МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Полосин Алексей Андреевич

Краевые задачи для уравнений эллиптического и смешанного типов и сингулярные интегральные уравнения

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и его применений факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный консультант	–	доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН Моисеев Евгений Иванович, МГУ имени М.В. Ломоносова, заведующий кафедрой функционального анализа и его применений, декан факультета ВМК
Официальные оппоненты	–	доктор физико-математических наук, профессор Радкевич Евгений Владимирович, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, профессор
		доктор физико-математических наук, профессор Солдатов Александр Павлович, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, главный научный сотрудник
		доктор физико-математических наук, профессор Зарубин Александр Николаевич, Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, физико-математический факультет, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, профессор

Защита диссертации состоится 26 декабря 2018 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, комната 685

E-mail: ilgova@cs.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/149102865/

Автореферат разослан «______» ________________________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уравнениями смешанного типа называются уравнения в частных производных, которые принадлежат разным типам в разных частях рассматриваемой области. Например, в одной части области уравнение может принадлежать эллиптическому, а в другой – гиперболическому типу; эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение вырождается в параболическое или не определено.

Постановка краевых задач для уравнений смешанного типа отличается исключительным богатством и своеобразием.

В 1923 г. Ф. Трикоми[1] рассмотрел краевую задачу для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0\,, \tag{1}$$

впоследствии названного его именем, в области, ограниченной при $y > 0$ ляпуновской кривой Γ (с ограничениями на поведение вблизи линии $y = 0$, которые впоследствии были значительно ослаблены), а при $y < 0$ – выходящими из концов этой кривой характеристиками уравнения (1); краевые условия при этом ставились на кривой Γ и на одной из характеристик. Решение должно было быть непрерывным в замыкании области, непрерывно дифференцируемым внутри нее и дважды непрерывно дифференцируемым в верхней (эллиптической) и нижней (гиперболической) подобластях; для первых производных решения допускались особенности интегрируемого порядка вблизи концов кривой Γ. Трикоми доказал существование и единственность решения поставленной задачи в указанном классе; при доказательстве существования он свел задачу к сингулярному интегральному уравнению.

Работа Трикоми, ставшая классической, положила начало теории краевых задач для уравнений смешанного типа.

Кроме того, Ф. Трикоми и его ученица М. Чибрарио показали, что общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя переменными в случае одной линии параболического вырождения и некоторых ограничениях на коэффициенты можно записать в виде

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

(уравнение первого рода) или в виде

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + \alpha(x, y)u_y + \beta(x, t)u_x + c(x, t)u = f(x, t)$$

[1] Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с итал. Ф.И. Франкля. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 192 с.

(уравнение второго рода), где m – натуральное число. Эти уравнения называются классическими уравнениями смешанного типа.

В конце 1930-х годов С. Геллерстедт предложил более общее, по сравнению с (1), уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0, \tag{2}$$

впоследствии названное его именем, а также поставил и исследовал новые краевые задачи для этого уравнения.

Вопросы струйных течений газа при дозвуковых скоростях рассматривались в докторской диссертации С.А. Чаплыгина. Уравнение

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3}$$

где $yK(y) > 0$, $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, называют уравнением Чаплыгина.

На момент своего появления работа Трикоми не нашла приложений и поэтому не привлекала особого внимания вплоть до конца 40-х – начала 50-х годов прошлого века, когда с появлением сверхзвуковых самолетов стал актуальным вопрос о математическом описании движения летательных аппаратов при транс- и сверхзвуковых скоростях. Выяснилось, что соответствующие нелинейные задачи могут быть при определенных допущениях (на т.н. плоскости годографа) сведены к линейным краевым задачам для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.

С начала 1950-х годов началось бурное развитие теории краевых задач для уравнений смешанного типа, прежде всего в СССР и США. В работах М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, Л. Берса, М. Проттера, К. Моравец и других математиков были поставлены и решены многие задачи для уравнений смешанного типа.

Для описания явлений газовой динамики М.А. Лаврентьевым и А.В. Бицадзе было предложено более простое, по сравнению с (1)-(3), уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0, \tag{4}$$

получившее название уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Постановка краевых задач для этого уравнения сохраняет основные особенности общего случая, но дает возможность воспользоваться мощным инструментом – методами теории аналитических функций комплексного переменного. Отметим, что в случае, когда Γ – полуокружность, задача Трикоми для уравнения (4) решается в квадратурах.

А.В. Бицадзе[2] сформулировал и доказал принцип максимума для уравнения (4), применимый к широкому классу краевых задач для уравнений смешанного типа. П. Жермен и Р. Баде распространили принцип максимума на уравнение (1).

Другим эффективным способом доказательства единственности является т.н. метод abc, применявшийся К. Моравец и другими авторами.

Существование решения задачи Трикоми доказывается методом интегральных уравнений. Этот метод, применявшийся еще Ф. Трикоми, является одним из основных в теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Основная его идея заключается в том, что сначала решаются соответствующие задачи в верхней и нижней подобластях, а затем решения "склеиваются" вдоль линии изменения типа. При этом широко используются идеи и методы теории потенциала, фундаментальные решения, функция Римана и теория сингулярных интегральных уравнений.

Со временем были обнаружены и другие области применения уравнений смешанного типа[3 4 5]. Были поставлены и исследованы многие новые задачи для уравнений смешанного типа на плоскости, в частности, задачи со смещением, с отходом от характеристики, задачи Франкля, Бицадзе-Самарского, Геллерстедта.

