

Математика

УДК 517.928.2

**ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО
ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА**

Е. Е. Букжалёв¹

Построена последовательность, сходящаяся к решению задачи Коши для сингулярно возмущенного линейного однородного дифференциального уравнения произвольного порядка. Эта последовательность является также асимптотической в том смысле, что отклонение (по норме пространства непрерывных функций) ее n -го элемента от решения задачи пропорционально $(n+1)$ -й степени параметра возмущения.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций, метод пограничных функций.

We construct a sequence converging to the solution to the Cauchy problem for a singularly perturbed, linear, homogeneous differential equation of any order. This sequence is asymptotic in the following sense: the distance (with respect to the norm of the space of continuous functions) between its n th element and the solution to the problem is proportional to the $(n+1)$ th power of the perturbation parameter.

Key words: singular perturbations, Banach fixed-point theorem, asymptotic iteration method, boundary function method.

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для линейного однородного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения m -го порядка:

$$\varepsilon^m y^{(m)} = \varepsilon^{m-1} a_{m-1}(x) y^{(m-1)} + \dots + a_0(x) y, \quad x \in (0, X]; \quad (1)$$

$$y(0; \varepsilon) = y^0, \dots, y^{(m-1)}(0; \varepsilon) = y^{m-1} / \varepsilon^{m-1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, $X > 0$, $y^0, \dots, y^{m-1} \in \mathbb{R}$, $a_0(x), \dots, a_{m-1}(x) \in C^1[0, X]$. Кроме того, будем считать, что коэффициенты $a_i(x)$ при всех $x \in [0, X]$ удовлетворяют условию Гурвица (см., например, [1, с. 97]):

$$-a_{00}(x) > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{00}(x) & a_{01}(x) \\ a_{10}(x) & a_{11}(x) \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} a_{00}(x) & \dots & a_{0(m-1)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-1)0}(x) & \dots & a_{(m-1)(m-1)}(x) \end{vmatrix} > 0, \quad (3)$$

где

$$a_{ij}(x) := \begin{cases} a_{2i-j}(x), & \text{если } 0 \leq 2i-j < m; \\ -1, & \text{если } 2i-j = m; \\ 0, & \text{если } 2i-j < 0 \text{ или } 2i-j > m. \end{cases}$$

Напомним (см. [1, с. 91]), что для выполнения условия (3) необходимо (а при $m \in \{1, 2\}$ и достаточно), чтобы все $a_i(x)$ имели отрицательный знак.

В настоящей работе предлагается алгоритм построения последовательности вектор-функций

$$\psi_n(x; \varepsilon) = (y_n^1(x; \varepsilon), \dots, y_n^m(x; \varepsilon))$$

(здесь m — порядок уравнения (1), n — номер элемента последовательности), сходящейся при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ по норме пространства $C_m[0, X]$ (непрерывных m -мерных вектор-функций аргумента $x \in [0, X]$) к функции

$$\psi(x; \varepsilon) = (y(x; \varepsilon), \frac{d}{dx} y(x; \varepsilon), \dots, \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} y(x; \varepsilon)),$$

¹Букжалёв Евгений Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математики физ. ф-та МГУ, e-mail: bukzhalev@mail.ru.

где $y(x; \varepsilon)$ — классическое решение задачи (1), (2) (для величины ε_0 в явном виде установлена нижняя оценка). Построение и доказательство сходимости последовательности $\psi_n(x; \varepsilon)$ опираются на теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства (см. [2, с. 64]). При этом коэффициент сжатия k отображения оказывается величиной порядка ε ($k < \varepsilon/\varepsilon_0$), так что отклонение $y_n^i(x; \varepsilon)$ от $\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} y(x; \varepsilon)$ (здесь под отклонением подразумевается отклонение по норме $C[0, X]$) составляет $O(\varepsilon^{n+1})$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Тем самым полученный результат носит и асимптотический характер.

Заметим, что каждый следующий элемент последовательности $\psi_n(x; \varepsilon)$ есть результат действия некоторого оператора на предыдущий элемент. Элементы таких последовательностей часто называют итерациями, а сами последовательности — итерационными. В нашем случае последовательность $\psi_n(x; \varepsilon)$ сходится к $\psi(x; \varepsilon)$ (по норме $C_m[0, X]$), причем скорость сходимости асимптотически велика (обратно пропорциональна ε). Поэтому предложенный алгоритм построения последовательности $\psi_n(x; \varepsilon)$ относится к методу асимптотических итераций (о методе асимптотических итераций см., например, [3]). Последовательности $y_n^i(x; \varepsilon)$ также будем называть асимптотическими итерационными, или просто итерационными, или асимптотическими последовательностями $(i-1)$ -й производной решения $y(x; \varepsilon)$ рассматриваемой задачи.

Возможность применения метода асимптотических итераций связана с выполнением условий (3), наложенных на коэффициенты из правой части исследуемого уравнения. Однако выполнение этих условий открывает путь и для метода пограничных функций (о методе пограничных функций см., например, [4, 5]). Непосредственным сравнением можно убедиться в том, что отклонение $y_n^1(x; \varepsilon)$ от n -й частичной суммы $Y_n(x; \varepsilon)$ (называемой асимптотикой или асимптотическим разложением n -го порядка) ряда $Y(x; \varepsilon)$, получаемого с помощью метода пограничных функций, составляет $O(\varepsilon^{n+1})$. Таким образом, сходимость последовательности $y_n^1(x; \varepsilon)$ делает возможным использование метода асимптотических итераций для обоснования асимптотического разложения, получаемого с помощью метода пограничных функций (т.е. для доказательства того, что разность между $Y_n(x; \varepsilon)$ и решением $y(x; \varepsilon)$ составляет $O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно по всем $x \in [0, X]$).

Отметим, что сходимость (равномерная по ε) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ асимптотических последовательностей $y_n^i(x; \varepsilon)$ является принципиальным преимуществом метода асимптотических итераций перед методом пограничных функций, который позволяет построить хоть и асимптотический, но, вообще говоря, расходящийся (в том числе при сколь угодно малых ε) ряд. Дело в том, что оценка отклонения $y_n^1(x; \varepsilon)$ от $Y_n(x; \varepsilon)$, составляющая $O(\varepsilon^{n+1})$, не является равномерной по n и с ростом n это отклонение может не только не стремиться к нулю, но и неограниченно возрастать.

Еще одно преимущество последовательности $\psi_n(x; \varepsilon)$ — возможность построения всех ее членов без повышения требований гладкости на функции $a_i(x)$ (для построения всех $\psi_n(x; \varepsilon)$ достаточно, чтобы $a_i(x) \in C^1[0, X]$, в то время как для построения всех членов ряда $Y(x; \varepsilon)$ необходима бесконечная дифференцируемость $a_i(x)$).

2. Установление вспомогательных оценок. Пусть p — отображение, которое каждому $x \in [0, X]$ ставит в соответствие многочлен

$$p(x) := \lambda^m - a_{m-1}(x) \lambda^{m-1} - \dots - a_1(x) \lambda - a_0(x), \quad (4)$$

где $a_i(x)$ — коэффициенты уравнения (1). Известно (см. [6, с. 28]), что из непрерывности коэффициентов a_i вытекает существование таких непрерывных функций $\lambda_1, \dots, \lambda_m: [0, X] \rightarrow \mathbb{C}$, что

$$\forall x \in [0, X] \quad p(x) = (\lambda - \lambda_1(x)) \dots (\lambda - \lambda_m(x))$$

(для справедливости данного утверждения существенна скалярность переменной x). При этом $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ называют корнями многочлена $p(x)$.

Согласно критерию Гурвица (см. [1, с. 97]), для отрицательности вещественных частей корней полинома $p(x)$ необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты $a_i(x)$ удовлетворяли неравенствам (3). Таким образом, для всех $(i, x) \in \{1, \dots, m\} \times [0, X]$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda_i(x) < 0. \quad (5)$$

Заметим, что из непрерывности λ^i следует непрерывность действительных частей этих функций. Но тогда в силу (5) и второй теоремы Вейерштрасса (об экстремальных значениях непрерывных функций)

$$\kappa := -\max_{[0, X]} \max\{\operatorname{Re} \lambda_1(x), \dots, \operatorname{Re} \lambda_m(x)\} > 0. \quad (6)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{d^m \tilde{y}}{d\xi^m} = a_{m-1}(0) \frac{d^{m-1} \tilde{y}}{d\xi^{m-1}} + \dots + a_0(0) \tilde{y}, \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \quad (7)$$

$$\tilde{y}(0) = y^0, \dots, \frac{d^{m-1} \tilde{y}}{d\xi^{m-1}}(0) = y^{m-1}. \quad (8)$$

Уравнение (7) представляет собой однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение задачи (7), (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\xi) = & \alpha_{11} e^{\lambda_1(0)\xi} + \dots + \alpha_{1m_1} \xi^{m_1-1} e^{\lambda_{m_1}(0)\xi} + \dots \\ & \dots + \alpha_{q1} e^{\lambda_{m_1+\dots+m_{q-1}+1}(0)\xi} + \dots + \alpha_{qm_q} \xi^{m_q-1} e^{\lambda_{m_1+\dots+m_{q-1}+m_q}(0)\xi}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda_1(0) = \dots = \lambda_{m_1}(0)$, $\dots$, $\lambda_{m_1+\dots+m_{q-1}+1}(0) = \dots = \lambda_{m_1+\dots+m_q}(0)$ — корни многочлена $p(0)$ (см. (4)); $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{qm_q}$ — постоянные, однозначно выражающиеся через $y^0, \dots, y^{m-1}$ и $\lambda_1(0), \dots, \lambda_m(0)$ ($m_1 + \dots + m_q = m$).

Из (9) и (6) видно, что при достаточно большом $\tilde{C}$ для $\tilde{y}^{(i)}(\xi)$ справедлива оценка

$$|\tilde{y}^{(i)}(\xi)| \leq \tilde{C} (1 + \xi^{m-1}) e^{-\kappa \xi}, \quad (i, \xi) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty). \quad (10)$$

Сделаем замену переменных задачи (1), (2):

$$x = \varepsilon \xi, \quad y(x; \varepsilon) = \tilde{y}(\xi) + \varepsilon z(\xi; \varepsilon). \quad (11)$$

Для новой функции $z(\xi; \varepsilon)$ получается следующая начальная задача:

$$\frac{d^m z}{d\xi^m} = a_{m-1}(\varepsilon \xi) \frac{d^{m-1} z}{d\xi^{m-1}} + \dots + a_0(\varepsilon \xi) z + f(\xi; \varepsilon), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \quad (12)$$

$$z(0; \varepsilon) = \dots = \frac{d^{m-1} z}{d\xi^{m-1}}(0; \varepsilon) = 0, \quad (13)$$

где

$$f(\xi; \varepsilon) := \varepsilon^{-1} \{ [a_{m-1}(\varepsilon \xi) - a_{m-1}(0)] \tilde{y}^{(m-1)}(\xi) + \dots + [a_0(\varepsilon \xi) - a_0(0)] \tilde{y}(\xi) \}. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (12), добавив переменную x в качестве нового параметра:

$$\begin{aligned} \frac{d^m z}{d\xi^m} = & a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1} z}{d\xi^{m-1}} + \dots + a_0(x) z + [a_{m-1}(\varepsilon \xi) - a_{m-1}(x)] \frac{d^{m-1} z}{d\xi^{m-1}} + \dots \\ & \dots + [a_0(\varepsilon \xi) - a_0(x)] z + f(\xi; \varepsilon), \quad (\xi, x) \in (0, X/\varepsilon] \times [0, X]. \end{aligned} \quad (15)$$

Задача (15), (13) равносильна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(\xi; \varepsilon) = & \int_0^\xi \Phi(\xi - \zeta; x) \left\{ [a_{m-1}(\varepsilon \zeta) - a_{m-1}(x)] \frac{d^{m-1} z}{d\zeta^{m-1}}(\zeta; \varepsilon) + \dots \right. \\ & \left. \dots + [a_0(\varepsilon \zeta) - a_0(x)] z(\zeta; \varepsilon) + f(\zeta; \varepsilon) \right\} d\zeta, \quad (\xi, x) \in [0, X/\varepsilon] \times [0, X], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi(\xi - \zeta; x) = K(\xi, \zeta; x)$ — функция Коши уравнения

$$\frac{d^m z}{d\xi^m} = a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1} z}{d\xi^{m-1}} + \dots + a_0(x) z.$$

Напомним, что $\Phi(\xi; x)$ удовлетворяет следующей начальной задаче:

$$\frac{d^m \Phi}{d\xi^m} = a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1} \Phi}{d\xi^{m-1}} + \dots + a_0(x) \Phi, \quad (\xi, x) \in \mathbb{R} \times [0, X]; \quad (17)$$

Лемма. Пусть $C_a \geq 0$, $C_w \geq 0$. Тогда найдется такая постоянная $\tilde{C}_m \geq 0$, что

$$\left| \frac{d^i w}{d\xi^i}(\xi; M_m, N_m) \right| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) e^{\bar{\Lambda}_m(M_m)\xi} \quad (25)$$

при всех $(i, \xi, M_m, N_m) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \Pi_m(C_a) \times \Pi_m(C_w)$, где $w(\xi; M_m, N_m)$ — решение задачи (22), (23).

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Обозначим через S_m высказывание леммы. Так как справедливость S_1 очевидна, то остается доказать, что для всякого натурального m из S_m следует S_{m+1} .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения $(m+1)$ -го порядка

$$\frac{d^{m+1}w}{d\xi^{m+1}} = a_m \frac{d^m w}{d\xi^m} + \dots + a_0 w, \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (26)$$

$$w(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = w^0, \dots, \frac{d^m w}{d\xi^m}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = w^m \quad (27)$$

и зафиксируем произвольные неотрицательные C_a и C_w . Утверждение S_{m+1} состоит в том, что найдется настолько большая постоянная $\tilde{C}_{m+1}$, что

$$\left| \frac{d^i w}{d\xi^i}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| \leq \tilde{C}_{m+1} (1 + \xi^m) e^{\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})\xi}$$

при всех $(i, \xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \overline{0, m} \times [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$, где $w(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})$ — решение задачи (26), (27).

Чтобы установить справедливость S_{m+1} (в предположении истинности утверждения S_m), сделаем замену зависимой переменной задачи (26), (27):

$$w(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = e^{\lambda^*(M_{m+1})\xi} u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}), \quad (28)$$

где $\lambda^*(M_{m+1})$ — функция, ставящая каждому $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ в соответствие один из корней (любой) $\lambda_i(M_{m+1})$ характеристического многочлена уравнения (26), действительная часть $\operatorname{Re} \lambda_i(M_{m+1})$ которого совпадает с $\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})$:

$$\operatorname{Re} \lambda^*(M_{m+1}) = \bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1}). \quad (29)$$

Для новой функции $u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})$ получается следующая начальная задача:

$$\frac{d^{m+1}u}{d\xi^{m+1}} = b_m(M_{m+1}) \frac{d^m u}{d\xi^m} + \dots + b_1(M_{m+1}) \frac{du}{d\xi}, \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (30)$$

$$u(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^0(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, \frac{d^m u}{d\xi^m}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^m(M_{m+1}, N_{m+1}). \quad (31)$$

Здесь $b_i(M_{m+1}) = \tilde{b}_i(\lambda^*(M_{m+1}), M_{m+1})$, $u^i(M_{m+1}, N_{m+1}) = \tilde{u}^i(\lambda^*(M_{m+1}), N_{m+1})$, где в свою очередь $\tilde{b}_i$ и $\tilde{u}^i$ — известные функции от λ^* , $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m)$ и $N_{m+1} = (w^0, \dots, w^m)$ — полиномиальные по λ^* и линейные по $a_0, \dots, a_m$ и $w^0, \dots, w^m$. Записывая уравнение (30), мы сразу же учли, что его характеристический многочлен при любом $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ имеет нулевой корень (см. (32)), в связи с чем коэффициент $b_0(M_{m+1})$ при функции u есть тождественный нуль.

Ввиду (28) при каждом $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ корнями характеристического многочлена уравнения (30) являются

$$\mu_i(M_{m+1}) := \lambda_i(M_{m+1}) - \lambda^*(M_{m+1}), \quad i \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (32)$$

Отсюда и из определения $\lambda^*(M_{m+1})$ вытекает, что

$$\operatorname{Re} \mu_i(M_{m+1}) \leq 0 \quad (33)$$

при всех $(i, M_{m+1}) \in \{1, \dots, m+1\} \times \mathbb{C}^{m+1}$.

Поскольку мы считаем, что точки $M_{m+1} = (a_0, \dots, a_m)$ принадлежат конечному параллелепипеду $P_{m+1}(C_a)$, то для всех корней $\lambda_i(M_{m+1})$ характеристического многочлена уравнения (26) справедлива (см., например, [7, с. 533]) оценка

$$|\lambda_i(M_{m+1})| \leq 1 + C_a. \quad (34)$$

Но тогда заведомо найдутся такие неотрицательные постоянные C_b и C_u , что

$$|b_i(M_{m+1})| \leq C_b, \quad |u^i(M_{m+1}, N_{m+1})| \leq C_u \quad (35)$$

при всех $(i, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \overline{0, m} \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$.

Понизим порядок уравнения (30), сделав еще одну замену зависимой переменной:

$$\frac{du}{d\xi}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) = v(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}). \quad (36)$$

Функция $v(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})$ удовлетворяет следующей начальной задаче:

$$\frac{d^m v}{d\xi^m} = b_m(M_{m+1}) \frac{d^{m-1} v}{d\xi^{m-1}} + \dots + b_1(M_{m+1}) v, \quad \xi \in (0, +\infty); \quad (37)$$

$$v(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^1(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, \frac{d^{m-1} v}{d\xi^{m-1}}(0; M_{m+1}, N_{m+1}) = u^m(M_{m+1}, N_{m+1}).$$

Пусть $\nu_1(M_{m+1}), \dots, \nu_m(M_{m+1})$ — корни характеристического многочлена уравнения (37). Поскольку каждый из $\nu_i(M_{m+1})$ одновременно является корнем характеристического многочлена уравнения (30), то для них, как и для $\mu_i(M_{m+1})$ (см. (33)), при всех $M_{m+1} \in \mathbb{C}^{m+1}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \nu_i(M_{m+1}) \leq 0. \quad (38)$$

Заметим еще, что (см. (35))

$$M_m = (b_1(M_{m+1}), \dots, b_m(M_{m+1})) \in \Pi_m(C_b),$$

$$N_m = (u^1(M_{m+1}, N_{m+1}), \dots, u^m(M_{m+1}, N_{m+1})) \in \Pi_m(C_u)$$

при всех $M_{m+1} \in \Pi_{m+1}(C_a)$ и $N_{m+1} \in \Pi_{m+1}(C_w)$. Последние оценки открывают возможность для применения предположения индукции к функции v , согласно которому найдется такое $\tilde{C}_m \geq 0$, что (см. (25), (24) и (38))

$$\left| \frac{d^i v}{d\xi^i}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) \quad (39)$$

при всех $(i, \xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$.

Из (36) и (39) для первых m производных функции u сразу же имеем (здесь и до конца доказательства леммы подразумевается, что $(\xi, M_{m+1}, N_{m+1}) \in [0, +\infty) \times \Pi_{m+1}(C_a) \times \Pi_{m+1}(C_w)$):

$$\left| \frac{d^i u}{d\xi^i}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| = \left| \frac{d^{i-1} v}{d\xi^{i-1}}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| \leq \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}). \quad (40)$$

Чтобы оценить саму функцию u , проинтегрируем (36), после чего воспользуемся соотношениями (31), (35) и (39), а также свойством монотонности и оценкой модуля определенного интеграла

$$\begin{aligned} |u(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| &= \left| u(0; M_{m+1}, N_{m+1}) + \int_0^\xi v(\zeta; M_{m+1}, N_{m+1}) d\zeta \right| \leq |u^0(M_{m+1}, N_{m+1})| + \\ &+ \int_0^\xi |v(\zeta; M_{m+1}, N_{m+1})| d\zeta \leq C_u + \int_0^\xi \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) d\zeta \leq \tilde{C}_u (1 + \xi^m) \end{aligned} \quad (41)$$

при достаточно большом $\tilde{C}_u$.

Вернемся к w . Из соотношений (28), (41), (40), (34), (29) и формулы Лейбница (для производной i -го порядка произведения двух функций) при каждом $i \in \overline{0, m}$ и достаточно большом $\tilde{C}_{m+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^i w}{d\xi^i}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1}) \right| &\leq \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} |u^{(j)}(\xi; M_{m+1}, N_{m+1})| |\lambda^*(M_{m+1})|^{i-j} |e^{\lambda^*(M_{m+1})\xi}| \leq \\ &\leq \left[\tilde{C}_u (1 + \xi^m) (1 + C_a)^i + \sum_{j=1}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} \tilde{C}_m (1 + \xi^{m-1}) (1 + C_a)^{i-j} \right] e^{\operatorname{Re} \lambda^*(M_{m+1})\xi} \leq \\ &\leq \tilde{C}_{m+1} (1 + \xi^m) e^{\bar{\Lambda}_{m+1}(M_{m+1})\xi}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Существуют такие $\varkappa > 0$ и $C_\Phi > 0$, что*

$$|\Phi_{\xi^i}(\xi; x)| \leq C_\Phi (1 + \xi^{m-1}) e^{-\varkappa \xi} \quad (42)$$

при всех $(i, \xi, x) \in \{0, \dots, m-1\} \times [0, +\infty) \times [0, X]$, где $\Phi(\xi; x)$ — решение задачи (17), (18).

Для доказательства справедливости оценки (42) достаточно положить

$$\varkappa := -\max_{[0, X]} \max \{\operatorname{Re} \lambda_1(x), \dots, \operatorname{Re} \lambda_m(x)\}$$

(см. (6)) и воспользоваться первой теоремой Вейерштрасса (об ограниченности непрерывных функций) для $a_i(x)$ и только что доказанной леммой.

3. Построение и доказательство сходимости итерационной последовательности. Пусть $O(0, C; \varepsilon) := \{(z^1, \dots, z^m) \in C_m[0, X/\varepsilon] \mid \forall \xi \in [0, X/\varepsilon] (z^1(\xi), \dots, z^m(\xi)) \in [-C, +C]^m\}$ — замкнутая C -окрестность вектор-функции $(z^1, \dots, z^m) \equiv (0, \dots, 0)$ в пространстве $C_m[0, X/\varepsilon]$.

Утверждение 1. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 \geq 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$*

$$\hat{A}(C_0; \varepsilon) : O(0, C_0; \varepsilon) \rightarrow O(0, C_0; \varepsilon),$$

где $\hat{A}(C; \varepsilon) = (\hat{A}_1(C; \varepsilon), \dots, \hat{A}_m(C; \varepsilon))$ — сужение оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ на $O(0, C; \varepsilon)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $C \geq 0$, подействуем операторами $\hat{A}_i(C; \varepsilon)$ на произвольную вектор-функцию $(z^1(\xi), \dots, z^m(\xi)) \in O(0, C; \varepsilon)$ и, учитывая (20) и (42), оценим получившийся результат:

$$\begin{aligned} \left| \hat{A}_i(C; \varepsilon)(z^1, \dots, z^m)(\xi) \right| &\leq C_\Phi e^{-\varkappa \xi} \left\{ C \int_0^\xi e^{\varkappa \zeta} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] [|a_{m-1}(\varepsilon \zeta) - a_{m-1}(\varepsilon \xi)| + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + |a_0(\varepsilon \zeta) - a_0(\varepsilon \xi)|] d\zeta + \int_0^\xi e^{\varkappa \zeta} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] |f(\zeta; \varepsilon)| d\zeta \right\}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для первого интеграла из (43) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\xi e^{\varkappa \zeta} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] [|a_{m-1}(\varepsilon \zeta) - a_{m-1}(\varepsilon \xi)| + \dots + |a_0(\varepsilon \zeta) - a_0(\varepsilon \xi)|] d\zeta = \\ = \varepsilon \int_0^\xi e^{\varkappa \zeta} [(\xi - \zeta) + (\xi - \zeta)^m] \left\{ |a'_{m-1}(\varepsilon [(1 - \theta_{m-1})\zeta + \theta_{m-1}\xi])| + \dots \right. \\ \left. \dots + |a'_0(\varepsilon [(1 - \theta_0)\zeta + \theta_0\xi])| \right\} d\zeta \leq \varepsilon \{ \|a'_{m-1}(x)\| + \dots + \|a'_0(x)\| \} \int_0^\xi e^{\varkappa \zeta} [(\xi - \zeta) + \\ + (\xi - \zeta)^m] d\zeta = \varepsilon \alpha \left\{ \frac{1}{\varkappa^2} [e^{\varkappa \xi} - 1 - \varkappa \xi] + \frac{m!}{\varkappa^{m+1}} [e^{\varkappa \xi} - 1 - \varkappa \xi - \dots - \frac{1}{m!} (\varkappa \xi)^m] \right\} \leq \varepsilon \beta e^{\varkappa \xi}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\theta_i = \theta_i(\varepsilon \zeta, \varepsilon \xi) \in (0, 1)$ при всех $i \in \{0, \dots, m-1\}$, $\zeta \in [0, \xi]$, $\xi \in [0, X/\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$; $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0, X]$; $\alpha := \|a'_{m-1}(x)\| + \dots + \|a'_0(x)\|$; $\beta := \alpha (\varkappa^{m-1} + m!)/\varkappa^{m+1}$.

Для второго интеграла из (43) имеем (см. (14) и (10))

$$\begin{aligned} \int_0^\xi e^{\varkappa\zeta} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] |f(\zeta; \varepsilon)| d\zeta &\leq \tilde{C} \int_0^\xi e^{\varkappa\zeta} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] [|a'_{m-1}(\varepsilon \theta_{m-1} \zeta)| + \dots \\ &\dots + |a'_0(\varepsilon \theta_0 \zeta)|] (\zeta + \zeta^m) e^{-\varkappa\zeta} d\zeta \leq \tilde{C} \alpha \max_{\zeta>0} [(\zeta + \zeta^m) e^{-\varkappa\zeta}] \int_0^\xi e^{\varkappa\zeta} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] d\zeta = \tilde{C} \alpha \times \\ &\times \max_{\zeta>0} [(\zeta + \zeta^m) e^{-\varkappa\zeta}] \left\{ \frac{1}{\varkappa} [e^{\varkappa\xi} - 1] + \frac{(m-1)!}{\varkappa^m} [e^{\varkappa\xi} - 1 - \varkappa\xi - \dots - \frac{1}{(m-1)!} (\varkappa\xi)^{m-1}] \right\} \leq \gamma e^{\varkappa\xi}, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\theta_i = \theta_i(\varepsilon \zeta) \in (0, 1)$ при всех $i \in \{0, \dots, m-1\}$, $\zeta \in [0, \xi]$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$;

$$\gamma := \tilde{C} \alpha \max_{\zeta>0} [(\zeta + \zeta^m) e^{-\varkappa\zeta}] \frac{\varkappa^{m-1} + (m-1)!}{\varkappa^m}.$$

Из формул (43)–(45) видно, что если C и ε удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq C \varepsilon C_\Phi \beta + C_\Phi \gamma \leq C, \quad (46)$$

то $\hat{A}(C; \varepsilon)(z^1, \dots, z^m)(\xi) \in O(0, C; \varepsilon)$.

Положим

$$\varepsilon_0 := \gamma_0 (C_\Phi \beta)^{-1}, \quad (47)$$

где γ_0 — любое число из интервала $(0, 1)$, а если $\beta = 0$, т.е. если $a_i(x) = \text{const}$ на $[0, X]$, то $\varepsilon_0 := +\infty$; $C = C_0 := C_\Phi \gamma / (1 - \gamma_0)$. Тогда неравенства (46) выполняются при всяком $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Утверждение доказано.

Пусть для каждого фиксированного положительного ε и любых $\varphi_1(\xi) = (z_1^1(\xi), \dots, z_1^m(\xi))$ и $\varphi_2(\xi) = (z_2^1(\xi), \dots, z_2^m(\xi))$ из $C_m[0, X/\varepsilon]$ определено расстояние ρ_ε между φ_1 и φ_2 :

$$\rho_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) := \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{C_m[0, X/\varepsilon]} := \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max_{1 \leq i \leq m} |z_2^i(\xi) - z_1^i(\xi)|, \quad (48)$$

где $X(\varepsilon) := [0, X/\varepsilon]$. Заметим, что $C_m[0, X/\varepsilon]$ и $O(0, C; \varepsilon)$ с так определенным расстоянием ρ_ε представляют собой полные метрические пространства.

Утверждение 2. Оператор $\hat{A}(\varepsilon)$ является сжимающим при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доказательство. Пусть ρ_ε — метрика (48) пространства $C_m[0, X/\varepsilon]$. Выберем две произвольные функции $\varphi_1(\xi) = (z_1^1(\xi), \dots, z_1^m(\xi))$ и $\varphi_2(\xi) = (z_2^1(\xi), \dots, z_2^m(\xi))$ из этого пространства и, учитывая (20) и (42), оценим расстояние между $\hat{A}(\varepsilon)[\varphi_1]$ и $\hat{A}(\varepsilon)[\varphi_2]$:

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(\hat{A}(\varepsilon)[\varphi_1], \hat{A}(\varepsilon)[\varphi_2]) &= \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max_{1 \leq i \leq m} |\hat{A}_i(\varepsilon)[\varphi_2](\xi) - \hat{A}_i(\varepsilon)[\varphi_1](\xi)| = \\ &= \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max_{1 \leq i \leq m} \left| \int_0^\xi \Phi_{\xi-i-1}(\xi - \zeta; \varepsilon \xi) \{ [a_{m-1}(\varepsilon \zeta) - a_{m-1}(\varepsilon \xi)] [z_2^m(\zeta) - z_1^m(\zeta)] + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + [a_0(\varepsilon \zeta) - a_0(\varepsilon \xi)] [z_2^1(\zeta) - z_1^1(\zeta)] \} d\zeta \right| \leq \rho_\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) C_\Phi \times \\ &\times \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \int_0^\xi e^{\varkappa(\zeta-\xi)} [1 + (\xi - \zeta)^{m-1}] [|a_{m-1}(\varepsilon \zeta) - a_{m-1}(\varepsilon \xi)| + \dots + |a_0(\varepsilon \zeta) - a_0(\varepsilon \xi)|] d\zeta. \end{aligned} \quad (49)$$

Из (49), (44) и (47) вытекает, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для коэффициента сжатия $k(\varepsilon)$ оператора $\hat{A}(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$k(\varepsilon) \leq \varepsilon C_\Phi \beta = \gamma_0 \varepsilon / \varepsilon_0 \leq \gamma_0 < 1. \quad (50)$$

Утверждение доказано.

Заметим, что поскольку коэффициент сжатия $k(C_0; \varepsilon)$ оператора $\hat{A}(C_0; \varepsilon)$ заведомо не превосходит $k(\varepsilon)$, то оценка (50) справедлива и для него:

$$k(C_0; \varepsilon) \leq \gamma_0 \varepsilon / \varepsilon_0 \leq \gamma_0 < 1. \quad (51)$$

Таким образом, к оператору $\hat{A}(C_0; \varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение $(z(\xi; \varepsilon), \dots, \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} z(\xi; \varepsilon)) =: \varphi(\xi; \varepsilon)$ уравнения (21) (напомним, что $z(\xi; \varepsilon)$ есть также решение задачи (12), (13)) принадлежит $O(0, C_0; \varepsilon)$. Подчеркнем, что существование и глобальная (т.е. на множестве $[0, X/\varepsilon] \times \mathbb{R}^m$) единственность решения $\varphi(\xi; \varepsilon)$ (при всех $\varepsilon \in \mathbb{R}$) вытекают непосредственно из линейности уравнения (21) (равно как и из линейности задачи (12), (13)).

