МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ВЕРШИНИН АНАТОЛИЙ ВИКТОРОВИЧ

Математические модели и пакет прочностного инженерного анализа

Специальность 05.13.18 –
“Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:
Заслуженный деятель науки РФ, профессор, д.ф.-м.н.
Левин Владимир Анатольевич

Москва – 2018

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 7

ГЛАВА 1. МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАЛОЖЕНИИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ 25

1.1 Введение 25

1.2 Математические модели наложения конечных деформаций 27

Основные термины и обозначения теории многократного наложения больших деформаций 27

Кинематика деформаций 29

Тензоры напряжений 37

Уравнения движения и граничные условия 38

Определяющие соотношения теории наложения больших деформаций 41

Математическая модель образования концентраторов напряжений в нагруженном теле 41

Модель роста дефекта в нагруженном теле с зонами предразрушения 46

1.3 Численное решение задач теории многократного наложения больших деформаций 51

Алгоритм решения задачи о последовательном образовании концентраторов напряжений 53

Численная дискретизация 57

Модели и методы решения нестационарных задач наложения больших деформаций 61

1.4 Результаты решения модельных задач 70

Одновременное образование эллиптического и кругового отверстий в нагруженном теле 70

Последовательное образование эллиптического и кругового отверстий в нагруженном теле 71

Задача о последовательном образовании двух круговых отверстий, форма которых задана в конечном состоянии 74

Задача о распаде начального разрыва 75

Задача о динамическом образовании двух круговых отверстий и возникновении включений в нагруженном теле 83

Модельная задача о росте дефекта в нагруженном теле 86

Задача Ламе-Гадолина при конечных деформациях ... 95
1.5 Заключение ... 99
ГЛАВА 2. МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ... 101
2.1 Введение ... 101
2.2 Изопараметрический метод спектральных элементов (МСЭ) ... 105
Построение спектральноэлементных сеток ... 114
Повышение порядка элементов сетки. ... 122
Алгоритм дискретизации задач теории наложения конечных деформаций на основе МСЭ ... 127
2.3 Применение изопараметрического метода спектральных элементов к моделированию волновых процессов ... 130
Трёхмерные задачи нестационарной теории упругости ... 132
Неотражающие граничные условия ... 139
Сравнение с аналитическим решением ... 145
МСЭ для непрерывно неоднородных сред ... 149
2.5D сейсмическое моделирование упругих волн в слоистой среде ... 151
Трёхмерный случай анизотропной вязкоупругой TTI среды ... 155
Вязкоупругие материалы. Вычисление интегралов свертки. ... 162
2.4 Моделирование акустического каротажа изопараметрическим методом спектральных элементов ... 167
Механическая модель акустического каротажа ... 167
Математическая модель акустического каротажа ... 171
Построение неструктурированных сеток для численного моделирования задач акустического каротажа ... 177
Результаты расчетов. Сравнение с аналитическими решениями. ... 184
2.5 Методология тестирования программных комплексов для численного моделирования распространения волновых процессов в неоднородных средах ... 199
Разрывная модель ... 205
Расширенная разрывная модель ... 206
Сглаженная модель ... 207
Программа тестирования. ... 209

2.6 Заключение 212

ГЛАВА 3. МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕХАНИКИ 215

3.1 Введение 215

3.2 Обобщение геомеханической модели для пористых трещиноватых резервуаров 218

Математическая постановка и алгоритм решения *220*

Модель ячейки периодичности трещиноватой среды *230*

Оценка эффективных свойств кернов *242*

3.3 Оценка устойчивости наклонного ствола скважины 249

Математическая модель *249*

Дискретизация и численное моделирование *255*

3.4 Моделирование гидрогеомеханических пластовых процессов 268

Алгоритм сопряжения гидродинамической и геомеханической моделей *269*

Численные исследования *278*

3.5 Заключение 281

ГЛАВА 4. АЛГОРИТМЫ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ МКЭ И МСЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ 286

4.1 Введение 286

4.2 Применение технологии OpenMP 288

Алгоритм распараллеливания *289*

Решение систем линейных алгебраических уравнений *290*

4.3 Применение технологии CUDA 295

Алгоритм распараллеливания *304*

Составление матрицы системы *307*

Составление вектора нагрузок *310*

Решение СЛАУ *311*

Анализ производительности *318*

4.4 Применение технологии MPI 325

Алгоритм распараллеливания *328*

Решение серии краевых задач в параллельном режиме *331*

Анализ производительности *333*

4.5 Распараллеливание в режиме MultiGPU ... 336
4.6 Заключение ... 341
ГЛАВА 5. ПАКЕТ ПРОЧНОСТНОГО ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА ... 344
5.1 Введение ... 344
5.2 Структура CAE Fidesys ... 347
Препроцессор ... *357*
Постпроцессор ... *368*
Расчетные ядра ... *370*
Расчетное ядро для решения краевых задач при малых деформациях ... *373*
Расчетное ядро для решения краевых задач при конечных деформациях ... *374*
Расчетное ядро для решения задач термоупругости ... *392*
Расчетное ядро для вычисления эффективных характеристик неоднородных материалов ... *399*
5.3 Интерфейс пользователя CAE Fidesys ... 407
Геометрия ... *408*
Построение сетки ... *409*
Группы материалов ... *410*
Работа с блоками ... *413*
Типы граничных условий ... *415*
Запуск расчёта ... *418*
Визуализация результатов и постпроцессинг ... *424*
Автоматизация ... *427*
5.4 Примеры решенных промышленных задач ... 429
Расчет фланца под опору ... *429*
Определение НДС в упругом элементе и усилия срабатывания цангового замка ... *434*
Динамический анализ панели с приборами ... *437*
Расчет элементов авиационных конструкций ... *441*
Расчет прочности решетки подруливающего устройства ледокола ... *451*
Расчет боковой рамы тележки железнодорожного вагона ... *453*
Расчёт цистерны ... *458*
Расчет транспортировочной рамы ... *461*
Расчет адаптера ... *464*

