.

Легко прогнозировать, что все это в конечном итоге может «помочь» обществу «взорвать» себя изнутри.

Знания сами по себе способны на все, с одинаковой легкостью могут служить и добру, и злу. Величайшие достижения человеческого разума могут быть использованы (в зависимости от мировоззрения тех людей, которые определяют характер использования научно-технических возможностей) как на благо, так и во вред цивилизации. Рост образованности молодых людей не ведет прямо к их моральной зрелости. Знания лишь тогда приобретают ценность, когда они приобретаются и применяются в благородных целях, оправданных общественным интересом, могут способствовать развитию нравственной личности.

Поэтому важнейшим ограничительным средством отрицательных влияний образования и науки на формирование нравственных основ общества служит высокая культура. Надо стараться развивать в каждом молодом человеке его теоретический интеллект и не забывать о нравственном воспитании, о развитии в нем гуманистически ориентированной натуры. Иначе говоря, на научное мышление следует наложить узду моральных ограничений.

Идейно-воспитательная работа в условиях всех типов учебных заведений включает в себя: идейно-политическое воспитание; гражданско-патриотическое воспитание; идейно-нравственное воспитание; национальное и интернациональное воспитание. Идейно-политическое воспитание должно ориентироваться на осмысление молодежью политики устойчивого экономического и социально-политического развития, позволяющего занять достойное место среди субъектов РФ.

В работе по духовно-нравственному воспитанию и развитию подрастающего поколения Чеченской Республики приоритетными являются следующие компоненты, которые затрагивают жизненно важные ценности каждого человека и Чеченской Республики в целом.

Л. Н. Удовенко (Тольятти)

l.udovenko@rambler.ru

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ В ВУЗЕ

Вступление в силу закона «Об образовании» от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ усилило противоречия и обнажило проблемы профессионального образования, понимание которых, осознанное деятельное стремление преподавателя к их исключению или, хотя бы, минимизации может приблизить вузовское образование к усилению его профессиональной направленности. Такими возможностями обладает практико-ориентированное обучение, которое сегодня реализуется в рамках учебных и учебно-производственных практик, при организации самостоятельной, индивидуальной, научно-исследовательской работы студентов, однако чрезвычайно слабо ис-

пользуется скрытый ресурс аудиторных занятий для обучения студентов приемам саморегуляции, самоорганизации. В этой связи мы предприняли попытку использования этого ресурса для усиления профессиональной направленности обучения через освоение общих методов и форм деятельности при проведении лекционных и практических занятий в рамках дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Основной целью явилось формирование у студентов – будущих программистов – готовности и умения включаться в открытый деятельный обучающий диалог с разными участниками образовательного процесса для формирования и самосовершенствования таких значимых для будущей профессиональной деятельности навыков как самоорганизация, саморегуляция через: а) изучение, осмысление и освоение теоретических знаний дисциплины; б) выявление особенностей введения и изучения основных понятий теории вероятностей и математической статистики и их связи с ранее изученными математическими понятиями; в) формирование умений решать стандартные задачи дисциплины разными способами на основе ранее освоенных методов решения математических задач, осуществлять целенаправленный поиск этих способов и выбирать из них наиболее рациональные; г) формирование и совершенствование коммуникативных и информационно-коммуникативных умений и навыков при освоении дисциплины; д) нацеленность на сотрудничество со всеми участниками учебного процесса; е) формирование и совершенствование саморегулятивных функций собственного организма, направленных на самоорганизацию, саморазвитие, самовоспитание и др.

Н. Б. Ускова, О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева (Воронеж)
n.a.kaplieva@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Российской информатике в 2013 году исполнилось 65 лет. Ее становление связано с именем выдающегося ученого, математика с мировым именем Селима Григорьевича Крейна, профессора Воронежского государственного университета, который считается одним из первых в СССР автором расчетных программ для ЭВМ.

Начиная с 2009 года ЕГЭ по информатике и ИКТ проводится во всех вузах Российской Федерации. В связи с развитием информационных технологий в структуру и содержание этого экзамена постоянно вносятся изменения.

В 2013 году впервые появились задания, для решения которых кроме знания работы операторов языка программирования, требуются умения анализировать графики квадратической или кубической парабол, приобретенные на уроках математики.