Свойство сжимаемости оператора $\hat{A}(C_0; \varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность $\varphi_n(\xi; \varepsilon) = (z_n^1(\xi; \varepsilon), \dots, z_n^m(\xi; \varepsilon))$, сходящуюся по норме пространства $C_m[0, X/\varepsilon]$ к точному решению $\varphi(\xi; \varepsilon)$ уравнения (21) равномерно по всем $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{C_m[0, X/\varepsilon]} := \max_{\xi \in X(\varepsilon)} \max_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{d^{i-1}}{d\xi^{i-1}} z(\xi; \varepsilon) - z_n^i(\xi; \varepsilon) \right| \Rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим $\varphi_0(\xi; \varepsilon) \equiv (0, \dots, 0)$. Поскольку $\varphi(\xi; \varepsilon) \in O(0, C_0; \varepsilon)$, то

$$\|\varphi(\xi; \varepsilon) - \varphi_0(\xi; \varepsilon)\|_{C_m[0, X/\varepsilon]} = \|\varphi(\xi; \varepsilon)\|_{C_m[0, X/\varepsilon]} \leq C_0 \quad (52)$$

при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Далее, для любого натурального n положим

$$\varphi_n(\xi; \varepsilon) := \hat{A}(C_0; \varepsilon)[\varphi_{n-1}](\xi; \varepsilon). \quad (53)$$

Тогда, учитывая (51) и (52), для каждого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N} =: \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеем

$$\|\varphi(\xi; \varepsilon) - \varphi_n(\xi; \varepsilon)\|_{C_m[0, X/\varepsilon]} \leq k(C_0; \varepsilon)^n \|\varphi(\xi; \varepsilon) - \varphi_0(\xi; \varepsilon)\|_{C_m[0, X/\varepsilon]} \leq C_0 (\gamma_0 \varepsilon / \varepsilon_0)^n. \quad (54)$$

Вернемся к задаче (1), (2). Учитывая (11), приходим к итерационным последовательностям $y_n^1(x; \varepsilon), \dots, y_n^m(x; \varepsilon)$ соответственно для решения $y(x; \varepsilon)$ исходной задачи и его производных $\frac{d}{dx} y(x; \varepsilon), \dots, \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} y(x; \varepsilon)$:

$$y_n^i(x; \varepsilon) := \varepsilon^{1-i} \tilde{y}^{(i-1)}(x/\varepsilon) + \varepsilon^{2-i} z_n^i(x/\varepsilon; \varepsilon), \quad (i, n) \in \overline{1, m} \times \mathbb{N}_0. \quad (55)$$

При $n \geq 1$ величины $y_n^i(x; \varepsilon)$ могут быть выражены непосредственно через $y_{n-1}^i(x; \varepsilon)$:

$$y_n^i(x; \varepsilon) = \varepsilon^{1-i} \tilde{y}^{(i-1)}(x/\varepsilon) + \varepsilon^{2-i} \hat{A}_i(C_0; \varepsilon)(z_{n-1}^1, \dots, z_{n-1}^m)(x/\varepsilon; \varepsilon) =: \hat{B}_i(\varepsilon)(y_{n-1}^1, \dots, y_{n-1}^m)(x; \varepsilon),$$

где

$$z_{n-1}^i(\xi; \varepsilon) = \varepsilon^{i-2} y_{n-1}^i(\varepsilon \xi; \varepsilon) - \varepsilon^{-1} \tilde{y}^{(i-1)}(\xi)$$

(см. (55) и (53)), или

$$\psi_n(x; \varepsilon) := \hat{B}(\varepsilon)[\psi_{n-1}](x; \varepsilon),$$

где $\psi_n(x; \varepsilon) := (y_n^1(x; \varepsilon), \dots, y_n^m(x; \varepsilon))$, $\hat{B}(\varepsilon) := (\hat{B}_1(\varepsilon), \dots, \hat{B}_m(\varepsilon))$. Отметим, что оператор $\hat{B}(\varepsilon)$ будет сжимающим при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (т.е. при тех же ε , что и $\hat{A}(C_0; \varepsilon)$) и при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оператор $\hat{B}(\varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$\hat{B}(\varepsilon) : O(\tilde{\psi}, C_0; \varepsilon) \rightarrow O(\tilde{\psi}, C_0; \varepsilon),$$

где

$$O(\tilde{\psi}, C_0; \varepsilon) := \{ (y^1, \dots, y^m) \in C_m[0, X] \mid \forall x \in [0, X] \ y^1(x) \in [\tilde{y}(x/\varepsilon) - \varepsilon C_0, \tilde{y}(x/\varepsilon) + \varepsilon C_0],$$

$$y^2(x) \in [\varepsilon^{-1} \tilde{y}'(x/\varepsilon) - C_0, \varepsilon^{-1} \tilde{y}'(x/\varepsilon) + C_0], \dots$$

$$\dots, y^m(x) \in [\varepsilon^{1-m} \tilde{y}^{(m-1)}(x/\varepsilon) - \varepsilon^{2-m} C_0, \varepsilon^{1-m} \tilde{y}^{(m-1)}(x/\varepsilon) + \varepsilon^{2-m} C_0] \}$$

— замкнутая $(\varepsilon C_0, C_0, \dots, \varepsilon^{2-m} C_0)$ -окрестность вектор-функции

$$\tilde{\psi}(x/\varepsilon; \varepsilon) := (\tilde{y}(x/\varepsilon), \varepsilon^{-1} \tilde{y}'(x/\varepsilon), \dots, \varepsilon^{1-m} \tilde{y}^{(m-1)}(x/\varepsilon))$$

в пространстве $C_m[0, X]$.

Оценим точность, с которой $y_n^i(x; \varepsilon)$ приближают $\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} y(x; \varepsilon)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \overline{1, m}$, и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеем (см. (55), (11) и (54))

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} y(x; \varepsilon) - y_n^i(x; \varepsilon) \right\| &= \left\| \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} y(x; \varepsilon) - \varepsilon^{1-i} \tilde{y}^{(i-1)}(x/\varepsilon) - \varepsilon^{2-i} z_n^i(x/\varepsilon; \varepsilon) \right\| = \varepsilon^{2-i} \times \\ &\times \left\| \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} z(x/\varepsilon; \varepsilon) - z_n^i(x/\varepsilon; \varepsilon) \right\| \leq \varepsilon^{2-i} \left\| \varphi(x/\varepsilon; \varepsilon) - \varphi_n(x/\varepsilon; \varepsilon) \right\|_{C_m[0, X]} \leq C_0 \varepsilon^{2-i} (\gamma_0 \varepsilon / \varepsilon_0)^n. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1967.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Курс высшей математики и математической физики. М.: Наука. Физматлит, 1998.
3. Копачевский Н.Д., Смолич В.П. Введение в асимптотические методы: Специальный курс лекций. Симферополь: Таврич. нац. ун-т, 2009.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1973.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики. М.: Высшая школа, 1990.
6. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа: Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика. М.: ИЦ "Академия", 2007.
7. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. II. Дальнейшее построение теории. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1968.

Поступила в редакцию
01.02.2017

УДК 517.5

ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКАХ L_q ЧЕРЕЗ СМЕШАННЫЕ МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКЕ L_1

М. К. Потапов¹, Б. В. Симонов²

В работе выясняется взаимосвязь между смешанными модулями гладкости дробных порядков, рассматриваемыми в метриках L_1 и L_q .

Ключевые слова: неравенство, метрика, смешанный модуль гладкости дробного порядка.

Interrelations between mixed fractional moduli of smoothness considered in metrics of L_1 and L_q are studied in the paper.

Key words: inequality, metrics, mixed fractional moduli of smoothness.

Оценки модулей гладкости в одной метрике через модули гладкости в другой метрике используются при изучении теорем вложения разных классов функций и в ряде других вопросов. После введения С. М. Никольским [1] и Н. С. Бахваловым [2] классов функций с доминирующей смешанной гладкостью актуальными стали такие оценки для смешанных модулей гладкости. В настоящей работе приведены некоторые из таких оценок.

1. Основные результаты. Введем следующие обозначения:

¹Потапов Михаил Константинович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mkpotapov@mail.ru.

²Симонов Борис Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доцент Волгоград. гос. техн. ун-та, e-mail: simonov-b2002@yandex.ru.

$L_p, 1 \leq p \leq \infty$, — множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждому переменному, таких, что $\|f\|_p < \infty$, где $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}$, если $1 \leq p < \infty$; $\|f\|_p = \sup_{\substack{0 \leq x_1 \leq 2\pi \\ 0 \leq x_2 \leq 2\pi}} |f(x_1, x_2)|$, если $p = \infty$;

L_p^0 — множество функций $f \in L_p$, таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для п.в. x_2 и $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для п.в. x_1 ;

$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)$ — разность с шагом h_1 положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f \in L_p$, т.е. $\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2)$, где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geq 2$;

$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)$ — разность с шагом h_2 положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f \in L_p$, т.е. $\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2)$;

$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ — смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 функции $f \in L_p$, т.е.

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup_{|h_i| \leq \delta_i, i=1,2} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_p;$$

$[a]$ — целая часть числа a .

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f, δ_1 и δ_2 , такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leq CG(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \ll F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать $F(f, \delta_1, \delta_2) \asymp G(f, \delta_1, \delta_2)$.

В работе [3] доказаны следующие теоремы 1–3.

Теорема 1. Пусть $f \in L_p^0, 1 = p < q = \infty, \alpha_i > 0, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\infty} \ll \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} (t_1 t_2)^{-1} \omega_{\alpha_1+1, \alpha_2+1}(f, t_1, t_2)_1 \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2}. \quad (1)$$

Теорема 1 точна в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_1^0$, такая, что для нее в соотношении (1) вместо знака $\ll$ можно поставить знак $\asymp$.

Теорема 2. Пусть $f \in L_p^0, 1 = p < q < \infty, \alpha_i > \gamma_i > 0, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

Теорема 2 точна в том смысле, что если заменить в соотношении (2) хотя бы одно γ_i на α_i , то полученное соотношение будет неверным.

Теорема 3. Пусть $f \in L_p^0, 1 = p < q < \infty, \alpha_i > 0, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \alpha_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_1} \ln \frac{2}{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3 точна в следующем смысле:

1) для любых функций $\xi_i(t_i)$, положительных, слабо колеблющихся на $(0, 1)$ и таких, что $\xi_i(t_i) = \bar{o}\left(\ln \frac{2}{t_i}\right)$ ($i = 1, 2$), существует функция $F_1(x_1, x_2) \in L_p^0$, такая, что

$$A_1(F_1, \delta_1, \delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_1, \delta_1, \delta_2)_q}{\left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \alpha_2+1-\frac{1}{q}}(F_1, t_1, t_2)_1]^q \xi_1(t_1) \xi_2(t_2) \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty$$

при $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\delta_2 \rightarrow 0$;

2) для любых $\varepsilon_i > 0, i = 1, 2$, существует функция $F_2(x_1, x_2) \in L_p^0$, такая, что

$$A_2(F_2, \delta_1, \delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_2, \delta_1, \delta_2)_q}{\left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}+\varepsilon_1, \alpha_2+\frac{1}{p}+\varepsilon_2}(F_2, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_1} \ln \frac{2}{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty$$

при $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\delta_2 \rightarrow 0$.

В настоящей работе доказываются теоремы 4 и 5, дополняющие теоремы 2 и 3.

Теорема 4. Пусть $f \in L_p^0$, $1 = p < q < \infty, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > \gamma_2 > 0, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_1} \ln \frac{2}{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv G. \quad (3)$$

Теорема 4 точна в следующем смысле:

1) для любой функции $\xi_1(t_1)$, положительной, слабо колеблющейся на $(0, 1)$ и такой, что $\xi_1(t_1) = \bar{o}\left(\ln \frac{2}{t_1}\right)$, существует функция $F_3(x_1, x_2) \in L_p^0$, такая, что

$$A_1(F_3, \delta_1, \delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_3, \delta_1, \delta_2)_q}{\left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(F_3, t_1, t_2)_1 \right)^q \xi_1(t_1) \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1 \rightarrow 0$;

2) для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует функция $F_4(x_1, x_2) \in L_p^0$, такая, что

$$A_2(F_4, \delta_1, \delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_4, \delta_1, \delta_2)_q}{\left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}+\varepsilon_1, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(F_4, t_1, t_2)_1 \right)^q \ln \frac{2}{t_1} \ln \frac{2}{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1 \rightarrow 0$;

3) если в соотношении (3) заменить γ_2 на α_2 , то полученное соотношение будет неверным.

Теорема 5. Пусть $f \in L_p^0$, $1 = p < q < \infty, \alpha_1 > \gamma_1 > 0, \alpha_2 > 0, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}, \alpha_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right)^q \ln \frac{2}{t_2} \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4)$$

Теорема 5 точна в следующем смысле:

1) для любой функции $\xi_2(t_2)$, положительной, слабо колеблющейся на $(0, 1)$ и такой, что $\xi_2(t_2) = \bar{o}\left(\ln \frac{2}{t_2}\right)$, существует функция $F_6(x_1, x_2) \in L_p^0$, такая, что

$$A_1(F_6, \delta_1, \delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_6, \delta_1, \delta_2)_q}{\left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}, \alpha_2+1-\frac{1}{q}}(F_6, t_1, t_2)_1 \right)^q \xi_2(t_2) \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2 \rightarrow 0$;

2) для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует функция $F_7(x_1, x_2) \in L_p^0$, такая, что

$$A_1(F_7, \delta_1, \delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_7, \delta_1, \delta_2)_q}{\left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left((t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}, \alpha_2+1-\frac{1}{q}+\varepsilon_2}(F_7, t_1, t_2)_1 \right)^q \ln \frac{2}{t_2} \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2 \rightarrow 0$;

3) если в соотношении (4) заменить γ_1 на α_1 , то полученное соотношение будет неверным.

2. Вспомогательные результаты. Введем следующие обозначения:

$V_{n_1\infty}(f), V_{\infty n_2}(f), V_{n_1 n_2}(f), n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} (i = 1, 2)$, — суммы Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f \in L_p$, т.е.

$$V_{n_1\infty}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1 + t_1, x_2) V_{n_1}^{2n_1}(t_1) dt_1, \quad V_{\infty n_2}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2 + t_2) V_{n_2}^{2n_2}(t_2) dt_2,$$

$$V_{n_1 n_2}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1 + t_1, x_2 + t_2) V_{n_1}^{2n_1}(t_1) V_{n_2}^{2n_2}(t_2) dt_1 dt_2,$$

где $V_0^0(t) = D_0(t)$, $V_n^{2n}(t) = \frac{1}{n}(D_n(t) + \dots + D_{2n-1}(t))$, $n \in \mathbb{N}$, $D_k(t) = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$Y_{m_1, m_2}(f)_p$ — наилучшее приближение углом функции $f \in L_p$, т.е.

$$Y_{m_1, m_2}(f)_p = \inf_{T_{m_1, \infty}, T_{\infty, m_2}} \|f - T_{\infty, m_2} - T_{m_1, \infty}\|_p,$$

где $T_{m_1, \infty}(x_1, x_2)$ — функция, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше m_1 ($m_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) по переменной x_1 и такая, что $T_{m_1, \infty} \in L_p$;

$T_{\infty, m_2}(x_1, x_2)$ — функция, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше m_2 ($m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) по переменной x_2 и такая, что $T_{\infty, m_2} \in L_p$;

$f_{(\rho_1, \rho_2)}(x_1, x_2)$ — интеграл в смысле Вейля функции $f(x_1, x_2) \in L_p^0$ порядка $\rho_1 \geq 0$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2 \geq 0$ по переменной x_2 (см. [4, с. 238]);

$f^{(\rho_1, \rho_2)}(x_1, x_2)$ — производная в смысле Вейля функции $f(x_1, x_2) \in L_p^0$ порядка $\rho_1 \geq 0$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2 \geq 0$ по переменной x_2 (см. [4, с. 238]).

Лемма 1 [5, с. 15, теорема 5.1; 6, теорема 4.1; 3, с. 133, теорема 6.4.1]. Пусть $f \in L_q^0, 1 \leq q \leq \infty, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} I \equiv \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}} \right)_q &\asymp \|f - V_{2^{n_1}, \infty}(f) - V_{\infty, 2^{n_2}}(f) + V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}(f)\|_q + \\ &+ \frac{1}{2^{n_1 \alpha_1}} \|V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - V_{\infty, 2^{n_2}}(f))\|_q + \frac{1}{2^{n_2 \alpha_2}} \|V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f - V_{2^{n_1}, \infty}(f))\|_q + \\ &+ \frac{1}{2^{(n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2)}} \|V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_q \equiv I_1 + 2^{-n_1 \alpha_1} I_2 + 2^{-n_2 \alpha_2} I_3 + 2^{-n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2} I_4. \end{aligned}$$

Лемма 2 [7; 3, с. 121, лемма 6.1.1, с. 122, лемма 6.1.2]. Пусть $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$. Тогда

(а) $\|f - V_{m_1, \infty}(f) - V_{\infty, m_2}(f) + V_{m_1, m_2}(f)\|_p \ll Y_{m_1, m_2}(f)_p$;

(б) $\|V_{m_1, \infty}(f)\|_p \ll \|f\|_p$; (в) $\|V_{\infty, m_2}(f)\|_p \ll \|f\|_p$.

Лемма 3 [7, 8]. Пусть $f \in L_p^0, 1 \leq p < q \leq \infty, q^* = q$, если $q < \infty$; $q^* = 1$, если $q = \infty, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$. Тогда

$$Y_{2^{n_1-1}, 2^{n_2-1}}(f)_q \ll \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{(\nu_1+\nu_2)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} q^* Y_{2^{\nu_1-1}, 2^{\nu_2-1}}(f)_p \right)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Лемма 4 [5; 6, теорема 6.1; 3, с. 136, теорема 6.6.1]. Пусть $f \in L_p^0, g \in L_p^0, 1 \leq p \leq \infty, \alpha_i > 0, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$. Тогда

(а) $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, 0)_p = \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, 0, \delta_2)_p = \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, 0, 0)_p = 0$;

(б) $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f + g, \delta_1, \delta_2)_p \ll \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p + \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(g, \delta_1, \delta_2)_p$;

(в) $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p \ll \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, t_1, t_2)_p$, если $0 \leq \delta_i \leq t_i \leq 1, i = 1, 2$;

(г) $\frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p}{\delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}} \ll \frac{\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, t_1, t_2)_p}{t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2}}$, если $0 < t_i \leq \delta_i \leq 1, i = 1, 2$;

(д) $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2)_p \ll (\lambda_1 + 1)^{\alpha_1} (\lambda_2 + 1)^{\alpha_2} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$, если $\lambda_i > 0, i = 1, 2$;

(е) $Y_{m_1, m_2} \ll \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f, \frac{1}{m_1+1}, \frac{1}{m_2+1} \right)_p$.

3. Вспомогательные результаты для функции одного переменного. Введем следующие обозначения:

$L_p^{(1)}$, $1 \leq p \leq \infty$, — множество 2π -периодических измеримых функций одной переменной $f(x)$, для которых $\|f\|_p^{(1)} < \infty$, где $\|f\|_p^{(1)} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, если $1 \leq p < \infty$; $\|f\|_p^{(1)} = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$, если $p = \infty$;

$V_n^{(1)}(f)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — суммы Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f \in L_p^{(1)}$, т.е.

$$V_n^{(1)}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) V_n^{2n}(t) dt;$$

$E_n(f)_p^{(1)}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_p^{(1)}$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка не выше n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) в метрике $L_p^{(1)}$, т.е.

$$E_n(f)_p^{(1)} = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_p^{(1)};$$

$\omega_\alpha(f, \delta)_p^{(1)}$ — модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_p^{(1)}$, т.е. $\omega_\alpha(f, \delta)_p^{(1)} = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^\alpha(f)\|_p^{(1)}$, где $\Delta_h^\alpha(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h)$;

$f^{(\rho)}(x)$ — интеграл в смысле Вейля порядка $\rho \geq 0$ функции $f(x) \in L_p^0$ (см. [9, т. 2, с. 201]);

$f^{(\rho)}(x)$ — производная в смысле Вейля порядка $\rho \geq 0$ функции $f(x) \in L_p^0$ (см. [9, т. 2, с. 201]).

Лемма 5 [9, с. 657]. Пусть $T_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx$ (или $T_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx$) — тригонометрический полином порядка не выше n ($n \in \mathbb{N}$), $1 < p < \infty$, $a_{k+1} \leq a_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|T_n\|_p^{(1)} \ll \left(\sum_{k=1}^n a_k^p k^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Лемма 6. Пусть $T_n(x) = \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$, $1 = p < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|T_n\|_q^{(1)} \ll \ln^{\frac{1}{q}}(n+1) \|T_n^{(1-\frac{1}{q})}(f)\|_1^{(1)}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$T_n(x) = \left(T_n^{(1-\frac{1}{q})} \right)_{(1-\frac{1}{q})}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n^{(1-\frac{1}{q})}(t) k_n(x-t) dt,$$

где $k_n(t) = 2 \cos \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{q}) \sum_{m=1}^n \frac{\cos mt}{m^{1-\frac{1}{q}}} + 2 \sin \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{q}) \sum_{m=1}^n \frac{\sin mt}{m^{1-\frac{1}{q}}}$ (см. [10, т. II, с. 201]).

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим $\|T_n\|_q^{(1)} \leq \|T_n^{(1-\frac{1}{q})}\|_1 \cdot \|k_n\|_q^{(1)}$. Так как

$$\|k_n\|_q^{(1)} \ll \left\| \sum_{m=1}^n \frac{\cos mt}{m^{1-\frac{1}{q}}} \right\|_q^{(1)} + \left\| \sum_{m=1}^n \frac{\sin mt}{m^{1-\frac{1}{q}}} \right\|_q^{(1)},$$

то, применяя лемму 5, имеем

$$\|k_n\|_q^{(1)} \ll \left(\sum_{\mu=1}^n \left(\mu^{-(1-\frac{1}{q})} \right)^q \mu^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{\mu=1}^n \mu^{-1} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \ln^{\frac{1}{q}}(n+1).$$

Следовательно, $\|T_n\|_q^{(1)} \ll \ln^{\frac{1}{q}}(n+1) \|T_n^{(1-\frac{1}{q})}(f)\|_1^{(1)}$.

Лемма 7 [3, с. 30, лемма 2.3.1]. Пусть $f \in L_p^{(1)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$(a) \|V_n^{(1)}(f)\|_p^{(1)} \ll \|f\|_p^{(1)}, \quad (б) \|f - V_n^{(1)}(f)\|_p^{(1)} \ll E_n(f)_p^{(1)}.$$

Лемма 8 [11, с. 121, теорема 4, формула (4.2)]. Пусть $f \in L_p^{(1)}$, $1 \leq p < q < \infty$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$E_{2^n-1}(f)_q^{(1)} \ll \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu q(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} E_{2^\nu-1}^q(f)_p^{(1)} \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма 9 [12]. Пусть $T_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — тригонометрический полином порядка не выше n ($n \in \mathbb{N}$), $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$. Тогда справедливы неравенства

$$(a) \|\Delta_h^\alpha T_n\|_p^{(1)} \ll n^{-\alpha} \|T_n^{(\alpha)}\|_p^{(1)} \text{ для любого } h: 0 < |h| \leq \frac{\pi}{n};$$

$$(б) \|T_n^{(\alpha)}\|_p^{(1)} \ll n^\alpha \|\Delta_{\frac{\pi}{n}}^\alpha T_n\|_p^{(1)}; \quad (в) \|T_n^{(\alpha)}\|_p^{(1)} \ll n^\alpha \|T_n\|_p^{(1)}.$$

Лемма 10 [13, с. 115, 116; 3, с. 31, лемма 2.3.2]. Пусть $f \in L_p^{(1)}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$\|V_{2^{n+1}}^{(1)}(f) - V_{2^n}^{(1)}(f)\|_p^{(1)} \ll 2^{-n\alpha} \|(V_{2^{n+1}}^{(1)}(f))^{(\alpha)} - (V_{2^n}^{(1)}(f))^{(\alpha)}\|_p^{(1)}.$$

Лемма 11 [9, с. 653]. Пусть последовательность чисел $\{c_n\}$ такова, что $c_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует последовательность чисел $\{a_n\}$, такая, что $a_n \geq c_n$, $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$ для $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 12 [3, п. (а), с. 105, п. (б), с. 106, п. (в), с. 106, п. (г), с. 101, п. (д) с. 107, 108]. Пусть $1 < q < \infty$, $\delta \in (0, 1)$.

(а) Пусть $\alpha_1 > 0$, $\xi_1(x)$ — положительная функция, слабо колеблющаяся на $(0, 1)$ и такая, что $\xi_1(x) = \bar{o}\left(\ln \frac{2}{x}\right)$ при $x \rightarrow 0$. Пусть функция $f_1(x)$ такова, что $f_1^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q})}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, где последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условиям леммы 11 для $c_k = \left(\frac{\xi_1(\frac{1}{k})}{\ln(k+1)}\right)^{\frac{1}{2q}}$. Тогда

$$A_1(f_1, \delta) = \frac{\omega_{\alpha_1}(f_1, \delta)_q^{(1)}}{\left(\int_0^\delta (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}}(f_1, t)_1^{(1)})^q \xi_1(t) \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}} \gg \left(\frac{\ln \frac{2}{\delta}}{\xi_1(\delta)}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

(б) Пусть $f_2(x) = \sin x$. Тогда при $\alpha_2 > \gamma_2 > 0$

$$A_2(f_2, \delta) = \frac{\omega_{\alpha_1}(f_2, \delta)_q^{(1)}}{\left(\int_0^\delta (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f_2, t)_1^{(1)})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}} \asymp \delta^{\alpha_2-\gamma_2};$$

при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$

$$\omega_{\alpha_1}(f_2, \delta)_q^{(1)} \asymp \delta^{\alpha_1}, \quad \left(\int_0^\delta (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_2+1-\frac{1}{q}}(f_2, t)_1^{(1)})^q \ln \frac{2}{t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{\alpha_2} \left(\ln \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$D_2(f_2, \delta) = \left(\int_0^\delta (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f_2, t)_1^{(1)})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{\gamma_2},$$

$$D_1(f_2, \delta) = \left(\int_0^\delta (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}}(f_2, t)_1^{(1)})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{\gamma_1},$$

$$R_1(f_2, \delta) = \left(\int_0^\delta (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}}(f_2, t)_1^{(1)})^q \ln \frac{2}{t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{\alpha_1} \left(\ln \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(в) Пусть $\varepsilon > 0, \alpha_3 > 0$, функция $f_3(x)$ такова, что $f_3^{(\alpha_3+1-\frac{1}{q}+\varepsilon)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, где последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условиям леммы 11 для $c_k = \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)^{\frac{1}{q}}$. Тогда

$$A_3(f_3, \delta) = \frac{\omega_{\alpha_3}(f_3, \delta)_q^{(1)}}{\left(\int_0^{\delta} (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_3+1-\frac{1}{q}+\varepsilon}(f_3, t)_1^{(1)})^q \ln \frac{2}{t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}} \gg \frac{1}{\delta^{\varepsilon} (\ln \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{q}}}.$$

(г) Пусть $\alpha > 0$, функция $f_4(x)$ такова, что $f_4^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, где последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условиям леммы 11 для $c_k = \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)^{\frac{1}{q}}$. Тогда

$$\omega_{\alpha}(f_4, \delta)_q^{(1)} \gg \delta^{\alpha} \left(\ln \ln \frac{3}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\int_0^{\delta} (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_4, t)_1^{(1)})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \delta^{\alpha}.$$

(д) Пусть $\alpha_1 > \gamma_1 > \frac{\alpha_1}{2} > 0$, функция $f_5(x)$ такова, что $E_n(f_5)_1^{(1)} \asymp (n+1)^{-\frac{\alpha_1}{2}+1-\frac{1}{q}}$. Тогда

$$D_1(f_5, \delta) = \left(\int_0^{\delta} (t_1^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}}(f_5, t)_1^{(1)})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{\frac{\alpha_1}{2}},$$

$$R_1(f_5, \delta) = \left(\int_0^{\delta} (t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}}(f_5, t)_1^{(1)})^q \ln \frac{2}{t} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^{\frac{\alpha_1}{2}} \left(\ln \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма 13 [14]. (а) Пусть $a_k \geq 0, b_k \geq 0, \sum_{k=1}^n a_k = \gamma_n a_n$. Тогда если $1 \leq p < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} b_n\right)^p \ll \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \gamma_k)^p.$$

(б) Пусть $a_k \geq 0, b_k \geq 0, \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \beta_n a_n$. Тогда если $1 \leq p < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^k b_n\right)^p \ll \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \beta_k)^p.$$

4. Доказательство теоремы 4. Для каждого $\delta_i \in (0, 1)$ существует натуральное число n_i , такое, что $\frac{1}{2^{n_i}} \leq \delta_i < \frac{1}{2^{n_i-1}}, i = 1, 2$. Тогда на основании свойства (в) леммы 4 имеем $J = \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \omega_{\alpha_1, \alpha_2}\left(f, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}\right)_q$.

Применяя лемму 1, получаем $J \ll 2^{-n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2} \|V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_q + 2^{-n_1 \alpha_1} \|V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - V_{\infty, 2^{n_2}}(f))\|_q + 2^{-n_2 \alpha_2} \|V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f - V_{2^{n_1}, \infty}(f))\|_q + \|f - V_{2^{n_1}, \infty}(f) - V_{\infty, 2^{n_2}}(f) + V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}(f)\|_q \equiv J_1 + J_2 + J_3 + J_4$.

Сначала оценим J_1 . Обозначим $V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f) = \psi$, тогда $V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f) = V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(\psi)$.

Рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2)$ для почти всех x_2 как функцию только x_1 и обозначим ее $\psi_1(x_1)$. Применяя лемму 6, находим

$$\|V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1)}(\psi_1(x_1))\|_q^{(1)} \ll (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \|V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q})}(\psi_1(x_1))\|_1^{(1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \|V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_q = \|V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(\psi)\|_q = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(\psi)|^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\|V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1)}(\psi_1(x_1))\|_q^{(1)} \right)^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\int_0^{2\pi} \left((n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \|V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q})}(\psi_1(x_1))\|_1^{(1)} \right)^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \left((n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, 0)}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f))| dx_1 \right)^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

В силу неравенства Минковского имеем

$$A_1 \ll (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, 0)}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f))|^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} dx_2. \quad (5)$$

Так как $V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, 0)}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f)) = V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, 0)}(f))$, то, обозначив $V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, 0)}(f) = \eta$, рассмотрим функцию $\eta(x_1, x_2)$ для почти всех x_1 как функцию только x_2 и обозначим ее $\eta_2(x_2)$. Оценим $\|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\eta_2(x_2))\|_q^{(1)}$.

Обозначим $\varphi(x_2) = V_{2^n}^{(\alpha_2)}(\eta_2(x_2))$. Так как $f \in L_p^0$, то $V_0^{(\alpha_2)}(\eta_2(x_2)) = 0 = V_0(\varphi)$. Поэтому, применяя лемму 7, имеем $I_1 = \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\eta_2(x_2))\|_q^{(1)} = \|\varphi - V_0(\varphi)\|_q^{(1)} \ll E_0(\varphi)_q^{(1)}$.

