УДК 539.3

# ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО РЕОЛОГИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

**© М.Н.Кирсанов**

Критическое время пластины определяется на основе анализа роста возмущений напряжений и деформаций. В критерий оценки границы устойчивости вводится неопределенный коэффициент, определяемый из дополнительного условия, вытекающего из уравнения равновесия. Применяется метод упругого эквивалента В.Д.Клюшникова. Показано, что решение не вырождается при отсутствии упрочнения и для постоянных нагрузок совпадает с решением по известному критерию Работнова-Шестерикова.

**Ключевые слова**: пластина, реология, выпучивание, переменное нагружение.

Если не рассматривать динамику конструкций, то проблемы упругой устойчивости в принципиальной своей части разрешены подходом Эйлера. Критическая нагрузка, по Эйлеру, устанавливает верхнюю границу, выше которой конструкция теряет свою несущую способность – малые возмущения прогиба приводят к выпучиванию первоначально идеальной формы. Если материал конструкции при достаточно больших внешних усилиях работает в пластической стадии, то для выявления зоны устойчивости существует подход, основанный на касательно модульной критической нагрузке (Shanley F.R., Работнов Ю.Н.). Критическая ситуация здесь понимается так же, как и в упругости. Математический формализм для отыскания критического условия сводится к уравнению вида $f(P)\Delta u = 0$. Здесь $\Delta u$ – приращение прогиба, или вектора прогиба, $f(P)$ – функция, зависящая от нагрузки (или набора нагрузок). Реология материала вносит принципиальное изменение постановки.

В [1] предложен псевдобифуркационный (бифуркация с условием на вид возмущения) критерий выпучивания. Критический обзор подходов к выбору критерия выпучивания при ползучести дан в [2]. В настоящей работе предлагается гипотеза инициации выпучивания, основанная на критическом соотношении скоростей приращения напряженно-деформированного состояния.

Известно, что уравнение равновесия системы (стержень, пластина, оболочка) в приращениях с учетом реологии материала содержит и скорость прогиба, а коэффициенты зависят и от нагрузки, и от времени

$$f(P,t)\Delta u + h(P,t)\Delta \dot{u} = 0. \qquad (1)$$

Точкой отмечена производная по времени. Уравнение для приращения прогиба становится неоднородным и из условия $\Delta u \neq 0$, как в упругости, уже нельзя выделить критическое условие для нагрузки $f(P,t)=0$. Если же (1) рассматривать как дифференциальное уравнение для приращения прогиба, то получается, что при любых начальных условиях $\Delta u$ растет, что приводит к неутешительному выводу о неустойчивости реологических систем. Исключение здесь составляют только материалы с ограниченной ползучестью, для которых коэффициенты уравнения (1) меняют знак, и это позволяет выделить так называемую длительную критическую нагрузку – меньше этой нагрузки прогибы падают до нуля, больше – растут. Критическое время здесь не выделяется. В данной работе будем рассматривать материалы с неограниченной нелинейной ползучестью. В одномерном случае определяющее соотношение имеет вид

$$\dot{p}p^{\alpha} = A\sigma^{n}, \qquad (2)$$

где $p$ – деформация ползучести, $\sigma$ – напряжение, $A, \alpha, n$ – константы материала. Для оценки несущей способности систем из материалов такого типа используются условные критерии устойчивости. Критерий Работнова-Шестерикова предполагает, что критическое время отделяет возмущения, приводящие к уменьшению прогиба (в первый момент времени) от возмущений, после которых прогиб растет. Критическая ситуация при этом подходе соответствует $\Delta \dot{u} = 0$, что позволяет найти критическое время и критическую нагрузку из равенства $f(P,t)=0$. Рассмотрим другой условный критерий, не связанный с перемещениями