С помощью альтернирующего метода Шварца К.И. Бабенко распространил теорему существования решения задачи Трикоми на более широкий класс областей, сняв ограничение на подход кривой Γ к угловым точкам.

Наряду с классической задачей Трикоми рассматривают также задачу с отходом от характеристики, когда область гиперболичности ограничена нехарактеристической кривой $\gamma = AC$, отходящей от характеристики внутрь области, и характеристикой BC; краевое условие при этом ставится на γ. Эту задачу называют также обобщенной задачей Трикоми, или задачей М.

Впервые задачу М на плоскости годографа для уравнения (3) поставил Ф.И. Франкль в 1945 г. при изучении основной задачи теории сопла Лаваля. В 1951 г. он доказал существование решения задачи М для уравнения (1) в случае, когда кривая Γ является «нормальной» кривой в смысле Трикоми и кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой, выходящей из точки A, и близка к ней.

---

[2] Бицадзе А.В. О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70. № 4. С. 561-564.
[3] Пилия А.Д., Федоров В.И. Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // Журн. экспер. и теор. физики. 1971. Т. 60. Вып. 1. С. 389-399.
[4] Черный Г.Г. Газовая динамика. – М.: Наука, 1988. – 424 с.
[5] Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. – М., Мир, 1989. – 360 с.

К.И. Бабенко[6] доказал единственность решения задачи М для уравнения (3) при следующих условиях на кривые Γ и γ:

$$\Gamma:\ (1-x)dy + ydx \le 0,\ \gamma:\ 0 \ge dy/dx \ge -1/\sqrt{-K(y)}.$$

Используя теорему единственности, он методом интегральных уравнений, опираясь на ограниченность сингулярных интегральных операторов в пространстве L_p с весом, показал разрешимость задачи М при условии, когда γ – гладкая кривая, Γ принадлежит классу Ляпунова и в малой окрестности точек A и B удовлетворяет условию ортогональности $|dx/ds| \le Cy^2(s),\ C = \mathrm{const} > 0$.

А.В. Бицадзе впервые исследовал задачу М для уравнения (4). Он доказал единственность ее решения при следующих ограничениях на кривые Γ и γ:

$$\Gamma:\ \left(x - x^2 - y^2\right)\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} \ge 0, \tag{6}$$

$\gamma:\ y = -\alpha(x),\ \alpha(0) = 0,\ \alpha(x) > 0$ при $x > 0$,

$$0 < \alpha'(x) \le 1,\ \alpha'(x) \le \alpha(x)/\left(x - x^2 + \alpha^2\right). \tag{7}$$

Опираясь на теорему единственности, А.В. Бицадзе доказал существование решения задачи М, когда кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой, выходящей из точки A, а кривая Γ принадлежит классу Ляпунова и в малой окрестности точек A и B оканчивается дугами нормальной полуокружности.

М. Проттер в 1954 г. рассмотрел задачу М для уравнения (3) и наметил способ доказательства существования ее решения, сохраняя известные ограничения Трикоми на кривую Γ и предполагая, что кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой.

В 1954 г. К. Моравец предложила т.н. метод *abc* доказательства единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа.

А.П. Солдатов методами теории аналитических функций доказал единственность и существование регулярного решения задачи М для уравнения (4), сняв ограничение (6) на кривую Γ и заменив условие (7) на кривую γ на следующее:

$$0 < \alpha'(0) < 1,\ \alpha'(x) \ge \alpha(x)/x.$$

В 1990-е А.П. Солдатов предложил новые корректные постановки смешанных задач для уравнения (4). В частности, он доказал теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения (4) в смешанной области,

[6] Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа. Дисс. .. д-ра физ.-мат. наук. – М., МИАН, 1952.

ограниченной при $y>0$ и $y<0$ соответственно гладкими дугами с общими концами в угловых точках, при этом дуга при $y<0$ лежит внутри характеристического треугольника.

Задачи с отходом от характеристики рассматривались также в монографии Л.В. Овсянникова[7].

Краевая задача с нехарактеристическим участком границы, параллельным линии изменения типа уравнения, на котором ставится условие Дирихле, была рассмотрена в кандидатской диссертации автора; предложенный подход активно развивается М. Мирсабуровым и его соавторами.

В монографии А.М. Нахушева[8] рассмотрены краевые и внутренне-краевые задачи со смещением для основных типов локальных и нелокальных уравнений в частных производных. Теория таких задач интенсивно развивается с конца 1960-х гг.

Многие важные достижения теории уравнений смешанного типа нашли свое отражение в монографии А.Г. Кузьмина[9]. В частности, в ней рассмотрены т.н. неклассические уравнения смешанного типа, когда характеристики пересекают линию (или линии) изменения типа несколько раз; дана качественная картина поведения характеристик уравнения смешанного типа в случае двух независимых переменных; исследована разрешимость краевых задач в пространствах Соболева; изучены неклассические модельные уравнения типа Лаврентьева-Бицадзе; даны приложения рассмотренных методов и результатов к задачам газовой динамики, в частности, к прямой задаче теории сопла Лаваля.

В 1954 г. М. Проттер предложил некоторые многомерные аналоги краевых задач для уравнений смешанного типа. Впоследствии выяснилось, что эти задачи не обладают свойством нетеровости. Многомерный случай оказался весьма сложным, и даже вопрос о корректной постановке краевых задач остается открытым. В последнее время многомерные задачи активно исследуются Е.И. Моисеевым, Н. Попивановым и их учениками.