Используя лемму 8, получаем $I_1^q \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1-\frac{1}{q})q} E_{2^\nu-1}^q(\varphi)_1^{(1)}$. Так как φ — тригонометрический полином порядка не выше $2^{n_2+1} - 1$, то $E_{2^\nu-1}(\varphi)_1^{(1)} \equiv 0$ для $\nu \geq n_2 + 1$. Так как $V_{[2^\nu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $2^\nu - 1$, то для $0 \leq \nu \leq n_2$ имеем

$$E_{2^\nu-1}(\varphi)_1^{(1)} \ll \|\varphi - V_{[2^\nu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)\|_1^{(1)} = \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\eta_2) - V_{[2^\nu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)\|_1^{(1)}.$$

Поэтому $I_1^q \ll \sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{\nu(1-\frac{1}{q})q} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\eta_2) - V_{[2^\nu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)\|_1^{(1)} \right]^q$. Так как

$$V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\eta_2) - V_{[2^\nu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2) = \sum_{\mu=\nu}^{n_2} (V_{2^\mu}^{(\alpha_2)}(\eta_2) - V_{[2^\mu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)),$$

то, применяя свойства нормы, заключаем, что

$$I_2 \equiv \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\eta_2) - V_{[2^\nu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)\|_1^{(1)} \ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2} \|V_{2^\mu}^{(\alpha_2)}(\eta_2) - V_{[2^\mu-1]}^{(\alpha_2)}(\eta_2)\|_1^{(1)}.$$

Используя лемму 9 (в), а затем лемму 10, получаем

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2} 2^{\mu\alpha_2} \|V_{2^\mu}(\eta_2) - V_{[2^\mu-1]}(\eta_2)\|_1^{(1)} \ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2} 2^{\mu(\alpha_2 - \gamma_2 - 1 + \frac{1}{q})} \|V_{2^\mu}^{(\gamma_2 + 1 - \frac{1}{q})}(\eta_2) - V_{[2^\mu-1]}^{(\gamma_2 + 1 - \frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)} \ll \\ &\ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2+1} 2^{\mu(\alpha_2 - \gamma_2 - 1 + \frac{1}{q})} \|V_{[2^\mu-1]}^{(\gamma_2 + 1 - \frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Но тогда

$$I_1 \ll \left(\sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{\nu q(1-\frac{1}{q})} \left(\sum_{\mu=\nu}^{n_2+1} 2^{\mu(\alpha_2 - \gamma_2 - 1 + \frac{1}{q})} \|V_{[2^\mu-1]}^{(\gamma_2 + 1 - \frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя лемму 13 (полагая $a_\nu = 2^{\nu q(1-\frac{1}{q})}$, если $\nu = 0, 1, \dots, n_2$, и $a_\nu = 0$, если $\nu = n_2 + 1, \dots$, $b_\mu = 2^{\mu(\alpha_2 - \gamma_2 - 1 + \frac{1}{q})} \|V_{[2^{\mu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)}$, если $\mu = 0, 1, \dots, n_2 + 1$, и $b_\mu = 0$, если $\mu = n_2 + 2, \dots$), имеем

$$I_1 \ll \left(\sum_{\nu=0}^{n_2+1} 2^{\nu q(1-\frac{1}{q})} 2^{(\alpha_2 - \gamma_2 - (1-\frac{1}{q}))\nu q} \left[\|V_{[2^{\nu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{(\alpha_2 - \gamma_2)\nu q} \left[\|V_{[2^{\nu-1}]}(V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2))\|_1^{(1)} \right]^q + 2^{(\alpha_2 - \gamma_2)(n_2+1)} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя лемму 7, (а), получаем

$$I_1 \ll \left(\sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{(\alpha_2 - \gamma_2)\nu q} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)} \right]^q + 2^{(\alpha_2 - \gamma_2)n_2 q} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{n_2(\alpha_2 - \gamma_2)} \|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\eta_2(x_2))\|_1^{(1)}. \quad (6)$$

Таким образом,

$$J_1 = 2^{-n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2} \|V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_q = 2^{-n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В силу неравенства (5) имеем

$$J_1 \ll 2^{-n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2} (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, 0)}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f))|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 =$$

$$= (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} 2^{-n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, 0)}(f))|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1.$$

Применяя к внутреннему интегралу оценку (6), получаем

$$J_1 \ll (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} 2^{-n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2} \int_0^{2\pi} 2^{n_2(\alpha_2 - \gamma_2)} \int_0^{2\pi} |V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \gamma_2+1-\frac{1}{q})}(V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, 0)}(f))(x_2)| dx_2 dx_1 =$$

$$= (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} 2^{-n_1\alpha_1} 2^{-n_2\gamma_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q})}(f)| dx_1 dx_2 =$$

$$= (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} 2^{n_1(1-\frac{1}{q})} 2^{n_2(1-\frac{1}{q})} 2^{-n_1(\alpha_1+1-\frac{1}{q})} 2^{-n_2(\gamma_2+1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, 2^{n_2}}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q})}(f)| dx_1 dx_2.$$

Воспользовавшись леммой 1, имеем

$$J_1 \ll (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} 2^{n_1(1-\frac{1}{q})} 2^{n_2(1-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}} \left(f, \frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}} \right)_1.$$

Применяя лемму 4, (г), получаем

$$J_1 \ll (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} 2^{n_1(1-\frac{1}{q})} 2^{n_2(1-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}} \left(f, \frac{1}{2^{n_1+2}}, \frac{1}{2^{n_2+2}} \right)_1 \ll$$

$$\begin{aligned}
& \ll \left(\int_{\frac{1}{2^{n_1+2}}}^{\frac{1}{2^{n_1+1}}} \int_{\frac{1}{2^{n_2+2}}}^{\frac{1}{2^{n_2+1}}} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \left(\ln \frac{2}{t_1} \right)^{\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\
& \ll \left(\int_0^{\frac{1}{2^{n_1+1}}} \int_0^{\frac{1}{2^{n_2+1}}} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \left(\ln \frac{2}{t_1} \right)^{\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\
& \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv G.
\end{aligned}$$

Теперь оценим $J_2 = 2^{-n_1 \alpha_1} \|V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - V_{\infty, 2^{n_2}}(f))\|_q$. Обозначим $V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f) = \psi$. Рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2)$ для почти всех x_1 как функцию только x_2 и обозначим ее $\psi_2(x_2)$. Тогда, применяя лемму 7, (б), находим $A = \left(\int_0^{2\pi} |\psi_2(x_2) - V_{2^{n_2}}(\psi_2(x_2))|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} \ll E_{2^{n_2}}(\psi_2)_q^{(1)}$.

В силу леммы 8 имеем

$$A \ll \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} E_{2^{\nu_2-1}}(\psi_2)_1^{(1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \|\psi_2 - V_{2^{\nu_2-1}}(\psi_2)\|_1^{(1)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (7)$$

Тогда, применяя к внутреннему интегралу неравенство (7), получаем

$$\begin{aligned}
A_2 &= \|V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - V_{\infty, 2^{n_2}}(f))\|_q = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f) - V_{\infty, 2^{n_2}}(V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f))|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\
&\ll \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \left[\|\psi_2 - V_{2^{\nu_2-1}}(\psi_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \left[\|\psi_2 - V_{2^{\nu_2-1}}(\psi_2)\|_1^{(1)} \right]^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \left[\|\psi_2 - V_{2^{\nu_2-1}}(\psi_2)\|_1^{(1)} \right]^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f) - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f))|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f) - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f))|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ввиду неравенства Минковского имеем

$$A_2 \ll \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(f))|^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} dx_2 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (8)$$

Обозначим $f - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(f) = \xi$. Рассмотрим функцию $\xi(x_1, x_2)$ для почти всех x_2 как функцию только x_1 и обозначим ее $\xi_1(x_1)$. Используя лемму 6, получаем

$$\|V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1)}(\xi_1(x_1))\|_q^{(1)} \ll (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \|V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q})}(\xi_1)\|_1^{(1)} = (n_1 + 1)^{\frac{1}{q}} \int_0^{2\pi} |V_{2^{n_1}}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q})}(\xi_1)| dx_1. \quad (9)$$

Применим к внутреннему интегралу в неравенстве (8) неравенство (9), тогда будем иметь

$$A_2 \ll \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \left((n_1+1)^{\frac{1}{q}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, 0)}(f - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(f)) \right| dx_1 dx_2 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (10)$$

Таким образом, используя неравенство (10), заключаем, что

$$\begin{aligned} J_2 &\ll 2^{-n_1 \alpha_1} \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} \left((n_1+1)^{\frac{1}{q}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, 0)}(f - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(f)) \right| dx_1 dx_2 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= 2^{n_1(1-\frac{1}{q})} \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} (n_1+1) \left(2^{-n_1(\alpha_1+1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| V_{2^{n_1}, \infty}^{(\alpha_1+1-\frac{1}{q}, 0)}(f - V_{\infty, 2^{\nu_2-1}}(f)) \right| dx_1 dx_2 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 имеем

$$J_2 \ll 2^{n_1(1-\frac{1}{q})} \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q(1-\frac{1}{q})} (n_1+1) \left(\omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, 2^{-n_1}, 2^{-(\nu_2-1)})_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя лемму 4 (свойства (в) и (г)), получаем

$$\begin{aligned} J_2 &\ll \left(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{n_1+2}}}^{\frac{1}{2^{n_1+1}}} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2+2}}}^{\frac{1}{2^{\nu_2+1}}} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ &\ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv G. \end{aligned}$$

Теперь оценим $J_3 = 2^{-n_2 \alpha_2} \|V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f - V_{2^{n_1}, \infty}(f))\|_q$. Обозначим $V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f) = \psi$. Рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2)$ для почти всех x_2 как функцию только x_1 и обозначим ее $\psi_1(x_1)$. Тогда, применяя лемму 7, (б), имеем $B \equiv \left(\int_0^{2\pi} |\psi_1(x_1) - V_{2^{n_1}}(\psi_1(x_1))|^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} \ll E_{2^{n_1}}(\psi_1)_q^{(1)}$.

В силу леммы 8

$$B \ll \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} E_{2^{\nu_1-1}}(\psi_1)_1^{(1)q} \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \|\psi_1 - V_{2^{\nu_1-1}}(\psi_1)\|_1^{(1)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (11)$$

Тогда, применяя к внутреннему интегралу неравенство (11), имеем

$$\begin{aligned} B_1 &= \|V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f - V_{2^{n_1}, \infty}(f))\|_q = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f) - V_{2^{n_1}, \infty}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f))|^q dx_1 \right)^{\frac{1}{q}} dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ &\ll \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \|\psi_1 - V_{2^{\nu_1-1}}(\psi_1)\|_1^{(1)q} \right)^{\frac{1}{q}} dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \|\psi_1 - V_{2^{\nu_1-1}}(\psi_1)\|_1^{(1)q} dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \|\psi_1 - V_{2^{\nu_1-1}}(\psi_1)\|_1^{(1)q} dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f) - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f)) \right| dx_1 \right)^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f) - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f)) \right| dx_1 \right)^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Минковского, получаем

$$B_1 \leq \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f) - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \alpha_2)}(f)) \right|^q dx_2 \right)^{\frac{1}{q}} dx_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (12)$$

Обозначим $f - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(f) = \zeta$, рассмотрим функцию $\zeta(x_1, x_2)$ для почти всех x_1 как функцию только x_2 и обозначим ее $\zeta_2(x_2)$. Оценим $I_3 = \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2(x_2))\|_q^{(1)}$.

Обозначим $\varphi(x_2) = V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2(x_2))$. Так как $f \in L_p^0$, то $V_0^{(\alpha_2)}(\zeta_2(x_2)) = 0 = V_0(\varphi)$. Поэтому, применяя лемму 7, (б), имеем $I_3 = \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2(x_2))\|_q^{(1)} = \|\varphi - V_0(\varphi)\|_q^{(1)} \ll E_0(\varphi)_q^{(1)}$.

В соответствии с леммой 8 получаем $I_3^q \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1-\frac{1}{q})q} E_{2^{\nu-1}}^q(\varphi)_1^{(1)}$.

Так как φ — тригонометрический полином порядка не выше $2^{n_2+1} - 1$, то $E_{2^{\nu-1}}(\varphi)_1^{(1)} \equiv 0$ для $\nu \geq n_2 + 1$. Ввиду того что $V_{[2^{\nu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $2^{\nu} - 1$, для $0 \leq \nu \leq n_2$ имеем

$$E_{2^{\nu-1}}(\varphi)_1^{(1)} \ll \|\varphi - V_{[2^{\nu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\|_1^{(1)} = \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\nu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\|_1^{(1)}.$$

Поэтому $I_3^q \ll \sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{\nu(1-\frac{1}{q})q} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\nu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \right]^q$.

Так как $V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\nu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) = \sum_{\mu=\nu}^{n_2} (V_{2^{\mu}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\mu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2))$, то, используя свойства нормы, заключаем, что $I_4 \equiv \|V_{2^{n_2}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\nu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2} \|V_{2^{\mu}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\mu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\|_1^{(1)}$.

Применяя лемму 9, (в), а затем лемму 10, получаем

$$\begin{aligned}
I_4 &\ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2} 2^{\mu\alpha_2} \|V_{2^{\mu}}^{(\alpha_2)}(\zeta_2) - V_{[2^{\mu-1}]}^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2} 2^{\mu(\alpha_2-\gamma_2-1+\frac{1}{q})} \|V_{2^{\mu}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2) - V_{[2^{\mu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \ll \\
&\ll \sum_{\mu=\nu}^{n_2+1} 2^{\mu(\alpha_2-\gamma_2-1+\frac{1}{q})} \|V_{[2^{\mu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Но тогда $I_3 \ll \left(\sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{\nu q(1-\frac{1}{q})} \left(\sum_{\mu=\nu}^{n_2+1} 2^{\mu(\alpha_2-\gamma_2-1+\frac{1}{q})} \|V_{[2^{\mu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$.

Применяя лемму 13 (полагая $a_{\nu} = 2^{\nu q(1-\frac{1}{q})}$, если $\nu = 0, 1, \dots, n_2$, и $a_{\nu} = 0$, если $\nu = n_2 + 1, \dots$, $b_{\mu} = 2^{\mu(\alpha_2-\gamma_2-1+\frac{1}{q})} \|V_{[2^{\mu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)}$, если $\mu = 0, 1, \dots, n_2 + 1$, и $b_{\mu} = 0$, если $\mu = n_2 + 2, \dots$), имеем

$$\begin{aligned}
I_3 &\ll \left(\sum_{\nu=0}^{n_2+1} 2^{\nu q(1-\frac{1}{q})} 2^{(\alpha_2-\gamma_2-(1-\frac{1}{q}))\nu q} \left[\|V_{[2^{\nu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{(\alpha_2-\gamma_2)\nu q} \left[\|V_{[2^{\nu-1}]}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2))\|_1^{(1)} \right]^q + 2^{(\alpha_2-\gamma_2)(n_2+1)} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

В силу леммы 7, (а) имеем

$$I_3 \ll \left(\sum_{\nu=0}^{n_2} 2^{(\alpha_2-\gamma_2)\nu q} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \right]^q + 2^{(\alpha_2-\gamma_2)n_2 q} \left[\|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)\|_1^{(1)} \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ \ll 2^{n_2(\alpha_2-\gamma_2)} \|V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2(x_2))\|_1^{(1)}. \quad (13)$$

Тогда, применяя к внутреннему интегралу в неравенстве (12) неравенство (13), находим

$$B_1 \ll \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} 2^{n_2(\alpha_2-\gamma_2)} \int_0^{2\pi} |V_{2^{n_2}}^{(\gamma_2+1-\frac{1}{q})}(\zeta_2)(x_2)| dx_2 dx_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ = \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} 2^{n_2(\alpha_2-\gamma_2)} \int_0^{2\pi} |V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \gamma_2+1-\frac{1}{q})}(f - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(f))| dx_2 dx_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (14)$$

Таким образом, используя неравенство (14), заключаем, что

$$J_3 \ll 2^{-n_2 \alpha_2} \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} \left(\int_0^{2\pi} 2^{n_2(\alpha_2-\gamma_2)} \int_0^{2\pi} |V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \gamma_2+1-\frac{1}{q})}(f - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(f))| dx_2 dx_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ = \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} 2^{n_2 q(1-\frac{1}{q})} \left(2^{-n_2(\gamma_2+1-\frac{1}{q})} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |V_{\infty, 2^{n_2}}^{(0, \gamma_2+1-\frac{1}{q})}(f - V_{2^{\nu_1-1}, \infty}(f))| dx_2 dx_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Согласно лемме 1 будем иметь

$$J_3 \ll \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q(1-\frac{1}{q})} 2^{n_2 q(1-\frac{1}{q})} \left(\omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, 2^{-(\nu_1-1)}, 2^{-n_2})_1 \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя лемму 4 (свойства (в) и (г)), получаем

$$J_3 \ll \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{1}{2^{\nu_1+1}}} \int_{\frac{1}{2^{n_2+1}}}^{\frac{1}{2^{n_2+1}}} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv G.$$

Наконец, оценим J_4 . В силу лемм 2, (а) и 3 имеем

$$J_4 \ll Y_{2^{n_1}, 2^{n_2}}(f)_q \ll \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{(\nu_1+\nu_2)(1-\frac{1}{q})q} Y_{2^{\nu_1-1}, 2^{\nu_2-1}}^q(f)_1 \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя лемму 4 (свойства (е), (в) и (г)), получаем

$$J_4 \ll \left(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{(\nu_1+\nu_2)(1-\frac{1}{q})q} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}^q \left(f, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}} \right)_1 \right)^{\frac{1}{q}} \ll \\ \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \left[(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1 \right]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll G.$$

Итак, из оценок для J_1, J_2, J_3 и J_4 следует, что $J \ll G$, и тем самым неравенство (3) доказано.

Теперь докажем точность теоремы 4. Пусть $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ и $f_5(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

1. Рассмотрим функцию $F_3(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$. Так как $A_1(F_3, \delta_1, \delta_2) = A_1(f_1, \delta_1) \cdot A_2(f_2, \delta_2)$, то, применяя лемму 12, (а) и (б), получаем

$$A_1(F_3, \delta_1, \delta_2) \gg \left(\frac{\ln \frac{2}{\delta_1}}{\xi_1(\delta_1)} \right)^{\frac{1}{2q}} \delta_2^{\alpha_2 - \gamma_2},$$

откуда следует, что $A_1(F_3, \delta_1, \delta_2) \rightarrow \infty$ при $\delta_1 \rightarrow 0$ при любом фиксированном δ_2 .

2. Рассмотрим функцию $F_4(x_1, x_2) = f_3(x_1) \cdot f_2(x_2)$. Так как $A_2(F_4, \delta_1, \delta_2) = A_3(f_3, \delta_1) \cdot A_2(f_2, \delta_2)$, то, применяя лемму 12, (в) и (б), получаем

$$A_2(F_4, \delta_1, \delta_2) \gg \frac{1}{\delta_1^{\varepsilon_1} \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{q}}} \delta_2^{\alpha_2 - \gamma_2},$$

откуда следует, что $A_2(F_4, \delta_1, \delta_2) \rightarrow \infty$ при $\delta_1 \rightarrow 0$ при любом фиксированном δ_2 .

3. Покажем теперь, что если в соотношении (3) заменить γ_2 на α_2 , то полученное соотношение не будет верным. Для этого покажем, что для любой функции $f \in L_1^0$, где $1 = p < q < \infty$, не существует такой положительной постоянной C , не зависящей от f, δ_1 и δ_2 , что справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \leq C \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1 + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, \alpha_2 + \frac{1}{p}}(f, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Рассмотрим функцию $F_5(x_1, x_2) = f_2(x_1) \cdot f_4(x_2)$.

Так как $j_1 = \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(F_5, \delta_1, \delta_2)_q = \omega_{\alpha_1}(f_2, \delta_1)_q^{(1)} \cdot \omega_{\alpha_2}(f_4, \delta_2)_q^{(1)}$, то, применяя лемму 12, (б) и (г), получаем, что $j_1 \gg \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2} \left(\ln \ln \frac{3}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{q}}$.

Так как $\omega_{\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, \alpha_2 + 1 - \frac{1}{q}}(F_5, \delta_1, \delta_2)_1 = \omega_{\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}}(f_2, \delta_1)_1^{(1)} \cdot \omega_{\alpha_2 + 1 - \frac{1}{q}}(f_4, \delta_2)_1^{(1)}$, то, применяя лемму 12, (б) и (г), получаем, что

$$j_2 = \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1 + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, \alpha_2 + 1 - \frac{1}{q}}(F_5, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \delta_1^{\alpha_1} \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{q}} \delta_2^{\alpha_2}.$$

Если бы существовала положительная постоянная C , не зависящая от δ_1 и δ_2 , такая, что $j_1 \leq C \cdot j_2$, то для любого фиксированного $\delta_1 \in (0, 1)$ было бы справедливо неравенство $\left(\ln \ln \frac{3}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{q}}$. Однако это неравенство неверно при $\delta_2 \rightarrow 0$. Тем самым показано, что в неравенстве (3) нельзя заменить γ_2 на α_2 .

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

5. Дополнения. 1. Докажем, что неравенства

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1 + \frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1 + 1 - \frac{1}{q}, \gamma_2 + 1 - \frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv B_1(f, \delta_1, \delta_2), \quad (15)$$

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1 + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1 + 1 - \frac{1}{q}, \gamma_2 + 1 - \frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv B_2(f, \delta_1, \delta_2) \quad (16)$$

несравнимы при $\alpha_1 > \gamma_1 > \frac{\alpha_1}{2}$.

Рассмотрим функцию $F_8(x_1, x_2) = f_2(x_1)f_2(x_2)$. Так как $B_1(F_8, \delta_1, \delta_2) = D_1(f_2, \delta_1)D_2(f_2, \delta_2)$, $B_2(F_8, \delta_1, \delta_2) = R_1(f_2, \delta_1)D_2(f_2, \delta_2)$, то, применяя лемму 12, (б) при $\gamma_1 < \alpha_1$, будем иметь

$$\frac{B_1(F_8, \delta_1, \delta_2)}{B_2(F_8, \delta_1, \delta_2)} \asymp \frac{1}{\delta_1^{\alpha_1 - \gamma_1} \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{q}}} \rightarrow \infty \quad \text{при } \forall \delta_2 \text{ и } \delta_1 \rightarrow 0. \quad (17)$$

Теперь рассмотрим функцию $F_9(x_1, x_2) = f_5(x_1)f_2(x_2)$. Так как $B_1(F_9, \delta_1, \delta_2) = D_1(f_5, \delta_1)D_2(f_2, \delta_2)$, $B_2(F_9, \delta_1, \delta_2) = R_1(f_5, \delta_1)D_2(f_2, \delta_2)$, то при $\alpha_1 > \gamma_1 > \frac{\alpha_1}{2}$ имеем

$$\frac{B_2(F_9, \delta_1, \delta_2)}{B_1(F_9, \delta_1, \delta_2)} \asymp \left(\ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow \infty \quad \text{при } \forall \delta_2 \text{ и } \delta_1 \rightarrow 0. \quad (18)$$

Из соотношений (17) и (18) следует, что правые части неравенств (15) и (16) несравнимы. В каждом конкретном случае более точные результаты можно получить, применяя теорему 2 или теорему 4.

2. Аналогично рассуждая, можно показать, что неравенства

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}, \gamma_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_q \ll \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} [(t_1 t_2)^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\gamma_1+1-\frac{1}{q}, \alpha_2+1-\frac{1}{q}}(f, t_1, t_2)_1]^q \ln \frac{2}{t_2} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

несравнимы при $\alpha_2 > \gamma_2 > \frac{\alpha_2}{2}$.

В каждом конкретном случае более точные результаты можно получить, применяя теорему 2 или теорему 5.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00350).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. матем. журн. 1963. 4, № 6. 1342–1364.
2. *Бахвалов Н.С.* Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1963. № 3. 7–16.
3. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Дробные модули гладкости. М.: Макс Пресс, 2016.
4. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
5. *Potapov M., Simonov B., Tikhonov S.* Mixed moduli of smoothness in L_p , $1 < p < \infty$. A survey // Surv. Approxim. Theory. 2013. 8. 1–57.
6. *Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S.Yu.* Constructive characteristics of mixed moduli of smoothness of positive orders // Proc. 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (August 22–27, 2011). Vol. 2. Moscow: People's Friendship University of Russia, 2012. 314–325.
7. *Потапов М.К.* О приближении углом // Proc. Conf. Constructive Theory of Functions. Изд-во АН Венгрии, 1971. 371–399.
8. *Потапов М.К.* Вложение классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1974. 131. 199–210.
9. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
11. *Ульянов П.Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. 81(123), № 1. 104–131.
12. *Taberski R.* Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Comment. Math. Prace Mat. 1976/77. 19, N 2. 389–400.
13. *Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Теоремы вложения в конструктивной теории приближений // Матем. сб. 2008. 199, № 9. 107–148.
14. *Потапов М.К.* Об одной теореме вложения // Mathematica. 1972. 14(37), N 1. 123–146.

Поступила в редакцию
22.06.2017

УДК 517.938.5

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПСОИДА В ПОЛЕ УПРУГОЙ СИЛЫ: ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ

И. Ф. Кобцев¹

Исследуется слоение Лиувилля системы, описывающей движение материальной точки по двумерному эллипсоиду в поле упругой силы. Основная цель — нахождение инвариантов Фоменко–Цишанга (изоэнергетических молекул) этой системы, для чего используется алгебраический метод М.П. Харламова.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, эллипсоид, геодезический поток, потенциал, слоение Лиувилля, разделение переменных.

The Liouville foliation of system describing the motion of a material point on a 2-dimensional ellipsoid in the field of elastic force is considered. The main goal is to find Fomenko–Zieschang invariants (isoenergetic molecules) of the system. The algebraic method of M. P. Kharlamov is used to obtain the results.

Key words: integrable Hamiltonian system, ellipsoid, geodesic flow, potential, Liouville foliation, separation of variables.

1. Введение. К. Якоби [1] показал интегрируемость задачи о движении материальной точки по n -мерному эллипсоиду. Траекториями точки в этом случае являются геодезические. Более того, Якоби проинтегрировал более общую задачу, когда точка движется под действием упругой силы, модуль которой прямо пропорционален расстоянию от точки до центра эллипсоида, и получил интегральные уравнения траекторий [1]. В 1995 г. В.В. Козлов обобщил результат Якоби на потенциал с дополнительными слагаемыми, обратно пропорциональными квадратам расстояний до гиперплоскости симметрии эллипсоида [2].

В настоящей работе мы проведем топологический анализ задачи о движении частицы по двумерному эллипсоиду под действием упругой силы. Целью исследования является топологическая классификация движений с заданным уровнем энергии с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. послойного диффеоморфизма слоений Лиувилля. Результаты будут представлены в форме списка инвариантов лиувиллевой эквивалентности — изоэнергетических меченых молекул Фоменко–Цишанга. Необходимая для этого теория интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы построена в [3–6]. В дальнейшем для краткости будем называть такую постановку задачи возмущенным геодезическим потоком на эллипсоиде, подразумевая под возмущением потенциальную силу.

Стоит отметить, что с помощью инварианта Фоменко–Цишанга было установлено несколько интересных фактов. Так, А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко доказана лиувиллева эквивалентность задачи о геодезическом потоке на эллипсоиде и случая Эйлера движения твердого тела [3], обнаружены новые эквивалентности между другими интегрируемыми задачами классической механики. С дальнейшими приложениями теории Фоменко–Цишанга можно ознакомиться, например, в [7].

Пусть $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ — эллипсоид в $\mathbb{R}^3$, $a > b > c > 0$.

Теорема. *Изоэнергетические молекулы возмущенного геодезического потока на эллипсоиде имеют вид, указанный в табл. 1. Здесь $E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ — полная механическая энергия материальной точки, $k > 0$.*

Классический алгоритм исследования подобных задач подразумевает нахождение особых точек отображения момента. Для этой задачи прямые вычисления трудоемки и малоэффективны, поэтому мы будем пользоваться алгебраическим методом анализа, предложенным М.П. Харламовым в [8] и основанным на разделении фазовых переменных. Применение такого подхода значительно упрощает нахождение бифуркационной диаграммы и интегральных многообразий, что было неоднократно продемонстрировано в [9, 10].

Для использования алгебраического метода М.П. Харламова предполагается, что существуют переменные, в которых система принимает вид $\frac{ds_i}{d\tau} = \sqrt{V_i(s_i)}$, где s_i — переменные разделения,

¹ Кобцев Иван Фёдорович — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: int396.kobtsev@mail.ru.

τ — приведенное время, $V_i(s_i)$ — многочлены с коэффициентами, зависящими от значений первых интегралов. Докажем, что при выполнении ряда условий многочлен можно заменить на дробно-рациональную функцию.

Т а б л и ц а 1

Номер молекулы	Зона энергии	Изоэнергетическая молекула
1	$E \in (\frac{kc}{2}, \frac{kb}{2})$	$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$
2	$E \in (\frac{kb}{2}, \frac{k}{2}(a+c-b))$	$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A$
3	$E \in (\frac{k}{2}(a+c-b), \frac{ka}{2})$	$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=\infty \ \varepsilon=1} A$
4	$E \in (\frac{ka}{2}, \frac{k}{2}(a+b-c))$	$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} B \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$
5	$E \in (\frac{k}{2}(a+b-c), +\infty)$	$A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} C_2 \xrightarrow{r=0 \ \varepsilon=1} A$

Утверждение 1. Пусть после разделения переменных система приведена к виду

$$\frac{ds_i}{d\tau} = \sqrt{\frac{V(s_i)}{W(s_i)}}, \quad i = 1, 2, \quad s_i \in [A_i, B_i],$$

где V, W — многочлены, $W(s_i) > 0$, $i = 1, 2$. Тогда бифуркациям интегральных многообразий соответствуют нули дискриминанта многочлена V .

Доказательство. Как отмечено в [4], бифуркациям интегральных многообразий соответствуют особые точки алгебраической кривой (если подкоренная функция — многочлен). Если же подкоренная функция рациональна, то следует искать особые точки рациональной кривой $v_i^2 = \frac{V(s_i)}{W(s_i)}$ в пространстве $\mathbb{R}^2(s_1, v_1) \times \mathbb{R}^2(s_2, v_2)$. Зададим кривую в виде поверхности уровня функции $F(s_i, v_i) = W(s_i)v_i^2 - V(s_i) = 0$, тогда в особых точках выполнено $\text{grad } F = (W'(s_i)v_i^2 - V'(s_i), 2W(s_i)v_i) = 0$. В силу предположения $W(s_i) > 0$ получаем $v_i = 0$, что влечет $V(s_i) = 0$, $V'(s_i) = 0$, т.е. равенство нулю дискриминанта многочлена V . Утверждение доказано.

Замечание 1. Аналогичное утверждение можно доказать, если многочлен W знакопеременный и может обращаться в нуль при $s_i \in [A_i, B_i]$. При этом на рациональной кривой дополнительно возникнут новые особые точки — нули W , что может привести к появлению некомпактных областей возможности движения и некомпактных бифуркаций. Такой случай мы здесь не будем рассматривать.

Перейдем непосредственно к анализу поставленной задачи. Не ограничивая общности, положим $k > 0$ (для отрицательного k доказательство почти полностью повторяется).

2. Интегралы и разделяющее множество. Как показано в [2], задача о возмущенном геодезическом потоке на эллипсоиде вполне интегрируема, причем интегралы найдены в явном виде с использованием избыточных координат:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{— интеграл энергии,}$$

$$I = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} + \frac{\dot{z}^2}{c} - k \right) \quad \text{— дополнительный интеграл.}$$

Перейдем к разделяющимся переменным, что позволит избавиться от избыточных координат.

В качестве переменных разделения возьмем эллиптические координаты Якоби. Напомним, что эллиптическими координатами на эллипсоиде $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ называется пара (λ_1, λ_2) решений уравнения $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1$, при этом $\lambda_1 \in [-b, -c]$, $\lambda_2 \in [-a, -b]$. Декартовы координаты выражаются через эллиптические следующим образом:

$$x^2 = \frac{a(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{(a-b)(a-c)}, \quad y^2 = \frac{b(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{(b-a)(b-c)}, \quad z^2 = \frac{c(c+\lambda_1)(c+\lambda_2)}{(a-b)(a-c)}. \quad (1)$$

Так как эллиптические координаты нерегулярны при $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$ (в омбилических точках эллипсоида), то в этих точках вычисления следует проводить в декартовых координатах.

В эллиптических координатах полная энергия исследуемой системы имеет вид (см., например, [1]):

$$E = \frac{2(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)(c+\lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\mu_1^2 + \frac{2(a+\lambda_2)(b+\lambda_2)(c+\lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}\mu_2^2 + \frac{k}{2}(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{k}{2}(a+b),$$

где μ_1, μ_2 — сопряженные импульсы.

Для удобства вычислений возьмем в качестве первого интеграла выражение $H = E - \frac{k}{2}(a+b)$.

Применяя общий принцип разделения переменных, находим дополнительный интеграл в виде

$$F = \frac{2(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)(c+\lambda_1)}{\lambda_1}\mu_1^2 + \frac{k}{2}\lambda_1^2 - h\lambda_1.$$

Отметим, что аналогичное выражение относительно λ_2, μ_2 , а именно

$$\frac{2(a+\lambda_2)(b+\lambda_2)(c+\lambda_2)}{\lambda_2}\mu_2^2 + \frac{k}{2}\lambda_2^2 - h\lambda_2,$$

также является интегралом задачи, причем равным F . С учетом $\dot{\lambda}_1 = \frac{\partial H}{\partial \mu_1}$ выводим уравнения движения точки

$$\dot{\lambda}_k = \pm \frac{4}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\frac{V(\lambda_k)}{\lambda_k}},$$

где

$$V(z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}z^2 - hz - f \right) (a+z)(b+z)(c+z), \quad H = h, \quad F = f.$$

В силу определения, данного в [4], и утверждения 1 заключаем, что разделяющее множество задачи состоит из значений (h, f) , при которых многочлен V имеет кратный корень. Оно включает в себя четыре кривые, задаваемые уравнениями $f = \frac{ka^2}{2} + ah$, $f = \frac{kb^2}{2} + bh$, $f = \frac{kc^2}{2} + ch$, $f = -\frac{h^2}{2k}$. Обозначим также через

$$\xi = \frac{h - \sqrt{h^2 + 2fk}}{k}, \quad \eta = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2fk}}{k}$$

корни трехчлена $\frac{k}{2}z^2 - hz - f$.

3. Регулярные интегральные поверхности. Допустимая область на плоскости (h, f) определяется условием: существует точка (λ_1, λ_2) , где $V(\lambda_1) \geq 0$, $V(\lambda_2) \geq 0$. В зависимости от относительного расположения корней многочлена V (зависящих от параметров h, f) выделяются четыре области возможного движения, представленные в табл. 2. Соответствующие регулярные области для случая $a+c > 2b$ показаны на рис. 1, а (закрашенные области на графике — образ отображения момента), а области возможного движения на эллипсоиде — на рис. 2.