Приведем одно из таких заданий (часть В) [1].

Дана программа, текст которой приведен ниже. В программе определена и участвует в вычислениях функция пользователя Q . Требуется определить значение переменной t , которое будет напечатано в результате работы программы.

```
var c,d,m,y,t,i:integer;
function Q(x:integer):integer;
begin Q:=(x-5)*(5-x)+7 end;
Begin c:=-20; d:=20; m:=Q(c); t:=c;
  for i:=c+1 to d do begin
    y:=Q(i); if y>m then begin m:=y; t:=i end
  end;
writeln(t)
End.
```

$Q = -x^2 + 10x - 18$ – это парабола, ветви которой направлены вниз, ее максимальное значение достигается в точке $x = 5$.

В заданиях ЕГЭ по информатике есть и другие задания с математическим содержанием.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ускова О. Ф. ЕГЭ. Информатика и ИКТ. Алгоритмизация и программирование на Паскале : учебное пособие / О. Ф. Ускова, Н. А. Воронез : ООО «Альбион», 2013. 299 с.

Содержание

Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения	3
Абилов В. В. Оценка констант Лебега ряда Фурье-Эрмита	5
Akgün R. Approximation by partial sum of the trigonometric Fourier series in Orlicz spaces	5
Арестов В. В., Филатова М. А. Оптимальное восстановление операторов дифференцирования на классах гладких функ- ций	6
Антонов Н. Ю. О сходимости почти всюду лакунарных после- довательностей кратных прямоугольных сумм Фурье	7
Балгимбаева Ш. А. Наилучшие m -членные приближения клас- сов периодических функций смешанной гладкости	7
Бердников Г. С. Связь между высотой некоторых деревьев и носителем преобразования Фурье (N, M) -элементарных масштабирующих функций.	9
Блошанский И. Л., Графов Д. А. Критерии слабой обобщен- ной локализации для кратных интегралов Фурье с « J_k - лакунарной последовательностью частичных сумм	10
Бочкарев С. В. Абстрактная теорема Колмогорова, приложе- ния к метрическим пространствам и топологическим груп- пам	12
Волосивец С. С., Голубов Б. И. Преобразования Фурье и обоб- щенные классы Липшица	12
Григорян М. Г. О безусловной и абсолютной сходимости рядов Фурье-Хаара	14
Де Карли Л., Горбачев Д. В., Тихонов С. Ю. Точная константа в неравенстве Питта для преобразований Фурье и Ганкеля	15
Иванов В. И., Иванов А. В. Связь между обобщенными кон- стантами Джексона в L_2 на торе и евклидовом простран- стве	16

Крусс Ю. С. Альтернативный оператор растяжения в локальных полях положительной характеристики	17
Ласурия Р. А. Группы отклонений рядов Фурье в обобщенных L_p -гельдеровых пространствах.	18
Лебедева Е. А., Постников Е. В. Обращение интегрального всплескового преобразования, не требующее выполнения условия допустимости	19
Лукашенко Т. П. О базисах сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов	20
Лукомский Д. С. Применение обобщенных функций Хаара и Виленкина к вопросу сжатия изображений.	22
Лукомский С. Ф. Всплесковые базисы на локальных полях положительной характеристики	23
Новиков Л. В., Косаревская С. А. Квазивейвлеты для обработки квазистационарных сигналов	24
Осиленкер Б. П. О разложениях по многочленам, ортогональным в непрерывно-дискретных пространствах Соболева	25
Пачулия Н. Л. Оценки сильных средних метода Валле-Пуссена кратных рядов Фурье	26
Пономарев С. Г. Сохранение сходимости тригонометрических квадратных корней из неотрицательных тригонометрических полиномов	27
Прибегин С. Г. Метод суммирования Рисса интегралов Фурье для функций из $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p \leq \infty$	28
Пришелец М. Ю. Адаптивное двумерное всплеск преобразование на основе системы Хаара	29
Пришелец М. Ю. Биортогональные комплекснозначные фильтры Добеши 9/7	29
Пырву В. В. О проблеме использования преобразования Фурье в анализе квазистационарных квазипериодических биологических сигналов	30