$$\Delta(\dot{\sigma}/\sigma) = 0. \qquad (3)$$

Это соотношение, также как и другие подобные соотношения в условных критериях, дает дополнительное уравнение, которое вместе с (1) образует для $\Delta \dot{u}$ и $\Delta u$ однородную систему. Из равенства нулю определителя этой системы можно выделить критическую зависимость нагрузки и времени. Из (3) следует $\Delta\dot{\sigma} = (\dot{\sigma}/\sigma)\Delta\sigma$. Примем (условно), что если возмущения таковы, что в первый момент после возмущения справедливо неравенство $\Delta\dot{\sigma} < (\dot{\sigma}/\sigma)\Delta\sigma$, то система устойчива (скорость роста напряжений невелика), а если $\Delta\dot{\sigma} > (\dot{\sigma}/\sigma)\Delta\sigma$ – система теряет устойчивость. Тут следует повторить, что термин "устойчивость" здесь понимается в условном смысле и к устойчивости по Ляпунову отношения не имеет. Если бы реологические системы можно было исследовать по Ляпунову, то термина "условный критерий" вообще бы не существовало. Только практическая необходимость выявить какие-либо объективные точки на шкале времени, хотя бы в малой степени отвечающие явлению выпучивания, заставляет искать подходы подобного рода. Опыт показывает, что некоторые из таких гипотез дают хорошее совпадение с практикой. По аналогии с (3) можно задать также другое условие выпучивания $\Delta(\dot{\sigma}/\varepsilon) = 0$, которого следует $\Delta\dot{\sigma} = (\dot{\sigma}/\varepsilon)\Delta\varepsilon$.

Окончательно гипотезу выпучивания представим в виде линейной комбинации с неопределенным множителем для критического приращения скорости напряжений $\Delta\dot{\sigma} = (1-\lambda)(\dot{\sigma}/\sigma)\Delta\sigma + \lambda(\dot{\sigma}/\varepsilon)\Delta\varepsilon$ и критического приращения скорости деформации $\Delta\dot{\varepsilon} = (1-\lambda)(\dot{\varepsilon}/\sigma)\Delta\sigma + \lambda(\dot{\varepsilon}/\varepsilon)\Delta\varepsilon$. В случае пространственного напряженного состояния эти условия имеют вид

$$\Delta\dot{S}_{ij} = \dot{S}_{ij}\left((1-\lambda)\Delta S/S + \lambda\,\Delta\varepsilon/\varepsilon\right), \tag{4}$$

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}\left((1-\lambda)\Delta S/S + \lambda\,\Delta\varepsilon/\varepsilon\right), \tag{5}$$

где $\varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора деформации, $S_{ij}$ – компоненты девиатора тензора напряжений $\sigma_{ij}$,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}, \tag{6}$$

$S$ и $\varepsilon$ – интенсивности соответствующих величин:

$$S^2 = S_{ij}S_{ij}, \tag{7}$$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{8}$$

Деформация ползучести определяется как

$$p_{ij} = \varepsilon_{ij} - S_{ij}/(2G). \tag{9}$$

Из (4), (5), (9) следует

$$\Delta\dot{p}_{ij} = \dot{p}_{ij}\left((1-\lambda)\Delta S/S + \lambda\Delta\varepsilon/\varepsilon\right). \tag{10}$$

Найдем упругий эквивалент среды

$$\dot{p}_{ij}p^{\alpha} = AS^{n-1}S_{ij}, \tag{11}$$

где

$$\dot{p} = \sqrt{\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}}\,. \tag{12}$$

Выведем некоторые вспомогательные равенства, необходимые для дальнейших выкладок. Варьирование (7) и (12) дает следующие равенства $S\Delta S = S_{ij}\Delta S_{ij}$, $\dot{p}\Delta\dot{p} = \dot{p}_{ij}\Delta\dot{p}_{ij}$. Рассмотрим докритическое состояние, для которого выполняется условие на девиатор напряжений

$$S_{ij}/S = const\,. \tag{13}$$

Отсюда следует

$$S\Delta S_{ij} = S_{ij}\Delta S\,. \tag{14}$$

Свертка (11) дает

$$\dot{p}p^{\alpha} = AS^n\,. \tag{15}$$

Подставим это равенство в определяющее соотношение (11), получим

$$S\dot{p}_{ij} = S_{ij}\dot{p}\,. \tag{16}$$

Свернем это равенство с $\Delta\dot{p}_{ij}$:

$$S\Delta\dot{p} = \Delta\dot{p}_{ij}S_{ij}\,. \tag{17}$$

Проинтегрируем (16) и (17) с учетом условия на докритическое состояние (13) и нулевых начальных условий для деформации ползучести

$$Sp_{ij} = S_{ij}p, \tag{18}$$

$$S\Delta p = \Delta p_{ij}S_{ij}\,. \tag{19}$$

Найдем упругий эквивалент рассматриваемого материала. Проварьируем определяющее соотношение (11):

$$(n-1)AS^{n-2}S_{ij}\Delta S + AS^{n-1}\Delta S_{ij} - \alpha p^{\alpha-1}\dot{p}_{ij}\Delta p - $$
$$- p^{\alpha}\Delta\dot{p}_{ij} = 0.$$