Спектральные свойства задач для уравнения смешанного типа активно изучались начиная с 1970-х годов. В 1977 г. Т.Ш. Кальменов доказал, что однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральным параметром λ

[7] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
[8] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука. 2006. – 287 с.
[9] Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Л.: ЛГУ, 1990. – 208 с.

$$-\operatorname{sgn} y\, u_{xx} - u_{yy} = \lambda u$$

имеет положительное собственное число λ и неотрицательную собственную функцию

$$u(x, y) \in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right) \cap C^{1+\alpha}(D) \cap C^{2}\left(D^{+}\right) \cap C^{2}\left(D^{-}\right),\ 0 < \alpha < 1/2 .$$

С.М. Пономарев впервые выписал собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и доказал их полноту в эллиптической части области, являющейся круговым сектором. Е.И. Моисеев доказал базисность этой системы в эллиптической части области и, опираясь на свойство базисности, разработал спектральный метод решения краевых задач для уравнения смешанного типа.

Разложения решений в биортогональные ряды, которые можно вывести из общей формулы при решении задачи в квадратурах, применялись еще А.В. Бицадзе. В работах Е.И. Моисеева эти методы вышли на качественно новый уровень. Доказанная им теорема о базисности системы негармонических синусов[10] позволила строить решения широкого класса задач, в том числе со спектральным параметром, для уравнений смешанного типа путем разложения в биортогональные ряды. Эта тематика продолжает активно развиваться Е.И. Моисеевым и его учениками. Отметим, что задачи со спектральным параметром естественным образом возникают при решении трехмерных задач в цилиндрических областях методом разделения переменных.

Одним из основных методов изучения краевых задач для уравнений смешанного типа является их сведение к краевым задачам для уравнений эллиптического типа в соответствующей подобласти. Возникающие при этом краевые условия, как правило, нестандартны. Изучение таких задач имеет важное теоретическое значение.

В.А. Ильин и Е.И. Моисеев[11] рассмотрели задачу на собственные значения для оператора Лапласа в единичном круге D с наклонной производной на границе, которая была поставлена еще А. Пуанкаре в связи с изучением теории приливов:

$$\Delta u + \mu^2 u = 0, (r, \theta) \in D,$$

$$\left. \left(r u_r + k u_\theta\right) \right|_{\partial D} = 0,$$

где $k -$ ненулевое вещественное число, и доказали, что спектр задачи не лежит в карлемановской параболе $\{\mu : |\operatorname{Im} \mu| \le \mathrm{const}\}$, а корневые функции не образуют базиса ни в одном из пространств $L_q(D),\ q > 1$.

---

[10] Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифф. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 177-179.
[11] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 128-143.

Е.И. Моисеев также изучал расположение спектра задач с наклонной производной в областях, примыкающих к вещественной оси.

Краевые и спектральные задачи для уравнений смешанного типа изучались также в работах В.Н. Врагова, А.Н. Зарубина, И.Л. Кароля, Н.В. Кислова, Я.Н. Мамедова, О.А. Репина, К.Б. Сабитова и других математиков.

В теории краевых задач для уравнений смешанного типа важную роль играет теория интегральных уравнений, в частности, сингулярных (особых) интегральных уравнений, уравнений типа свертки, в том числе заданных на конечном отрезке. Этот один из классических разделов математики, вклад в эту область внесли многие известные ученые: И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Т. Карлеман, З. Прёсдорф, Н.И. Мусхелишвили, Ф.Д. Гахов.

А.П. Солдатов[12] построил теорию одномерных сингулярных интегро-функциональных операторов, которые широко встречаются в приложениях и объединяют черты сингулярного оператора Коши и операторов Винера-Хопфа.

Как известно, уравнения типа свертки, заданные на конечном отрезке, как и системы уравнений типа свертки, заданные на полупрямой, не допускают решения в квадратурах, и для построения их решений приходится прибегать к различным приближенным и асимптотическим методам.

В работе S. Ukai[13] была найдена точная асимптотика собственных значений интегрального уравнения переноса, $0<\alpha<1$:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{|t-x|^{\alpha}},\ x\in[-1,1],$$

доставляющего пример оператора с разностным ядром (оператора типа свертки), заданного на конечном отрезке. Преобразование Фурье ядра этого оператора имеет одну конечную точку разрыва.

Б.В. Пальцев[14] изучил асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций более общего семейства интегральных операторов свертки

$$(Au)(\tau)=\int_{0}^{T}k(t-\tau)u(\tau)d\tau,\ 0\le t\le T,$$

---

[12] Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высшая школа, 1991. – 266 с.

[13] Ukai S. Asymptotic Distribution of Eigenvalues of the Kernel in the Kirkwood-Riseman Integral Equation // J. of Math. Physics. 1971. V. 12. № 1. P. 83-92.

[14] Пальцев Б.В. Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // Изв. РАН, сер. матем. 2003. Т. 67. № 4. С. 67–154.

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $\widetilde{K}(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т.е. $\widetilde{K}(cx)=c^{-\gamma}\widetilde{K}(x)$ для любого $c>0$ и любого вещественного x, с ограничением $0<\gamma<1$.

Л.А. Сахнович[15] предложил метод решения уравнений типа свертки, заданных на конечном отрезке, в случае, когда известны два частных решения, отвечающие правым частям специального вида.