Ровба Е. А., Смотрицкий К. А. Производящая функция и обобщение некоторых классических многочленов	31
Родионов Т. В. Сходимость почти всюду и в L^p рядов Фурье по обобщённой T -системе Хаара	32
Рубинштейн А. И. О свойствах функций и рядах по системе характеров двоичной группы	33
Сакс Р. С. Ряды Фурье оператора ротор и пространства Соболева	34
Трынин А. Ю. Синк-аппроксимации непрерывных функций и их обобщения	35
Ушаков С. Н. О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний.	36
Фалалеев Л. П., Василина Г. К. О бигармонических операторах, разреженных по лакунам	37
Фуфаев Д. В. Промежуточный случай регулярности в дифференцировании кратных интегралов	38
Хасанов Ю. Х. Об отклонении гармонических почти-периодических функций от их значений на границе	39
Шакиров И. А., Ахмадиев М. Г. Об асимптотических представлениях функций Лебега, соответствующих семейству полиномов Лагранжа	40
Щербаков В. И. Взаимосвязь между сходимостями рядов Фурье по обобщённым системам Хаара и Уолша (Прайса)	41
Секция I Дифференциальные уравнения	43
Вагабов А. И. Асимптотика по параметру решений линейных ОДУ n -го порядка в классе W_p^n .	45
Газиев Н. Д. О вариационном подходе к решению одной спектральной задачи сопряжения с искомым параметром в уравнении и условии на криволинейной границе	46

Гладышев Ю. А. О интегральных свойствах обобщенных степеней Берса	47
Глушак А. В. Об одной нелокальной задаче для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу	48
Гумбаталиев Р. З., Кулиева Ф. А. О некоторых разрешимости краевых задач в весовых пространствах.	48
Данилова О. Ю. О ветвлении решений уравнения Кармана	49
Дыбин В. Б., Бурцева Е. В., Козинкова С. В. Сингулярные интегральные операторы на составных контурах	50
Елеуов А. А., Закариянова Н. Б., Елеуова Р. А. О единственности решения обратной задачи спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков на отрезке	51
Зарубин А. Н. Краевая задача для эллиптико-гиперболического опережающе-запаздывающего уравнения с параллельными линиями изменения типа	53
Новикова Л. В. О бифуркации инвариантных торов	54
Зубко О. Л. Релятивистское движение тел в космосе	54
Исраилов С. В. Об одной краевой задаче для сингулярной системы ОДУ с частично запаздывающим аргументом	56
Копачевский Н. Д. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения	57
Куракин Л. Г., Курдоглыан А. В. Исследование устойчивости равновесий дифференциальных уравнений с двумя косимметриями в критическом случае с жордановой клеткой	58
Ласунский А. В. Контрпримеры первого метода Ляпунова в непрерывном и дискретном случаях	59
Пасенчук А. Э. Об обобщенном локальном принципе Гохберга-Крупника	60
Сагитов А. А. Условия продолжимости решений для начальной задачи системы ОДУ с запаздывающим аргументом	61

Самохин В. Н., Чечкин Г. А. Автомодельные решения уравнений гидродинамики обобщенно ньютоновской среды	62
Сёмкина Е. В. Спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши о малых движениях диссипативной динамической системы	63
Солдатов А. П. Пространства Харди решений эллиптических систем на плоскости	63
Чаплыгина Е. В. Задача Геллерстедта для опережающе - запаздывающего уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения.	65
Чуешева Н. А. Краевая задача для дифференциального уравнения шестого порядка	66
Секция II Теория функций	67
Абузарова Н. Ф. Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси	68
Акопян Р. Р. Оптимальное восстановление аналитических функций по граничным значениям	69
Балашова Г. С. О регуляризациях последовательностей и их приложениях	69
Бандалиев Р. А., Исаев А. Г. Об ограниченности некоторого сублинейного оператора в весовом пространстве Лебега с переменным показателем.	71
Брайчев Г. Г. Рост целых функций с нулями на лучах или в угле	71
Бритвина Л. Е. Свертки интегральных преобразований и порождаемые ими операторы обобщенного сдвига	73
Буробин А. В. Интегральные операторы в C -шкале пространств обобщенно интегрируемых функций	74
Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. Экстремальные задачи в пространствах аналитических функций	74