Определение напряжений в баке с жидкостью при сейсмическом воздействии *472*
Анализ напряжений в механическом редукторе *478*
Математическое моделирование деформаций ограничителей хлыстовых перемещений при разрывах трубопроводов *481*
Геомеханический анализ горных выработок *483*
5.5 Заключение 490
ЗАКЛЮЧЕНИЕ **492**
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ **497**
СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА **562**
ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ **579**
Введение 579
Статическое нагружение 581
Динамическое нагружение 632
Анализ собственных частот 637
Нелинейные задачи 663
Линейно-упругая устойчивость 678
Задачи теплопроводности и термоупругости 696
Контактные задачи 714
Расчет эффективных свойств композитов 729

Введение

В диссертационной работе обобщены математические модели, разработаны алгоритмы и их программная реализация, в том числе, на современных массивно-параллельных системах, использовавшиеся при разработке программных модулей в составе промышленной полнофункциональной системы прочностного инженерного анализа (CAE) Fidesys. Приведена реализованная на их основе функциональная структура и состав модулей CAE Fidesys. Наряду с описанием структуры и функционала отдельных модулей, отмечены ключевые особенности системы: полное распараллеливание расчетного кода; заложенные в пакет модифицированные механические и математические модели, позволяющие решать задачи о перераспределении конечных деформаций; наличие двух расчетных ядер – ядра, основанного на методе конечных элементов, и ядра, использующего метод спектральных элементов.

Пакет CAE Fidesys является промышленной программной системой компьютерного моделирования, которая обеспечивает инженерный анализ прочности на всех этапах жизненного цикла изделий и становится, таким образом, цифровым средством производства. Пакет состоит из препроцессора (включающего блок генерации расчетных сеток), расчетного ядра (блока расчетных модулей) и постпроцессора. Промышленная программная система, в отличие от программ, предназначенных для исследовательских целей, является «отчуждаемым» от разработчика интеллектуальным продуктом. Применительно к пакету прочностного анализа это, означает, в частности, что при использовании пакета не должны требоваться ни постоянное участие разработчика, ни углубленные знания пользователя в области механики деформируемого твердого тела.

В течение долгого времени фактически стандартом для расчетов прочности и описания процессов разрушения являлась линейная теория упругости. Причиной такого состояния дел могут служить сразу несколько факторов: с одной стороны - широкое использование материалов и режимов работы элементов конструкций, хорошо описываемых в рамках линейной теории упругости, с другой стороны - сложность математической формулировки и решения задач, выходящих за рамки линейной теории. Для предсказания прочности, в том числе, остаточной после возникновения дефектов, необходимо использование нелинейной теории [149]. Вопросы нелинейной теории упругости подробно исследованы в работах Г.М.Бартенева [21, 22, 23], В.Л.Бидермана [30], И.В. Блоха [33], В.Д. Бондаря [36], М.Ф. Бухиной [43], Л.М. Зубова [88], Л.И.Кутилин [121], В.И. Левитаса [151], А.И. Лурье [157, 158], В.П. Матвеенко [167], В.В. Новожилова [195, 196], Б.Е. Победря [213, 214], Г.Н. Савина [227, 228], Л.И.Седова [232, 234],

Л.А.Толоконникова [251], О. Ватанабе [758], А. Грина [457], М. Муни [624], Ф. Мурнагана [630], Р. Ривлина [687, 688, 689], Л. Трелоара [740, 741], К. Труселла [744] и многих других.

В математических моделях, описывающих деформацию твердых тел, нелинейность разделяют на два типа: геометрическую и физическую. Физическая – возникает из-за нелинейной связи напряжений, образующихся в теле в результате приложения к нему усилий, с деформациями. Практически все твердые тела могут вести себя линейно в определенных пределах действующих на них нагрузок.

Второй тип нелинейности – геометрическая, которая возникает из-за нелинейной связи деформации тела с градиентами перемещений. Лишь при относительно небольших перемещениях частиц твердого тела можно предполагать линейную связь градиентов перемещений и деформаций без значительной потери точности, однако данное предположение дает большие удобства исследователю. В частности, для линейной теории верен принцип суперпозиции, который позволяет независимо исследовать влияние различных воздействий на тело, а затем суммировать результаты для анализа совместного воздействия.

Во многих случаях нет необходимости в описании всего процесса деформирования, достаточно знать состояние тела до нагружения и после. В рамках нелинейной модели, в отличие от линейной, два данных состояния не отождествляются, что позволяет более детально задать параметры процесса. Так в задачах об образовании дефектов в теле появляются возможности:

- задания формы дефекта в том состоянии, в котором она известна
- вычисления формы дефекта в состоянии, в котором она неизвестна
- задания нагрузок, действующих на берегах дефекта, в том состоянии, в котором они известны

Как уже было отмечено при описании нелинейной теории упругости, данная теория позволяет учесть некоторые аспекты поведения деформируемого тела, которыми пренебрегают при исследовании в рамках линейной теории упругости

- Момент, в который известна форма образовавшегося дефекта (до или после нагружения)
- Момент, в который известны прикладываемые нагрузки

Математическое и компьютерное моделирование роста дефектов в элементах конструкций является одним из важных и интенсивно развивающихся направлений современной технической механики. Известны работы А. Гриффитса [459], Дж. Райса [686], Е. Орована [653, 654], Дж. Ирвина [496, 497, 498, 499], Д. Эшелби [277], Г.И. Баренблатта [17], Г.П. Черепанова [267], Е.М. Морозова [175, 204, 211, 236], Н.Ф. Морозова [179, 180], В.В. Панасюка [201, 202],

Ю.Н. Работнова [218, 219, 221], Л.М. Качанова [94, 95], В.А. Левина [126, 127, 128, 136, 138, 149], В.В. Лохина [143], Н.А. Махутова [168, 169, 170], Г.П. Никишкова [638], С.Г. Псахье [11, 107, 108], С.А. Христиановича [262, 264] и других авторов в области моделирования роста трещин. Различают хрупкое разрушение, сопровождающееся быстрым ростом трещин при отсутствии пластической деформации, и вязкое разрушение, при котором в теле происходит образование и слияние микрополостей. Одним из подходов к моделированию процесса вязкого разрушения является компьютерное моделирование роста и слияния микродефектов [198, 226, 332, 580, 623]. Для моделирования напряженно-деформированного состояния тел с трещинами при рассмотрении трещин как математических разрезов нулевой ширины эффективным оказался «расширенный» метод конечных элементов (extended finite element method, XFEM) [302, 307, 335, 394, 399, 419], который использует элементы специального вида для аппроксимации напряженного состояния вблизи вершин трещин. Этот подход использован и в некоторых коммерческих системах инженерного прочностного анализа, таких как Ansys [178].