Цели работы. Исследовать краевую задачу с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта. Выписать и изучить символ концевого оператора, отвечающего за поведение решения в окрестности угловой точки.

Исследовать краевую задачу с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения.

Доказать однозначную разрешимость задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге. Исследовать вид обратного оператора.

Исследовать смешанную краевую задачу с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге и связанное с ней особое интегральное уравнение с переменными коэффициентами. Исследовать вид обратного оператора.

Изучить расположение спектра смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге.

Изучить расположение спектра задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа. Выяснить, образует ли базис в пространствах Лебега система корневых функций этой задачи.

Найти асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией.

Решить сингулярные интегральные уравнения и системы таких уравнений.

Методы исследования. Достоверность результатов. Работа носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты сформулированы в виде математических теорем и снабжены строгими доказательствами.

В работе широко используются метод интегральных уравнений, методы теории функций комплексного переменного, операторы дробного дифференцирования, теория

[15] Сахнович Л.А. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке. УМН. 1980. Т. 35. № 4. С. 69-129.

специальных функций, асимптотические разложения, метод эталонных задач при построении асимптотических решений задач дифракции коротких волн, теория и аппарат сингулярных интегральных операторов, методы решения задач сопряжения для кусочно-аналитических функций.

При доказательстве единственности решения краевых задач используется т.н. метод abc.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные из них следующие:

1. Доказана однозначная разрешимость задачи с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта. В ходе доказательства изучено сингулярное интегральное уравнение со сдвигом, найден и проанализирован символ концевого оператора, отвечающего за поведение решения в окрестности угловой точки.

2. Доказана однозначная разрешимость задачи с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения. Доказательство опирается на теорию сингулярных интегральных уравнений.

3. Доказана однозначная разрешимость задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге, причем главный член обратного оператора найден в явном виде.

4. Доказана однозначная разрешимость смешанной задачи с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге, причем главный член обратного оператора найден в явном виде; в ходе доказательства решено в квадратурах особое (сингулярное) интегральное уравнение с переменными коэффициентами.

5. Изучено расположение спектра смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге путем исследования соответствующего сингулярного интегрального уравнения.

6. Изучено расположение спектра и доказано отсутствие свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа.

7. Найдено асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией. Важную роль в доказательстве играет представление соответствующего оператора в виде суперпозиции сингулярных интегральных операторов.

8. Построены решения сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Доказательство однозначной разрешимости задачи с гладким отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта.

2. Доказательство однозначной разрешимости задачи с параллельным отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта и условием Неймана на участке границы, параллельном линии изменения типа уравнения.

3. Метод решения граничного уравнения в задаче с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге.

4. Метод решения граничного уравнения в смешанной задаче с наклонной производной и условием Дирихле на диаметре для уравнения Гельмгольца в полукруге.

5. Доказательство утверждения о том, что спектр смешанной задачи для уравнения Лапласа в полукруге не лежит в карлемановской параболе.

6. Доказательство утверждения о том, что спектр задачи с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Лапласа не лежит в карлемановской параболе, а система корневых функций не образует базиса в пространстве Лебега.

7. Формулы, описывающие асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки, заданного на конечном отрезке, с образом Фурье ядра – характеристической функцией.

8. Формулы, описывающие решения сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут быть использованы специалистами в области дифференциальных уравнений и математической физики, теории краевых задач для дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, асимптотических методов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

- международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 22-27 мая 2001 г.;
- международная научная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, 19-25 июня 2006 г.;

- научная конференция «Понтрягинские чтения» в рамках Воронежской математической школы «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3-9 мая 2010 г.;
- международная научная конференция, посвященная 110-летию со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 30 мая – 5 июня 2011 г.;
- научная конференция «Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел», Белгород, 17-21 октября 2011 г.;
- научный семинар при кафедре дифференциальных уравнений Казанского федерального университета под руководством В.И. Жегалова, Казань, 14 марта 2012 г.;
- научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов» под руководством В.А. Садовничего, Москва, 6 ноября 2013 г.;
- международная научная конференция «Applications of Mathematics in Engineering and Economics», Созополь (Болгария), 8-13 июня 2012-16 гг. и 2018 г.;
- научный семинар при кафедре функционального анализа и его применений под руководством Е.И. Моисеева, Москва (многократно);
- научный семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» под руководством Е.И. Моисеева и И.С. Ломова, Москва, 16 апреля 2018 г.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-17], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 182 страницах. Список литературы содержит 232 наименования (из них 17 – работы автора по теме диссертации).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, сформулированы основные результаты и охарактеризованы цели исследования.

В главе 1 рассмотрены задачи с отходом от характеристики. Основные результаты заключены в следующих теоремах.

В параграфе 1 главы 1 изучена задача с гладким отходом от характеристики. Рассмотрим уравнение Геллерстедта (2)

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0,$$

в области D, ограниченной при $y \ge 0$ простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – участком BC характеристики $\eta = x + (-y)^{m/2+1}/(m/2+1) = 1$, где $C(x_c, y_c)$, $1/2 < x_c < 1$, и кривой AC.

Задача. Найти в области D решение уравнения (2), непрерывное в $\overline{D}$ и принимающее на кривых Γ и AC заданные непрерывные значения:

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s),\ u|_{AC} = \psi(\eta).$$

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$; $\beta = m/(2(m+2))$.