Вакулов Б. Г. Гиперсингулярные интегральные операторы в обобщённых пространствах Гельдера с радиально осциллирующими весами на однородных пространствах	75
Вирченко Н., Четвертак М. On one generalization of Bessel' function	76
Гиль А. В., Ногин В. А. Комплексные степени одного гипозэллиптического оператора в L_p -пространствах.	77
Ибрагимова Б. М. Оценка полиномиальных приближений функций через модули гладкости относительно знакочувствительного веса	78
Казанцев А. В. Метод В. А. Зморовича в задаче исследования функционала И. П. Митюка	79
Карабашева Э. Н., Шабалин П. Л. Об отображениях на полигональные области со счетным множеством вершин	80
Козлова И. А., Савотин А. И. Многочлены наилучшего равномерного приближения функции Больцано	80
Кошелев А. А. Задача Ландау – Колмогорова для оператора Лапласа в шаре	82
Кротов В. Г., Порабкович А. И. Поточечные оценки для наилучших приближений постоянными в L^p , $p > 0$	83
Лысенко З. М. Пространство Бергмана в полосе	84
Микка В. П., Микка К. В., Сунгурова И. Э., Иванова Г. И. О единственности решения уравнения Ф. Д. Гахова, когда логарифм производной порождающей функции подчинен однолистным	85
Моисеев И. А. Соотношения между уточнёнными характеристиками роста последовательностей нулей целых функций	86
Мусин И. Х. О совпадении двух классов бесконечно дифференцируемых функций	87
Полякова Д. А. О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций	88

Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами и логарифмической особенностью индекса	89
Солиев Ю. С. Об одной кубатурной формуле для двумерного сингулярного интеграла	90
Старовойтов А. П., Астафьева А. В. Экстремальные свойства аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций	91
Таныгина А. Н. Условия устойчивости метода Ньютона–Канторовича для нелинейных уравнений с регулярно гладкими операторами	91
Тилеубаев Т. Е. Необходимое и достаточное условие принадлежности функции пространству Бесова	92
Тулина М. И. Элементы группы монодромии при вариации по базе кубических дифференциалов	94
Умархаджиев С. М. Ограниченность оператора Рисса в обобщённых гранд-пространствах Лебега	95
Урбанович Т. М. К теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши в исключительных случаях	96
Хасанов Дж. Hardy-Littlewood-Stein-Weiss inequality in the generalized Morrey spaces with variable exponent	97
Царьков И. Г. Множества, обладающие непрерывной выборкой...	98
Цвиль М. М. Операторы Фабера для полицилиндрических областей	99
Чувенков А. Ф. О вложении гранд-пространств Орлича	100
Чуешева О. А. Функции и дифференциалы с матричными характеристиками на римановой поверхности	101
Шамоян Р. Ф., Куриленко С. М. О следах аналитических пространств в строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей	102

Секция III Алгебра, топология, геометрия 103

- Грачева В. И. Изучение свойств K_{af} -линеаризирующего соответствия прямых при дифференцируемых отображениях евклидовых пространств 104
- Казак В. В. О кривизне сферического изображения поверхности в римановом пространстве 105
- Попов В. А. Аналитическое продолжение Афинных преобразований 106
- Рубашкина Е. В. A self-intersection theory for a manifold 107
- Савинов А. В, Умнова С. В. T^1 -расширение Обобщенных многообразий Кенмоцу 107

Секция IV Теория вероятностей и дискретный анализ 109

- Головко Н. И., Бондрова О. В. Необходимое и достаточное условие существования стационарного режима в СМО со скачкообразной интенсивностью 110
- Павлов И. В., Назарько О./В. Характеризация процессов плотностей и построение деформированных стохастических базисов 1-го рода 111
- Беркович В. Н. Шварцман М. М. Алгоритм применения процедур многомерного статистического анализа при кластеризации объектов 112

Секция V Дискретная математика и информатика 113

- Беспалов М. С. Линейные перестановки дискретных преобразований Уолша 114
- Гуров С. И. Модель алгоритмов классификации: информационный подход 115
- Дьяконов А. Г., Головина А. М. Методы решения задач анализа данных с категориальными (факторными) признаками 116