Подставим сюда соотношения (14), (15), (16) и (19). Получим

$$\Delta S_{ij}\left(pn/S + \alpha/(2G)\right) - \alpha K_{ijmn}\Delta\varepsilon_{mn} - $$
$$- p\Delta\dot{p}_{ij}/\dot{p} = 0, \tag{20}$$

здесь введен тензор $K_{ijmn} = S_{ij}S_{mn}/S^2$. Используя (15), (17) и проварьированное равенство (8), преобразуем к удобному виду соотношение (10)

$$\Delta\dot{p}_{ij} = \dot{p}\big((1-\lambda)\Delta S_{ij}/S + $$
$$+\lambda K_{ijmn}\left(p + S/(2G)\right)\Delta\varepsilon_{mn}/\varepsilon^2\big). \tag{21}$$

Подставим (21) в (20)

$$\Delta S_{ij}\left((n+\lambda-1)/S + \alpha/(2pG)\right) - $$
$$-\Delta\varepsilon_{mn}K_{ijmn}\left(\alpha/p + \lambda/\varepsilon^2\left(p + S/(2G)\right)\right) = 0.$$

Отсюда следует упругий эквивалент в форме

$$\Delta S_{ij} = 2\tilde{G}_{ijmn}\Delta\varepsilon_{mn}\,, \tag{22}$$

где

$$\tilde{G}_{ijmn} = K_{ijmn}F\,, \tag{23}$$

$$F = \frac{\left(1 + p\lambda\left(p + S/(2G)\right)/\left(\alpha\varepsilon^2\right)\right)}{\left(2Gp(n+\lambda-1)/(S\alpha)+1\right)}. \quad (24)$$

Применим найденный упругий эквивалент для решения задачи о выпучивании пластины. Уравнения устойчивости пластины имеют вид $\Delta M_{ij,ij} + N_{ij}\Delta w_{,ij} = 0$, где $N_{ij}$, $M_{ij}$ – моменты и усилия в пластине:

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz, N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz$$

$h$ – толщина пластины, $w$ – прогиб. Используем гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + zw_{ij}, \quad (25)$$

$\varepsilon_{ij}^0$ – деформация срединной поверхности. Неопределенный параметр $\lambda$ найдем из продиффеференцированного по времени уравнения устойчивости

$$\Delta\dot{M}_{ij,ij} + \dot{N}_{ij}\Delta w_{,ij} + N_{ij}\Delta\dot{w}_{,ij} = 0. \quad (26)$$

Используя равенства $\sigma_{ij} = S_{ij} + S_{kk}\delta_{ij}$, $i, j, k = 1,2,$ вытекающие из (6) в случае плоского напряженного состояния, в котором находится пластина, а также соотношения (4), (5), (22), (23), (25) вследствие (26) получим

$$\begin{gathered}\left(2FG(1-\lambda)S_{mn}/S^2 + \lambda\varepsilon_{mn}/\varepsilon^2\right)\times \\ \times\left(\Delta w_{,mnij}\dot{\sigma}_{ij}h^3/12 + N_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\Delta w_{,mn}\right) + \dot{N}_{ij}\Delta w_{,ij} = 0.\end{gathered} \quad (27)$$

При условии $\Delta w_{ij} \neq 0$ из этого уравнения определяем $\lambda$. Подставляя найденное значение $\lambda$ в формулу для упругого эквивалента (23, 24), сводим поставленную задачу к задаче устойчивости анизотропной упругой пластины.

Рассмотрим для примера шарнирно опертую по сторонам пластину, сжатую в одном направлении напряжениями $\sigma_{11}$. Имеем следующие компоненты

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = 3S\sqrt{6}, \sigma_{22} = 0, S^2 = (2/3)\sigma_{11}^2, \\ S_{11} = (2/3)\sigma_{11} = 2S/\sqrt{6}, \\ S_{22} = -(1/3)\sigma_{11} = -S/\sqrt{6}, \\ \varepsilon_{11} = 2\varepsilon/\sqrt{6}, \varepsilon_{22} = -\varepsilon/\sqrt{6}.\end{gathered} \quad (28)$$