Будем предполагать, что кривая AC задается уравнением

$$y = -\left(\frac{m+2}{2}\alpha(x)\right)^{\frac{2}{m+2}},\ 0 \le x \le x_c,$$

где функция $\alpha(x) \in C^{1,\delta}[0, x_c]$, $\alpha(x) \ge 0$, $\alpha(0) = 0$; $-1 < \alpha'(x) < 1$ при $0 \le x \le x_c$.

Длину кривой Γ обозначим через ℓ.

Будем предполагать[16], что кривая Γ задана параметрическими уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая от точки B; функции $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$ на $[0; \ell]$, $x'^2(s) + y'^2(s) > 0$; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ существуют и гёльдеровы на $[0; \ell]$; в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $|dx/ds| \le Cy^{m+1}(s)$, где C – постоянная.

Так как функция $a + bx + cy + dxy$, очевидно, удовлетворяет уравнению (2) при любых значениях постоянных a, b, c, d, то без ограничения общности можно считать, что $u(A) = u(B) = 0$.

Будем также предполагать, что $\varphi(s)$ гёльдерова, причем $|\varphi(s)| \le C(\ell - s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)| \le Cs$; $\psi(\eta)$ имеет ограниченную первую производную, гёльдерову при $0 < \eta < 1$; $\varphi(\ell) = \psi(0) = 0$.

Решение будем искать в классе функций, первые производные которых могут иметь особенности не выше интегрируемого порядка вблизи точек A и B; функции $\tau(x)$

[16] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

и $\nu(x)$ должны удовлетворять условию Гёльдера с показателем больше β при $0<x<1$, $|\tau(x)|\le Cx^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}$, $|\nu(x)|\le Cx^{2\beta-1+\varepsilon}(1-x)^{2\beta-1+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon>0$ и некоторой постоянной $C>0$. Значение ε (достаточно малое) укажем ниже, однако сразу потребуем, чтобы выполнялось ограничение $\varepsilon<\delta$.

При доказательстве единственности будем дополнительно предполагать, что кривая Γ удовлетворяет условию обобщенной звездности $(x-1)dy-ydx\ge 0$.

Теорема 1.1.1. Решение задачи существует и единственно.

Доказательство существования решения опирается на сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом. Найден и проанализирован концевой символ соответствующего сингулярного оператора. Он выражается через гипергеометрическую функцию и имеет достаточно сложный вид. Доказано, что индекс этого оператора в рассматриваемом классе функций равен нулю, откуда, с учетом единственности решения, и вытекает разрешимость.

В параграфе 2 главы 1 изучена задача с отходом от характеристики параллельно линии изменения типа уравнения. Рассмотрим уравнение (2) в области D, ограниченной при $y\ge 0$ нормальной кривой

$$\Gamma=\left\{(x,y):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4},\ 0\le x\le 1\right\}$$

с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0$ – характеристиками

$$AC_1=\left\{(x,y):\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\ 0<x\le\frac{1}{4}\right\},$$

$$BC_2=\left\{(x,y):\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1,\ \frac{3}{4}\le x<1\right\}$$

уравнения (2) и отрезком

$$C_1C_2=\left\{(x,y):\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4},\ y=-\left(\frac{m+2}{8}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right\}.$$

Обозначим через D^+ и D^- части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, через C – середину отрезка AB, через CC_1 и CC_2 – характеристики уравнения (2), соединяющие C с C_1 и C_2.

Задача. В области D найти функцию

$$u=u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1\left(\left(D\cup C_1C_2\right)\setminus\left(\overline{CC_1\cup CC_2}\right)\right)\cap C^2\left(\left(D^+\cup D^-\right)\setminus\left(\overline{CC_1\cup CC_2}\right)\right),$$

удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma}=\varphi(s),\ u\big|_{AC_1}=\psi(\eta),\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{C_1C_2}=\chi(x),$$

где $\varphi(s)$, $\psi(\eta)$, $\chi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. В дальнейшем будем полагать, что эти функции представимы в следующем виде: $\varphi(s)=\varphi_1(x)=y^2\overline{\varphi}_1(x)$, $(x, y)\in\Gamma$, $\overline{\varphi}_1(x)\in C[0,1]$; $\psi(\eta)=\eta^2\widetilde{\psi}(\eta)$, $\widetilde{\psi}(\eta)\in C^2[0,1]\bigcap C^{2,\delta}[0,1)$; $\chi(x)\in C^{1,\delta}(1/4, 3/4)$, причем на концах интервала $(1/4, 3/4)$ функция $\chi(x)$ может обращаться в бесконечность порядка не выше $1/4+\beta/2$, $\beta=m/(2(m+2))$.

Как и в предыдущем параграфе, без ограничения общности предполагаем, что $u(A)=u(B)=0$.

Теорема 1.1.2. Решение задачи существует и единственно.

Доказательство существования проводится методом интегральных уравнений. Задача сводится к особому интегральному уравнению, которое, в свою очередь, сводится к уравнению типа свертки на полупрямой. Показано, что индекс соответствующего оператора равен нулю, откуда, с учетом единственности решения, и следует разрешимость задачи.

В главе 2 рассмотрены краевые задачи для уравнения Гельмгольца и спектральные задачи. Основные результаты заключены в следующих теоремах.