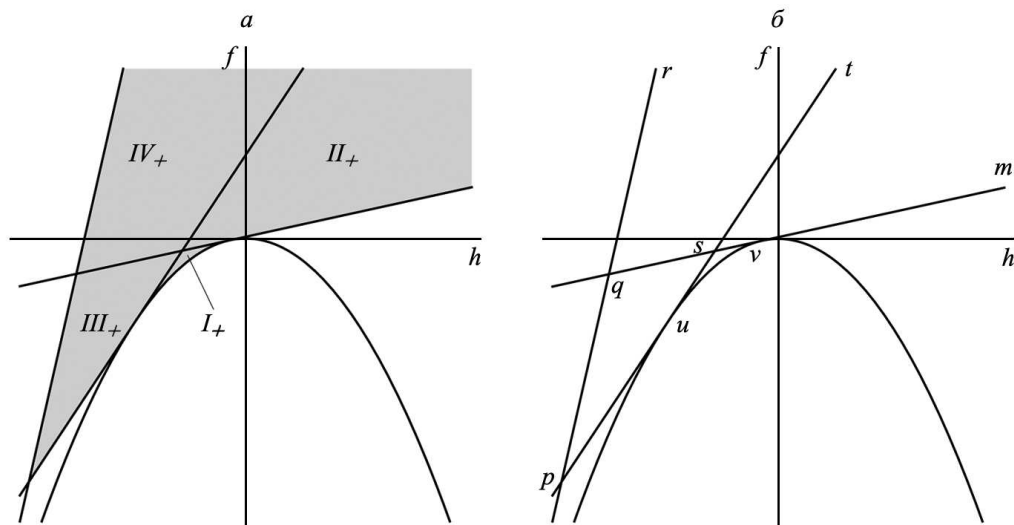


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма задачи (а) и участки разделяющего множества (б)

Т а б л и ц а 2

Код области	Корни минимального многочлена	Область изменения (λ_1, λ_2)
I_+	$-a < -b < \xi < \eta < -c$	$[\xi, \eta] \times [-a, -b]$
II_+	$-a < -b < \xi < -c < \eta$	$[\xi, -c] \times [-a, -b]$
III_+	$-a < \xi < -b < \eta < -c$	$[-b, \eta] \times [-a, \xi]$
IV_+	$-a < \xi < -b < -c < \eta$	$[-b, -c] \times [-a, \xi]$

гласно (1) имеем $\lambda_1 \in [-b, -c]$, $\lambda_2 \in [-a, -b]$; заметим также, что при допустимых расположениях корней ξ, η выражение $\frac{k}{2}\lambda_1^2 - h\lambda_1 - f$ неположительно, а коэффициент при μ_1^2 неотрицателен. Следовательно, при $E \geq \frac{kc}{2}$ уравнение $F = f$ имеет два решения относительно μ_1 , отличающиеся знаком, или одно нулевое, если $\lambda_1 = \xi$ или $\lambda_1 = \eta$.

Установим число прообразов внутренних точек областей возможности движения. Для этого исследуем количество решений уравнений $H = h$, $F = f$ в фиксированной точке (λ_1, λ_2) эллипсоида относительно μ_1, μ_2 .

Рассуждая аналогично и используя тот факт, что в уравнении $H = h$ коэффициенты при μ_1^2 и μ_2^2 неотрицательны, находим количество решений μ_2 . Окончательный ответ: если точка лежит на границе области возможного движения (при данных значениях интегралов), то в нее проектируются две допустимые скорости — точки интегрального многообразия, во внутреннюю точку проектируются четыре допустимые скорости. Следовательно, в области I_+ интегральное многообразие состоит из четырех торов, в областях II_+, III_+ и IV_+ — из двух торов.

4. Критические движения.

Описание критических движений будет выполнено, если рассмотреть равенство $F = f$ на каждом указанном на рис. 1, б участке

разделяющего множества и найти эллиптические координаты, задающие траекторию. Так, например, для участка pq разделяющего множества имеем

$$\frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(c + \lambda_2)}{\lambda_2} \mu_2^2 + \frac{k}{2} \lambda_2^2 - h \lambda_2 = \frac{ka^2}{2} + ah.$$

Отсюда находим $\lambda_2 = -a$, что соответствует сечению эллипсоида $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$. А поскольку полная механическая энергия точки на этом участке не превосходит $\frac{kb}{2}$, то движение будет осуществляться по двум дугам этого сечения.

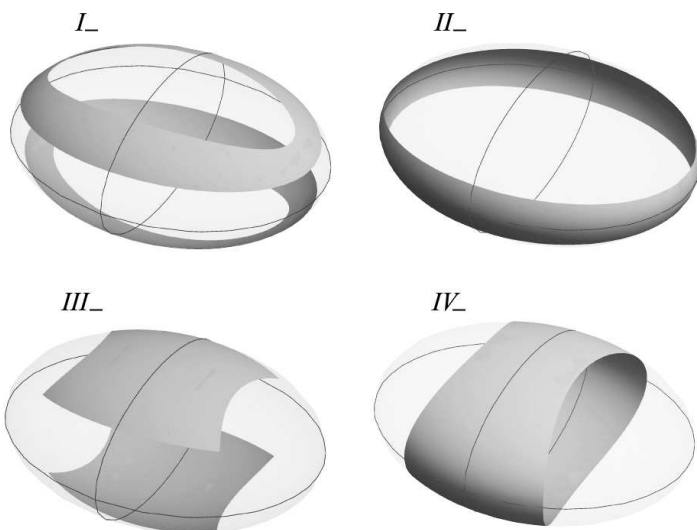


Рис. 2. Области на эллипсоиде, в которых может двигаться точка

Похожим образом исследуются остальные участки разделяющего множества. Приведем описание всех критических движений:

участок pq : $E \in [\frac{kc}{2}, \frac{kb}{2}]$, движение по двум дугам сечения $\lambda_2 = -a$;

участок qr : $E \geq \frac{kb}{2}$, движение по сечению $\lambda_2 = -a$, точка совершает полный оборот;

участок pu : движение по двум дугам сечения $\lambda_1 = -b$;

участок vm : движение по сечению $\lambda_1 = -c$, точка совершает полный оборот;

участок uv : движение по сечениям $\lambda_1 = \xi$, точка совершает полный оборот;

участок us : движения в области $-b \leq \lambda_1 \leq \xi$; критические окружности $\{-b \leq \lambda_1 \leq \xi\} \cap \{y = 0\}$;

участок sv : движения в области $\xi \leq \lambda_1 \leq -c$; критические окружности $\{\xi \leq \lambda_1 \leq -c\} \cap \{z = 0\}$;

участок sq : движения в области $\eta \leq \lambda_2 \leq -b$; критические окружности $\{\eta \leq \lambda_2 \leq -b\} \cap \{z = 0\}$;

участок st : движения по всему эллипсоиду; критические окружности $\{y = 0\}$.

Прообразом окружности на эллипсоиде являются две окружности в Q^3 , отличающиеся направлением движения; прообразом дуги на эллипсоиде является одна окружность в Q^3 , так как в концах дуги имеется одна допустимая скорость (нулевая), а во внутренних точках дуги — две допустимые скорости. Следовательно, прообраз точек участка uv бифуркационной диаграммы — четыре критические окружности, прообраз точек участков pq , qr , pu , vm — две критические окружности, а прообраз точек остальных участков — 3-атомы, каждый с двумя критическими окружностями.

5. Грубые молекулы. Число торов Лиувилля внутри каждой камеры известно. Чтобы построить грубую молекулу, осталось определить топологический тип бифуркаций, отвечающих участкам разделяющего множества. Для этого снова воспользуемся понятием допустимой скорости.

Утверждение 2. *Особый уровень интегралов, соответствующий участку диаграммы st , гомеоморфен особому слою 3-атома C_2 .*

Доказательство. Рассмотрим расслоение области на “гиперболические кольца”, задаваемые уравнениями $\lambda_2 = \zeta$. В каждой точке такого кольца, за исключением лежащих в плоскости $y = 0$, имеются четыре допустимые скорости, а в указанных точках — две (рис. 3, а). Очевидно, что окружность с таким набором векторов скорости гомеоморфна двум экземплярам особого слоя плоского атома C_2 . При этом гиперболическими кольцами будет покрыта вся поверхность эллипсоида, за исключением отрезков $[f_1, \tilde{f}_1]$ и $[f_2, \tilde{f}_2]$. В прообразе омбилических точек $f_i, \tilde{f}_i$ лежит окружность допустимых скоростей, а в прообразе

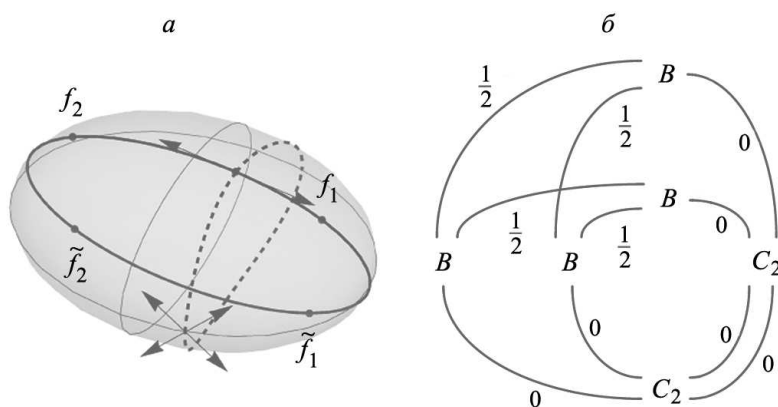


Рис. 3. Область возможного движения, отвечающая участку st разделяющего множества (а); пунктиром обозначено одно из гиперболических колец, сплошной линией — критическая траектория, стрелками — допустимые скорости; круговая молекула в положениях неустойчивого равновесия (б); числа на ребрах молекулы — r -метки

каждой точки интервалов $(f_i, \tilde{f}_i)$ — две допустимые скорости. Соединяя две окружности (соответствующие омбилическим точкам) двумя отрезками, снова получаем особый слой плоского атома C_2 . Следовательно, особый слой на этом уровне интеграла гомеоморфен особому слою 3-атома C_2 .

Утверждение 3. *Особый уровень интегралов, соответствующий участку диаграммы us , гомеоморфен особому слою двух 3-атомов B .*

Доказательство. Рассмотрим расслоение области на софокусные гиперболы. В точках этих гипербол, лежащих на отрезке $[f_1, f_2]$, а также в точках на границе области имеются две допустимые скорости; в остальных точках этой гиперболы — четыре, что дает два экземпляра особого слоя плоского атома B (здесь применяем те же рассуждения, что и в доказательстве утверждения 2). Прообраз каждого фокуса гомеоморфен окружности, а прообраз отрезка от фокуса до границы области есть отрезок, склеенный с окружностью в двух точках. Легко видеть, что такое множество гомеоморфно “восьмерке”. Следовательно, полный прообраз каждой из двух связных компонент критического уровня интегралов есть “восьмерка”, умноженная на окружность, т.е. особый слой 3-атома B .

Точно так же выполняется исследование всех остальных перестроек торов Лиувилля. В результате получаем следующий список бифуркаций:

- участок st — атом C_2 ;
- участок sq — атом C_2 ;
- участок sv — два атома B ;
- участок us — два атома B .

Зная топологический тип интегральных многообразий и их бифуркации, строим изоэнергетическую грубую молекулу. При разных значениях h молекулы будут отличаться.

Перестройки интегральных поверхностей:

- $h \in (-\frac{k}{2}(a+b), -\frac{k}{2}(a+c))$: $2S^1 - 2T^2 - 2S^1$;
- $h \in (-\frac{k}{2}(a+c), -kb)$: $2S^1 - 2T^2 - 3\text{-атом } C_2 - 2T^2 - 2S^1$;
- $h \in (-kb, -\frac{k}{2}(b+c))$: $4S^1 - 2\text{ 3-атома } B - 2T^2 - 3\text{-атом } C_2 - 2S^1$;
- $h \in (-\frac{k}{2}(b+c), -kc)$: $4S^1 - 2\text{ 3-атома } B - 2T^2 - 3\text{-атом } C_2 - 2S^1$;
- $h \in (-kc, +\infty)$: $2S^1 - 2T^2 - 3\text{-атом } C_2 - 2T^2 - 2S^1$.

Непосредственно из этого описания находятся грубые молекулы.

6. Числовые метки r, ε, n . Описание перестроек торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии определяет его топологию с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности. Слоение Лиувилля будет полностью описано, если установить, как склеиваются граничные торы атомов. Для этого на двух склеиваемых граничных торах выбираются допустимые базисы (λ, μ) , (λ', μ') , матрица перехода между которыми задает склейку двух торов в один слой слоения Лиувилля. Эта

матрица склейки целочисленная и имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$.

Правила выбора базисных циклов на торах Лиувилля и вычисления меток по матрицам склейки описаны в [3].

В исследуемой задаче проекции торов Лиувилля на эллипсоид имеют простой вид, поэтому циклы на граничных торах атомов также можно указывать явно. Для случая $h \in (-\frac{k}{2}(a+b), -\frac{k}{2}(a+c))$ базисные циклы изображены на рис. 4.

Так же вычисляются остальные изоэнергетические молекулы (табл. 1). Теорема доказана.

Замечание 2. При $k \rightarrow 0+$ уменьшаются и исчезают все камеры, кроме II_+ и IV_+ , при этом остается лишь одна молекула 5 (см. табл. 1). Полученная система, как и следовало ожидать, моделирует геодезический поток на эллипсоиде (а также случай Эйлера с нулевой константой площадей [3]). Такая же картина наблюдается и при $k \rightarrow 0-$, что подтверждает правильность проделанных вычислений.

Рис. 4. Примеры выбора базисных циклов: a — на граничных торах атомов участка qr , камера IV_+ ; b — на граничных торах атома C_2 участка st , камера IV_+ ; $в$ — на граничных торах атома C_2 участка st , камера II_+ ; $г$ — на граничных торах атомов участка vm , камера II_+

иде (а также случай Эйлера с нулевой константой площадей [3]). Такая же картина наблюдается и при $k \rightarrow 0-$, что подтверждает правильность проделанных вычислений.

Замечание 3. Все обнаруженные в задаче грубые молекулы и некоторые меченые молекулы встречались ранее в интегрируемых случаях динамики твердого тела. Так, меченые молекулы 1, 2 и 5 (табл. 1) соответствуют изоэнергетическим молекулам случая Эйлера с ненулевой константой площадей; случай Клебша с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности моделируется обнаруженными молекулами, за исключением $A-A$ с бесконечной r -меткой; молекулы 3, 4 грубо лиувиллево эквивалентны одному из случаев динамики четырехмерного твердого тела [3].

Замечание 4. Рассмотрим положения неустойчивого равновесия $(\pm\frac{\sqrt{a}}{2}, 0, 0)$ при $k > 0$. Непосредственно проверяется, что на бифуркационной диаграмме им соответствует точка ранга 0, следовательно, определена круговая молекула этой невырожденной особенности (рис. 3,б). Проведя такие же вычисления, как и при подсчете изоэнергетических молекул, получаем круговую молекулу особенности типа седло-седло с двумя особыми точками. Эта особенность была предсказана теоретически в [2]. То же имеет место при $k < 0$ в положениях неустойчивого равновесия $(0, 0, \pm\frac{\sqrt{c}}{2})$.

Автор приносит благодарность А. Т. Фоменко за постановку задачи, А. А. Ошемкову и С. С. Николаенко за ценные обсуждения и комментарии.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якоби К. Лекции по динамике / Пер. с нем. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1936.
2. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикл. матем. и механ. 1995. **59**, вып. 1. 3–9.
3. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
4. Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1071–1075 (*Fomenko A.T. Morse theory of integrable Hamiltonian systems // Soviet Math. Dokl.* 1986. **33**, N 2. 502–506).
5. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, № 6. 1276–1307 (*Fomenko A.T. The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability // Math. USSR Izvestiya.* 1987. **29**, N 3. 629–658).
6. Фоменко А.Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР. 1987. **294**, № 2. 283–287 (*Fomenko A.T., Zieschang H. On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics // Soviet Math. Dokl.* 1987. **35**, N 2. 520–534).
7. Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т. Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты (“атома”-бифуркации) // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. **67**, № 3. 21–29 (*Fomenko A.T., Kudryavtseva E.A. Each finite group is a symmetry group of some map (“atom”-bifurcation) // Moscow Univ. Math. Bull.* 2013. **68**, N 3. 148–155).
8. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика. 2010. **6**, № 4. 769–805.
9. Николаенко С. С. Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела // Матем. сб. 2015. **207**, № 1. 123–150.
10. Fomenko A.T., Nikolaenko S.S. The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid // J. Geom. and Phys. 2015. **87**. 115–133.

Поступила в редакцию
27.09.2017

УДК 515.162

ВЫСОТНЫЕ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫЕ АТОМЫ

В. А. Трифонова¹

Получена частичная классификация высотных атомов с транзитивной на кольцах одного цвета группой симметрий. Предъявлено 9 бесконечных серий и 19 особых случаев.

Ключевые слова: атом, симметрии атомов, высотный атом.

We present a partial classification of vertical atoms whose symmetry groups act transitively on the rings of the atoms. A total of 9 infinite series and 19 special cases are described.

Key words: atom, symmetries of atoms, vertical atom.

1. Введение. Понятие атома, появившееся в задачах качественного анализа и классификации динамических систем, находит применение в самых разных разделах современной комбинаторики и маломерной топологии, теории узлов [1–4]. Понятие атома для целей гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А. Т. Фоменко [3] и использовалось для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем в работе [4].

¹Трифорова Виктория Александровна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: trifonovaviktoriya2012@yandex.ru.

Симметрии атомов отражают дискретные симметрии соответствующих динамических систем, так что для анализа важной является задача описания классов атомов, обладающих заданной группой симметрии. Так, в работах [5, 6] получен ряд классификационных результатов максимально симметричных атомов, имеющих максимально возможный набор симметрий. В работе [7] приведена полная классификация высотных атомов с транзитивной на вершинах группой симметрий. Задача классификации максимально симметричных атомов является довольно сложной и может быть решена только для отдельных семейств атомов (атомы малой сложности, атомы малого рода) либо атомов, обладающих некоторым специальным свойством. Так, в работе [8] полностью описаны максимально симметричные высотные атомы. С дальнейшим развитием теории симметрий атомов можно ознакомиться в работах [9–16].

В настоящей работе рассматривается важный частный случай высотных атомов — высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета. Для таких атомов удалось сделать частичное описание: предъявлено 9 бесконечных серий и 19 особых случаев. Основные определения следуют [1, 2, 5].

2. Необходимые понятия и определения. Пусть M^2 — гладкое компактное двумерное многообразие, $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 : f(x) = k\}$, где $k \in \mathbb{R}$, — ее особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне ($\{f = k\}$).

Определение 1. *Атомом* называется пара $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$ с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$. Атом называется *ориентируемым*, если эта поверхность ориентируема. Граф $f^{-1}(k)$ называется *остовом атома*. Два атома называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию (см. [1]). Будем говорить, что атом $(f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$ порожден функцией f . *Сложностью* атома называется количество особых точек функции f на особом слое.

Определение 2. Назовем атом, порожденный функцией f , *высотным*, если существует такое вложение $g: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in M^2$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $g(M^2)$.

Все высотные атомы являются ориентируемыми (см. [2]). Так как мы будем рассматривать только высотные атомы, то всюду ниже все атомы ориентируемые.

Пусть дан атом $X = (f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon]), f^{-1}(k))$. Ясно, что $f^{-1}([k - \varepsilon, k + \varepsilon])$ является некоторым многообразием P^2 с краем, причем его край — это набор окружностей. *Родом* атома X называется род многообразия без края, полученного из P^2 с помощью заклеивания всех связных компонент границы дисками. Атомы рода 0 назовем *плоскими* атомами.

Также стоит дать второе эквивалентное определение атома.

Определение 3. *Атомом* назовем пару (P^2, K) , где P^2 — компактная ориентированная поверхность с краем, K — непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 0 или 4, причем множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0, 1]$, $(S^1, 1) \subset \partial P^2$. Множество колец и их граничных окружностей разбито на два подмножества (белые и черные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец и соответствующих окружностей на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K) . Два атома считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм оснащенных пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Атом, который получается заменой белых колец на черные, а черных колец на белые, называется *двойственным* атомом к исходному атому.

Атом может быть определен также как f -граф (см. [1]), что в свою очередь дает нам возможность работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение 4. Конечный связный граф G , некоторые ребра которого ориентированы, называется *ориентированным f -графом*, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного полуребра.

Соответствующий f -граф строится по атому (P^2, K) следующим образом: в качестве неориентированного ребра берется отрезок (сепаратриса), проходящий через вершину графа K и соединяющий границы противоположных белых колец (см. рис. 1), а в качестве вершин — соответствующие концы

отрезка. В роли ориентированных ребер выступают примыкающие к вершинам дуги белых колец с соответствующей ориентацией.

Определение 5. Назовем f -граф *ориентированно вложимым в плоскость*, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные одним ребром, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Соответствующее вложение также будем называть *ориентированным*.

Определение 6. Симметрией атома $X = (P^2, K)$ называется сохраняющий ориентацию и оснащение гомеоморфизм оснащенной пары (P^2, K) на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии, т.е. класс эквивалентности изотопных гомеоморфизмов оснащенной пары (P^2, K) на себя. Отметим, что при таком определении группа $\text{Sym}(X)$ симметрий атома $X = (P^2, K)$ дискретна (см. [1]).

Определение 7. Назовем *симметрией f -графа G* изоморфизм графа G на себя, переводящий ориентированные ребра в ориентированные с сохранением их ориентации. Обозначим группу всех таких симметрий f -графа G через $\text{Sym}(G)$.

Определение 8. Атом $X = (P^2, K)$ с заданным оснащением является *атомом с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого (черного) цвета*, если для любых двух колец белого(черного) цвета u, v указанного оснащения найдется симметрия атома $\phi \in \text{Sym}(X)$, такая, что $\phi(u) = v$.

Определение 9. Будем говорить, что атом $X = (P^2, K)$ является *атомом с транзитивной на вершинах группой симметрий*, если для любых двух вершин u, v графа K найдется симметрия атома $\phi \in \text{Sym}(X)$, такая, что $\phi(u) = v$.

Определение 10. Атом $X = (P^2, K)$ является *максимально симметричным* тогда и только тогда, когда группа его симметрий $\text{Sym}(X)$ транзитивно действует на множестве ребер атома X .

Нам понадобится следующий результат из книги А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко [1].

Теорема 1. Пусть $X = (P^2, K)$ — некоторый атом, рассматриваемый как оснащенная пара, а G — соответствующий ему f -граф. Тогда группа $\text{Sym}(G)$ изоморфна группе $\text{Sym}(X)$.

Отсюда следует, что атом $X = (P^2, K)$ является максимально симметричным тогда и только тогда, когда группа симметрий его f -графа $\text{Sym}(G)$ транзитивно действует на вершинах f -графа.

3. Высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета. Переформулируем теперь в терминах f -графа условие, что группа симметрий атома действует транзитивно на кольцах белого цвета. Напомним, что в построенном f -графе исходного атома ориентированные циклы соответствуют белым кольцам, тогда ориентированные циклы f -графа, двойственного к исходному атому, будут соответствовать черным кольцам исходного атома.

Утверждение 1. Пусть $X = (P^2, K)$ — атом с группой симметрий $\text{Sym}(X)$, а G — соответствующий ему f -граф. Тогда $\text{Sym}(X)$ транзитивно действует на кольцах белого цвета тогда и только тогда, когда $\text{Sym}(G)$ транзитивно действует на ориентированных циклах.

Доказательство. Утверждение вытекает из конструкции f -графа по атому X : ориентированные циклы соответствуют каждому белому кольцу атома. Заметим, что если кроме этого G_1 — f -граф двойственного к исходному атому и $\text{Sym}(G_1)$ транзитивно действует на ориентированных циклах G_1 , то группа симметрий как исходного атома, так и двойственного транзитивно действует на кольцах обоих цветов. Утверждение доказано.

Далее нам понадобятся следующие утверждения из статьи И. М. Никонова [7].

Утверждение 2. Пусть $X = (P^2, K)$ — атом с группой симметрий $\text{Sym}(X)$, а G — соответствующий ему f -граф. Тогда $\text{Sym}(X)$ транзитивно действует на вершинах атома в том и только в том случае, когда группа $\text{Sym}(G)$ транзитивно действует на неориентированных ребрах f -графа.

Утверждение 3. Атом является высотным тогда и только тогда, когда f -граф ориентированно вложим в плоскость.

Определение 11. Будем называть неориентированное ребро произвольного f -графа *внутренним*, если оба конца этого ребра лежат в одном ориентированном цикле, и *внешним*, если его концы лежат в разных ориентированных циклах.

Утверждение 4. Если группа симметрий $\text{Sym}(X)$ атома $X = (P^2, K)$ транзитивно действует на кольцах белого цвета, то у соответствующего f -графа G все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин.

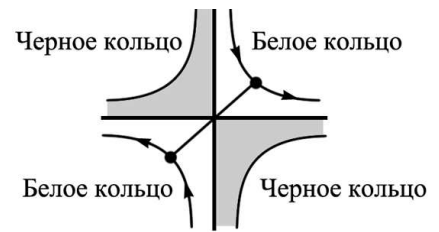


Рис. 1. Построение f -графа

Доказательство. По утверждению 1 группа симметрий $\text{Sym}(G)$ f -графа G транзитивно действует на ориентированных циклах. Значит, все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин внутренних ребер и вершин внешних ребер. Таким образом, все ориентированные циклы содержат одинаковое количество вершин. Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Группа симметрий максимально симметричных атомов транзитивно действует на кольцах обоих цветов.*

Доказательство. Пусть атом $X = (P^2, K)$ (с группой симметрий $\text{Sym}(X)$) является максимально симметричным. Так как к каждому ребру графа K примыкает ровно одно белое и одно черное кольцо и группа симметрий $\text{Sym}(X)$ транзитивно действует на ребрах графа K , то $\text{Sym}(X)$ транзитивно действует на кольцах обоих цветов. Утверждение доказано.

Классификация максимально симметричных высотных атомов получена в работе Н. В. Волчанецкого и И. М. Никонова [8]. Она включает в себя атом A_2 , две бесконечные серии атомов $D_n (n \geq 1)$, $C_n (n \geq 1)$ и пять атомов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , соответствующих правильным многогранникам. Заметим, что $C_2 = D_2$. Каждый из этих атомов полностью описан в работе [8].

Теперь рассмотрим архимедовы тела, бесконечную серию призм и антипризм и построим по ним соответствующие атомы так: f -граф каждого из конструируемых атомов получим заменой каждой вершины одномерного остова соответствующего многогранника на ориентированный цикл. Здесь мы пользуемся тем, что скелет каждого из рассматриваемых многогранников вложим в плоскость. При этом циклический порядок примыкающих к циклу ребер должен повторять порядок ребер, примыкающих к вершине. Под группой симметрий каждого из рассматриваемых многогранников будем понимать группу вращений (т.е. симметрий, сохраняющих ориентацию пространства).

Утверждение 6. *Атомы, соответствующие архимедовым телам (исключая усеченный кубоктаэдр и ромбоусеченный икосододекаэдр) $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}$, а также бесконечной серии призм $R_n^1 (n \geq 1)$ и антипризм $R_n^2 (n \geq 1)$ (см. рис. 2, 3), являются высотными, и их группа симметрий транзитивно действует на кольцах белого цвета.*

Доказательство. Группы симметрий у построенного f -графа и исходного многогранника совпадают. Так как симметрии полуправильного многогранника транзитивно действуют на его вершинах, то группа симметрий f -графа будет транзитивной на ориентированных циклах f -графа, а значит, группа симметрий соответствующего атома будет тран-

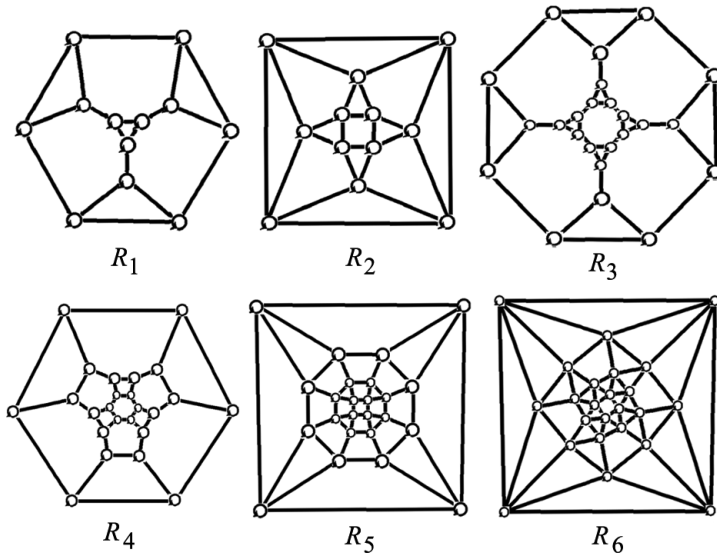
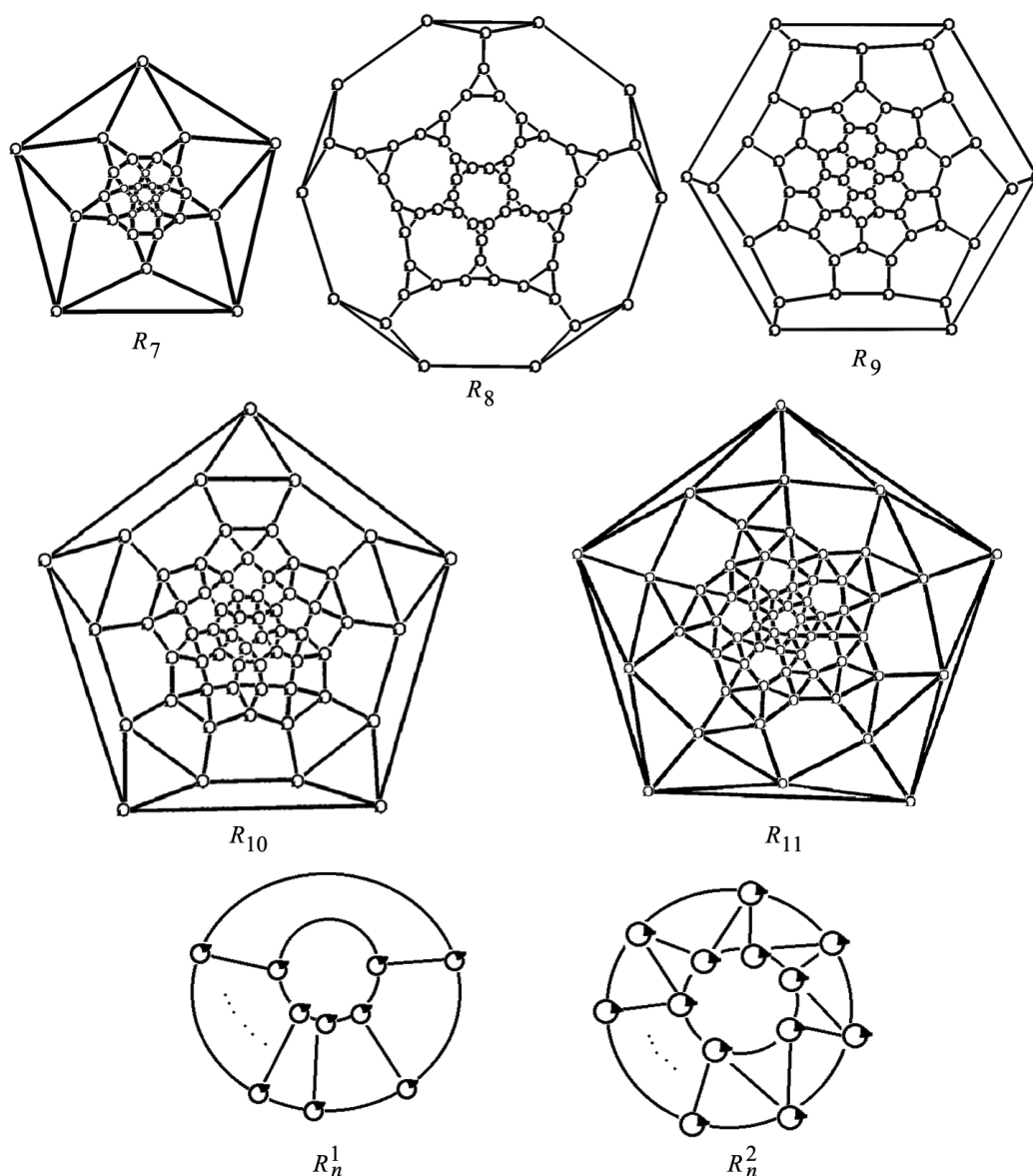


Рис. 2. f -Графы атомов R_1 – R_6

зитивной на кольцах белого цвета. Стоит отметить, что группа симметрий атомов, отвечающих архимедовым телам (исключая усеченный кубоктаэдр и ромбоусеченный икосододекаэдр), не будет транзитивна на кольцах обоих цветов, поскольку у соответствующего плоского вложения f -графа не все грани имеют одинаковое число сторон. Поэтому на гранях группа симметрий плоского вложения f -графа не может образовывать одну орбиту. Аналогичны рассуждения в случае бесконечной серии призм и антипризм. Исключение составляют атом R_4^1 (соответствующий 4-угольной призме), плоское вложение f -графа которого совпадает с P_2 , и атом R_3^2 (соответствующий антипризме с 3-угольным основанием), плоское вложение f -графа которого совпадает с P_3 . То есть эти два атома являются высотными, максимально симметричными, группа симметрий которых транзитивно действует на кольцах обоих цветов.