Шарнирному опиранию соответствует форма прогиба $\Delta w = f\sin(m_1 x)\sin(m_2 y)$, $m_1 = \pi/a$, $m_2 = \pi/b$ (одна полуволна по ширине и длине пластины). Из (27) в условиях (28) при $m_1 = m_2 = m$ следует

$$2\left(2(1-\lambda)FG\varepsilon + \lambda S\right)\left(\dot{S}k - S\dot{\varepsilon}\right) - 5\varepsilon\dot{S}S = 0, \quad (29)$$

где $k = m^2h^2\sqrt{6}/24$. В случае одноосного сжатия из (24) имеем

$$F = \frac{S}{\varepsilon}\frac{\alpha\varepsilon + p\lambda}{2pG(n+\lambda-1) + S\alpha}.$$

Подставляя это выражение в (29), получим линейное уравнение для $\lambda$. Его решение имеет вид

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{pG}\frac{5\alpha S\dot{S} - 4\alpha\left(\dot{S}k - S\dot{\varepsilon}\right) + 10G\dot{S}p(n-1)}{4\left(\dot{S}k - S\dot{\varepsilon}\right) - 10\dot{S}\varepsilon}.$$

Рассмотрим случай ползучести без упрочнения. Для такого материала $\alpha = 0$. Выражения упростятся

$$\lambda = \frac{5\varepsilon\dot{S}(n-1)}{2\left(\dot{S}k - S\dot{\varepsilon}\right) - 5\dot{S}\varepsilon}, \quad F = \frac{S\lambda}{2\varepsilon G(n+\lambda-1)}.$$

Подставим $\lambda$ в *F*. Получим матрицу упругого эквивалента $\tilde{G}_{ijmn} = 5\dot{S}K_{ijmn}/\left(4n\left(\dot{S}k - S\dot{\varepsilon}\right)\right)$. Это выражение следует подставить в соответствующее решение задачи об устойчивости анизотропной пластины с матрицей анизотропии такого же вида. Учитывая ненулевые элементы $G_{ijmn}$, выпишем это решение $\sigma_{11} = \left(12/\sqrt{6}\right)k\left(G_{1111} + 2G_{1122} + G_{2222}\right)$ или с учетом (28) имеем $S = 4k\left(G_{1111} + 2G_{1122} + G_{2222}\right)$. Следуя методу упругого эквивалента, заменим константы $G_{ijmn}$ на функции напряжения, деформаций и констант материала $\tilde{G}_{ijmn}$. Получим $S = (4/5)kGF = S\dot{S}k/\left(n\left(\dot{S}k - \dot{\varepsilon}\right)\right)$, откуда $\dot{S}k(1-n) + nS\dot{\varepsilon} = 0$. Так как $S = S(t)$, то последнее соотношение представляет собой уравнение для критического времени как функции скорости нагружения и параметров среды. Заметим, что критерий Работнова-Шестерикова при $\alpha = 0$ не выделяет критического времени. При постоянных нагрузках результаты, полученные по критерию Работнова-Шестерикова и предложенному критерию совпадают. В обоих случаях критическая деформация пластины имеет вид $p = \alpha(4kG - 5S)/(10nG)$.

В статье [3] предложен критерий выпучивания при ползучести, учитывающий возмущения прогиба высшего порядка.

* * * * * * * * * *

1. *Клюшников В.Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. – М.: Моск. гос. ун-т, 1986. – 224 с.
2. *Зубчанинов В.Г.* Устойчивость и пластичность. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. – Т.1.: Устойчивость. – 448 с.
3. *Kirsanov M.N.* Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int.J.Eng.Sci. – 1997. – Vol.5. – №.3. – P.221-227.

# BUCKLING OF A PLATE OF NONLINEAR RHEOLOGICAL MATERIAL WITH VARIABLE LOADING

**M.N.Kirsanov**

Critical time of a plate is determined by analyzing the growth of the perturbations of stresses and strains. The indefinite coefficient determined from the additional implication of the equilibrium equation is introduced in the evaluation criterion of the stability boundary. We use the method of elastic equivalence V.D.Klyushnikova. It is shown that the solution is not degenerate in the absence of hardening, and coincides with the decision of the known criteria Rabotnova-Shesterikova for permanent loading.

**Key words**: plate, rheology, buckling, variable loading.

* * * * * * * * * *

**Кирсанов Михаил Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института (технического университета).

E-mail: mpei2004@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.03.2011