В параграфе 1 главы 2 изучена задача с наклонной производной с переменным углом наклона для уравнения Гельмгольца в круге. Пусть (r, θ) – полярные координаты, $D=\{(r, \theta)\,|\, r<1\}$. Требуется найти функцию $u(r,\theta)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, удовлетворяющую в D уравнению Гельмгольца

$$\Delta u-\mu^2 u=0, \tag{8}$$

где $\mu=\xi+i\eta=\rho e^{i\varsigma}$, $\varsigma\in(-\pi/2, \pi/2)$, и на границе D – краевому условию с наклонной производной:

$$\left(r\frac{\partial u}{\partial r}-k(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\bigg|_{r=1}=h(\theta),$$

где $k(\theta)\in C^2[0, 2\pi]$ – вещественная знакоопределенная функция, $k(0)=k(2\pi)$, $k'(0)=k'(2\pi)$; $h(\theta)\in C[0, 2\pi]$, $h(0)=h(2\pi)$.

Параметр μ можно считать и переменной величиной, изменяющейся в пределах указанного угла на комплексной плоскости, – в этом случае правую часть $h(\theta)$ можно считать зависящей от μ; коэффициент $k(\theta)$, напротив, не должен зависеть от μ.

Теорема 2.1.1. Существуют функции $C_I(\varsigma)$ и $C_*(\varsigma)$ такие, что при $\nu \geq 0$, $\mu \in D_* = \{(\xi, \varsigma) | \xi > C_*(\varsigma)\}$ справедливо представление

$$\frac{\mu I_\nu'(\mu)}{I_\nu(\mu)} = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - \frac{\mu^2}{2(\mu^2 + \nu^2)} + \frac{\Xi(\mu, \nu)}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}},$$

где $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $|\Xi(\mu, \nu)| \leq C_I(\varsigma)$, причем $C_*(0) = 0$, $C_I(0) = 15/8$.

В пространстве дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических вместе со своими производными до второго порядка включительно функций определим оператор B и его коммутатор с оператором умножения на коэффициент k:

$$f = \sum_n f_n e^{in\theta}, \; Bf = \sum_n f_n \sqrt{\mu^2 + n^2} e^{in\theta}, \; [B, k] = Bk - kB.$$

Обозначим

$$\| f \|_2 = \left(\int_0^{2\pi} | f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \; \| f \|_C = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} | f(t)|.$$

Теорема 2.1.2. Существует функция $C_B(\varsigma)$ такая, что $\|[B, k]\|_2 \leq C_B(\varsigma) \|k'\|_C$.

Показано, что исходная задача эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно производной граничного значения искомой функции. Обозначим через A вполне непрерывный оператор из этого уравнения.

Теорема 2.1.3. Существует функция $C_A(\varsigma, k)$ такая, что для оператора A справедлива оценка $\|A\|_2 \leq C_A(\varsigma, k) / \sqrt{\xi}$ при $\mu \in D_*$, откуда при $\mu \in D_* \cap D_A$, где $D_A = \{(\xi, \varsigma) | \sqrt{\xi} > C_A(\varsigma, k)\}$, следует однозначная разрешимость задачи.

В параграфе 2 главы 2 рассмотрена смешанная краевая задача с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в полукруге. Пусть (r, θ) – полярные координаты, $D = \{(r, \theta) | r < 1, 0 < \theta < \pi\}$, $\Gamma = \{(r, \theta) | r = 1, 0 < \theta < \pi\}$. Требуется найти функцию $u(r, \theta) \in C^2(D) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую в области D уравнению (8), где $\mu = \xi + i\eta = \rho e^{i\varsigma}$, $\varsigma \in (-\pi/2, \pi/2)$, и на границе области D – краевым условиям

$$u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\pi} = 0, \; \left(r\frac{\partial u}{\partial r} - k\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)\Bigg|_\Gamma = l(\theta),$$

где $k \neq 0$ – вещественное число.

Относительно функции $l(\theta)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Гельдера на интервале $(0,\pi)$ и может иметь особенности порядка меньше единицы на его концах.

Параметр μ можно считать и переменной величиной, изменяющейся в пределах указанного угла на комплексной плоскости, – в этом случае правую часть $l(\theta)$ можно считать также зависящей от μ.

Обозначим $a = 1/\sqrt{1+k^2}$, $b = 2k/(1+k^2)$.

Теорема 2.2.1. Исходная задача эквивалентна особому интегральному уравнению

$$f(x) - \frac{b}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(1 + \frac{1-a^2}{(x+a)(s+a)}\right)\frac{f(s)}{s+x}\frac{sds}{\sqrt{s^2-1}} = h(x),\ x > 1.$$

Доказана однозначная разрешимость этого уравнения и построено его решение в квадратурах. Отсюда следует, что существует функция $\chi_*(\varsigma)$ такая, что при $\xi > \chi_*(\varsigma)$ задача однозначно разрешима, причем главный член разложения решения по параметру μ может быть найден в явном виде.

В параграфе 3 главы 2 изучена спектральная задача для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями в полукруге. Пусть область D на плоскости ограничена полуокружностью Γ, $\Gamma = \{(x,y): x^2+y^2 = 1, y > 0\}$, и отрезком AB, $A(-1,0)$, $B(1,0)$. Рассмотрим следующую спектральную задачу (за (r,φ) обозначены полярные координаты):

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0,\ (x,y) \in D, \tag{9}$$

$$u|_{AB} = 0,\ (ru_r - ku_\varphi)|_\Gamma = 0,\ k \neq 0, k \in \mathrm{R},$$

где

$$u = u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus \{A,B\}) \cap C^2(D).$$

Теорема 2.3.1. Собственные значения задачи не лежат в карлемановской параболе $|\mathrm{Im}\lambda| \leq C$ ни при каком C; точнее, существует последовательность собственных значений $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ такая, что $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$, $\beta_n/\alpha_n \to 0$.