Отметим, что при конечных деформациях такой подход не всегда целесообразно применять, с учетом того, что трещина, имеющая в момент возникновения форму математического разреза (нулевой ширины), в результате деформации будет иметь ненулевую ширину. Подход к определению направления развития трещин для двумерных задач предложен в [580].

К числу основных пакетов в области моделирования роста дефектов можно отнести системы инженерного прочностного анализа (Ansys [823], Abaqus [824], Nastran [825]). Компания Beasy [826], специализирующаяся на разработке программного обеспечения для моделирования процессов разрушения, наряду с другими задачами осуществляет разработки в области компьютерного моделирования роста трещин. Ряд научных групп ведущих мировых университетов проводит разработки в области компьютерного моделирования развития дефектов. Это, например, специалисты из технического университета Эйндховена (Нидерланды): prof. M.G.D. Geers [474, 747, 748], dr. W.A.M. Brekelmans [715, 716, 717], dr. P.J.G. Schreurs [656], dr. R.H.J. Peerlings [827]; проф. М. Ортиз из Калифорнийского технологического института, США (M. Ortiz, California Institute of Technology) [828] с сотрудниками; проф. Г. Мешке из университета г. Бохум, Германия (Günther Meschke, Ruhr-Universität Bochum, Civil and Environmental Engineering) с сотрудниками [829]; сотрудники лаборатории SANDIA (США) совместно с Массачусетским технологическим институтом [657].

Однако ряд практически важных задач не может быть решен в рамках классической нелинейной теории упругости. В первую очередь, это задачи с последовательным (в несколько шагов) изменением формы тела, в том числе, образованием дефектов, а также

последовательным изменением свойств части тела в результате его деформаций. Кроме того, последовательно в различные моменты могут изменяться граничные условия, что также неизбежно при возникновении областей с изменившимися свойствами или дефектов. Данный тип задач требует рассмотрения нескольких промежуточных состояний тела, помимо начального и конечного для случая задач нелинейной теории упругости. В результате решение задачи распадается на набор шагов, на каждом из которых происходят некоторые изменения, причем на каждом из этих шагов происходит накопление больших деформаций, на которые, в общем случае, накладываются большие деформации следующего шага.

Развитие теории наложения малых деформаций на большие началось с середины 60-х годов прошлого века, наиболее подробно вопросы теории были рассмотрены в работах киевской школы механиков под руководством А.Н. Гузя [72, 75]. Исследование задач о перераспределении конечных деформаций в рамках теории многократного наложения больших деформаций для тел из упругих или вязкоупругих материалов проведено в работах Г.С. Тарасьева [150, 248], В.А. Левина [127, 130, 136, 138, 576, 577, 578, 588], К.М. Зингермана [83, 84, 85]. В работах В.А. Левина рассмотрены также вопросы зарождения и развития дефектов в рамках механики деформируемого твердого тела при конечных деформациях [126, 128, 129, 143, 146, 580, 583, 586, 589], предложены нелокальные критерии прочности и модели, учитывающие возникновение и развитие зон предразрушения (совместно с Е.М. Морозовым) [139, 147, 148, 590], разработаны методы оценки эффективных характеристик пористых материалов при конечных деформациях и их наложении (совместно с В.В. Лохиным, К.М. Зингерманом) [137, 144, 145, 575, 579, 581, 582, 585, 587, 594].

Для численного решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, рассматриваемых в работе, применяется метод конечных элементов (МКЭ) [10, 24, 25, 82, 98, 197, 199, 327, 336, 337, 488, 489, 646, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**787, 788, 789, 791, 792] и метод спектральных элементов (МСЭ) [375, 376, 438, 534, 535, 540, 546, 620, 640, 641, 662, 705, 706, 711, 742]. Вариационная постановка данных задач, используемая при решении МКЭ, получена методом Галёркина. Данный метод был предложен в 1915 г. Б.Г. Галёркиным как приближенный метод решения краевых задач [59]. Ранее, в 1913 г., метод применялся для решения конкретных задач теории упругости И.Г. Бубновым [40], в связи с чем именуется также методом Бубнова - Галёркина. Теоретическое обоснование метода принадлежит М.В. Келдышу [98]. Применение метода конечных элементов для численного решения задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) при конечных деформациях рассмотрено в работах К. Бате [24, 25, 327], Т. Белычко [332, 333, 334, 335, 336, 337], Н.Г. Бураго [41], О. Зенкевича [82, 786, 787, 788, 789, 791, 792], П. Ладевезе [560, 561, 562], В.А. Левина [131, 140, 584, 593], Дж.

Одена [199, 644, 645, 646], Б.Е. Победря [215], Л. Сегерлинда [231], Р. Тейлора [506,733, 713], Дж. Симо [714], Дж. Фиша [433, 435, 437], Т. Хьюгса [488, 489], С.В. Шешенина [274], Э. Штайна [725, 726], Ю.Г. Яновского [280] и других авторов. Современное состояние вопроса определяется, в первую очередь, существующими сейчас на рынке системами инженерного анализа для расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, среди которых одними из наиболее распространенных являются [823, 824, 825]. Кроме этого, большой интерес у исследователей в этой области вызывают метод спектральных элементов (МСЭ) и разрывный метод Галеркина (МРГ) за счет эффективности решения отдельных задач МДТТ с их использованием [110, 420, 421, 469, 520, 521, 522, 523, 709, 711, 755, 757, 770, 771].