На рис. 2, 3 представлены f -графы атомов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}$, которые отвечают усеченному тетраэдру, кубоктаэдру, усеченному кубу, усеченному октаэдру, ромбокубооктаэдру, плосконосому кубу, икосододекаэдру, усеченному додекаэдру, усеченному икосаэдру, ромбоикосододекаэдру и плосконосому додекаэдру соответственно. На рис. 3 представлены f -графы атомов $R_n^1 (n \geq 1)$, соответствующих призмам, и $R_n^2 (n \geq 1)$, соответствующих антипризмам. Утверждение доказано.

Рис. 3. f -Графы атомов R_7 – R_{11} , R_n^1 и R_n^2

Рассмотрим случай, когда у атома ровно одно белое кольцо, т.е. у соответствующего f -графа имеется ровно один ориентированный цикл.

Определение 12. Атомами FL_n ($n \geq 1$) назовем атомы, f -графы которых представляют собой один цикл с вершинами $v_1, \dots, v_{4n+2}$, занумерованными в порядке обхода ориентированного цикла, и хордами $(v_{4i-3}, v_{4i}), 1 \leq i \leq n, (v_{4i-1}, v_{4i+2}), 1 \leq i \leq n$, и (v_{4n-1}, v_2) .

Определение 13. Внутреннее ребро произвольного f -графа будем называть *зацепленным* с другим внутренним ребром этого f -графа, если вершины ребер лежат на одном ориентированном цикле и чередуются при обходе этого цикла.

Определение 14. *Графом сцеплений* будем называть граф, построенный по внутренним ребрам с концами из одного ориентированного цикла произвольного f -графа атома так: заменяем каждое внутреннее ребро вершиной, и каждые две вершины соединяем ребром, если внутренние ребра, соответствующие этим вершинам, были зацеплены.

Утверждение 7. *Любой атом, имеющий одно белое кольцо, является высотным тогда и только тогда, когда его f -граф не содержит в себе f -графа атома FL_n ($n \geq 1$).*

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Дан f -граф высотного атома, имеющего одно белое кольцо. Зафиксируем ориентированное вложение f -графа в плоскость.

Будем говорить, что внутреннее неориентированное ребро является ребром типа А, если в ори-

ентированном вложении f -графа ребро находится внутри ориентированного цикла, и типа В, если вне. Отметим, что в данном ориентированном вложении каждое ребро, зацепленное с ребром типа А, будет ребром типа В. Каждое ребро, зацепленное с ребром типа В, будет ребром типа А. И ребра одного типа не зацеплены между собой. Теперь по совокупности внутренних ребер исходного f -графа высотного атома построим граф сцеплений T . Тогда вершины получившегося графа T , соответствующие ребрам типа А, будем называть вершинами класса А, а вершины, соответствующие ребрам типа В, — вершинами класса В. Заметим, что по построению каждое ребро графа T соединяет какую-то вершину из одного класса с какой-то вершиной другого класса. Тогда граф T двудольный по определению, а значит, не содержит циклов нечетной длины.

Но граф сцеплений, построенный по внутренним ребрам f -графа атома FL_n ($n \geq 1$), не будет двудольным, так как является единственным циклом нечетной длины. Поэтому если атом, имеющий одно белое кольцо, является высотным, то его f -граф не содержит в себе f -графа атома FL_n ($n \geq 1$).

Теперь докажем достаточность утверждения. Рассмотрим f -граф атома, имеющего одно белое кольцо, не содержащего f -графа атома FL_n ($n \geq 1$). Проверим, что для этого f -графа есть ориентированное вложение в плоскость.

Построим по внутренним ребрам этого f -графа граф сцеплений. Так как исходный атом, имеющий одно белое кольцо, не содержит f -графа атома FL_n ($n \geq 1$), то получившийся граф сцеплений не содержит циклов нечетной длины. А значит, является двудольным и мы можем разделить все вершины графа сцеплений на два класса С и D так, чтобы каждое ребро графа сцеплений соединяло какую-то вершину из одного класса с какой-то вершиной другого класса. Теперь делаем обратный переход от графа сцеплений к внутренним ребрам исходного f -графа. Тогда любые два внутренних ребра, соответствующие вершинам из одного класса графа сцеплений, не будут зацеплены. И мы можем ориентированно вложить этот f -граф в плоскость так, что ребра класса С попадут внутрь ориентированного цикла, а ребра класса D окажутся вне. Утверждение доказано.

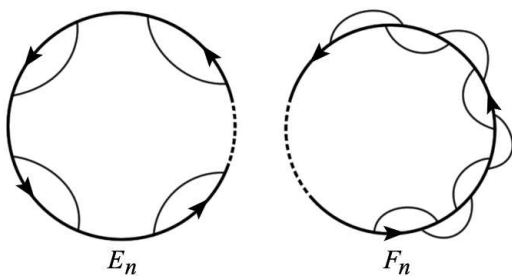


Рис. 4. Примеры f -графов атомов с одним ориентированным циклом

ребер типа А, m_1 — число ребер типа В относительно фиксированного вложения f -графа в плоскость. Примеры серии A_k^1 ($k \geq 1$) приведены на рис. 4. Так, рассмотрим, например, атом $E_n = A_n^1$, число $n_1 = n$, $m_1 = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда у атома есть ровно два белых кольца, т.е. у соответствующего f -графа имеются ровно два ориентированных цикла. Определим распределение внутренних неориентированных ребер f -графа по классам: внутреннее ребро будет входить в класс A_1 , если его вершины чередуются с вершинами внешних ребер по обходу цикла. Внутренние ребра, каждое из которых зацеплено с ребром класса A_1 , отнесем в класс B_1 . Внутренние ребра, которые не попали ни в один класс и каждое из которых зацеплено с ребром класса B_1 , отнесем в класс A_1 .

Продолжаем такое распределение по классам, пока остаются внутренние ребра, которые не попали ни в один класс и каждое из которых зацеплено с ребром класса A_1 или B_1 . Распределение внутренних ребер по классам A_1 и B_1 закончится, так как ребер конечное число. Остальные внутренние ребра, не попавшие в класс A_1 или B_1 , будут ребрами класса C_1 . Теперь рассмотрим внешние, соединяющие два цикла ребра. Фиксируем один ориентированный цикл и некоторое внешнее ребро. Далее нумеруем внешние ребра числами от 1 до n в том порядке, в каком концы этих ребер встречаются при обходе по заданному ориентированному циклу начиная с заданного внешнего ребра. Тогда при обходе другого ориентированного цикла концы уже занумерованных внешних ребер будут встречаться в некотором циклическом порядке $(i_1, \dots, i_n)$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8 (критерий высотности атома, имеющего ровно два белых кольца). *Атом, имеющий два белых кольца, является высотным тогда и только тогда, когда цикл $(i_1, \dots, i_n)$*

Определение 15. Атомами A_k^1 ($k \geq 1$) называется серия высотных атомов, имеющих одно белое кольцо. Здесь k соответствует числу неориентированных ребер f -графа этого атома. Тогда f -граф атомов этой серии не содержит f -графа атома FL_n ($n \geq 1$). По утверждению 7 f -граф атомов этой серии не содержит f -графа атома FL_n ($n \geq 1$). Этих атомов счетное число, но для каждого фиксированного k их число ограничено, причем, если зафиксировать какое-либо ориентированное вложение f -графа атома A_k^1 , мы получим еще одну характеристику этого атома — числа n_1 и m_1 . Здесь n_1 означает число

совпадает с циклом $(n, n-1, \dots, 1)$, ребра класса A_1 (соответственно B_1) попарно не зацеплены и для каждого ориентированного цикла f -графа атома верно, что совокупность ребер класса C_1 с концами на одном ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f -графа атома $FL_n (n \geq 1)$.

Доказательство. Докажем необходимость утверждения. Если цикл $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ не совпадает с циклом $(n, n-1, \dots, 1)$, то мы имеем пересечения внешних неориентированных ребер, и в этом случае атом не будет высотным. Если же f -граф атома допускает ориентированное вложение S в плоскость, то в этом вложении исходя из обозначения всех внутренних ребер f -графа ребра класса A_1 будут лежать внутри (если в S ориентированные циклы не лежат один в другом) и вне (если циклы лежат один в другом) соответствующего ориентированного цикла, а ребра класса B_1 — вне (если ребра A_1 внутри) и внутри (если ребра A_1 вне) соответствующего ориентированного цикла. Очевидно, ребра класса A_1 (соответственно B_1) попарно не зацеплены, причем ребра классов A_1 и B_1 не зацеплены ни с какими ребрами класса C_1 , иначе это противоречило бы определению ребер класса C_1 (если какое-то ребро c_1 класса C_1 зацеплено с ребром класса A_1 , то ребро c_1 исходя из обозначения внутренних ребер есть ребро класса B_1). Получим противоречие. Аналогично объясняется, почему ребро класса C_1 не может быть зацеплено с ребром класса B_1 . И по утверждению 7 заключаем, что каждый ориентированный цикл f -графа с совокупностью ребер класса C_1 , имеющих концы на этом ориентированном цикле, не содержит f -графа атома $FL_n (n \geq 1)$.

Докажем достаточность утверждения. Рассмотрим f -граф G атома, имеющего два белых кольца, с условием, что цикл $(i_1, \dots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, \dots, 1)$, ребра класса A_1 (соответственно B_1) попарно не зацеплены и для каждого ориентированного цикла f -графа G совокупность ребер класса C_1 с концами на одном ориентированном цикле вместе с этим циклом не содержит f -графа атома $FL_n (n \geq 1)$. Проверим, что f -граф G допускает ориентированное вложение в плоскость. Действительно, так как цикл $(i_1, \dots, i_n)$ совпадает с циклом $(n, n-1, \dots, 1)$, то мы можем зафиксировать вложение двух ориентированных циклов и внешних ребер f -графа G так, чтобы оба цикла не лежали один в другом и были ориентированы одинаково. Фиксируем это вложение. Далее, вложим в плоскость совокупность ребер класса C_1 (так как по утверждению 7 каждый ориентированный цикл f -графа с совокупностью ребер класса C_1 , имеющих концы на этом ориентированном цикле, допускает вложение в плоскость). Условие, что ребра класса A_1 (соответственно B_1) попарно не зацеплены, позволяет нам погрузить ребра A_1 (соответственно B_1) внутрь (соответственно вне) ориентированного цикла так, чтобы никакие два ребра из класса A_1 (B_1) не пересекались и никакое ребро класса A_1 (B_1) не пересекалось с ребром класса C_1 . Иначе ребро класса A_1 (B_1) было бы зацеплено с ребром класса C_1 , что противоречит обозначениям внутренних ребер f -графа. Сделаем вышеописанное погружение ребер класса A_1 (соответственно B_1) с дополнительными условиями: без самопересечений, без пересечений внешних ребер. Получили ориентированное вложение f -графа в плоскость. Утверждение доказано.

Рассмотрим ориентированное вложение G f -графа атома $X = (P^2, K)$, имеющего два белых кольца, в плоскость. Группа симметрий $\text{Sym}(X)$ атома транзитивно действует на ориентированных циклах G , когда расположения внутренних ребер на одном ориентированном цикле однозначно определяют расположения внутренних ребер на другом ориентированном цикле. Относительно того, как группа симметрий вложения G действует на вершинах внешних ребер на одном ориентированном цикле, определяются расположения внутренних ребер этого цикла. То есть ориентированный цикл должен переходить в себя при поворотах, определяемых $\text{Sym}(G)$. Пример показан на рис. 5. Если есть симметрия ориентированно вложенного f -графа высотного атома (имеющего 2 белых кольца), переводящая выделенную вершину 1 (на рис. 5) в вершину 2, то внутреннее ребро, между концами которого есть только вершина 1, этой же симметрией переведется в ребро, между концами которого есть только вершина 2.

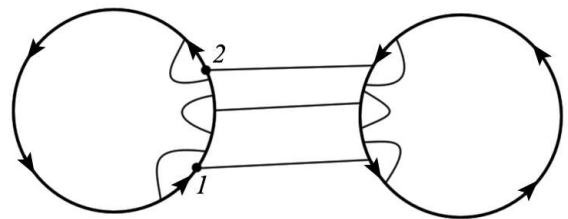


Рис. 5. f -Граф атома $B_{3,3}^1$

Определение 16. Серия атомов $B_{k,l}^1$ ($k, l \geq 1$) — это высотные атомы, которые имеют два белых кольца и симметрия которых транзитивно действует на этих кольцах. Здесь число k соответствует количеству внутренних ребер на каждом ориентированном цикле f -графа этого атома, l — число внешних ребер, соединяющих два ориентированных цикла.

Каждый атом из этой серии должен удовлетворять критерию высотности из утверждения 8, и

внутренние ребра f -графа этого атома определяются в соответствии с рассуждениями, приведенными выше. Пример показан на рис. 5.

4. Основная теорема. Следующее предложение, которое нам понадобится, доказано И. М. Никоновым [7].

Предложение 1. *Атомы, получаемые из максимально симметричных высотных атомов путем удвоения ребер, являются высотными, и группа их симметрий транзитивна на вершинах. Если P — максимально симметричный атом и G — его f -граф, то после удвоения неориентированных ребер атома P мы получим новый атом P' с соответствующим f -графом G' .*

Теорема 2 (В. А. Трифонова). *Любой высотный атом с группой симметрий, транзитивной на вершинах атома и транзитивной на кольцах белого цвета, изоморфен одному из атомов следующего списка: $D_n (n \geq 3)$, $C_n (n \geq 1)$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , $D_n'' (n \geq 2)$, $P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', P_5''$, $E_n (n \geq 1)$, $F_n (n \geq 1)$, Q_1, Q_3 .*

Конкретное описание всех атомов этого списка дано в статье И. М. Никонова [7].

Доказательство. Пусть $X = (P^2, K)$ — высотный атом с группой симметрий, транзитивной на кольцах белого цвета и вершинах атома, и G — его f -граф. Тогда по утверждению 4 все ориентированные циклы G содержат одинаковое количество вершин. Опираясь на результаты статьи [7], выпишем высотные атомы, имеющие f -граф, все ориентированные циклы которого содержат одинаковое количество вершин, а группа симметрий каждого атома из списка транзитивно действует на вершинах атома: $D_n (n \geq 3)$, $C_n (n \geq 1)$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , $D_n'' (n \geq 2)$, $P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', P_5''$, $E_n (n \geq 1)$, $F_n (n \geq 1)$, Q_1, Q_3 . Напомним, что $C_2 = D_2$, $E_1 = D_1$, $F_1 = A_2$.

По утверждению 5 группа симметрий максимально симметричных высотных атомов транзитивно действует на кольцах обоих цветов, а в статье [7] доказано транзитивное действие группы симметрий на вершинах атома. Напомним список максимально симметричных высотных атомов: A_2 , $D_n (n \geq 1)$, $C_n (n \geq 1)$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 .

Согласно предложению 1, поскольку в f -графе максимально симметричного атома симметрии действуют транзитивно на вершинах графа G , то они задают транзитивное действие на ориентированных циклах графа G' . Поэтому атомы, получаемые из максимально симметричных высотных атомов удвоением ребер, являются высотными, группа их симметрий транзитивна на вершинах и на кольцах белого цвета. Список этих атомов имеет вид: A_2'' , $D_n'' (n \geq 1)$, $C_n'' (n \geq 1)$, $P_1'', P_2'', P_3'', P_4'', P_5''$. Напомним, что $A_2'' = F_2$, $C_n'' = C_{2n} (n \geq 1)$, $D_1'' = E_2$.

Отметим, что f -граф атомов серии $E_n (n \geq 1)$, $F_n (n \geq 1)$ имеет один ориентированный цикл, значит, каждый из атомов этой серии имеет одно белое кольцо.

При этом атом $Q_1 = R_2$ и $Q_3 = R_7$. Теорема доказана.

Автор приносит благодарность академику А. Т. Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, а также И. М. Никонову за ценные замечания и указания.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-6399.2018.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
2. Мантуров В. О. Бифуркации, атомы и узлы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. № 1. 3–8.
3. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, № 6. 1276–1307.
4. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, № 3. 546–575.
5. Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // Матем. сб. 2008. **199**, вып. 9. 3–96.
6. Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. Симметричные и неприводимые абстрактные многогранники // Современные проблемы математики и механики / Под ред. А. Т. Фоменко. М.: Изд-во МГУ, 2009. 58–97.
7. Никонов И. М. Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 6. 1–10.
8. Волчанецкий Н. В., Никонов И. М. Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 2. 3–6.
9. Fomenko A. T., Konyaev A. Yu. New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems // Topol. and its Appl. 2012. **159**. 1964–1975.

10. *Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т.* Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях // Докл. РАН. Математика. 2012. **446**, № 6. 615–617.
11. *Кудрявцева Е.А., Фоменко А.Т.* Любая конечная группа является группой симметрий некоторой карты (“атома-бифуркации”) // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 3. 21–29.
12. *Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические билиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. № 4. 20–67.
13. *Vedyushkina (Fokicheva) V.V., Fomenko A.T.* Billiard systems as the models for the rigid body dynamics // Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control. Vol. 69 / Ed. by V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky. Springer Int. Publ., Switzerland, 2016. 13–32.
14. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые билиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Докл. РАН. Математика. 2015. **465**, № 2. 1–4.
15. *Fomenko A.T., Nikolaenko S.S.* The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid // J. Geom. and Phys. 2015. **87**. 115–133.
16. *Fomenko A.T., Kantonistova E.O.* Topological classification of geodesic flows on revolution 2-surfaces with potential // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications. Ch. 2 / Ed. by V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky. Cham; Heidelberg; N.Y.; Dordrecht; London: Springer Int. Publ., Switzerland, 2015. 11–17.

Поступила в редакцию
27.10.2017

Механика

УДК 532.528

О СЛАБО ВОЗМУЩЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
ВСТРЕЧНЫХ ПЛОСКИХ СТРУЙ
ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИС. Л. Толоконников¹

Рассматривается задача о встречном нестационарном соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости, вытекающих из каналов. Нестационарность течения связана с изменением давления в бесконечно удаленных точках каналов. Предполагается, что скорости возмущенного течения малы по сравнению со скоростями стационарного течения. Для решения задачи применен метод Гуревича–Хаскинда. Для комплексного потенциала возмущенного течения сформулирована и решена смешанная краевая задача. В случае прямолинейных каналов и гармонических законов изменения давления в бесконечно удаленных точках каналов численно исследованы уравнения для отклонения свободных границ от стационарного положения.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, нестационарность, соударение струй.

The problem of unsteady collision of counter-moving inviscid incompressible flat jets outflowing from channels is considered. The unsteady pattern of the flow is connected with a change of pressure at infinitely remote points of the channels. It is assumed that the velocity of the perturbed flow is small compared to the velocity of the steady flow. The Gurevich–Haskind method is used to solve the problem. A mixed boundary value problem for the complex potential of the perturbed flow is formulated and solved. For the case of rectilinear channels and harmonic laws of pressure variation at infinitely remote points, the equations for the deviation of free boundaries from their steady-state positions are numerically studied.

Key words: inviscid incompressible fluid, unsteadiness, jet flow.

В работе [1] рассмотрена задача о слабо возмущенном соударении плоских встречных струй, вытекающих из симметричных каналов, при симметричных законах изменения давления или скорости на бесконечности в каналах. Задача решена методом Гуревича–Хаскинда [2–4].

В настоящей работе в аналогичной постановке решена задача о встречном соударении струй, вытекающих из каналов различной геометрии, при различных законах возмущения давления в бесконечно удаленных точках каналов.

Рассмотрим установившееся течение, схема которого изображена на рис. 1, а. Жидкость считается идеальной, несжимаемой, невесомой. Постоянная Бернулли одинакова во всем стационарном

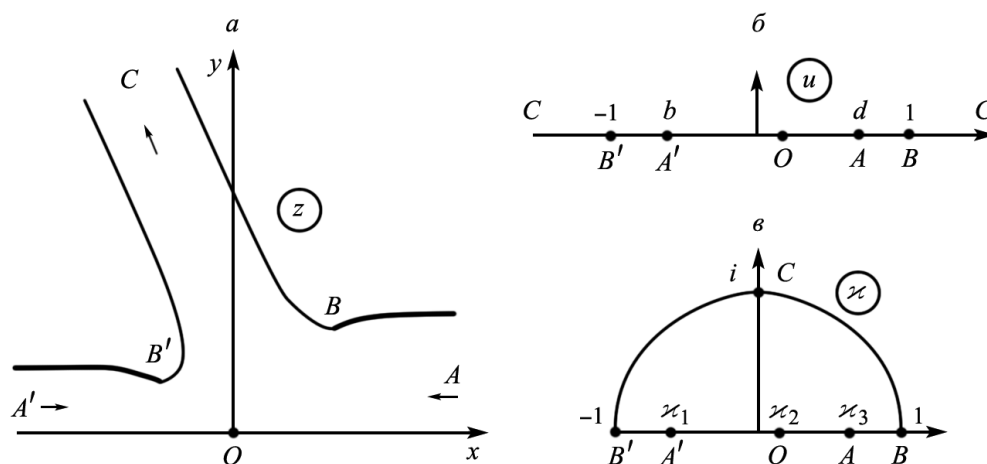


Рис. 1. Схема течения (а) и параметрические области (б, в)

¹ Толоконников Сергей Львович — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: tolsl@mech.math.msu.su.

течении. Ширина каналов в точках A и A' равна h_A и $h_{A'}$ соответственно. Точка O — критическая точка стационарного течения; точка C — бесконечно удаленная точка струи; B, B' — точки отрыва свободных границ от стенок каналов.

На стационарное течение накладываются нестационарные возмущения, вызванные следующими изменениями давления P_A и $P_{A'}$ в бесконечно удаленных точках A и A' каналов:

$$P_A = P_{0A} + \rho V_{0C}^2 g_A(\tau), \quad P_{A'} = P_{0A'} + \rho V_{0C}^2 g_{A'}(\tau), \quad (1)$$

где ρ — плотность жидкости; $P_{0A}, P_{0A'}$ — стационарные значения давления в бесконечно удаленных точках A и A' каналов; V_{0C} — скорость установившегося течения на свободных поверхностях; $\tau = \frac{V_{0C}^2 t}{q_A}$; t — время; q_A — расход в канале A ; $g_A(\tau), g_{A'}(\tau)$ — заданные функции времени.

Индекс “0” соответствует характеристикам стационарного течения, индекс “C” — свободной поверхности, а “A”, “A'” — бесконечно удаленным точкам каналов.

На свободной поверхности давление не меняется, стенки каналов неподвижны. Предполагается, что скорости возмущенного течения малы по сравнению со скоростями стационарного течения.

В качестве параметрической области используется верхняя полуплоскость u (рис.1, б).

Комплексный потенциал неустановившегося течения представляется в виде суммы комплексных потенциалов установившегося и возмущенного течений:

$$W(u, t) = w_0(u) + w(u, t).$$

Для стационарного течения имеем

$$w_0(u) = \frac{q_{A'}}{\pi} \ln(u - b) + \frac{q_A}{\pi} \ln(u - d); \quad z = z(u), \quad (2)$$

где $q_{A'}$ — расход в точке A' . Зависимость $z(u)$ и значения параметров b и d находятся из решения стационарной задачи.

Сформулируем краевую задачу для изображения по Лапласу функции $w(u, t) = \varphi(u, t) + i\psi(u, t)$ [4]. На неподвижных стенках сосуда $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, поэтому $\psi = \psi(t)$. Так как считаем $g_A(\tau)$ и $g_{A'}(\tau)$ ограниченными, а для изменения расхода на бесконечности в каналах необходимо иметь бесконечно большие значения давления, то $\psi = 0$ на $B'A', A'A, AB$ [5].

С помощью интеграла Коши–Лагранжа, используя интеграл Бернулли, с точностью до $O(\nabla \varphi)$ получим

$$P - P_{0C} = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{V}_{0C}, \nabla \varphi) \right]. \quad (3)$$

Так как давление на свободной границе струй постоянно, из (3) будем иметь следующее соотношение на свободной поверхности [2]: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{0C}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} = 0$. После перехода к безразмерному времени τ

получим $\frac{1}{q_A} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_0} = 0$. Последнее уравнение после перехода к изображениям по Лапласу легко

интегрируется: $\frac{s}{q_A} \bar{\varphi} + \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi_0} = 0$, откуда $\frac{1}{q_A} \bar{\varphi}(s, \varphi_0) = D_i(s) e^{-\frac{s}{q_A} \varphi_0}$ ($i = 1, 2$). Индекс 1 относится к свободной границе $B'C$, индекс 2 — к BC . Функции $D_1(s)$ и $D_2(s)$ будут определены далее.

С использованием (2) получаем

$$\exp \left(-\frac{s}{q_A} \varphi_0(u) \right) = \exp \left(-\frac{s}{\pi} \ln \left| (u - b)^{\lambda_1} (u - d) \right| \right) = \left| (u - b)^{\lambda_1} (u - d) \right|^{-s/\pi},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{q_{A'}}{q_A} = \frac{V_{0A'} h_{A'}}{V_{0A} h_A} = \frac{\alpha_{A'}}{\alpha_A} \lambda, \quad \alpha_{A'} = \frac{V_{0A'}}{V_{0C}}, \quad \alpha_A = \frac{V_{0A}}{V_{0C}}, \quad \lambda = \frac{h_{A'}}{h_A}.$$

Поэтому на свободной границе $B'C$ ($u \in (-\infty, -1)$)

$$\operatorname{Re} \frac{1}{q_A} \bar{w}(u, s) = f_1(u, s) = D_1(s) \left[(-u + b)^{\lambda_1} (-u + d) \right]^{-s/\pi},$$

на свободной границе BC ($u \in (1, \infty)$)

$$\operatorname{Re} \frac{1}{q_A} \bar{w}(u, s) = f_2(u, s) = D_2(s) \left[(u - b)^{\lambda_1} (u - d) \right]^{-s/\pi}.$$

Следовательно, аналитическая в верхней полуплоскости функция $\bar{w}(u, s)$ удовлетворяет смешанным краевым условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{q_A} \bar{w}(u, s) = 0, & u \in (-1, 1); \\ \operatorname{Re} \frac{1}{q_A} \bar{w}(u, s) = \begin{cases} D_1(s) f_1(u, s), & u \in (-\infty, -1); \\ D_2(s) f_2(u, s), & u \in (1, \infty). \end{cases} \end{cases}$$

Решение смешанной задачи дает формула Келдыша–Седова [6]

$$\frac{1}{q_A} \bar{w}(u, s) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{\pi i} \left[-D_1(s) \int_{-\infty}^{-1} \frac{f_1(\xi, s)}{\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - u)} d\xi + D_2(s) \int_1^{\infty} \frac{f_2(\xi, s)}{\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - u)} d\xi \right]. \quad (4)$$

Формулу (4) можно переписать в следующем виде (здесь и в дальнейшем для сокращения записи будем опускать аргумент s в функциях $f_1(u, s)$ и $f_2(u, s)$):

$$\frac{1}{q_A} \bar{w}(u, s) = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{(\xi [D_1(s) f_1(-\xi) + D_2(s) f_2(\xi)] + u [D_2(s) f_2(\xi) - D_1(s) f_1(-\xi)]) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi^2 - u^2)}. \quad (5)$$

Функции $D_1(s)$ и $D_2(s)$ определяются известными законами (1) изменения давления в точках A и A' . Так как в бесконечно удаленных точках A и A' каналов $\nabla \varphi_A = 0$, $\nabla \varphi_{A'} = 0$, то из (1), (3) и (4) находим

$$-\bar{g}_{A'}(s) = \frac{s}{q_A} \bar{\varphi}(b), \quad -\bar{g}_A(s) = \frac{s}{q_A} \bar{\varphi}(d). \quad (6)$$

Обозначим

$$J_1(u) = \int_1^{\infty} \frac{f_1(-\xi)}{\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + u)} d\xi, \quad J_2(u) = \int_1^{\infty} \frac{f_2(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - u)} d\xi.$$

Тогда из (4) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_A} \bar{\varphi}(b) &= \frac{\sqrt{1 - b^2}}{\pi} (D_1(s) J_1(b) + D_2(s) J_2(b)), \\ \frac{1}{q_A} \bar{\varphi}(d) &= \frac{\sqrt{1 - d^2}}{\pi} (D_1(s) J_1(d) + D_2(s) J_2(d)). \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (7) в (6) приводит к системе линейных уравнений для определения $D_1(s)$ и $D_2(s)$.

Для нахождения деформации свободных границ используем кинематическое условие [2]. Нормальная составляющая η отклонения свободной поверхности от стационарного положения удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + V_{0C}^2 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_0} = -V_{0C} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_0},$$

которое в изображениях по Лапласу записывается в виде

$$\frac{s}{h_A} \bar{\eta} + \frac{q_A}{h_A} \frac{d\bar{\eta}}{d\varphi_0} = -\alpha_A \frac{d\bar{\psi}}{d\varphi_0}. \quad (8)$$

Чтобы решить это дифференциальное уравнение, следует из (5) определить явный вид функции $\bar{\psi}(u, s)$. Для свободной границы BC ($u > 1$, $\operatorname{Im} u = 0$) после замены переменных $\frac{1}{\xi} = \cos \frac{\theta}{2}$, $\frac{1}{u} = \cos \frac{\alpha}{2}$,

где $\alpha, \theta \in [0, \pi)$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_A} \bar{\psi}(\alpha, s) = & \frac{D_1(s)}{\pi} \left[-\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \int_0^\pi \frac{f_1(-1/\cos \frac{\theta}{2}) d\theta}{\cos \alpha - \cos \theta} + \sin \frac{\alpha}{2} \int_0^\pi \frac{f_1(-1/\cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\cos \alpha - \cos \theta} \right] + \\ & + \frac{D_2(s)}{\pi} \left[-\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \int_0^\pi \frac{f_2(1/\cos \frac{\theta}{2}) d\theta}{\cos \alpha - \cos \theta} - \sin \frac{\alpha}{2} \int_0^\pi \frac{f_2(-1/\cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\cos \alpha - \cos \theta} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для вычисления входящих в (9) интегралов представим следующие функции разложениями Фурье:

$$\begin{aligned} f_1\left(-\frac{1}{\cos \theta/2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) \cos n\theta, & f_1\left(-\frac{1}{\cos \theta/2}\right) \cos \frac{\theta}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s) \cos n\theta, \\ f_2\left(\frac{1}{\cos \theta/2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(s) \cos n\theta, & f_2\left(\frac{1}{\cos \theta/2}\right) \cos \frac{\theta}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n(s) \cos n\theta. \end{aligned}$$

С использованием формулы $\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \alpha - \cos \theta} d\theta = -\frac{\pi}{\sin \alpha} \sin n\alpha$ из (9) находим

$$\frac{1}{q_A} \bar{\psi}(\alpha, s) = \frac{D_1(s)}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin n\alpha}{\cos \alpha/2} \right) + \frac{D_2}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\sin n\alpha}{\cos \alpha/2} \right). \quad (10)$$

Уравнение (8) запишем в виде

$$\frac{s}{q_A h_A} \frac{d\varphi_0}{d\alpha} \bar{\eta} + \frac{1}{h_A} \frac{d\bar{\eta}}{d\alpha} = -\frac{\alpha_A}{q_A} \frac{d\psi}{d\alpha}.$$

Подставляя (10) в последнее соотношение, получаем уравнение для нахождения отклонения свободной границы BC :

$$\begin{aligned} & \frac{s}{h_A} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda_1}{1 - b \cos \alpha/2} + \frac{1}{1 - d \cos \alpha/2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \bar{\eta} + \frac{1}{h_A} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \frac{d\bar{\eta}}{d\alpha} = \\ & = -\frac{\alpha_A}{2} \left[D_1(s) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\alpha - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\alpha - \cos \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos n\alpha \right) + \right. \\ & \left. + D_2(s) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos n\alpha + \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \cos n\alpha \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) решается при условии $\bar{\eta}(0, s) = 0$.