В параграфе 4 главы 2 результаты В.А. Ильина и Е.И. Моисеева о расположении спектра и отсутствии свойства базисности у корневых функций задачи с наклонной производной с постоянным коэффициентом угла наклона производной распространены на случай переменного непрерывного невырождающегося коэффициента угла наклона производной.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа (9) в единичном круге D с наклонной производной на границе: $\left(ru_r + k(\theta)u_\theta\right)\big|_{\partial D} = 0$, где $k(\theta)$ – непрерывная 2π-периодическая положительная функция.

Теорема 2.4.1. Спектр задачи не лежит в карлемановской параболе $\left\{\lambda : \left|\operatorname{Im}\lambda\right| \le \mathrm{const}\right\}$, а корневые функции не образуют базиса ни в одном из пространств $L_q(D)$, $q > 1$.

В главе 3 рассмотрены различные интегральные уравнения, связанные с теорией краевых задач. Ниже приведены основные результаты.

В параграфе 1 главы 3 найдено асимптотическое поведение спектра и собственных функций интегрального оператора типа свертки с образом ядра – характеристической функцией отрезка.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x-t)\varphi(t)dt,\ x \in [-1, 1], \tag{10}$$

где $K(x) = (\pi x)^{-1}\sin(lx)$, $l > 0$, λ – спектральный параметр.

Теорема 3.1.1. Спектр уравнения (10) состоит из двух перемежающихся последовательностей вида

$$\lambda_n^+ = \exp\left(\pi l^{-1}\left(\pi n/4 + \vartheta_+ + \ldots\right)^2\right),\ n = 1, 3, \ldots;\ \lambda_n^- = \exp\left(\pi l^{-1}\left(\pi n/4 + \vartheta_- + \ldots\right)^2\right),\ n = 2, 4, \ldots,$$

где $\vartheta_\pm$ – некоторые постоянные.

Кроме того, получено асимптотическое представление собственных функций интегрального оператора (10), опирающееся на решения задач сопряжения теории аналитических функций.

В параграфе 2 главы 3 решено в квадратурах сингулярное интегральное уравнение с некарлемановским сдвигом

$$f(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_0^1 \frac{f(t)dt}{t - lx} = h(x),\ x \in (0, 1),$$

где $0 < l < 1$, в классе гельдеровых функций с весом.

В ходе доказательства стандартный метод факторизации для задачи сопряжения на вещественной прямой, в котором предполагается, что коэффициент задачи сопряжения стремится к единице на бесконечности, обобщен на случай осциллирующего периодического коэффициента.

В параграфе 3 главы 3 решено в квадратурах особое интегральное уравнение

$$f(x)-\lambda\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a(x+t)}}{x+t}f(t)dt=g(x),\ x>0.$$

В параграфе 4 главы 3 построено асимптотическое решение системы уравнений Винера-Хопфа с кусочно-постоянными образами ядер.

Пусть $\alpha\to 1-0$. Рассмотрим на R^+ следующую систему уравнений, вырождающуюся при $\alpha=1$:

$$f_1(x)+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x-t}f_1(t)dt-\frac{\alpha}{i\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x-t)}{x-t}f_2(t)dt=g_1(x),$$

$$f_2(x)-\frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x-t}f_2(t)dt+\frac{1}{i\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x-t)}{x-t}f_1(t)dt=g_2(x).$$

Предполагаем, что правые части абсолютно интегрируемы на любом конечном отрезке полупрямой, при $x\to+0$ имеют порядок $O\left(x^{-1/4}\right)$, а при $x\to+\infty$ ведут себя как $e^{iax}x^{-\delta}$, $\delta>0$, $a\in\mathrm{R}$, или как линейная комбинация таких функций; решение будем искать в том же классе.

Теорема 3.4.1. Индекс задачи в рассматриваемом классе равен единице, т.е. однородная система имеет одно линейно независимое решение, а неоднородная система всегда разрешима и ее решение определяется с точностью до произвольной постоянной.

В параграфе 5 главы 3 сингулярные интегралы от функций, в которые входят решения задач сопряжения, выражены через линейные комбинации этих функций с дробно-рациональными коэффициентами.

Пусть $\lambda>1$, $\lambda\neq 2$, $\delta=(2\pi i)^{-1}\ln(\lambda-1)$, $x>1$, $W_\pm(x)=\pm\left(1-2\lambda^{-1}\right)\sqrt{1-x^{-2}}$, $D_\pm(x)=\left(W_\pm(x)+1\right)/\left(W_\pm(x)-1\right)$. Рассмотрим следующие однородные задачи сопряжения на полупрямой $x>1$: $X_\pm^+(x)=D_\pm(x)X_\pm^-(x)$. У этих задач существуют единственные, с точностью до постоянного множителя, решения, имеющие особенности интегрируемого порядка и исчезающие на бесконечности:

$$X_\pm(z)=(1-z)^{\mp\delta-1/2}\exp\left((2\pi i)^{-1}\int_1^{+\infty}(t-z)^{-1}\ln\left((1-\lambda)^{\mp1}D_\pm(t)\right)dt\right)$$

(полагаем $-\pi<\arg z\le\pi$).