Секция VI Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии 117

- Адукова Н. В., Кудрявцев К. Н. Дискретная модель оптимального планирования рекламного бюджета 119
- Афанасенкова Ю. В. Использование матричных методов при решении задач теплопроводности в системе контактирующих стержней 119
- Беркович В. П. Вопросы локализации волнового процесса в клиновидных областях 121
- Боев Н. В., Панкратова О. В. Двукратное отражение коротких волн от рассеивателей канонической формы 121
- Богатов Е. М., Богатова В. П. Статистическая привлекательности цены номер в отеле 122
- Бухович Е. В., Мальцев Р. Г., Магомадов А. С. Модели поведения удельной изобарной теплоемкости... 123
- Васильева Т. А., Васильев Е. И. SD multi-implicit methods for ODEs stiff systems 124
- Данилова Н. В. Расчёт справедливой цены европейского опциона-колл для одной модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров в случае несофинансируемых стратегий 125
- Дильман В. Л., Дияб А. Н. Моделирование напряженного состояния растягиваемой неоднородной полосы 126
- Димитров В. П., Борисова Л. В., Нурутдинова И. Н. О подходах к принятию решений при технологической регуляции 127
- Жук А. С. Множества достижимости в управлении судном 128
- Журавлёва М. И., Лапина П. А. Динамическая неравновесная модель конкуренции «хищник-жертва» с неограниченным ростом 129
- Землянухина Л. Н., Сантылова Л. И. Портфельный анализ и условия Куна-Таккера 130

Ивченко Ю. С. Эконометрическая модель зависимости экономического роста в РФ от мировых цен на нефть	131
Копачевский Н. Д., Ситшаева З. З. Об устойчивости малых движений идеальной капиллярной жидкости в сосуде с отверстиями в днище	132
Копытина Е. В. Прогнозирование параметров фондового рынка с помощью нейронных сетей	133
Кудинов А. Н., Рыжиков В. Н., Цветков В. П., Цветков И. В. Рост народонаселения в модели мультифрактальной динамики	133
Кудинов А. Н., Лебедев Д. Ю., Рыжиков В. Н., Цветков В. П., Цветков И. В. Мультифрактальный подход в анализе RR-интервалов сердечного ритма на основе холтеровского моделирования	135
Кудинов А. Н., Чусова Е. В. Применение метода сопряженных уравнений к исследованию устойчивости моделей в области медицины	135
Кудрявцев К. Н., Мешков Е. В. Об одной задаче дискретной оптимизации рекламного бюджета в дуополии	136
Мазуров М. Е. О Приложении почти-периодических функций в нейродинамике	137
Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В. Критерий совпадения множества невырожденных мартингалов мер и множества мартингалов мер, удовлетворяющих ОСУ-ХЕ	139
Пащенко Г. Н. Построение модели технологического процесса варки стекла с использованием нейронных сетей	140
Переварюха А. Ю. Бистабильная гибридная модель воспроизводства водных биоресурсов	141
Родин В. А., Синегубов С. В., Тростянский С. Н. Некоторые применения логнормального распределения	142
Рунов А. Г. Гидродинамическое моделирование процесса истечения жидкости из резервуара	143

Сартасова М. Ю. Разработка математической модели импульсного электромагнитного поля	144
Сахарова Л. В. Исследование краевой задачи ИЭФ на существование и единственность	145
Старинец В. В. Квантование векторного модуля	146
Шварцман М. М. Перспективные модели в логистике: нелинейная модель транспортных перевозок и имитационная модель работы терминала	147
Яремко О. Э., Могилева Е. С. Идентификация параметров связанной задачи диффузии	147

Секция VII Математическое программирование, управление и теория игр 149

Зинченко А. Б. Голубева Я. А. Кооперативное инвестирование с дискретными вкладами	151
Кудрявцев К. Н. Сильные гарантии в многошаговых кооперативных играх при неопределенности	151
Мохонько Е. З. О неантагонистической дифференциальной игре с ограниченным запасом времени наблюдения	152
Стабулит И. С. Сильно гарантированное по исходам и рискам решение в одной кооперативной игре	153

Секция VIII Информационно-коммуникационные технологии в науке, образовании и производстве 155

Самигулина Г. А., Шаяхметова А. С. Основы построения интеллектуальной системы дистанционного обучения людей с ограниченными возможностями	157
Семенко Т. И., Семенко Е. В., Скворцова О. В. Об опыте создания и использования интерактивного интернет-курса высшей математики...	157