Чтобы найти уравнение для отклонения границы $B'C$, из (5) определяется зависимость $\bar{\psi}(u, s)$ при $u < -1$, используется замена переменных $\frac{1}{\xi} = \cos \frac{\theta}{2}$, $\frac{1}{u} = -\cos \frac{\alpha}{2}$, $\alpha, \theta \in [0, \pi)$ и после выполнения преобразований находится уравнение, аналогичное (11).

Рассмотрим далее частный случай прямолинейных каналов. Установившееся течение для прямолинейных каналов исследовалось в [7, 8]. Однако для расчета неустановившегося течения удобнее использовать несколько иное, чем предложенное в указанных работах, расположение точек на параметрической области.

Решение стационарной задачи легко получить отображением комплексной скорости $\frac{dw_0}{dz}$ и комплексного потенциала w_0 на полукруг единичного радиуса. Соответствие точек физической z и параметрической $\mathcal{K}$ плоскостей указано на рис. 1, в.

Искомые отображения строятся методом особых точек:

$$\frac{dw_0}{V_0 dz}(\kappa) = -\frac{\kappa - \kappa_3}{1 - \kappa_3 \kappa}, \quad (12)$$

$$\frac{dz}{h_A d\kappa} = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(1 - \kappa_1 \kappa_2)(1 + \kappa_2^2)(1 - \kappa_3 \kappa)^2(1 - \kappa^2)}{\pi(1 - \kappa_2 \kappa_3)^2(\kappa - \kappa_1)(1 - \kappa_1 \kappa)(\kappa - \kappa_2)(1 - \kappa_2 \kappa)(1 + \kappa^2)}. \quad (13)$$

Соотношения для неизвестных параметров, входящих в эти формулы, имеют вид

$$\frac{\kappa_3 - \kappa_1}{1 - \kappa_1 \kappa_3} = \alpha_{A'}, \quad \frac{\kappa_2 - \kappa_3}{1 - \kappa_2 \kappa_3} = \alpha_A, \quad \lambda = \left(\frac{1 - \kappa_1 \kappa_3}{1 - \kappa_2 \kappa_3} \right)^2 \frac{1 + \kappa_2^2}{1 + \kappa_1^2}. \quad (14)$$

Первые два из этих соотношений связывают параметры $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ со значениями скоростей в бесконечно удаленных точках каналов, а третье представляет собой выражение для отношения толщин каналов. При заданных $\lambda, \alpha_{A'} < 1$ и $\alpha_A < 1$ из соотношений (14) единственным образом находят параметры $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$. Формулы (12) и (13) определяют все интересующие нас физические и геометрические характеристики стационарного течения.

Из формулы (13) интегрированием находится функция $\frac{1}{h_A} z(\kappa) = F(\kappa)$. Конформное отображение верхней полуплоскости u на параметрический полукруг κ имеет вид $\kappa = u/(1 + \sqrt{1 - u^2})$. Поэтому искомая функция $z(u)$ определяется выражением $z(u)/h_A = F(u/(1 + \sqrt{1 - u^2}))$. Зависимость $\kappa(u)$ позволяет также найти используемые для решения нестационарной задачи параметры: $b = 2\kappa_1/(1 + \kappa_1^2), d = 2\kappa_2/(1 + \kappa_2^2)$.

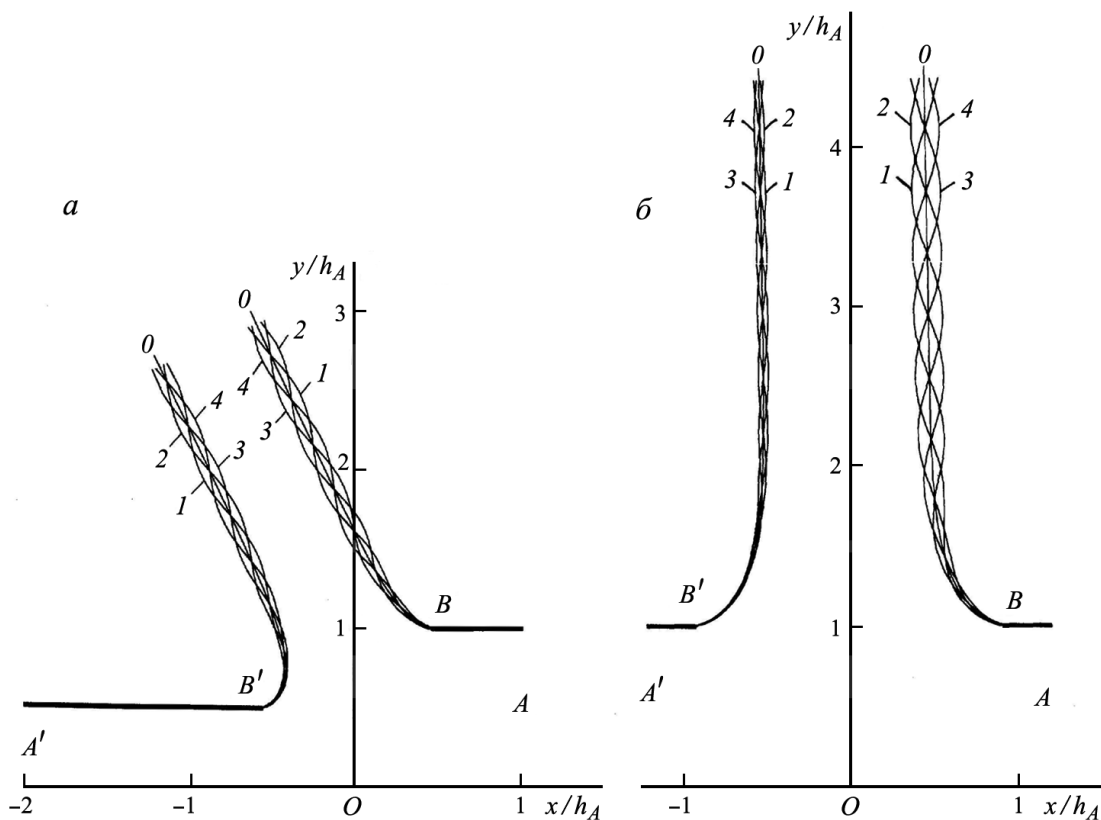


Рис. 2. Форма свободной границы FB в моменты времени $\tau = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ (кривые 1–4 соответственно) при значениях $\omega = 1; \lambda = 0,5; \alpha_A = 0,4; \alpha_{A'} = 0,5; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,05$ (а) и $\omega = 1; \lambda = 1; \alpha_A = \alpha_{A'} = 0,5; \varepsilon_1 = 0,02; \varepsilon_2 = 0,04$ (б); кривые 0 — стационарные свободные границы

Расчеты проводились для случая прямолинейных каналов при гармонических законах изменения давления на бесконечности в каналах, имеющих одинаковую угловую частоту ω , но различные амплитуды: $g_{A'}(\tau) = \varepsilon_1 e^{2j\omega\tau}, g_A(\tau) = \varepsilon_2 e^{2j\omega\tau}$. Можно считать при этом, что $w(u, \tau)$ также является

периодической по времени функцией, изменяющейся с той же частотой. Тогда обратное преобразование производить не требуется, решение определяется самими изображениями при замене $s = 2j\omega$.

Характер деформации свободных границ не имеет качественных отличий от рассмотренной в [1] симметричной задачи. На участке, соответствующем выравниванию формы стационарной струи, неустановившиеся свободные поверхности представляют собой бегущие волны, движущиеся со скоростью, равной скорости V_{0C} на свободной границе стационарного течения. Амплитуда этих волн растет при увеличении амплитуд ε_1 и ε_2 возмущающих воздействий, а длина изменяется обратно пропорционально угловой частоте ω .

На рис. 2, а, б представлены расчеты формы нестационарной свободной поверхности при $\omega = 1$ для различной геометрии установившегося течения и для различных амплитуд изменения давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16-01-00519, 15-01-00361).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников С.Л. О слабо возмущенном симметричном соударении струй идеальной несжимаемой жидкости // Фунд. и прикл. матем. 1999. 5, № 3. 861–870.
2. Гуревич М.И., Хаскинд М.Д. Струйное обтекание контура, совершающего малые колебания // Прикл. матем. и механ. 1953. XVII, вып. 5. 58–65.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
4. Кузнецов А.В. Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
5. Кузнецов А.В., Сайкин С.С. Нестационарное истечение несжимаемой жидкости из сосуда // Вопросы прикладной математики и механики. Вып. 2. Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1972. 46–54.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. Коновалов И.М. Определение коэффициента и линии сжатия при истечении жидкости из бокового отверстия в канале // Тр. Ленингр. ин-та инж. водн. транспорта. 1949. Вып. XV. 18–25.
8. Талиев В.Н. Попутное истечение жидкости из канала постоянного сечения // Докл. АН СССР. 1954. XCIV, № 4. 122–126.

Поступила в редакцию
05.04.2017

УДК 531.396

АЛГОРИТМ МИНИМАКСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. В. Александров¹, Х. А. Рамирез Гутьерез²

В статье используются необходимые условия оптимальности для решения задачи минимаксной стабилизации линейных управляемых систем третьего порядка, когда не выполняются условия Калмана.

Ключевые слова: метод шатров, двойственный конус, стабилизация.

The necessary optimality conditions are used to solve the problem of minimax stabilization for linear controlled systems of third order when the Kalman conditions are not valid.

Key words: method of tents, dual cone, stabilization.

1. Постановка задачи оптимизации. Рассмотрим при $t_1 = \infty$ редукцию интегрального функционала [1]:

$$J(u, x(0)) = \int_0^{t_1} (x^T G x + s_0 u^2) dt = \int_0^{t_1} x^T (G + s_0 k k^T) x dt = \int_0^{t_1} x^T S_2(k) x dt = x^T(0) H(k) x(0).$$

¹ Александров Владимир Васильевич — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vladimiralexandrov366@hotmail.com.

² Рамирез Гутьерез Хомайра Атенеа — асп. физ.-мат. ф-та Автономного ун-та штата Пуэбла (Мексика), e-mail: athe9ramirez@hotmail.com.

Требуется найти линейный алгоритм минимаксной стабилизации

$$\varphi_0(k) = \max_{|x(0)| \leq 1} J(u, x(0)) \rightarrow \min_{k \in Q_0} \quad (1)$$

для системы

$$\dot{x} = Ax + bu = (A + bk^T)x, \quad |x(0)| \leq 1. \quad (2)$$

Предполагается, что $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$, т.е. система (2) полностью управляема, $G = G^T > 0$, $s_0^T = s_0 \geq 0$, $H = H^T \geq 0$, где матрица $H(k)$ есть решение матричного алгебраического уравнения Ляпунова $A_c^T H(k) + H(k) A_c = -S_2(k)$ при $k \in Q_0$ и $Q_0 \subset \{k \in R^n | \operatorname{Re} \lambda_j \leq -\alpha_0, \alpha_0 > 0\} = Q_1$. Итак, действительная часть любого собственного числа матрицы A_c отрицательна, $A_c = A + bk$ и рассматривается случай, когда система (2) не колебательная, т.е. любой точке множества $Q_2(k)$ в пространстве параметров соответствует характеристический многочлен с действительными корнями.

Таким образом, предполагается, что множество $Q_0 \subset Q_1 \cap Q_2$ замкнуто и ограничено.

2. Уточнение постановки задачи для $n = 3$. Для систем третьего порядка постановка задачи выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad S_2 = G, \quad s_0 = 0, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

Так как система (2) полностью управляема, то имеем общий случай полностью управляемых систем третьего порядка.

Чтобы построить множество Q_1 , воспользуемся условием Гурвица для характеристического многочлена $P(\lambda) = \lambda^3 + p_0\lambda^2 + q_0\lambda + r_0$ матрицы A_c :

$$p_0(k, a) > 0, \quad q_0(k, a) > 0, \quad r_0(k, a) > 0; \quad R_0 = p_0(k, a)q_0(k, a) - r_0(k, a) > 0.$$

При построении множества Q_2 учтем необходимое и достаточное условие существования только действительных корней характеристического многочлена P [2]:

$$q_0(k, a) \leq \frac{p_0^2(k, a)}{3}, \quad r^-(p_0, q_0) \leq r \leq r^+(p_0, q_0), \quad \text{где} \quad r^\pm = \frac{1}{3}p_0q_0 \pm \frac{2}{27}(p_0^2 - 3q_0)^{3/2}.$$

Чтобы выполнялось включение $Q_0 \subset \{k \in R^n | \operatorname{Re} \lambda_j \leq -\alpha_0\}$, сделаем замену $\nu = \lambda + \alpha_0$ для многочлена $P(\lambda) = (\nu - \alpha_0)^3 + p_0(\nu - \alpha_0)^2 + q_0(\nu - \alpha_0) + r_0$ и воспользуемся условием Гурвица для редуцированного многочлена

$$p(\nu) = \nu^3 + (-3\alpha_0 + (a_1 - k_3))\nu^2 + (3\alpha_0^2 - 2(a_1 - k_3)\alpha_0 + (a_2 - k_2))\nu - \alpha_0^3 + (a_1 - k_3)\alpha_0^2 - (a_2 - k_2)\alpha_0 + (a_3 - k_1) = 0.$$

Это дает возможность получить замкнутое множество Q_1 . Таким образом, множества Q_1 , Q_2 и Q_0 ($Q_0 \subset Q_1 \cap Q_2$) являются замкнутыми множествами. Предполагается дополнительно, что Q_0 — ограниченное множество.

3. Формулировка необходимых условий оптимальности [1]. Для решения задачи (1)

$$\varphi_0(k) = \max_{|x(0)|=1} x^T(0)H(k)x(0) \rightarrow \min_{k \in Q_0}, \quad k \in Q_0,$$

найдем собственные числа $\mu_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ (здесь $n = 3$), матрицы $H(k)$ и определим эквивалентный функционал $\varphi_1(k) = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i(k)$.

Предположим, что $k^0 \in Q_0$ есть точка абсолютного минимума функции $\varphi_1(k)$ на замкнутом множестве Q_0 . Для формулировки необходимого условия оптимальности введем множество активных индексов $I(k)$: $j \in I(k)$, если $\mu_j(k) = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i(k)$, и построим множества $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ в пространстве параметров $k_1, k_2, \dots, k_m \in R^m$ ($m = 1, 2, 3$):

$$Q_i = \{k \in R^m \mid \mu_i(k) < \varphi_1(k^0), \quad k \in Q_0\} \cup \{k^0\}.$$

Если $i \notin I(k^0)$, то точка k^0 является внутренней точкой множества Q_i и поэтому, как показано в [1], Q_i не участвует в формулировке необходимых условий оптимальности. Следовательно, необходимо использовать только множество Q_0 и множества с активными индексами.

Если множество Q_0 выпуклое, то аппроксимирующим конусом K_0 этого множества в окрестности точки k^0 является опорный конус [1]. Двойственным конусом для K_0 является $K_0^* = \{a \in R^m \mid a^T(k - k^0) \leq 0, \quad k \in K_0(k^0)\}$, двойственным конусом $K_j^*, j \in I(k^0)$, — луч $\nu_j \frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k}, \nu_j \geq 0$ [3].

Необходимые условия оптимальности [1] сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Если k^0 есть точка минимума функции $\varphi_1(k)$ на множестве Q_0 , то существуют множители Лагранжа $\nu_j \geq 0, j \in I(k^0)$, и двойственный вектор $a \in K_0^*$, такие, что выполняются условия (суммирование ведется на множестве активных индексов):

$$\sum \nu_j + |a| \neq 0, \quad (3)$$

$$\sum \nu_j \frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} + a^T = 0. \quad (4)$$

Вектор наихудших начальных условий $x_0(0)$ есть собственный вектор матрицы $H(k^0)$ [1].

Если для $j \in I(k^0)$ вектор $\frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} = 0$, то, положив $\nu_j = 1, \nu_s = 0, s \in I(k^0), s \neq j$ и $a = 0$, получим условия (3) и (4), которые соответствуют в этом случае теореме Ферма, когда k^0 является внутренней точкой множества Q_0 .

4. Описание алгоритма отыскания оптимальных параметров.

1. Проверка условия полной управляемости $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$.
2. Построение множества Q_0 .
3. Нахождение матрицы $H(k)$ как решения алгебраического уравнения $A_c^T(k)H + HA_c(k) = -S_2(k)$.
4. Нахождение максимальных собственных чисел матрицы $H(k)$

$$\mu_j(k) = \max_{1 \leq i \leq 3} \mu_i(k),$$

где $\det(\mu_i E_3 - H) = 0$.

5. Применение теоремы Ферма для поиска внутренних стационарных точек множества Q_0 .
6. Применение необходимых условий оптимальности (3) и (4) при любом $k \in \text{bd } Q_0$:
 - 6.1) для вершин (угловых точек) множества Q_0 ;
 - 6.2) для граничных линий множества Q_0 ;
 - 6.3) для граничных поверхностей множества Q_0 .
7. Описание результатов решения задачи минимаксной стабилизации.

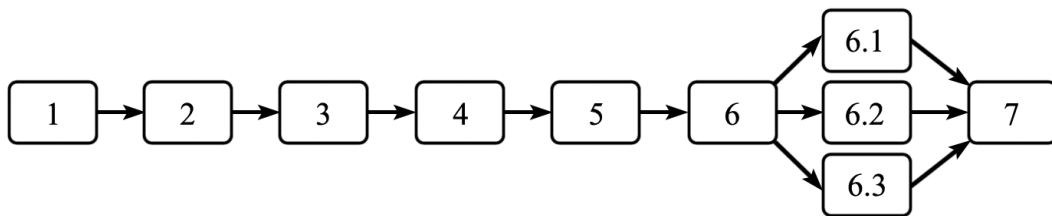


Рис. 1. Схема алгоритма

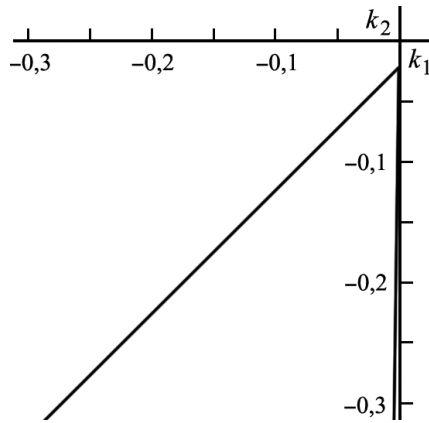
Схема алгоритма представлена на рис. 1.

5. Применение алгоритма для решения конкретной задачи. Рассмотрим задачу минимаксной стабилизации, когда $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0, k_3 = 0$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad S_2 = G, \quad s_0 = 0, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим применение алгоритма по предложенным семи этапам.

1. При заданных коэффициентах системы (2) имеем $\det(b, Ab, A^2b) = -1 \neq 0$.
2. Для построения множества Q_0 при $\alpha_0 = 0,01$ рассмотрим характеристическое уравнение матрицы A_c и получим описание замкнутого множества Q_1 :

Рис. 2. Множество Q_1

$$k_2 \leq -0,002, \quad k_2 \geq -0,0099 + 100k_1, \quad k_2 \leq 1,02k_1 - 0,0192.$$

Необходимые и достаточные условия наличия только действительных корней [2]

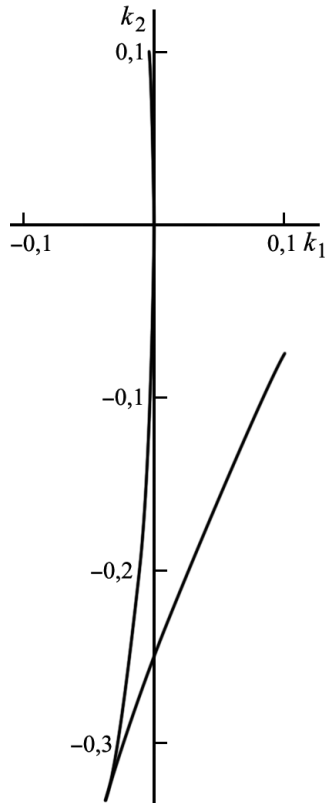
$$-0,33 \leq k_2, \quad 0,074 - \frac{2}{27}(1 + 3k_2)^{3/2} + 0,333k_2 \leq$$

$$k_1 \leq 0,074 + \frac{2}{27}(1 + 3k_2)^{3/2} + 0,333k_2$$

дают описание замкнутого множества Q_2 . Так как $Q_0 \subset Q_1 \cap Q_2$, то пересечением множества Q_1 (рис. 2) и множества Q_2 (рис. 3) является замкнутое и ограниченное множество $Q_0 = Q_1 \cap Q_2$ (рис. 4).

3. Находим решение уравнения Ляпунова — матрицу $H(k)$:

$$H(k) = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{2} - \frac{k_1}{1-k_2} \left[-\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} \right] + \frac{k_2}{2k_1} & -\frac{1}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_2}{1-k_2} \left[-\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} \right] & -\frac{1}{2k_1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_2}{1-k_2} \left[-\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} \right] & \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_1^2} - \frac{k_2}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-k_2} \left[-\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} \right] \\ -\frac{1}{2k_1} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-k_2} \left[-\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} \right] & \frac{1}{1-k_2} \left[-\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2} - \frac{k_2}{2} \right] \end{pmatrix}.$$

Рис. 3. Множество Q_2

4. Для поиска $\mu_j(k) = \max_{1 \leq i \leq 3} \mu_i(k)$ запишем характеристическое уравнение $\det(\mu_i E_3 - H) = 0$ в виде

$$\mu^3 + b_1\mu^2 + c_1\mu + d_1 = 0,$$

где

$$b_1 = \frac{1}{2k_1^2(1-k_2)} - \frac{1}{2(1-k_2)} + \frac{k_2}{2(1-k_2)} - \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_1^2} + \frac{k_2}{2} - \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{2k_1} - \frac{k_1}{2k_1^2(1-k_2)} + \frac{k_1}{2(1-k_2)} - \frac{k_1 k_2}{2(1-k_2)}.$$

Зависимости $c_1(k)$ и $d_1(k)$ от параметров носят аналогичный характер.

С помощью формул Кардано–Виета и соответствующей программы МАТЛАВ проведем численный анализ действительных корней

$$\mu_1 = 2r \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \quad \mu_2 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \quad \mu_3 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) - \frac{b_1}{3},$$

где

$$\cos(\varphi) = \frac{q_1}{r_1}, \quad r_1 = \text{sign}(q_1)(\sqrt{|p_1|}), \quad q_1 = \frac{b_1}{27} - \frac{b_1 c_1}{6} + \frac{d_1}{2}, \quad p_1 = \frac{3c_1 - b_1}{q_1}.$$

Построив графики функций μ_1 , μ_2 и μ_3 (рис. 5), получим $\max_{1 \leq i \leq 3} \mu_i(k) = \mu_2(k) \forall k \in Q_0$.

5. Для поиска стационарных точек внутри замкнутого и ограниченного множества Q_0 , проведя численный анализ на сетке с масштабом 0,0015, получим, что $\frac{\partial \mu_2}{\partial k_1} \neq 0$ и $\frac{\partial \mu_2}{\partial k_2} \neq 0$ внутри этого множества.

6. Применение теоремы для $\forall k \in \text{bd } Q_0$. Рассмотрим двойственные конусы для каждой граничной точки.

6.1. Для вершин множества Q_0 , представленного на рис. 4, получим следующие результаты.

6.1.1: $(-0,00026; -0,021)$. Для этой вершины двойственный конус имеет вид

$$\{\nu = (bc, b) \in K^*, \quad -0,01047 \leq c \leq 0, \quad b > 0\}.$$

То есть не существует двойственного вектора, для которого выполнялось бы равенство (4).

6.1.2: $(-0,00011; -0,02)$. Здесь имеем два случая:

а) когда находимся в четвертом квадранте, т.е. двойственный вектор имеет вид $(a, ac) \in K^*$, $a > 0$ и $-0,01 \leq c \leq 0$, необходимое условие (4) не выполняется;

б) когда находимся в первом квадранте, т.е. двойственный вектор имеет вид $(a, b) \in K^*$, $a > 0$ и $b > 0$, равенство (4) тоже не выполняется.

6.1.3: $(-0,000249, -0,2505)$. В этом случае $333,48 \leq \alpha \leq 359,42$, откуда $-0,4990 \leq c \leq -0,0101$ и двойственный конус имеет вид $\{\nu = (a, ca) \in K^*, a > 0\}$, что влечет невыполнение необходимого условия оптимальности.

6.1.4: $(-0,037, -0,333)$. Здесь имеем три случая:

а) во втором квадранте при $-0,322 \leq c \leq 0$ и $a < 0$ двойственный вектор имеет вид $\nu = (a, ca) \in K^*$, $a < 0$ и равенство (4) выполняется: $(1082,2 - 96,6294) + (a, ac) = 0$ при $a = -1082,2$ и $c = -0,0892$;

б) для третьего квадранта двойственный вектор имеет вид (a, b) , $a < 0$, $b < 0$ и необходимое условие (4) не выполняется;

с) для четвертого квадранта двойственный вектор имеет вид $\nu = (bc, b)$, $-\infty < c \leq -0,34$, $b < 0$ и необходимое условие (4) не выполняется.

6.2. Рассмотрим граничные линии множества Q_0 .

6.2.1: $\{k_2 = -0,021 | -0,00026 < k_1 < -0,00011\}$, $\{\nu = (0, b) \in K^*, b > 0\}$ — двойственный конус. Необходимое условие (4) не выполняется.

6.2.2: $\{k_2 = 100k_1 - 0,0099 | -0,000249 < k_1 < -0,00011\}$, $\{(100a, -a) \in K^*, a > 0\}$ — двойственный конус и необходимое условие (4) не выполняется.

6.2.3: $\{k_1 = 0,074 + 0,33k_2 + \frac{2}{27}(1 + 3k_2)^{3/2} | -0,333 < k_2 < -0,2505\}$, $\{\nu = (b, -\frac{1}{3}(3a + 1)^{1/2} - 0,333) \in K^*, -0,33 \leq a \leq -0,2505, b > 0\}$ — двойственный конус и необходимое условие (4) не выполняется.

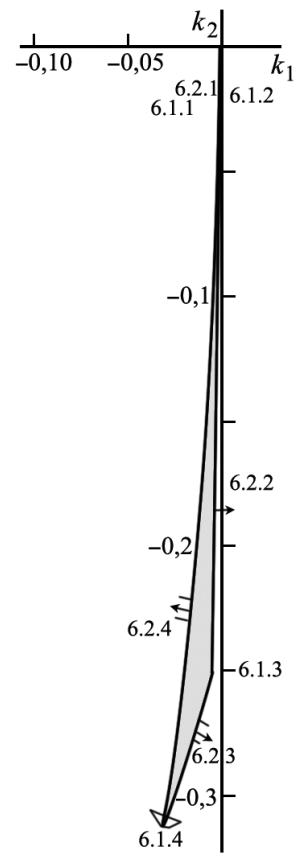


Рис. 4. Множество Q_0

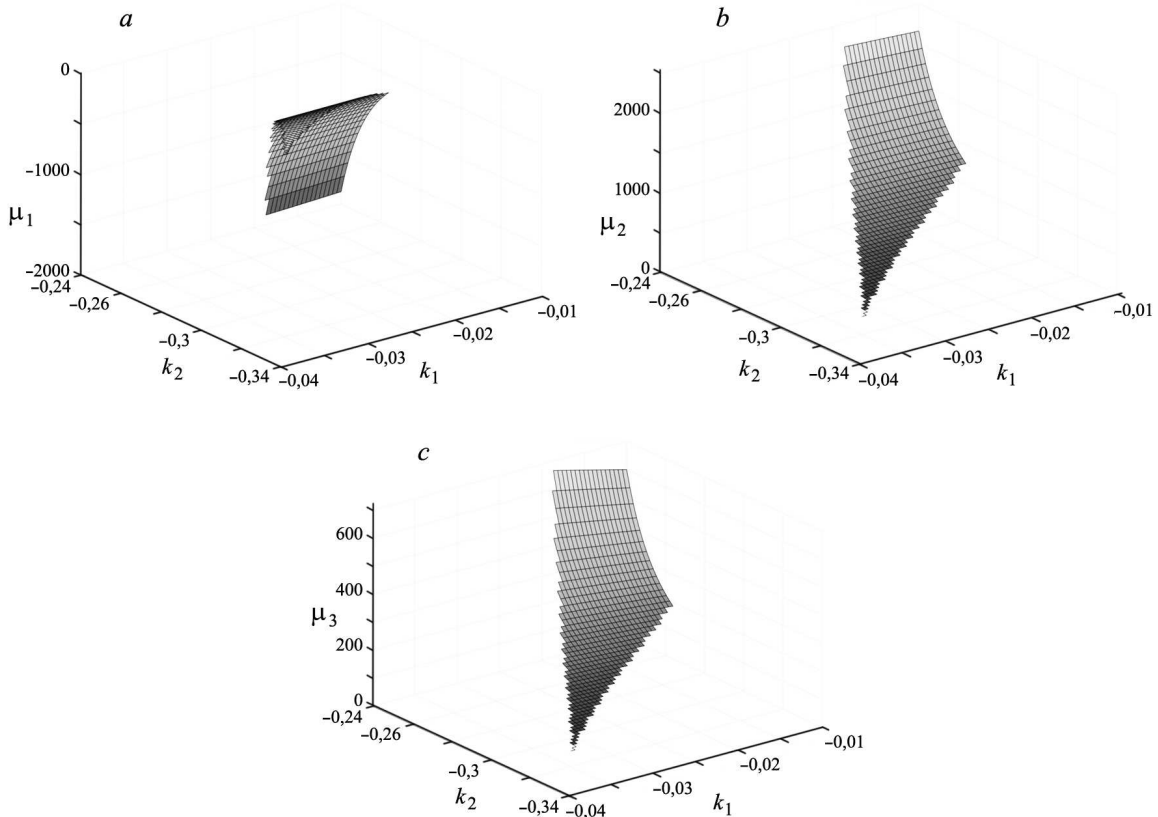


Рис. 5. Корни μ_1 (а), μ_2 (б), μ_3 (с) характеристического многочлена матрицы H

6.2.4: $\{k_1 = 0,074 + 0,33k_2 - \frac{2}{27}(1 + 3k_2)^{3/2} | -0,333 < k_2 < -0,02\}$, $\{\nu = (-b, -\frac{1}{3}(3a + 1)^{1/2} + 0,333) \in K^*, -0,333 \leq a \leq -0,02, b > 0\}$ — двойственный конус и необходимое условие (4) не выполняется.

6.3. Множество Q_0 граничных поверхностей не имеет, так как $m = 2$.

7. Оптимальные параметры $k^0 = (-0,037, -0,333)$, минимальное значение функционала (47,62), наихудшие начальные условия $x_1(0) = 0,8892$, $x_2(0) = 0,3656$, $x_3(0) = -0,2748$ и симметричные им.

Заключение. С помощью метода шатров В.Г. Болтянским [3] было получено первое доказательство принципа максимума Л.С. Понтрягина. В статье [1] метод шатров применяется для решения задач минимаксной оптимизации линейных управляемых систем. В настоящей работе показано, что алгоритм поиска оптимальных параметров на основе необходимых условий [1] успешно работает с линейными системами третьего порядка. Этот алгоритм можно применять, например, когда не выполняются жесткие ограничения оптимальной стабилизации по Калману ($G^T = G > 0$, $s_0^T = s_0 > 0$) или когда отсутствует выпуклость множества Q_0 (рис. 4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 14-50-00029, пп. 1-3 статьи) и РФФИ (проект № 16-01-00683).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alexandrov V.V., Bugrov D.I., Corona Morales G., Tikhonova K.V.* Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing // IMA J. Math. Control and Inform. 2017. **34**. 15–25.
2. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.; Ижевск, 2009.
3. *Болтянский В.Г.* Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи матем. наук. 1975. **XXX**, вып. 3 (183). 3–55.

Поступила в редакцию
19.10.2017

Краткие сообщения

УДК 511

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АВТОНОМНЫХ АВТОМАТОВ
С МАГАЗИННОЙ ПАМЯТЬЮИ. Е. Иванов¹

В работе приводится короткое доказательство того, что автономные автоматы с магазинной памятью генерируют периодические последовательности. Также приводятся верхние и нижние оценки максимальной длины периода выходной последовательности, которую автономный автомат с заданными характеристиками может сгенерировать.