Недостатком рассмотренных численных методов является нерешенность (в общем случае) вопроса об их сходимости в случае применения к нелинейным задачам теории наложения больших деформаций [131]. Отметим, что одной из проблем, возникающих при решении нелинейных задач механики деформируемого твердого тела (и в частности, задач теории упругости) при конечных деформациях, является возможность нарушения условий эллиптичности материала при достаточно больших деформациях. При численном решении (например, методом конечных элементов) это приводит к вырожденности матрицы жесткости, получаемой при линеаризации задачи [425, 789]. Другой проблемой является возможная неоднозначность решения нелинейных задач, возникающая, например, при различном выборе начального приближения при применении итерационных методов [726, 788].

Поэтому очень важным является сравнение результатов, полученных с использованием этих методов, с результатами расчетов иными методами [146, 174, 184, 187, 239, 532, 533, 586], с известными точными решениями [2, 31, 130, 138, 158, 188, 195, 224, 227, 483], с эталонными численными решениями [811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819], проведение анализа на сеточную сходимость (инвариантность получаемого решения относительно вида и количества элементов разбиения и порядка аппроксимации). Однако следует отметить, что точные решения могут быть получены либо для областей частного вида при заданных особым образом нагрузках, либо для определяющих соотношений, которые заданы специальным образом, что не всегда пригодно для описания механических свойств реального материала. Очевидно, что наличие аналитического решения (пусть и приближенного) обладает неоспоримыми преимуществами. Например, в расчетной практике существование приближенных аналитических решений [84, 125, 132, 214, 227, 228, 257] для данного элемента конструкции при данном типе нагружения дает проектировщику возможность в момент числового задания параметров нагружения сразу получить значения параметров напряженно-деформированного состояния элемента конструкции. При решении задач, сформулированных в рамках теории

многократного наложения больших деформаций, оценка достоверности («правдивости») полученных результатов проводится перечисленными ранее способами, к которым можно добавить сравнение результатов расчета с результатами решения задачи, сформулированной с помощью теории наложения малых деформаций на большие [47, 72, 73, 74, 248], а также сопоставление результатов решения одной и той же задачи, сформулированной в координатах различных состояний [150].

В диссертационной работе рассматриваются также актуальные вопросы численного моделирования в задачах геофизики [93, 164, 165, 372, 404] и геомеханики [139, 172, 240, 311, 312, 313, 315, 484, 377, 396, 468, 501, 598, 701, 776], анализируются результаты сейсмического моделирования [290, 566, 665, 702, 782, 784] в сложнопостроенных пористых и анизотропных средах с затуханием. Акцент на данные задачи связан с тем, что при решении задач активной и пассивной сейсмики в геофизике одной из основных проблем, с которой сталкиваются исследователи, является необходимость выполнения большого объема вычислений. Данная проблема выходит на первый план в случае решения обратных задач геофизики, когда по данным на приемниках акустических сигналов требуется восстановить сейсмический портрет среды, через которую прошли акустические волны с излучателя – задача интерпретации данных акустического каротажа или сейсмического профилирования. Для этого необходимо многократное решение серии прямых задач о распространение сейсмических волн в геопластах при заданных параметрах среды. В зависимости от типа источника и частот излучателя решение задач может требовать построения расчетной сетки, состоящей из сотен миллионов вычислительных ячеек. Большинство современных расчетных пакетов не в состоянии не только решить данную проблему в разумные сроки, но даже загрузить ее в расчетные ядра в связи с упомянутыми выше гигантскими объемами данных. В связи с этим возникает необходимость в разработке специализированного программного продукта, способного выполнять расчеты на массивно-параллельных системах, используя передовые технологии в области параллельных вычислений и разработки программ для гибридных вычислительных систем. Технологии параллельного программирования и особенности разработки комплексов программ для высокопроизводительных вычислительных систем рассмотрены в работах А.С. Антонова [7, 8], К.Ю. Богачева [34], А.В. Борескова [37], Ю.В. Василевского [49, 384, 749], Вл.В. Воеводина [53, 300], М. Гарленда [331], Дж. Донгарры [382, 760], А.В. Забродина [79], Д. Кирка [529], С.П. Копысова [110], В.А. Левина [131, 134, 140], А.Е. Луцкого [116], И.С. Меньшова [38], А.В. Тихонравова [229, 698, 743], Б.Н. Четверушкина [69, 271, 278] и других авторов.

Другим аспектом, актуальным для отрасли и требующим детальной проработки, является учет влияния геомеханического преднапряжения в геологических пластах на результаты

сейсмического зондирования. Более того, сейсмический отклик трещиноватости, присутствующей в пластах, может быть использован в задачах пассивной сейсмики, когда отсутствует искусственный генератор волн, а все наблюдения ведутся за неоднородностями (трещины, каверны и т.п.) в геопластах с целью определения и характеризации их параметров. Исследования в этой области проведены в работах Ю.П. Ампилова [5, 6, 296], М. Багери [311, 312], С. Бандиса [315], Г.И. Баренблатта [17, 20], И.О. Баюк [27, 28, 328], М. Био [349], Ю.П. Желтова [262], И.Н. Керусова [152, 207], Ю.А. Кухаренко [380], В.П. Мясникова [185], А.В. Мясникова [186], Р.И. Нигматулина [189, 190], В.Н. Николаевского [9, 191, 192, 193], А. Сеттари [312, 313, 314], Ю.П. Стефанова [243, 244, 245], С.А. Тихоцкого [4, 63, 418], Н. Халили [526], С.А. Христиановича [263, 264], Т. Хуанга [484] и других.