Обозначим

$\Theta(x)=-iX_-(-x)/\left(X_+^+(x)\left(W_+(x)-1\right)\right)$, $\Sigma(x)=\Theta(x)\sqrt{x+1}/\left(x\sqrt{x-1}\right)$, $\rho(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Теорема 3.5.1. Справедливые следующие формулы:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Sigma(x)d\rho(x)}{x\pm y} = P_{\pm}(y)\Sigma(y)\mp Q(y),\ y>1, \tag{11}$$

где

$$P_{\pm}(y)=\frac{p_{\pm}y^2+(\lambda-2)^2}{2\lambda(\lambda-2)(y^2-1)},\ Q(y)=\frac{\lambda\Sigma(1)y}{2(\lambda-2)(y^2-1)}$$

– дробно-рациональные функции, $p_{+}=4(\lambda-1),\ p_{-}=-2\left((\lambda-1)^2+1\right)$.

В параграфе 6 главы 3 рассмотрена система сингулярных интегральных уравнений с ядрами, в которые входят решения задач сопряжения. В дополнение к обозначениям предыдущего параграфа, обозначим

$$\Theta_{+}(x)=\frac{-iX_{-}(-x)}{X_{+}^{+}(x)(W_{+}(x)-1)},\ a=\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)},\ \Theta_{-}(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)\left(1+a^{-1}(x^2-1)\right)\Theta_{+}(x)}.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$U_{-}+\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Theta_{+}U_{+}dt}{t+x}=V_{-},\ U_{+}-\frac{1}{\pi i}\int_{1}^{+\infty}\frac{\Theta_{-}U_{-}dt}{t+x}=V_{+},\ x>1.$$

Предполагаем, что $V_{\pm}\in C[1,+\infty)$ и $V_{\pm}=O\left(x^{-1}\right)$ при $x\to+\infty$. Решения $U_{\pm}$ будем искать в классе функций, имеющих особенность интегрируемого порядка при $x\to 1+0$ и исчезающих на бесконечности.

С помощью формул (11) построено решение этой системы в квадратурах.

Заключение. Укажем возможные направления дальнейших исследований по тематике настоящей диссертации.

Применение методов теории аналитических функций комплексного переменного, теории сингулярных интегральных операторов и методов задач сопряжения позволило изучить неклассические краевые задачи, например, задачу типа Дирихле, для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Представляется перспективным применить рассмотренные в диссертации методы интегральных преобразований к изучению различных краевых задач для уравнения Геллерстедта, уравнения второго рода и других уравнений смешанного типа.

Представляется интересным развить методы решения краевых задач для уравнения Гельмгольца, в том числе с неклассическими краевыми условиями, по аналогии с теорией задач сопряжения для аналитических функций.

Примененный в настоящей диссертации метод факторизации посредством интегральных операторов допускает естественное обобщение и распространение на другие уравнения типа свертки, заданные на конечном отрезке.

Вызывает интерес изучение возможности решения в квадратурах различных сингулярных интегральных уравнений и их систем с неклассическими коэффициентами, выражающимися через решения задач сопряжения.

Дальнейшее развитие аппарата канонических функций – решений задач сопряжения также представляется перспективным.

Автор выражает глубокую благодарность акад. РАН, проф. Е.И. Моисееву за научные консультации, внимание и интерес к проделанной работе.

Работы автора по теме диссертации

Все работы опубликованы в научных изданиях, индексируемых в базах данных Scopus, Web of Science, RSCI

1. Полосин А.А. О краевой задаче для уравнения Трикоми в специальной области // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1101-1111.
2. Полосин А.А. О базисности одной возмущенной тригонометрической системы функций. // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 1000-1003.
3. Полосин А.А. О расположении спектра смешанной краевой задачи в квадрате // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1095-1100.
4. Полосин А.А. О решении одного сингулярного интегрального уравнения // Дифф. уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 710-714.
5. Полосин А.А. О расположении спектра смешанной краевой задачи в полукруге // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 641-652.
6. Полосин А.А. Об асимптотическом решении одной системы уравнений Винера-Хопфа с кусочно-постоянными образами ядер // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43. № 9. С. 1197-1205.
7. Полосин А.А. Некоторые интегральные преобразования решений задач сопряжения // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1427-1432.
8. Полосин А.А. Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с ядрами, содержащими решения задач сопряжения // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1457-1462.

9. Полосин А.А. Об асимптотике спектра интегрального оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1516-1520.
10. Полосин А.А. О расположении спектра и отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной с переменным углом наклона // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1466-1473.
11. Полосин А.А. О задаче с отходом от характеристики для уравнения Геллерстедта // Дифф. уравнения. 2012. Т. 48. № 10. С. 1428-1442.
12. Полосин А.А. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1213-1220.
13. Полосин А.А. О собственных функциях оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Доклады Академии наук. 2017. Т. 475. № 6. С. 614-617.
14. Полосин А.А. О спектре и собственных функциях оператора свертки на конечном интервале с образом ядра – характеристической функцией // Дифф. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1180-1194.
15. Полосин А.А. О некоторых свойствах сингулярного интегрального уравнения с некарлемановским сдвигом // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 3. С. 423-424.
16. Полосин А.А. О задаче с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в круге // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 492-501.
17. Полосин А.А. О смешанной задаче с наклонной производной для уравнения Гельмгольца в полукруге // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 10. С. 1399-1410.