Ключевые слова: автомат с магазинной памятью, автомат с однобуквенным магазином, периодическая последовательность.

The paper presents a short proof that pushdown transducers without input generate periodic sequences. We also provide lower and upper bounds for the maximal period of output sequence that can be generated by a pushdown transducer with fixed characteristics.

Key words: pushdown transducer, realtime one-counter transducer, periodic sequence.

Введение. Автоматы с магазинной памятью появились в начале 60-х годов прошлого века [1, 2] в контексте задачи описания естественного языка. Для регулярных языков, акцептором которых является конечный автомат, и для контекстно-свободных, акцептором которых является автомат с магазинной памятью, наличие распознающего устройства — довольно продуктивный инструмент их изучения. Для конечного автомата удалось построить достаточно богатую теорию. Основные результаты можно найти в [3–5]. Автоматы с магазинной памятью почти не изучались как функциональная система, т.е. как преобразователи последовательностей. В настоящей работе предпринята попытка разобраться в этой области.

Определения. Инициальным детерминированным автоматом с магазинной памятью будем называть “девятку”

$$P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0),$$

где A — входной алфавит, Q — конечное множество состояний, B — выходной алфавит, Γ — алфавит памяти (алфавит ленты магазина), $\varphi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow B$ — функция выхода, $\eta : A \times Q \times (\Gamma \cup \lambda) \rightarrow \Gamma^*$ — функция памяти, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $\gamma_0 \in \Gamma^*$ — начальная запись в магазине.

Функционирование P можно определить с помощью системы канонических уравнений, которые задают в каждый момент времени t состояние автомата $q(t)$, записанное в магазине слово $\gamma(t)$ и выход автомата $b(t)$ при подаче на вход $a(t)$:

$$\begin{cases} q(0) = q_0, \\ \gamma(0) = \gamma_0, \\ z(t) = LS(\gamma(t)), \\ q(t+1) = \varphi(a(t), q(t), z(t)), \\ \gamma(t+1) = S(\gamma(t))\eta(a(t), q(t), z(t)), \\ b(t) = \psi(a(t), q(t), z(t)), \end{cases}$$

где $LS : \Gamma^* \rightarrow \Gamma \cup \{\lambda\}$ возвращает последний символ при подаче непустого слова и $LS(\lambda) = \lambda$, а $S : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ стирает последний символ входного слова и $S(\lambda) = \lambda$.

Инициальный автомат с магазинной памятью определяет детерминированную функцию $f : A^* \rightarrow B^*$. Обозначим через $\mathcal{M}(A, B)$ множество детерминированных функций, порождаемых автоматами с магазинной памятью. Отметим, что $\mathcal{M}(A, B)$ содержит множество ограниченно-детерминированных функций.

¹Иванов Илья Евгеньевич — асп. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ivanov.ilya.rus@gmail.com.

Обозначим $n = |Q|$, $m = |\Gamma|$, $k = \max_{(q,z) \in Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}} |\eta(q, z)|$ и будем говорить, что $P \in \mathcal{M}(n, m, k)$.

Здесь n — число состояний; m — арность (или ширина) магазина; k — максимально возможная длина записи в магазин за один такт.

Будем говорить, что автомат с магазинной памятью P является автоматом с однобуквенным магазином, если $|\Gamma| = 1$.

Будем говорить, что автомат с магазинной памятью P является автономным (без входа), и писать $P \in \mathcal{M}_0(n, m, k)$, если $|A| = 1$.

Цель данной работы — описание свойств выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью.

Периодическое свойство автономных автоматов. Как и в случае конечных автоматов, автоматы с магазинной памятью обладают следующим периодическим свойством.

Теорема 1. Автономный автомат с магазинной памятью $P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$ генерирует периодическую выходную последовательность.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что автомат имеет самую общую функцию выхода, т.е. $B = Q \times \Gamma \cup \{\lambda\}$ и $\psi(a, q, z) = (q, z)$. Рассмотрим последовательности $q(t), \gamma(t), z(t)$, заданные каноническими уравнениями. Для целого $h > 0$ определим $M(h) = \{t \mid |\gamma(t)| \leq h\}$.

Если найдется такое натуральное число h_0 , что $|M(h_0)| = \infty$, то это означает, что найдутся такие t_1 и t_2 из $M(h_0)$, что $q(t_1) = q(t_2)$ и $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, а это доказывает периодичность выходной последовательности в силу детерминированности канонических уравнений в автономном случае.

Пусть теперь для любого натурального h выполнено условие $|M(h)| < \infty$. Заметим, что $M(h+1) \supseteq M(h)$. Значит, начиная с некоторого номера H будет выполнено условие $|M(h)| > 0$ при $h > H$ и, следовательно, корректно определена последовательность $t_h = \max M(h)$. В последовательности t_h найдутся такие $t_{h_1} < t_{h_2}$, что $q(t_{h_1}) = q(t_{h_2})$ и $z(t_{h_1}) = z(t_{h_2})$. Из определения последовательности t_h следует, что функционирование автомата начиная с моментов t_h зависит лишь от последнего символа магазина и состояния автомата. Тогда из детерминированности канонических уравнений в автономном случае получаем, что для любого неотрицательного целого τ выполнены соотношения $q(t_{h_1} + \tau) = q(t_{h_2} + \tau)$ и $z(t_{h_1} + \tau) = z(t_{h_2} + \tau)$, откуда и следует периодичность последовательностей $q(t)$ и $z(t)$ и выходной последовательности. Теорема доказана.

Верхние оценки периода выходной последовательности. Пусть $L(P)$ — минимальная длина периода периодической последовательности, которую P генерирует. Тогда определим следующую функцию:

$$L(n, m, k) = \max_{P \in \mathcal{M}_0(n, m, k)} L(P).$$

В работе [6] доказана

Теорема 2. При $k > 1$ имеет место оценка

$$L(n, m, k) \leq \frac{n(k^{nm+1} - 1)}{k - 1}.$$

Для оценки длины периода автономного автомата с магазинной памятью удобно пользоваться функциями $\omega(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\pi(q, \gamma) : Q \times \Gamma^* \rightarrow Q$, которые формально определим следующим образом. Пусть автомат находится в состоянии q , а в магазине лежит слово γ . Если существует такое минимальное положительное количество тактов τ работы автомата, что магазин становится пустым, а автомат переходит в состояние q' , то положим $\omega(q, \gamma) = \tau$, а $\pi(q, \gamma) = q'$, иначе $\omega(q, \gamma) = \infty$, а значение $\pi(q, \gamma)$ не определено.

Оценка из теоремы 2 является достижимой в случае автомата с одним состоянием.

Теорема 3. При $k > 1$ имеет место оценка

$$L(1, m, k) = \frac{(k^{m+1} - 1)}{k - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим автономный автомат $P = (A, Q, B, \Gamma, \varphi, \psi, \eta, q_0, \gamma_0)$, где $Q = \{q\}$, $B = E_2$, $\Gamma = \{1, 2, \dots, m\}$, $q_0 = q$, $\gamma_0 = \lambda$. Функция переходов тривиальна. Функция выхода выдает 1, если магазин пуст, и 0 в остальных случаях. Функцию памяти определим следующим образом:

$$\eta(a, q, \gamma) = \eta(q, \gamma) = \begin{cases} 1^k, & \text{если } \gamma = \lambda; \\ (i+1)^k, & \text{если } \gamma = i < m; \\ \lambda, & \text{если } \gamma = m, \end{cases}$$

где натуральное число $k > 1$. Для данного автомата выпишем систему

$$\begin{cases} \omega(q, \lambda) = 1 + k\omega(q, 1), \\ \omega(q, 1) = 1 + k\omega(q, 2), \\ \dots \\ \omega(q, i) = 1 + k\omega(q, i+1), \\ \dots \\ \omega(q, m-1) = 1 + k\omega(q, m), \\ \omega(q, m) = 1. \end{cases}$$

Длиной периода в данном автомате можно считать количество тактов работы автомата между пустыми состояниями магазина, т.е. $\omega(q, \lambda)$. Из системы видно, что

$$\omega(q, \lambda) = \sum_{i=0}^m k^i.$$

Теорема доказана.

Оказывается, что в случае, когда алфавит магазина содержит только один символ, верхнюю оценку можно существенно понизить[5].

Теорема 4. При $k > 1$

$$L(n, 1, k) \leq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 + (8k+32)n.$$

Нижние оценки периода выходной последовательности. В [6] доказана следующая

Теорема 5. При $m > 1$, $k > 1$ имеет место оценка

$$L(n, m, k) \geq \begin{cases} 15 \cdot 4^{\frac{n-1}{9}} - 19 & \text{при } m = 2, k = 2; \\ \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1} k^{(m-1)n} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Как и в случае с верхней оценкой, в [7] отдельно был рассмотрен случай с однобуквенным магазином.

Теорема 6. При $k > 1$ имеет место оценка

$$L(n, 1, k) \geq \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2 - \frac{1}{2k-1}n - 1.$$

Из теорем 4 и 6 получаем

Следствие. При $k > 1$ и $n \rightarrow \infty$

$$L(n, 1, k) = \frac{k(k-1)}{4k-2}n^2(1 + o(1)).$$

Заключение. В настоящей работе представлен обзор результатов автора, касающихся периодических свойств автономных автоматов с магазинной памятью. Приведены доказательства периодичности выходной последовательности и верхние и нижние оценки длины максимального периода. В случае автомата с одним состоянием верхняя и нижняя оценки совпали, а в случае однобуквенного магазина удалось точно найти асимптотику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chomsky N.* Context-free grammars and pushdown storage // Research Laboratory of Electronics. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Mass, 1962.

2. *Every R.J.* Applications of pushdown-store machines // Proc. AFIPS Fall Joint Computer Conference. Vol. 24. Las Vegas, 1963. 215–227.
3. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
4. *Бабин Д.Н.* О полноте двухместных о.д.-функций относительно суперпозиции // Дискретн. матем. 1989. 1, вып. 4. 86–91.
5. *Бабин Д.Н.* Класс автоматов с суперпозициями, не расширяющийся до предполного // Интеллект. системы. 2016. 20, вып. 4. 155–166.
6. *Иванов И.Е.* Улучшение нижней оценки на максимальную длину периода выходной последовательности автономного автомата с магазинной памятью // Интеллект. системы. 2016. 20, вып. 4. 174–187.
7. *Иванов И.Е.* Оценка длины периода выходной последовательности для автономного автомата с магазинной памятью с однобуквенным магазином // Интеллект. системы. 2017. 21, вып. 1. 106–140.

Поступила в редакцию
04.10.2017

УДК 519.716.32

НЕЯВНО ПРЕДПОЛНЫЕ КЛАССЫ И КРИТЕРИЙ НЕЯВНОЙ ПОЛНОТЫ В ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

М. В. Старостин ¹

Рассматривается проблема неявной полноты в трехзначной логике. Дано описание системы всех неявно предполных классов и сформулирован соответствующий критерий неявной полноты.

Ключевые слова: неявная выразимость, трехзначная логика, предполные классы.

The problem of implicit expressibility in the three-valued logic is considered. The system of all implicitly maximal classes is described. The corresponding criterion of implicit completeness is formulated.

Key words: implicit expressibility, three-valued logic, maximal classes.

Понятие неявной выразимости было введено А. В. Кузнецовым как одно из обобщений выразимости по суперпозиции [1]. Говорят, что функция *явно выражима* над системой Σ , если она выражима посредством суперпозиций над системой $\Sigma \cup \{x\}$. Множество всех явно выражимых над Σ функций называется *явно замкнутым классом* и обозначается через $E(\Sigma)$. Нетрудно показать, что E действительно является оператором замыкания [2].

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *неявно выражимой* над системой Σ , если существуют такие функции $A_i, B_i \in E(\Sigma)$, $i = 1, \dots, m$, что система уравнений

$$\begin{cases} A_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = B_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \\ A_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = B_2(x_1, x_2, \dots, x_n, z), \\ \dots \\ A_m(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = B_m(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \end{cases}$$

эквивалентна уравнению

$$z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Множество всех функций, неявно выражимых над системой Σ , называется *неявным расширением* Σ и обозначается через $I(\Sigma)$. Операция неявного расширения является оператором замыкания в P_2 [3], однако при $k \geq 3$ в P_k есть примеры таких систем функций, что $I(I(\Sigma)) \neq I(\Sigma)$.

Система функций в P_k называется *неявно полной*, если ее неявное расширение совпадает с P_k . Система функций называется *неявно предполной*, если она не является неявно полной, но становится

¹ *Старостин Михаил Васильевич* — асп. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: murmol@bk.ru.

таковой при добавлении к системе любой, не лежащей в ней функции. (Подробнее об используемых в работе понятиях и обозначениях см. [1–8].)

Все неявно предполные классы в P_2 были описаны О.М. Касим-Заде в [4]. Это классы T_0 , T_1 , L , S , D , K (обозначения следуют [9]). Кроме того, им же был получен критерий иного рода: система функций в P_2 неявно полна тогда и только тогда, когда ее явное замыкание содержит в себе класс M монотонных функций. Соответственно M является единственным минимальным по включению неявно полным классом в P_2 . Аналогичный критерий неявной полноты для P_3 получен Е.А. Ореховой в работе [10]: найдены все 27 минимальных неявно полных классов.

В настоящей работе представлен критерий неявной полноты в P_3 в терминах неявно предполных классов. Введем обозначения, необходимые для формулировки результата.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_3$ сохраняет подмножество $\{0, 1\}$. Рассмотрим функцию $\hat{f}(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, такую, что $f(\tilde{\alpha}) = \hat{f}(\tilde{\alpha})$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$. Функцию $\hat{f}$ будем называть *булевым ограничением функции f на подмножество $\{0, 1\}$* . Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутый класс булевых функций. Через $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{0,1\}}$ обозначим множество функций в P_3 , таких, что их булевы ограничения на $\{0, 1\}$ принадлежат классу $\mathfrak{A}$. Множества функций, двойственные $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{0,1\}}$ относительно подстановки

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

где a, b и c — попарно различные элементы из E_3 , будем обозначать через $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{a,b\}}$.

Наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ называются *эквивалентными относительно разбиения $\{0, 1\}\{2\}$* , если для любого i от 1 до n или $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 1\}$, или $\alpha_i = \beta_i = 2$. Такое отношение эквивалентности порождает разбиение куба E_3^n на классы эквивалентных наборов, которые мы будем называть блоками. Заметим, что каждый блок состоит из 2^m наборов для некоторого $m \in [1, \dots, n]$.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_3$, сохраняющую разбиение $\{0, 1\}\{2\}$. На каждом блоке она либо тождественно равна 2, либо принимает значения из множества $\{0, 1\}$. Тем блокам, на которых f принимает значения из $\{0, 1\}$, можно естественным образом сопоставить булевы функции $\hat{f}$ от m переменных. Такие функции мы будем называть *булевым ограничением функции f на блок*. Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда через $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{0,1\}\{2\}}$ обозначим множество всех функций, сохраняющих разбиение $\{0, 1\}\{2\}$, таких, что их булевы ограничения на все блоки (на которых эти ограничения определены) принадлежат классу $\mathfrak{A}$. Аналогично множества функций, двойственные $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{0,1\}\{2\}}$ относительно подстановки

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

где a, b и c — попарно различные элементы из E_3 , будем обозначать через $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{a,b\}\{c\}}$.

Можно показать, что множества функций $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{a,b\}}$ и $\Sigma_{\mathfrak{A}}^{\{a,b\}\{c\}}$ являются замкнутыми классами в P_3 [11].

Говорят, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *сохраняет матрицу*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{st} \end{pmatrix},$$

если для любых, быть может, повторяющихся столбцов этой матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ a_{2j_1} \\ \dots \\ a_{sj_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j_2} \\ a_{2j_2} \\ \dots \\ a_{sj_2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1j_n} \\ a_{2j_n} \\ \dots \\ a_{sj_n} \end{pmatrix}$$

4. Касим-Заде О.М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Докл. РАН. 1996. **348**, № 3. 299–301.
5. Касим-Заде О.М. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Физматлит, 1996. 133–188.
6. Касим-Заде О.М. О неявной полноте в k -значной логике // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. № 3. 9–13.
7. Яблонский С.В. Функциональные построения в k -значной логике // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
8. Яблонский С.В., Лупанов О.Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974.
9. Касим-Заде О.М. О сложности параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. М.: Физматлит, 1998. 85–160.
10. Орехова Е.А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. 27–74.
11. Орехова Е.А. О критерии неявной шепферовости в трехзначной логике // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. **10**, № 3. 82–105
12. Данильченко А.Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. **16**, № 4. 397–416.
13. Орехова Е.А. Об одном критерии неявной полноты в k -значной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Физматлит, 2002. 77–90.
14. Булле Г.А. Классы k -значных функций, содержащие все функции одной переменной // Дискретн. анализ. 1967. № 10. 3–7.

Поступила в редакцию
27.10.2017

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ТИПА МАКСВЕЛЛА ДЛЯ РЕОНОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ: СТАБИЛЬНОСТЬ ПРИ СИММЕТРИЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

А. В. Хохлов¹

Продолжено аналитическое исследование нелинейного определяющего соотношения типа Максвелла для реономных материалов с двумя материальными функциями: комплекса моделируемых им реологических эффектов, индикаторов (не)применимости, способов идентификации и настройки. Рассмотрены свойства отклика на произвольную периодическую программу нагружения, получен критерий его периодичности (отсутствия рэтчетинга). Найдено условие, при котором нелинейная модель Максвелла адекватно описывает эффект стабилизации и замыкания петли гистерезиса в случае симметричных циклических нагружений; показано, что оно зависит лишь от одной материальной функции и совместимо с моделированием разносопротивляемости материала.

Ключевые слова: нелинейная наследственность, скоростная чувствительность, симметричные циклические нагружения, пластическая деформация, циклическая стабильность, рэтчетинг.

The analytic study of the nonlinear Maxwell-type constitutive relation with two arbitrary material functions is continued to reveal its capabilities, applicability scope, and techniques of identification and tuning. General properties of the model response to an arbitrary periodic loading program are considered. A criteria for periodicity of strain evolution (and for the lack of ratcheting) is obtained. A condition is derived for simulation of cyclic stability under symmetric cyclic loadings, i.e., the effect of hysteresis loops stabilization after a number of cycles and

¹ Хохлов Андрей Владимирович — канд. техн. наук, ст. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru.

convergence to a closed one. The condition is proved to depend only on a one material function and to be consistent with tension compression asymmetry simulation.

Key words: nonlinear viscoelasticity, rate sensitivity, symmetric cyclic loadings, plastic strain, cyclic stability, ratcheting.

Многие материалы (упругопластические и реономные) демонстрируют циклическую стабильность при симметричных циклических нагружениях: петля гистерезиса оказывается замкнутой или стабилизируется после нескольких циклов [1–4]. В настоящей работе изучаются условия, при которых этот эффект адекватно описывается нелинейным определяющим соотношением (ОС) типа Максвелла для изотермических реологических процессов в реономных материалах:

$$\epsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau)) d\tau, \quad t > 0, \quad (1)$$

или $\epsilon = \Pi\sigma$. Оно связывает (в одноосном случае) деформацию $\epsilon(t)$ с напряжением $\sigma(t)$, $t > 0$, и основано на представлении деформации $\epsilon(t)$ в виде суммы упругой и вязкопластической компонент: $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v$, $\epsilon_e = F(\sigma)/E$, $\dot{\epsilon}_v = V(\sigma)/\eta$ [5]. Соотношение (1) содержит две материальные функции: $F(x)$, $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, $\omega_- < 0$, $\omega_+ > 0$, и две “постоянные”: модуль упругости $E > 0$ и коэффициент вязкости $\eta > 0$; E и η выделены из F и V для удобства сопоставления с линейной моделью Максвелла (она получается при $F(x) = x$, $V(x) = x$) и учета зависимости от температуры, влажности, насыщенности газами, пористости, размеров зерен и других параметров структуры ($E = E(T, \bar{p})$, $\eta = \eta(T, \bar{p})$) при включении ОС (1) в систему уравнений более сложных моделей.

На функцию F , задающую закон упругого деформирования, налагаются следующие минимальные первичные ограничения (естественные с точки зрения математики и феноменологии [5–7]): $F(x)$ — непрерывная (строго) возрастающая на (ω_-, ω_+) функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что $F(0) = 0$. Тогда $F(x)x > 0$, знаки σ и $\epsilon_e(\sigma)$ совпадают и $\epsilon_e(0) = 0$. Из строгого возрастания $F(x)$ следует увеличение $\epsilon_e(\sigma)$ и энергии упругой деформации с ростом $|\sigma|$, а также существование обратной к F функции f (f полностью определяет форму диаграммы мгновенного деформирования $\sigma(\epsilon)$, т.е. предельной кривой, к которой сходится семейство диаграмм деформирования $\sigma(\epsilon, b)$ с постоянной скоростью нагружения b , когда $b \rightarrow \pm\infty$ [7]). Функция вязкости $V(x)/\eta$ в ОС (1) регулирует наследственные свойства, скорость диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность напряжения к скорости деформации, длительную прочность [5–10]. Минимальные первичные ограничения на V : $V(x)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , такая, что $V(0) = 0$ (тогда $V(x)x > 0$). Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии F и V должны быть нечетными.

Соотношение (1) нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (таких, как полимеры, композиты, твердые топлива, асфальтобетоны, льды, титановые и алюминиевые сплавы и др.), имеющих выраженную стадию установившейся ползучести и “площадку текучести” на диаграмме деформирования и проявляющих (в определенных термомеханических условиях) свойства как твердого тела, так и жидкости. В частности, анализ показал, что с помощью ОС (1) можно описать многие аспекты поведения материалов в состоянии сверхпластичности. Подробная библиография и обзор родственных моделей в теории ползучести, сверхпластичности и реологии полимеров приведены в [6–9].

В работах [5–10] аналитически исследованы качественные свойства порождаемых ОС (1) кривых деформирования, релаксации и ползучести и сферы влияния материальных функций, выявлены возможности модели, те эффекты, которые принципиально не могут быть описаны в ее рамках, и дополнительные ограничения на F и V , обеспечивающие адекватное описание типичных свойств кривых испытаний широкого класса вязкоупругопластичных материалов. Анализ показал, в частности, что следует различать два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному: 1) $V(x) > 0$ при $x \neq 0$; 2) $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ > 0$, $\sigma_- \neq \sigma_+$ (по определению σ_- и σ_+ — нижняя и верхняя грани множества нулей $V(x)$). Во втором случае при $\sigma(t) \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала (диссипация, релаксация и ползучесть отсутствуют, кривая деформирования $\sigma(\epsilon, b)$ не зависит от скорости нагружения b при $\epsilon \in [\epsilon_-, \epsilon_+]$, $\epsilon_{\pm} = F(\sigma_{\pm})/E$, σ_- , σ_+ играют роль пределов

упругости и ползучести материала при сжатии и растяжении, а при $\sigma(t) < \sigma_-$ (или $\sigma(t) > \sigma_+$) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

Рассмотрим свойства отклика ОС (1) на периодические программы нагружения и получим условия замкнутости петли гистерезиса и отсутствия рэтчинга (т.е. неограниченного накопления пластической деформации).

Пусть $T > 0$, $s(t)$ — кусочно-непрерывная функция, носитель которой (замыкание множества $\{t | s(t) \neq 0\}$) лежит в отрезке $[0; T]$, $s(t) \in (\omega_-, \omega_+)$, а $S(t)$ — T -периодическое продолжение $s(t)$ на полуось $t > 0$:

$$S(t) = \sum_1^{m+1} s(t - (i-1)T), \quad t \in (0; (m+1)T), \quad m = 0; 1; 2; \dots \quad (2)$$

Программе нагружения $\sigma(t) = s(t)$ с полной разгрузкой ($\sigma(t) \equiv 0$ при $t > T$) ОС (1) ставит в соответствие деформацию $\epsilon(t) = e(t)$:

$$e(t) = E^{-1}F(s(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(s(\tau)) d\tau, \quad t \in [0; T]; \quad \epsilon(t) = p, \quad t \geq T, \quad (3)$$

где $e(t) \equiv 0$ при $t < 0$, p — остаточная (необратимая) деформация после разгрузки:

$$p = \epsilon(T - 0) = \eta^{-1} \int_0^T V(s(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

Отклик (3) — кусочно-непрерывная функция (непрерывная, если $s(t)$ непрерывна на $[0; T]$, и кусочно-гладкая, если $s(t)$ такова), $e(0+) = E^{-1}F(s(0+))$ ($e(0+) = 0$ в случае $s(0+) = 0$). Если множество нулей $[\sigma_-, \sigma_+]$ функции V отлично от $\{0\}$ и $s(t) \in [\sigma_-, \sigma_+]$ при $t \in (0; T)$ (т.е. напряжение не выходит за пределы упругости), то $V(s(\tau)) \equiv 0$, $p = 0$ и деформация (3) становится нулевой после разгрузки в момент $t = T$. В общем случае пластическая деформация, накопленная за цикл нагружения (4), не равна нулю. В частности, отсюда следует, что ОС не обладает свойством затухающей памяти (даже для нагружения с конечным носителем деформация не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а остается постоянной).

Для периодической программы нагружения $\sigma(t) = S(t)$ с циклом произвольной формы, задаваемым функцией $s(t)$ (см. (2)), деформация имеет вид

$$\epsilon(t) = \sum_1^{m+1} e(t - (i-1)T) = e(t - mT) + mp, \quad t \in (mT; (m+1)T), \quad m = 0; 1; \dots, \quad (5)$$

т.е. деформация на $(m+1)$ -м цикле отличается от сдвига $e(t - mT)$ функции (3) лишь константой mp (накопленной за m циклов пластической деформации).

Лемма. Оператор Π , задающий ОС (1), коммутирует с операторами сдвига по времени и аддитивен на процессах с непересекающимися носителями: $\Pi(\sigma_1 + \sigma_2) = \Pi\sigma_1 + \Pi\sigma_2$, если $\sigma_i(t)$ кусочно-непрерывны и $\sigma_1(t)\sigma_2(t) = 0$ (за исключением конечного числа точек).

Доказательство леммы производится прямой проверкой. Формула (5) следует из представления (2) программы нагружения $S(t)$ при $t > 0$ в виде суммы конечного числа сдвигов импульсов вида $s(t)$. Формулы (5), (2) задают параметрическое представление диаграммы циклического нагружения ОС (1) для цикла произвольной формы.

Критерий периодичности отклика (5) на периодическое нагружение (2) (критерий замкнутости петли гистерезиса в осях σ – ϵ) — равенство нулю пластической деформации за цикл (4) (тогда $s(0+) = 0$ влечет $e(0+) = 0$ и $e(mt) = 0$).

При $p \neq 0$ происходит накопление пластической деформации с постоянной скоростью p за цикл, а постепенная стабилизация незамкнутой петли гистерезиса невозможна. В частности, если $s(t) \geq 0$ на $[0; T)$ и $s(t_+) > \sigma_+$ в некоторый момент времени t_+ , то $p > 0$ (так как $V(s(\tau)) \geq 0$ на $[0; T)$).

и $V(s(\tau)) > 0$ в окрестности t_+). В силу (4) пластическая деформация p зависит от длительности и формы цикла нагружения $s(t)$ и функции $V(x)/\eta$, но не зависит от F (как и диссипация за цикл [5]). Скорость рэтчетинга сильно зависит от предыстории (моделируемый материал реономен), в частности, переход от зубчатого цикла к циклу с задержкой максимального напряжения на некоторое время $\bar{t}$ (и периодом $T + \bar{t}$) увеличивает p . Подобные эффекты наблюдаются, к примеру, у алюминиевых сплавов и сталей [3, 11].

Для симметричных (знакопеременных) циклов нагружения, т.е. таких, что $s(0,5T+x) = -s(0,5T-x)$ при $x \in (0; 0,5T)$, формула (4) дает

$$p = \eta^{-1} \int_0^{T/2} [V(s(\tau)) + V(-s(\tau))] d\tau.$$

Если функция V нечетна, то $V(s(\tau)) + V(-s(\tau)) = 0$ и $p = 0$. Тем самым доказана

Теорема. Если функция $V(x)$ в ОС (1) нечетна, а цикл нагружения (2) симметричен, то пластическая деформация (4), накапливаемая за каждый цикл нагружения, равна нулю, а петля гистерезиса замкнута.

Таким образом, ОС (1) моделирует строгую циклическую стабильность материалов при любых симметричных циклических нагружениях.

Замечания. 1) Нечетность $F(x)$ не требуется для выполнения условия $p = 0$, и моделируемый материал может иметь разные кривые деформирования, ползучести и релаксации при растяжении и сжатии и быть разномодульным (в случае $F'(0+0) \neq F'(0-0)$).

2) Если функция V не является нечетной (диссипативные свойства при сжатии и растяжении различны), то условие циклической стабильности (периодичности отклика на периодическое нагружение) $p = 0$ может соблюдаться для знакопеременных циклов специальных форм (в том числе несимметричных), а сжатие такого цикла вдоль оси времени сохраняет выполнение условия $p = 0$.

3) Условие циклической стабильности $p = 0$ для *всех* симметричных непрерывных циклических нагружений (2) с фиксированным периодом T выполняется лишь для нечетной функции V : если бы $V(-x_*) \neq -V(x_*)$, то для ступенчатого цикла с $s(t) = x_*$ при $t \in (0; T/2)$ и $s(t) = -x_*$ при $t \in (T/2; T)$ формула (4) дала бы $p\eta = 0,5T(V(-x_*) + V(x_*)) \neq 0$, следовательно, $p \neq 0$ и для непрерывного симметричного цикла с $s(0) = s(0,5T) = s(T) = 0$, достаточно мало отклоняющегося от $s(t) = x_*$ по норме пространства $C[0; T/2]$.

4) Отдых между циклами (при нулевом напряжении) почти ничего не меняет в отклике (5) и его свойствах: приращение пластической деформации за цикл (4) и величина деформации не меняются, циклы графика $\epsilon(t)$ лишь сдвигаются вдоль оси времени на величины mt_0 , где t_0 — время отдыха (в силу (1) деформация постоянна, пока $\sigma(t) \equiv 0$). Отсюда следует, в частности, что в ОС (1) не заложена возможность моделирования эффекта деформационного упрочнения сплавов в результате отдыха после цикла нагрузки (до пластической деформации) и полной разгрузки [12, 13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука, 1981.
2. Махутов Н.А., Бурак М.И., Гаденин М.М. и др. Механика малоциклового разрушения. М.: Наука, 1986.
3. Kang G. Ratchetting: recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application // Int. J. Fatigue. 2008. **30**. 1448–1472.
4. Fuschi P., Pisano A.A., Weichert D. Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures: Advanced Computational Algorithms and Material Modelling. Berlin: Springer, 2015.
5. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 6. 36–41.
6. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. № 3. 524–543.
7. Хохлов А.В. Свойства семейства кривых нагружения с постоянной скоростью, порождаемых нелинейной моделью вязкоупругопластичности типа Максвелла // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1. 57–71.

8. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. **21**, № 1. 160–179.
9. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 7. 7–19.
10. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Ч. 2. Методики // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 10. 2–9.
11. Kang G., Ding J., Liu Y. Summary on Uniaxial Ratchetting of 6061-T6 Aluminium Alloy // Aluminium Alloys, Theory and Applications / Ed. by T. Kvackaj. InTech, 2011. 199–216. DOI: 10.5772/14147.
12. Арутюнян Р.А., Каменцева З.П. Упрочнение стареющих сплавов // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1976. № 4. 128–137.
13. Арутюнян Р.А., Вакуленко А.А., Уманский С.Э. О циклическом нагружении пластической среды со старением // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1979. № 2. 79–83.

Поступила в редакцию
29.01.2017

УДК 531.36

О ВОЗМОЖНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРЕНИЯ В ШАРНИРЕ УПРАВЛЯЕМОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПО АМПЛИТУДАМ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

О. Э. Васюкова¹

Рассматривается динамическая модель управляемого физического маятника. Показано, что с помощью метода Понтрягина поиска периодических решений систем, близких к гамильтоновым, можно построить такой программный закон колебаний управляемого маятника, что тестовые режимы колебаний будут установившимися и орбитально-устойчивыми. Предложен подход к идентификации параметров модели трения в шарнире в режиме активного мотора на основе информации об интегральных характеристиках движения. Проведено численное моделирование движения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: идентификация трения, установившиеся движения, управление.

A dynamic model of a controlled physical pendulum is considered. The control strategy is proposed to provide the orbital stability of steady oscillations with a program amplitude. The corresponding control torque is determined using the Pontryagin method of searching for the periodic solutions of near-Hamiltonian systems. An approach to identify the parameters of a model of friction in the hinge is proposed for the case of an active motor mode. This approach is based on the information on the integral characteristics of motion. The motion of the system under consideration is numerically simulated.