Для решения поставленной задачи был разработан специализированный комплекс программ на базе изопараметрического метода спектральных элементов (МСЭ) для моделирования распространения сейсмических волн в трехмерных неоднородных анизотропных (с возможным наличием анизотропной вязкоупругости) геофизических пластах, в том числе содержащих системы трещин и трещиноватостей, в которых наблюдаются значительные локальные концентрации напряжений и конечные деформации. Метод спектральных элементов (МСЭ) является модификацией классического метода конечных элементов для численной дискретизации краевых задач с использованием базисных функций высоких порядков аппроксимации. Теоретическое обоснование метода и его применение в задачах численного моделирования рассмотрено в работах Т. Варбёртона [757], Ж. Вилотта [542, 543, 563, 620], Я. Капдевилля [361, 362, 363], И. Маде [342, 343, 344], В. Остаховича [554, 555], Р. Паскетти [660, 661], А.Патеры [662], А. Фурнье [438, 640, 641], Дж. Хестхейвена [516] и других авторов. Вопросы моделирования распространения волновых процессов в твердых телах подробно исследованы в работах К. Барнса [534, 535], Ж. Верьё [752], Н.А. Зайцева [80], Х. Карчоне [364, 365, 711], Д. Козлофф [366, 550], Д. Коматича [536, 537, 538, 544, 545], А.Г. Куликовского [117, 118, 119], В.В. Лисица [603, 604, 753], И.Б. Петрова [97, 171, 182, 183, 205, 256], Б.Д. Плющенкова [205, 212, 671, 672], Э. Приоло [680, 709, 710], Д.И. Сабитова [374], Дж. Сериани [706, 707, 708], И.Л. Софронова [720, 721], Ж. Тромпа [539, 540, 546, 742], В.А. Чеверда [123, 551, 552, 553, 614, 734], М. Шарара [375, 376] и других.

Актуальность темы определяется тем, что при разработке любого нового продукта (изделия), подвергающегося нагрузкам в процессе эксплуатации, на стадии проектирования требуется провести компьютерное моделирование. Этой цели служат системы инженерного компьютерного анализа CAE (также называемые расчетными пакетами). Основной задачей пакета для инженерного анализа является максимально точное моделирование и описание

свойств деталей, конструкций, материалов с последующим изучением, происходящих в них изменений под разного рода нагрузками.

Моделирование образования в нагруженном теле (элементе конструкции) концентраторов напряжений (полостей и включений) различной формы при конечных деформациях для случая, когда форма тела и концентратора известна либо в момент образования концентратора напряжений, либо после выполнения программы нагружения, для нелинейно-упругих и вязкоупругих материалов открывает возможность решения целого ряда новых задач, актуальных для широкого спектра научно-технической и промышленной отраслей. Например, учет конечных деформаций и их перераспределение необходимы при решении задач аддитивного производства, проектировании новых материалов, включая композиционные (например, резинокордовые), метаматериалы, эксплуатации изделий и элементов конструкций при закритических сценариях нагружения. В терминах механики деформируемого твердого тела это:

- задачи при конечных деформациях с учетом изменения в процессе нагружения свойств материала части элемента конструкции, границ (включая нагрузки) и граничных условий (образование полостей, включений), массы тела;
- нестационарные задачи о распространении упругих волн в нелинейно-упругом массиве с начальными, вообще говоря, конечными деформациями с учетом наведенной анизотропии поля начальных напряжений;
- задачи о развитии и взаимовлиянии дефектов при конечных деформациях, о влиянии трещин на параметры НДС. Например, сейсмический отклик растущей трещиноватости может быть использован в задачах пассивной сейсмики, когда отсутствует искусственный генератор волн, а все наблюдения ведутся за неоднородностями (трещины, каверны и т.п.) в геопластах.

Актуальность выбранного направления работы обусловлена также использованием в промышленности инновационных материалов и элементов конструкций из них, способных испытывать в процессе эксплуатации конечные деформации (композиционные материалы, резиноподобные материалы); необходимостью проектирования свойств таких материалов на этапе их создания, проведением моделирования на этапе разработки элементов конструкции и конструкций из них, а также анализа результатов мониторинга при их эксплуатации; необходимостью анализа возможности возникновения и развития дефектов в них под влиянием механических и немеханических (температурных, радиационных) воздействий; а также необходимостью анализа катастрофических сценариев разрушения изделия. Кроме того, актуальность определяется потребностью нефтегазовой отрасли в повышении точности анализа результатов скважинной и поверхностной сейсмики, в решении задач геомеханики

(устойчивость наклонного ствола скважины, геомеханическое моделирование резервуаров, включая связанное гидрогеомеханическое моделирование) и петрофизики (оценка эффективных свойств кернов).

Существующие промышленные универсальные CAE системы (Ansys [823], Abaqus [824], Nastran [825], LS-DYNA [830], MIDAS [831] и другие) и специализированные отраслевые пакеты (Visage [832], Petrel [833], Tesseral [834]) не подходят для решения задач многократного наложения больших деформаций. Кроме того, т.к. данные пакеты основаны на методе конечных элементов, их применение для решения задач полноволнового трехмерного моделирования значительно менее эффективно, чем при использовании комплекса программ, основанного на методе спектральных элементов.

Целью данной работы является разработка системы компьютерного моделирования для проведения инженерного прочностного анализа.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1) Разработать алгоритм численного решения краевых задач теории многократного наложения больших деформаций на основе методов конечных и спектральных элементов в областях с криволинейными граничными поверхностями.
2) Выполнить математическое моделирование перераспределения конечных деформаций при изменении связности области, занимаемой телом, в процессе нагружения.
3) Реализовать изопараметрический метод спектральных элементов в виде комплекса программ на гибридной MultiGPU системе для проведения вычислительных экспериментов в задачах геофизики и геомеханики с применением технологий OpenMP/CUDA.
4) Разработать программную архитектуру пакета прочностного инженерного анализа, состав функциональных модулей и их структуру.
5) Осуществить верификацию разработанных численных методов и комплексов программ на основе международных тестов NAFEMS и тестовых примеров с аналитическими решениями.
6) Решить прикладные задачи инженерного прочностного анализа с использованием разработанного комплекса программ.

Научная новизна:

1) Разработан алгоритм и проведено численное моделирование на его основе наложения конечных деформаций в результате изменения связности области, занимаемой телом, в процессе нагружения в стационарной и нестационарной постановках, на основе метода конечных элементов. Решена задача о росте дефекта в нагруженном теле с учетом возникновения и развития зон предразрушения.