Филимонова Е. В. Настройка автоматического формирования сложной аналитической отчетности в «1С: Бухгалтерии 8» (ред. 3.0)	159
---	-----

Шварцман М. М. Информатика: наука, инженерия, экономический фактор, социальный феномен, учебная дисциплина	160
--	-----

Секция IX Институциональная организация экономических систем 161

Губогло Т. М. Инновационная сфера развития института собственности	163
--	-----

Дикусар Г. С. Возможности мотивирования работника в России	164
--	-----

Дмитриева В. Д. Особенности максимизации полезности от потребления виртуальных благ	165
---	-----

Капитанова А. Ф. Институционализм как инструмент изучения поведения транснациональных корпораций	166
--	-----

Мамаева Д. С. Институт отцовства в современной России	166
---	-----

Попов М. В. Особенности поведения потребителей в онлайн-играх	168
---	-----

Розова Н. Н. Феномен корпоративной социальной ответственности	169
---	-----

Чеботарева Н. В. Эволюция платежных средств	170
---	-----

Шумилина В. Е. Модель национальных систем финансового учета	171
---	-----

Секция X Потенциал и перспективы экономического развития России 173

Губарь О. В. Виртуальная экономика компьютерных игр: оценка возможностей для экономического эксперимента и моделирования	174
--	-----

Карташева Л. В. Анализ уровня торгового предприятия с помощью математических методов	175
Покромкин К. Р. Влияние политической нестабильности на научно-технологические связи между государственными предприятиями РФ и Украины	176
Ремонтов А. П., Разуваев С. Г., Трубицков С. В. Алгоритм формирования кадрового потенциала для стратегии устойчивого развития промышленного предприятия	177
Сулименко О. В. Вывоз капитала из России	178
Шварцман М. М. Специфика структуры и перспективы развития социально-экономических отношений в России	179
Юсупова Л. В. О перспективах развития инвестиционной политики в Чеченской республике	180
Секция XI Современные проблемы образования	181
Байгушева И. А. О готовности преподавателей вуза к реализации профессиональной направленности курса	182
Боловин В. Г., Гусева Т. В. Подготовка инженерных кадров в Российской системе образования	183
Борзунова Т. Л. Опыт преподавания финансовых дисциплин	184
Гаврилова Р. М., Костецкая Г. С. К вопросу о самостоятельной работе студентов	185
Гусева Т. В. Методические аспекты в подготовке студентов технических вузов в области графических дисциплин	186
Демехина Л. А., Демехина Н. В. Разработка нестандартных методов обучения теоретической физике...	186
Зеликин Н. В. Математика и информатика в экономике: межкафультетский курс бизнес-консалтинга в Московском университете	187

Иноятов С. И. Современные проблемы образования и подготовки кадров в Республике Узбекистан	188
Казаченок В. В., Громко Н. И., Буславский А. А. Современные проблемы информатизации учебного процесса	190
Карапетянц А. Н. Современные тенденции в развитии образовательных технологий: миф или реальность	191
Кутукова Л. Т., Прохорова А. Е. О контролируемой самостоятельной работе студента	191
Маманазаров А. Б. Перспективы экономического образования в Республике Узбекистан	192
Мамуров Б. Б. Основы воспитания молодежи в Узбекистане	194
Мелкумян А. А. Исследование гендерной асимметрии в высшем техническом образовании на примере подготовки инженеров-нефтяников	194
Новинская Н. В., Новинский В. Ю. Общие тенденции формирования терминов-эпонимов (на учебном материале специальностей «Экология» и «Архитектура»)	195
Раенко Е. А. О проблемах изучения стохастической линии в школьном курсе математики и вузе	196
Румянцев А. Н., Румянцева Т. Г. Визуализация в лабораторном практикуме по информатике и программированию	197
Садулаева Б. С. Об актуализации качества образования в условиях новых образовательных стандартов	198
Садулаева Р. С. О духовно-нравственном воспитании студентов в условиях информационного общества	199
Удовенко Л. Н. О возможностях практико-ориентированного обучения в вузе	200
Ускова Н. Б., Ускова О. Ф., Каплиева Н. А. Математическое содержание некоторых заданий ЕГЭ по информатике	201