Key words: identification of friction, steady motions, control.

Введение. В работе предлагается стратегия идентификации трения в шарнире маятника, основанная на наблюдениях установившихся колебаний. Управление, реализующее колебания с постоянной амплитудой, строится с помощью метода Понтрягина поиска периодических движений систем, близких к гамильтоновым [1]. В нашем случае задача решается в предположении об определенном характере трения в шарнире маятника. Широкий обзор моделей трения и методов компенсации трения в различных механизмах представлен в работе [2]. В настоящей работе трение в шарнире манипулятора имеет сухую и вязкую составляющие.

Существуют различные методы идентификации параметров трения в шарнире робота-манипулятора. Один из наиболее распространенных методов следующий: момент трения получают из

¹ Васюкова Ольга Эдуардовна — асп. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vasyukovaola@yandex.ru.

уравнений движения системы в предположении, что есть исчерпывающая информация об экспериментальной траектории движения звена (угол, угловая скорость и угловое ускорение как функции времени), известны инерционно-массовые характеристики системы и управляющий момент, поданный на двигатель. В работе [3] продемонстрировано применение такого подхода, а также проанализированы экстремальные точки графика зависимости трения от угловой скорости. В [4] представлен подход к идентификации трения в различных типах шарниров, в том числе в сферическом, основанный на законах изменения энергии. В методе работы [4] не предполагается использование точной информации о массе звеньев и моментах инерции звеньев манипулятора. Недостаток данного метода, как и метода работы [3], в том, что необходимо иметь сведения об угловой скорости и угловом ускорении звена в каждый момент времени. В [5] рассматривается еще один подход, цель которого — получить набор пар скорость–момент трения. Авторы при этом не используют информацию о моменте инерции звена манипулятора, поскольку они измеряют скорость звена робота предположительно в тот момент, когда ускорение равно нулю. Поэтому естественными недостатками данного подхода являются обеспечение крайне высокой точности измерений и необходимость наличия данных об ускорении.

Предлагаемый метод идентификации трения обладает рядом преимуществ перед перечисленными выше методами. Зависимость трения от угловой скорости считается непрерывной. Для идентификации трения используются данные только о величинах, которые легко измерять (не требуется знать зависимость угла, угловой скорости, углового ускорения от времени, необходимы только средние значения). В качестве тестовых режимов движения выступают установившиеся орбитально-устойчивые режимы, что обеспечивает повторяемость экспериментов. На тестовых движениях мотор все время находится в активном режиме, что существенно, так как диссипативные силы в шарнире могут различаться в зависимости от того, включен мотор или нет. Предлагаемый подход позволяет идентифицировать параметры в режиме активного мотора.

Постановка задачи. Рассмотрим плоский физический маятник с центром масс в точке P , вращающийся вокруг точки подвеса O , в которой он закреплен цилиндрическим шарниром. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ между вертикалью и прямой OP . Предполагается, что в шарнире приложен кусочно-постоянный управляющий момент $U(\varphi')$. На маятник также действует момент трения в шарнире $F(\varphi')$.

Уравнение движения данной системы имеет вид

$$(J + mr^2)\varphi'' + gmr \sin \varphi = U(\varphi') + F(\varphi'), \quad (1)$$

где m — масса маятника, r — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, J — момент инерции маятника относительно главной центральной оси инерции.

Введем безразмерное время $\tau = \sqrt{g/rt}$. Производные переменной φ по τ обозначим $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$. Будем считать, что управляющий момент и момент трения в системе можно представить в следующем виде:

$$U(\varphi') = U_1(\dot{\varphi}) = c_0 k \sqrt{g/r} \operatorname{sign} \dot{\varphi}, \quad F(\varphi') = F_1(\dot{\varphi}) = -c_0 b \sqrt{g/r} \operatorname{sign} \dot{\varphi} - c_0 c \dot{\varphi} \sqrt{g/r},$$

где b , c и k — некоторые неотрицательные константы, безразмерные величины, константа $c_0 = 1$ и имеет размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

Введем безразмерный параметр μ , который далее будем предполагать малым ($\mu \ll 1$):

$$\mu = \frac{c_0 \sqrt{r/g}}{J + mr^2}.$$

Отметим, что при фиксированном значении параметра r , увеличив массу m (например, за счет дополнительного груза), мы можем добиться сколь угодно малых значений μ .

Также введем безразмерный параметр a :

$$a = \frac{mr^2}{J + mr^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Запишем уравнение (1) в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = -a \sin \varphi + \mu((k - b) \operatorname{sign} \omega - c\omega). \end{cases} \quad (2)$$

Применение теоремы Понтрягина. Для системы (2) воспользуемся методом Понтрягина поиска периодических решений кусочно-спитых систем, близких к гамильтоновым [1]. При $\mu = 0$ система (2) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = -a \sin \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Гамильтониан системы (3) равен $H(\varphi, \omega) = \omega^2/2 - a \cos \varphi = h$. Траектория системы (3), соответствующая уровню энергии h , запишется следующим образом:

$$\omega = \pm \sqrt{2h + 2a \cos \varphi}. \quad (4)$$

Порождающая функция Пуанкаре–Понтрягина имеет вид

$$I(h) = \int_{-\varphi_0(h)}^{\varphi_0(h)} (k - b - c\sqrt{2h + 2a \cos \varphi}) d\varphi = 2(k - b)\varphi_0 - 2c \int_0^{\varphi_0} \sqrt{2h + 2a \cos \varphi} d\varphi,$$

где $\varphi_0(h) = A_0$ — амплитуда колебаний математического маятника, соответствующих решению системы (3) при значении h интеграла энергии. Здесь и далее будем рассматривать значения $h \in (-a; 0)$, которые отвечают колебаниям с амплитудой $A_0 \in (0; \pi/2)$, где $A_0 = \arccos(-\frac{h}{a})$.

Согласно теореме Понтрягина [1], существование орбитально-устойчивого предельного цикла для системы (2) в окрестности траектории (4) при достаточно малых значениях μ обеспечивается условиями

$$I(h_*) = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{dI}{dh} \right|_{h=h_*} < 0. \quad (6)$$

Покажем, что при произвольно заданном $h \in (-a; 0)$ путем выбора коэффициента k в законе управления можно реализовать в системе (2) орбитально-устойчивую периодическую траекторию $\dot{\varphi}(\varphi)$, близкую к траектории вида (4) системы (3) (при достаточно малых значениях μ). При этом используем подход, аналогичный предложенному в работе [6].

Обозначим через $k = K(h)$ функцию, определяющую значение коэффициента управления, при котором для данного h выполнено условие (5). Она может быть представлена в следующем виде:

$$K(h) = c\sqrt{a}f(z(h)) + b, \quad f(z) = \frac{\int_0^{\arccos(-z)} \sqrt{2z + 2\cos \varphi} d\varphi}{\arccos(-z)}, \quad z(h) = h/a. \quad (7)$$

Проверим условие (6). Учитывая (5) и (7), несложно показать, что

$$\left. \frac{dI}{dh} \right|_{h=h_*} < 0 \Leftrightarrow \left. \frac{df}{dz} \right|_{h=h_*} > 0.$$

Путем численного построения функции $f(z)$ можно установить, что данная функция возрастает при $z \in (-1; 0)$, значит, условие (6) всегда выполнено. Мы получили следующее утверждение.

Утверждение 1. Для произвольного $h \in (-a, 0)$ при $k = K(h)$ в системе (2) при достаточно малых значениях μ существует предельный цикл, близкий к траектории вида (4), соответствующей данному h . При этом данный цикл является орбитально-устойчивым и амплитуда A этого цикла при $\mu \rightarrow 0$ стремится к A_0 .

Стратегия идентификации трения. Будем предполагать, что значение параметра a , определяемое инерционными характеристиками маятника, известно.

Для системы (2) на практике мы можем варьировать коэффициент управления k . Согласно утверждению 1 при малых μ существует диапазон значений k , при которых качания маятника выйдут на предельный цикл. Для реального маятника будем искать этот диапазон экспериментально. При его обнаружении запишем значения A_i^* амплитуды установившихся колебаний, отвечающие

некоторому набору значений k_i^* из указанного диапазона. На плоскости $\{k, A\}$ отметим полученные точки (k_i^*, A_i^*) .

На плоскости $\{k, A\}$ мы можем построить параметрически заданную кривую $\{k = K(h), \hat{A} = A_0(h)\}$, $h \in (-a, 0)$, при фиксированных параметрах модели трения b, c . Обозначим эту кривую $\hat{A}(k)$. В соответствии с утверждением 1 данная кривая описывает для системы (2) зависимость амплитуды притягивающего цикла от параметра k при $\mu \rightarrow 0$.

Для идентификации коэффициентов трения b и c требуется оценить, при каких значениях этих параметров кривая $\hat{A}(k)$ наилучшим образом приближает экспериментальную зависимость $A_i^*(k_i^*)$. Проведем данную оценку. Запишем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений:

$$y = Wx,$$

где $x = (c, b)^T$ — искомый двумерный вектор, y — известный n -мерный вектор, $y_i = k_i^*$, $1 \leq i \leq n$, W — матрица размерности $n \times 2$ с элементами

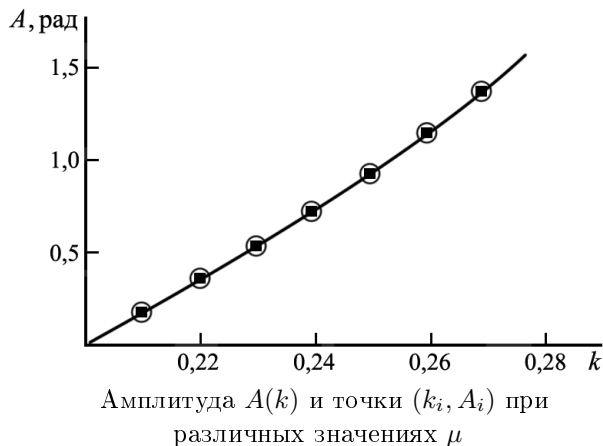
$$W_{i1} = \frac{\sqrt{a} \int_0^{A_i^*} \sqrt{-2 \cos A_i^* + 2 \cos \varphi} d\varphi}{A_i^*}, \quad W_{i2} = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Для поиска значения x воспользуемся методом наименьших квадратов [7], согласно которому

$$x = (W^T W)^{-1} W^T y.$$

Таким образом, мы провели идентификацию параметров b и c исходной системы, которые являются компонентами найденного вектора x .

Численное моделирование. Итак, воспользовавшись методом Пуанкаре–Понтрягина, мы получили зависимость $A(k)$ на периодических траекториях при $\mu \rightarrow 0$. Теперь путем численного интегрирования уравнений движения (2) с известными параметрами $a = 0,5$, $b = 0,2$, $c = 0,1$ для некоторого набора $\{k_i\}$ определим соответствующие значения амплитуд $\{A_i(k_i)\}$ автоколебаний при следующих конечных значениях μ : $\mu = 0,01; 1$.



На рисунке приведены точки (k_i, A_i) , полученные при конечных значениях μ (значению $\mu = 0,01$ соответствует квадрат, $\mu = 1$ — кружок), на одной плоскости с теоретической кривой $A(k)$, отвечающей случаю $\mu \rightarrow 0$.

Было установлено, что относительное отклонение полученных точек от кривой $A(k)$ не превышает 1%. Этот эмпирический факт косвенно подтверждает возможность использования построенных теоретических кривых $A(k)$ для оценки амплитуды автоколебаний при $\mu \in (0, 1]$. Отметим, что значения параметра μ порядка единицы представляют интерес, поскольку для реальных систем

такие значения ожидаемы. Например, при размерных параметрах системы $r = 0,4$ м, $m = 1$ кг, $g = 9,8$ м/с², $J = 0,05$ кг·м² будем иметь $\mu = 0,96$.

Заключение. В работе представлена математическая модель управляемого физического маятника при наличии трения в закрепляющем его шарнире. Показано, что с помощью метода Понтрягина поиска периодических решений систем, близких к гамильтоновым, можно построить такой программный закон колебаний управляемого маятника, что тестовые режимы движения будут установившимися и орбитально-устойчивыми. Предложен подход к идентификации параметров модели трения по амплитудам установившихся движений в режиме активного мотора без использования информации о траектории движения в каждый момент времени. Проведено численное моделирование движения рассматриваемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.

2. *Armstrong-Helouvry B., Dupont P., De Wit C.C.* A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction // *Automatica*. 1994. **30**, N 7. 1083–1138.
3. *Kermani M.R., Patel R.V., Moallem M.* Friction identification and compensation in robotic manipulators // *IEEE Trans. Instrum. and Meas.* 2007. **56**, N 6. 2346–2353.
4. *Vakil M., Fotouhi R., Nikiforuk P.N.* Energy-based approach for friction identification of robotic joints // *Mechatronics*. 2011. **21**, N 3. 614–624.
5. *Iwatani M., Kikuuwe R.* An identification procedure for rate-dependency of friction in robotic joints with limited motion ranges // *Mechatronics*. 2016. **36**. 36–44.
6. *Климина Л.А., Локишин Б.Я.* Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах // *Нелинейная динамика*. 2017. **13**, № 1. 25–40.
7. *Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А.* Лекции по механике управляемых систем. М.: Макс Пресс, 2012.

Поступила в редакцию
12.04.2017

УДК 531/534+539.3

ОБЩИЕ ПРИВЕДЕННЫЕ ФОРМЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Г. Л. Бровко¹

Построена теория определяющих соотношений свойств сопротивления тел деформированию, учитывающая наличие одновременно внутренних массовых сил и внутренних кинематических связей. Предложены аксиомы теории и построена общая приведенная форма системы определяющих соотношений классических сред. Для простых тел (классических сред) установлена эквивалентность определяющих соотношений Ильюшина и Нолла.

Ключевые слова: классическая механика сплошной среды, сопротивление деформированию, определяющие соотношения, внутренние массовые силы, кинематические связи, простые тела, эквивалентность определяющих соотношений Ильюшина и Нолла.

The theory of constitutive relations of deformation resistance of bodies is constructed provided simultaneously by possible presence of inner kinematic constraints in a body and by account of internal body forces. The axioms of the theory are proposed and the general reduced form of the system of constitutive relations is derived. For simple bodies (classical media), the equivalence of Ilyushin's and Noll's forms of constitutive relations is established.

Key words: classical continuum mechanics, deformation resistance, constitutive relations, internal body forces, kinematic constraints, simple bodies, equivalence of constitutive relations by Ilyushin and by Noll.

1. Сопротивление деформированию: основные понятия и принципы общей теории.

1.1. Традиционные подходы: анализ и пути обобщения. Современные основы классической механики сплошной среды представлены как в фундаментальных трудах [1, 2], так и в получивших широкое признание аксиоматизированных (соответственно шестой проблеме Гильберта [3]) построениях [4–7].

В классической механике сплошной среды при постановках краевых задач для тел различной формы и различных механических свойств предполагается выполнение в инерциальной системе отсчета общего уравнения движения Коши в области Ω актуальной конфигурации тела

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{w}, \quad (1)$$

где ρ — плотность массы, $\mathbf{w}$ — ускорение точки тела, $\mathbf{S}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{b}$ — массовая плотность массовых сил, действующих в точке тела.

¹ Бровко Георгий Леонидович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: glb@mech.math.msu.su.

Строгий вывод уравнения (1) с необходимостью предусматривает учет в величине $\mathbf{b}$ действия как внешних (по отношению к рассматриваемому телу) массовых сил массовой плотности $\mathbf{b}_{\Omega(e)}$, так и внутренних (со стороны остальных частей данного тела) массовых сил плотности $\mathbf{b}_{\Omega(i)}$, а именно $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_{\Omega(e)} + \mathbf{b}_{\Omega(i)}$.

Во всех традиционных, в том числе аксиоматических, подходах к построению механики сплошной среды массовые силы относятся к числу внешних, при этом предполагается (явно или по умолчанию), что поле внутренних массовых сил известно, чаще всего пренебрежительно мало: $\mathbf{b}_{\Omega(i)} \equiv 0$. Такое допущение, уместное для подавляющего большинства инженерных задач, представляется невыполнимым для тел больших масс и размеров, в частности тел и систем тел планетарных масштабов. Подобно полю тензора напряжений $\mathbf{S}$, определяющему в теле распределение контактных внутренних взаимодействий, поле внутренних массовых сил $\mathbf{b}_{\Omega(i)}$ зависит от движения тела, его формоизменения (деформаций, скоростей деформаций) и, как и поле тензора напряжений, подлежит отысканию в соответствии с механическими свойствами тела — свойствами сопротивления тела деформированию, выражаемыми его определяющими соотношениями.

Это обстоятельство указывает на то, что при нетривиальном учете внутренних массовых сил [8] поле $\mathbf{b}_{\Omega(i)}$ должно быть наряду с движением тела и полем напряжений включено в состав внутреннего динамического процесса [5, 6], выражающего свойства сопротивления тела деформированию.

Кроме того, в традиционных рассмотрениях учет наличия в теле внутренних кинематических связей ведется путем модификации принципов теории определяющих соотношений в виде утверждений, касающихся лишь поля тензора напряжений безотносительно к полю внутренних массовых сил.

Анализ классических работ [1–7] и дополнительных исследований [8–13] показал целесообразность построения единой теории определяющих соотношений свойств сопротивления тел деформированию, охватывающей одновременно учет нетривиальных внутренних массовых сил и внутренних кинематических связей.

1.2. Динамические процессы: новое общее понятие. Понятие свойств и определяющих соотношений сопротивления тел деформированию.

Определение 1. Для произвольного тела с отсчетной конфигурацией Ω_0 любой набор (тройку), состоящий из заданных в области Ω_0 лагранжева закона движения $\mathbf{f}$, симметричного тензорного поля-процесса напряжений $\mathbf{S}$ и векторного поля-процесса внутренних массовых сил $\mathbf{b}_{\Omega(i)}$, назовем (внутренним) *динамическим процессом* и обозначим

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{S}, \mathbf{b}_{\Omega(i)}\}. \quad (2)$$

Определение 2. Любое справедливое для данного тела высказывание (соотношение) о динамическом процессе (2) назовем *механическим свойством тела*, а свойство, из которого вытекают все другие его механические свойства, назовем *определяющим свойством*; определяющее свойство данного тела, выраженное математическим соотношением для динамического процесса, назовем *определяющим соотношением* данного тела. Любой динамический процесс, удовлетворяющий определяющему соотношению тела, назовем *физически (механически, материально) допустимым* для данного тела.

1.3. Основные аксиомы (принципы) общей теории определяющих соотношений сопротивления деформированию.

Аксиома 1 (принцип локальной отделимости). Для любого тела его определяющее соотношение сопротивления деформированию накладывает связи лишь на историю его собственного динамического процесса безотносительно к таковым в любых других отделенных от него телах или к внешним условиям процесса.

Аксиома 2 (принцип структурно-энергетического детерминизма). Для любого тела Ω_0 определяющее соотношение сопротивления деформированию эквивалентно системе соотношений, выполняющихся в любой момент времени t :

$$\varphi_{\Omega} [\mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \Omega_0 \\ \tau \leq t}} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\Omega} \left([\mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \Omega_0 \\ \tau \leq t}}; \mathbf{x}, t \right) + \mathbf{S}_{\Omega}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

$$\mathbf{b}_{\Omega(i)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}_{\Omega} \left([\mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \Omega_0 \\ \tau \leq t}}; \mathbf{x}, t \right) + \mathbf{b}_{\Omega(i)}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

Здесь уравнение внутренних кинематических связей (3) имеет непустое решение (относительно движения $\mathbf{f}$); $\mathbf{x} \in \Omega_0$ — произвольная точка тела; отображения $\mathcal{F}_{\Omega}$, $\mathbf{q}_{\Omega}$ в (4), (5) — определенные для данного тела однозначные отображения множества предисторий движения тела, удовлетворяющих (3), соответственно в множество объективных пространственного типа симметричных тензоров второго ранга и в множество объективных пространственного типа векторов; $\mathbf{S}_{\Omega}^{\text{ind}}$ и $\mathbf{b}_{\Omega(i)}^{\text{ind}}$ — такие тензорное поле (симметричного тензора) и векторное поле в теле Ω_0 , что для любого движения, удовлетворяющего (3), в любой момент времени t выполнено соотношение

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}_{\Omega}^{\text{ind}} : \mathbf{V} dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}_{\Omega(i)}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{v} dV = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ — любые векторное поле скоростей и соответствующее ему тензорное поле скоростей деформаций, удовлетворяющие (3) для Ω_0 .

Аксиома 3 (принцип материальной независимости от системы отсчета). Определяющие соотношения сопротивления деформированию всех тел не зависят от системы отсчета, т.е. определяют во всех системах отсчета одно и то же множество физически допустимых динамических процессов.

2. Общая приведенная форма системы определяющих соотношений.

2.1. Основная теорема.

Теорема. При выполнении аксиом 1–3 для любых классических сплошных сред (связных тел) в любой системе отсчета система определяющих соотношений сопротивления деформированию имеет следующую общую приведенную форму (лагранжево описание):

$$\varphi [\mathbf{C}^t(\mathbf{x}', s)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \Omega_0 \\ s \geq 0}} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{G} \left([\mathbf{C}^t(\mathbf{x}', s)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \delta\Omega_0 \\ s \geq 0}}; \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t), \quad (8)$$

$$\mathbf{b}_{\Omega(i)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \mathbf{p}_{\Omega} \left([\mathbf{C}^t(\mathbf{x}', s)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \Omega_0 \\ s \geq 0}}; \mathbf{x} \right) + \mathbf{b}_{\Omega(i)}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

где уравнение (7) выражает внутреннюю кинематическую связь тела Ω_0 ; $\mathbf{C}^t$ — t -предыстория меры деформаций Коши $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ ($\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$ — аффинор (градиент) деформации); $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор полярного поворота; $\mathbf{x}_0$ — произвольная фиксированная точка тела Ω_0 ; t — произвольный момент времени; уравнения (8), (9) определяют физически допустимые поля тензора истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$ и внутренних массовых взаимодействий $\mathbf{b}_{\Omega(i)}$ для любого физически допустимого движения; отображение $\mathcal{G}$ — соответствующее механическим свойствам тела в окрестности точки $\mathbf{x}$ отображение заданных в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x}$ полей предисторий симметричных положительно определенных тензоров в симметричные тензоры; $\mathbf{p}_{\Omega}$ — отображение полей предисторий симметричных положительно определенных тензоров в самоуравновешенные в теле векторные поля над $\mathbf{x} \in \Omega_0$; $\mathbf{S}^{\text{ind}}$ и $\mathbf{b}_{\Omega(i)}^{\text{ind}}$ — произвольные тензорное (симметричного тензора второго ранга) и самоуравновешенное векторное поля, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{S}_{\Omega}^{\text{ind}} : \mathbf{V} = 0, \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{b}_{\Omega(i)}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad (11)$$

с любыми физически допустимыми, удовлетворяющими уравнению связей (7) полями скоростей $\mathbf{v}$ и скоростей деформаций $\mathbf{V}$ (условия (10), (11) суть необходимое уточнение соотношения (6)).

2.2. Эквивалентные представления определяющих соотношений.

2.2.1. *Общие приведенные формы определяющих соотношений для различных динамических процессов.* Соотношения (7)–(9) с учетом (10), (11), являющиеся общей для данной теории приведенной формой определяющих соотношений для динамического процесса $\{\mathbf{f}, \mathbf{S}, \mathbf{b}_{\Omega(i)}\}$, могут быть эквивалентно переписаны в терминах других динамических процессов, включая $\{\mathbf{f}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{b}_{\Omega(i)}\}$ и $\{\mathbf{f}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{b}_{\Omega(i)}\}$, где $\mathbf{\Pi} = J\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1T}$ — тензор условных напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода и $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{-1T}$ — тензор условных напряжений Ильюшина. При этом соотношения (7), (9) сохраняются, уравнение (8) для тензора $\mathbf{\Pi}$ примет вид

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{G}_{\mathbf{\Pi}} \left([\mathbf{C}^t(\mathbf{x}', s)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \delta\Omega_0(\mathbf{x}) \\ s \geq 0}}; \mathbf{x} \right) + \mathbf{\Pi}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t), \quad (12)$$

а для тензора $\mathbf{\Sigma}$ — вид

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}_{\mathbf{\Sigma}} \left([\mathbf{C}^t(\mathbf{x}', s)]_{\substack{\mathbf{x}' \in \delta\Omega_0(\mathbf{x}) \\ s \geq 0}}; \mathbf{x} \right) + \mathbf{\Sigma}^{\text{ind}}(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

уравнения (12), (13) равносильны уравнению (8), причем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{\Pi}} &\equiv J\mathcal{G} \cdot \mathbf{X}^{-1}, & \mathcal{G}_{\mathbf{\Sigma}} &\equiv \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathbf{X}^{-1}, \\ \mathbf{\Pi}^{\text{ind}} &\equiv J\mathbf{S}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{A}^{-1T}, & \mathbf{\Sigma}^{\text{ind}} &\equiv \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{A}^{-1T}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathbf{A}$ — аффино́р деформации, $\mathbf{X}$ — правый тензор чистой деформации из полярного разложения $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}$, $J = |\det \mathbf{A}|$.

2.2.2. *Простые тела. Эквивалентность определяющих соотношений А.А. Ильюшина и У. Нолла.* Для простых тел без внутренних кинематических связей при отсутствии внутренних массовых сил свойства сопротивления деформированию могут быть представлены соответственно в виде определяющего соотношения А.А. Ильюшина [1]

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}_{\mathbf{I}} \left([\mathcal{E}^t(\mathbf{x}, s)]_{s \geq 0}; \mathbf{x} \right) \quad (15)$$

и определяющего соотношения У. Нолла [4, 5]

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathcal{G}_{\mathbf{N}} \left([\mathbf{X}^t(\mathbf{x}, s)]_{s \geq 0}; \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

с тензорнозначными (симметричными второго ранга) отображениями $\mathcal{G}_{\mathbf{I}}$ и $\mathcal{G}_{\mathbf{N}}$. Здесь $\mathbf{X}^t$ — предыстория тензора $\mathbf{X}$, $\mathcal{E}^t$ — предыстория тензора деформаций Грина $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга.

Следствие. *Определяющие соотношения А.А. Ильюшина (15) и У. Нолла (16) эквивалентны, причем сообразно (14)*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{X} \cdot \mathcal{G}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{X}. \quad (17)$$

Соотношения (15), (16) (с учетом (17)) охватывают в точности все простые тела (без внутренних связей и без учета внутренних массовых сил), т.е. все классические среды, подчиняющиеся гипотезе макрорезистентности, а значит, и постулату макроскопической определенности Ильюшина [1].

Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00669).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1984.
3. Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
4. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1958. 2. 197–226.
5. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Handbuch der Physik. III/3. Berlin: Springer-Verlag, 1965 (3rd ed. / Ed. by Stuart S. Antman. Berlin; Heidelberg; N.Y. et al.: Springer-Verlag, 2004).

6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
7. *Gurtin M. E., Fried E., Anand L.* The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge; N.Y. *et al.*: Cambridge University Press, 2010.
8. *Бровко Г.Л.* Основы механики сплошной среды (краткий конспект лекций, задачи, упражнения). Ч. 2. М.: Попечит. совет мех.-мат. ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013.
9. *Бровко Г.Л.* Понятия образа процесса и пятимерной изотропии свойств материалов при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1989. **308**, № 3. 565–570.
10. *Бровко Г.Л.* Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // Прикл. матем. и механ. 1990. **54**, вып. 5. 814–824.
11. *Бровко Г.Л.* Развитие математического аппарата и основ общей теории определяющих соотношений механики сплошной среды: Докт. дис. М., 1996.
12. *Brovko G.L., Ivanova O.A., Finoshkina A.S.* On geometrical and analytical aspects in formulations of problems of classic and non-classic continuum mechanics // Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 191. Basel/Switzerland: Birkhäuser-Verlag, 2009. 51–79.
13. *Brovko G.L.* On general principles of the theory of constitutive relations in classical continuum mechanics // J. Eng. Math. Kluwer Acad. Publ. 2013. **78**. 37–53. DOI 10.1007/s10665-011-9508-y.

Поступила в редакцию
04.09.2017

ПРАВИЛА

подготовки рукописей, представляемых для опубликования в журнале “Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика”

Журнал печатает статьи по всем разделам математики и механики. Журнал открыт для публикации научных исследований ученых Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, других научных учреждений и высших учебных заведений.

Объем статьи (включая таблицы и список литературы) ограничен тремя уровнями: а) 12 страниц с числом иллюстраций до пяти; б) 6 страниц с числом иллюстраций до трех; в) 4 страницы с числом иллюстраций до двух. К статьям объемом 7–12 страниц предъявляются повышенные требования; очередность их опубликования определяется отдельно. В статьях объемом до 6 страниц предполагается четкое представление основных результатов без излишних деталей выводов и доказательств. Статьи объемом до 4 страниц печатаются в разделе “Краткие сообщения” вне очереди.

Принимаются статьи, набранные на компьютере в формате LATEX версии 2.09 (см. правила оформления электронной версии по следующему адресу: <http://vestnik.math.msu.su/>). Рукопись представляется в редакцию на русском языке в двух экземплярах на листах формата A4 с полями 2 см слева и справа, 4 см сверху и снизу. Необходимо также представить в редакцию CD-диск с файлом статьи.

Чертежи, рисунки, схемы, графики выполняются на отдельных листах в формате, обеспечивающем ясность передачи деталей. Места расположения иллюстраций в тексте должны быть указаны простым карандашом на полях. На обороте иллюстрации должны быть написаны фамилия автора и название статьи. Текст к иллюстрациям, а также таблицы следует поместить на отдельных страницах.

Список литературы должен содержать библиографические сведения о всех публикациях, упоминаемых в статье, и не должен содержать указания на работы, на которые в тексте нет ссылок. Располагать публикации в списке следует в порядке упоминания о них в статье. Список литературы приводится на отдельном листе с обязательным указанием следующих данных: для книг (монография, сборник и т.д.) — фамилия и инициалы автора, название книги, место издания (город), издательство, год издания; для журнальных статей — фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, выпуск, страницы (первая и последняя).

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

В левом верхнем углу первого листа рукописи проставляется УДК. Ниже указываются название статьи, еще ниже — инициалы и фамилии авторов. Далее помещаются резюме на русском языке, ключевые слова на русском языке, резюме на английском языке, ключевые слова на английском языке. Резюме объемом до 7 строк не должно содержать ссылки на разделы, иллюстрации, номера цитируемой литературы, формулы и рисунки. Кроме того, прилагается библиографическое описание статьи (фамилии, инициалы авторов, название статьи) на английском языке.

Сокращения слов, имен, названий не допускаются, за исключением общепринятых сокращений математических величин и терминов, мер физических и химических величин.

Нумерация теорем, лемм, утверждений и формул (справа) производится в порядке возрастания номеров на протяжении всей статьи без пропусков и повторений. Нумеруются только те формулы, на которые есть ссылки.

Текст статьи должен быть подписан всеми авторами “в печать”. Отдельно нужно указать фамилии, имена, отчества всех авторов, ученую степень, ученое звание, место работы, должность, полный почтовый адрес, номер телефона (служебный и домашний) и e-mail каждого соавтора; авторский коллектив должен указать также лицо, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

Автору предоставляется корректура статьи. Никакие изменения верстки, за исключением исправления опечаток и восстановления пропущенного при наборе, не допускаются. Выправленную и подписанную корректуру следует в течение двух дней после получения вернуть в редакцию.

Обращаем внимание авторов на то, что, направляя свою статью в журнал, они тем самым дают согласие на обнародование ее путем издания на русском языке в данном журнале и согласие на обнародование, перевод и издание статьи на английском языке американским издательством “Аллертон Пресс” (<http://www.allertonpress.com>), которому предоставлено исключительное право перевода, издания и распространения англоязычной версии журнала и его статей по всему миру.

Электронные версии статей на английском языке можно найти по адресу: <http://www.springerlink.com>.

За англоязычное издание статей авторам выплачивается гонорар. Для получения гонорара авторам следует обращаться в Российское авторское общество (РАО) по адресу: 123995, Москва, ГСП-5, ул. Б. Бронная, 6А, РАО, Отдел валютных расчетов. Тел.: 8 (495) 697-33-35.

При несоблюдении автором вышеприведенных правил редакция журнала оставляет за собой право задерживать публикацию статьи или отклонить рукопись без ее рассмотрения по существу.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

Рукописи принимаются по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, комн. 13-25. Тел.: 8 (495) 939-51-27, e-mail: msu-vestmm@mail.ru.

Рукописи, присланные по почте, а также по электронной почте, к рассмотрению не принимаются и не возвращаются.