2) Для численной дискретизации краевых задач в областях с криволинейными граничными поверхностями разработан алгоритм на основе изопараметрического метода спектральных элементов. С применением данного метода были получены решения трехмерных задач сейсмического моделирования и моделирования акустического каротажа в неоднородных анизотропных вязкоупругих и пороупругих средах.
3) Разработан алгоритм многомасштабного моделирования связанных процессов деформирования пористо-трещиноватых горных пород и фильтрации жидкости в них с учетом динамического изменения параметров среды: пористости, проницаемости, упругих модулей породы и раскрытия трещин с учетом изменения механических свойств на микроуровне.
4) Разработаны алгоритмы распараллеливания основных этапов решения краевых задач с помощью методов конечных и спектральных элементов с использованием технологий OpenMP, CUDA, MPI на многоядерных и многопроцессорных системах, включая гибридные MultiGPU системы с графическими процессорами.
5) Разработана архитектура, состав и структура функциональных модулей пакета прочностного инженерного анализа CAE Fidesys. Получены новые практически важные результаты решения прикладных задач геофизики и геомеханики, задач прочностного инженерного анализа с использованием разработанного комплекса программ.

Новизна разработанной системы компьютерного моделирования CAE Fidesys определяется тем, что программный комплекс прочностного инженерного анализа позволяет выполнять расчеты с учетом перераспределения деформаций, включая изменение массы тела, связности области, занимаемой телом, изменение свойств части материала тела. Эти возможности позволяют конструктору уже на стадии проектирования оценить напряженно-деформированное состояние элемента конструкции при возникновении и развитии в нем дефектов, опасность дефекта, возникшего в элементе конструкции в процессе эксплуатации и обнаруженного при мониторинге. В системе реализован новый численный метод расчета, отсутствующий в существующих системах прочностного инженерного анализа – изопараметрический метод спектральных элементов, позволяющий конструктору-расчетчику не перестраивать сетку в процессе анализа сеточной сходимости и обеспечивающий высокоточную дискретизацию по пространству при меньшем, чем в случае МКЭ, числе степеней свободы.

Помимо перечисленных выше возможностей, разработанный программный комплекс позволяет:

- моделировать процесс разрушения с учетом возникновения и развития зон предразрушения;

- при решении задач прочности решать задачи вязкого развития трещины (ненулевого раскрытия) с последовательным поглощением основной трещиной вторичных;
- решать задачи по определению первоначальной формы удаленной части нагруженного тела при задании формы тела после удаления и последующего деформирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) Алгоритм численного решения краевых задач теории многократного наложения больших деформаций на основе метода конечных элементов и модифицированного метода спектральных элементов в областях с криволинейными граничными поверхностями.
2) Математическое моделирование наложения конечных деформаций в результате изменения связности области, занимаемой телом, в процессе нагружения в стационарной и нестационарной постановках.
3) Реализация изопараметрического метода спектральных элементов с использованием технологий параллельных вычислений OpenMP/CUDA в виде комплекса программ на гибридной MultiGPU системе.
4) Результаты исследований в задачах сейсмического и геомеханического моделирования на основе вычислительных экспериментов, проведенных с использованием разработанного комплекса программ.
5) Программная архитектура и состав функциональных модулей системы компьютерного моделирования CAE Fidesys.
6) Верификация и тестовые испытания программных модулей CAE Fidesys.
7) Результаты решения прикладных задач инженерного прочностного анализа с использованием разработанного комплекса программ в составе CAE Fidesys.

Практическая значимость полученных результатов заключается во внедрении разработанных математических моделей, численных методов и комплекса программ в российскую промышленную полнофункциональную систему прочностного инженерного анализа CAE Fidesys и решение с ее использованием практически важных прикладных задач. Результаты, полученные в диссертации, применялись при выполнении НИОКР в рамках соглашений с Минобрнауки РФ (№07.514.12.4021, №07.524.11.4019, №14.579.21.0007, №14.579.21.0076, №14.579.21.0112, № 0013-С-1), а также при выполнении работ по грантам РФФИ (№13-01-12043, №14-08-01191).

CAE Fidesys (как установленные лицензии) применяется компаниями из различных отраслей промышленности РФ, среди которых: АО “Производственное объединение “Севмаш”, АО “Красная Звезда”, ООО “Газпромнефть Научно-Технический Центр”, ООО “Институт Гипроникель”, НПК “Ленпромавтоматика”, ООО “Ингортех”, Научно-исследовательский

институт горной геомеханики и маркшейдерского дела “Межотраслевой научный центр “ВНИМИ” и другие. На основе CAE Fidesys разработано и внедрено в производственную деятельность ООО “Газпромнефть Научно-Технический Центр” специализированное тиражируемое отраслевое решение “Геомеханика” [240].

CAE Fidesys внедрен в учебный процесс и научно-исследовательскую деятельность ВУЗов и НИИ, среди которых: МГУ имени М.В. Ломоносова, НИЯУ МИФИ, МИСИС, Горный университет Санкт-Петербурга, Тверской государственный университет, Тульский государственный педагогический университет, Волгоградский государственный технический университет, Сколковский институт науки и технологий, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова (ИжГТУ), Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН), Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова (ЦИАМ), Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук. Пакет Fidesys прошел апробацию и тестирование в Центральном аэрогидродинамическом институте им. профессора Н. Е. Жуковского (ФГУП «ЦАГИ»), ЦИАМ, РКК “Энергия” им. С.П. Королева.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на международном конгрессе по вычислительной механике (Сан-Паулу, Бразилия, 2012 г.), на европейском конгрессе по вычислительной механике (Париж, Франция, 2010 г.), на международной конференции “Advances in Composite Materials and Structures (CACMS 2015)” (Стамбул, Турция, 2015 г.), на XI всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015 г.), на российской нефтегазовой технической конференции и выставке SPE 2016 (Москва, 2016 г.), на международной конференции “Сеточные методы для краевых задач и приложения” (Казань, 2016 г.), на XIV международной конференции «Проблемы материаловедения при проектировании, изготовлении и эксплуатации оборудования атомных энергетических станций» МЕЙНСТРИМ-2016 (Санкт-Петербург, 2016 г.), на всероссийских конференциях “Сейсмические технологии” (Москва, 2015-2016 гг.), на всероссийских конференциях с международным участием “Цифровой керн: от образа к модели” (Сколково, 2015-2016 гг.), на международных научно-практических конференциях «Современные методы сейсморазведки при поисках месторождений нефти и газа в условиях сложнопостроенных структур» (Крым, пгт. Курортное, 2010-2013 гг.), на международных конференциях “Суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли” в 2011, 2016 и 2017 гг. в МГУ им. М.В. Ломоносова, на научных конференциях «Ломоносовские чтения» в 2004-2017 гг. в МГУ им. М.В. Ломоносова, на симпозиумах «Проблемы шин и резинокордных композитов» (г. Москва, 2004-2006, 2015-2016 гг.), на всероссийской научной

конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», посвященной 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова (Владивосток, 2011 г.), на всероссийской конференции с международным участием “Цифровые средства производства инженерного анализа” (Тула, 2017 г.).

Личный вклад. Все приведенные в диссертации результаты получены либо самим автором, либо в рамках сотрудничества. Автору во всех работах, опубликованных в соавторстве, в равной степени принадлежит математическая постановка и методы численного решения краевых задач, определяющие научную новизну, и результаты выполненных исследований, составляющие практическую значимость. Автор разработал методы численной дискретизации нелинейных уравнений в частных производных теории многократного наложения больших деформаций и алгоритмы их распараллеливания на массивно-параллельных высокопроизводительных системах, что явилось основой соответствующих программных модулей промышленного пакета прочностного инженерного анализа CAE Fidesys. Автор осуществлял техническое руководство разработкой данного пакета и лично участвовал в его внедрении и применении на ряде предприятий промышленности.

Достоверность результатов основывается на применении соотношений теории многократного наложения больших деформаций, корректной математической постановке краевых задач, применении математических моделей, апробированных ранее другими авторами, использовании математически обоснованных численных методов решения задач, применение которых в конкретных расчетных схемах базируется на использовании апробированных методов оценки корректности получаемого решения (анализ сходимости при измельчении сетки/повышении порядка численной схемы, влияние начальных и граничных условий на получаемое решение, сравнение результатов расчета с точными аналитическими решениями), верификации разработанных комплексов программ на многочисленных эталонных тестовых примерах, включая международные тесты NAFEMS, используемые для сертификации подобного программного обеспечения, сравнении результатов расчетов с результатами, полученными другими методами и пакетами инженерного анализа, а также в ряде случаев с результатами натурных экспериментов, положительных отзывах пользователей о применении системы инженерного анализа Fidesys для решения практически важных задач.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации представлены в 3 монографиях, 51 статье, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах, в том числе, в 18 статьях в изданиях, индексируемых в базах Scopus, Web Of Science, RSCI, и в 6 статьях в изданиях из перечня, рекомендованных Минобрнауки РФ.

На разработанные в процессе работы над диссертацией комплексы программ получены

18 свидетельств о регистрации прав на программное обеспечение.

С использованием полученных в диссертации результатов разработаны и опубликованы 2 учебные программы курсов, преподаваемых автором на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, списка иллюстративного материала и приложения. Диссертация изложена на 731 странице и содержит 319 рисунков. Список литературы включает 852 источника.

Во введении приводится обоснование актуальности темы диссертационной работы, поставлены цели и задачи данной работы, приведена аннотация содержания диссертации, дан обзор литературы по исследуемым в рамках диссертации проблемам, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приведено краткое содержание диссертации.

В первой главе приводится постановка краевых задач о последовательном образовании концентраторов напряжений в нагруженном теле с учётом конечных деформаций и их перераспределения и изменения связности области, занимаемой телом, в процессе нагружения на основе теории многократного наложения больших деформаций. Обсуждается алгоритм численного решения задач теории многократного наложения больших деформаций с использованием метода конечных элементов и адаптируемой в процессе деформирования расчетной сеткой. Данный алгоритм позволяет задавать форму образуемого контура концентратора напряжений (например, полости) и всего тела или в момент образования концентратора напряжений в нагруженном теле, или после окончания процесса нагружения. Кроме того, этот алгоритм не использует подход, в котором наложение конечных деформаций заменяется последовательным наложением малых деформаций. Приведены результаты математического моделирования в задачах о поэтапном нагружении тел в стационарном и нестационарном режимах при конечных деформациях. Например, задач, в которых в процессе нагружения тела изменяются масса уже нагруженного тела, в том числе, и связность области, им занимаемой, усилия, приложенные к телу, свойства материала части тела.

Во второй главе излагается применение изопараметрического метода спектральных элементов (МСЭ) для эффективного численного решения поставленных задач в неоднородных областях сложной криволинейной формы с резко изменяющимися параметрами материала (включая разрывные). Представлены основные преимущества и особенности МСЭ (ортогональность базисных функций, спектральная точность по пространству, диагональная матрица масс) в сравнении с методом конечных элементов (МКЭ). Приводятся требования по

дискретизации, предъявляемые к неструктурированным расчетным сеткам, и способы построения спектральноэлементных сеток, удовлетворяющих данным требованиям.

Для эффективной дискретизации криволинейной геометрии тела в работе предлагается новый подход, основанный на криволинейных спектральных элементах высокого порядка, самосогласованных с порядком сеточной аппроксимации полиномами Лагранжа и порядком кубатурного интегрирования Гаусса-Лежандра-Лобатто (GLL). Каждый элемент локальной сетки представляет собой элемент объема из расчетный области, в котором уже во время работы алгоритма МСЭ расставляются точки интегрирования (GLL-точки). В самом простом случае элементом локальной сетки может являться обычный гексаэдр, который задается 8 опорными точками, которые задают отображение эталонного куба в элемент объема, задаваемый 8 опорными точками. Форму элемента объема можно уточнить, введя дополнительные точки на каждом ребре, на каждой грани и внутри элемента, тем самым повысив число точек до 27 и получив криволинейный элемент 2-го порядка. В общем случае элемент порядка N задается $(N+1)^3$ опорными точками. Процедура повышения порядка элементов позволяет уточнить границы области, без повышения количества элементов и узлов сетки, уточнить расположение GLL-точек, тем самым повышая точность решения.

Обсуждается применение неотражающих граничных условий для минимизации нефизичного отражения упругих волн от внешних искусственных границ расчетной области. Рассматриваются постановки и результаты решения с использованием изопараметрического метода спектральных элементов серии задач геофизического и геомеханического моделирования: моделирование акустического каротажа в скважине, окруженной пороупругой средой в рамках нестационарной модели Био (в высокочастотном приближении), моделирование морской сейсморазведки в сложнопостроенных слоистых средах с разломами, моделирование сейсмического отклика трещиноватой среды, моделирование волновых процессов в трехмерных неоднородных анизотропных вязкоупругих средах с анализом затухания амплитуды и дисперсии скоростей волн по частоте.

Третья глава посвящена применению метода спектральных элементов для проведения вычислительных экспериментов в задачах многомасштабного геомеханического моделирования. В параграфе 3.2 рассматривается алгоритм расчета эффективных механических характеристик пористо-трещиноватой среды на масштабе ячейки периодичности. Рассмотрен общий случай связи между перемещениями и усилиями по берегам трещины, и дополнительно геометрия ячейки усложнена наличием пор в материале. Приведены результаты численных исследований на сеточную сходимость, влияние размеров ячейки периодичности и толщины трещины на результаты осреднения. Показано совпадение аналитических и численных значений

эффективных упругих модулей. Разработанный алгоритм применен для оценки эффективных свойств цифровой модели керна. Проведено сопоставление с результатами натурных керновых испытаний.

В параграфе 3.3 разработана математическая модель и численный алгоритм на ее основе, позволяющие рассчитать в системе инженерного анализа CAE Fidesys напряженно-деформированное состояние вокруг наклонного ствола скважины в слоистой неоднородной среде. Математическая модель включает в себя систему уравнений, описывающих динамическое изменение напряженно-деформированного состояния пороупругого тела, насыщенного жидкостью. Закон деформирования горной породы в рамках теории пластического течения описывается соотношениями Друкера–Прагера. Данный подход позволяет учитывать процесс формирования пластической зоны, связанный с появлением остаточных деформаций. Рассмотрены примеры решенных практически важных задач о скважине с боковым ответвлением, загибающейся скважине с горизонтальным участком, скважине в слоистой среде. Для построения дискретной МСЭ-модели и задания механических свойств материала использованы данные о геометрии скважины, включающие азимутальный угол и инклинометрию на рассматриваемом участке, а также данные о траектории скважины, пакеты данных материала, сформированные при анализе результатов ГИС, а также наборы данных напряжений (максимальных/минимальных горизонтальных, вертикальных) полученных при построении 1D геомеханичекой модели. Продемонстрировано влияние плотности бурового раствора на уровень и размер зоны пластических деформаций, исследован механизм возникновения и локализации упругопластических полос скольжения в зависимости от величины и вида внешних нагрузок. Продемонстрирована эффективность использования метода спектральных элементов в данных задачах.

В параграфе 3.4 разработан алгоритм внешнего итерационного сопряжения гидродинамических и геомеханических симуляторов, позволяющий моделировать связанные процессы деформирования трещиноватых пород и фильтрации жидкости в них с учетом динамического изменения параметров среды: пористости, проницаемости, упругих модулей породы и раскрытия трещин. В сочетании с методикой расчета эффективных свойств, рассмотренной в параграфе 3.2, данный алгоритм сопряжения позволяет обойтись без явного вывода уравнения для пористости и определять в процессе расчета эффективные упруго-прочностные параметры среды, меняющиеся в процессе разработки. Проведены исследования зависимости степени сопряжения на результаты расчетов, наглядно продемонстрировавшие, что для среды с параметрами Пальяновского месторождения Баженовской свиты степень сопряжения влияет на характеристики добычи.

В четвертой главе обсуждаются особенности реализации метода спектральных элементов на гибридной MultiGPU системе с использованием технологий OpenMP/CUDA, позволяющих задействовать вычислительные возможности как многоядерного центрального процессора, так и массивно-параллельных графических процессоров. Относительная независимость Галеркинских уравнений для каждого спектрального элемента позволила эффективно распараллелить алгоритм метода спектральных элементов и провести вычисления на графических процессорах. Эффективность распараллеливания метода спектральных элементов с использованием технологии CUDA обеспечивается за счет задействования при расчете основных типов памяти (глобальная, текстурная, константная, разделяемая), включая кэширование доступов к ним в рамках блока/мультипроцессора, выполняющего вычисления внутри спектрального элемента (ввиду этого максимальный порядок аппроксимации в трехмерном случае ограничен 10). Обсуждается подход к разбиению расчетной области между графическими процессорами и обеспечению оптимального обмена данными между ними в процессе расчета. Приводятся основные алгоритмические и программные инструменты и подходы к оптимизации скорости работы программы на массивной-параллельной архитектуре: перенумерация узлов сетки, раскраска сетки с балансировкой цветов, атомарные операции, проведение расчетов в режиме смешанной точности. Полученный прирост производительности порядка 20 раз по сравнению с реализацией с помощью OpenMP на многоядерном процессоре в режиме одинарной точности свидетельствует об эффективности применения технологии CUDA для распараллеливания вычислительного процесса. Обсуждаются особенности реализации и зависимость производительности от размеров задачи.

В пятой главе приводится описание модульной структуры и форматов обмена данными между модулями в составе системы прочностного инженерного анализа CAE Fidesys. Рассматривается программная архитектура Fidesys и ее функциональное представление в виде гиперкуба функциональных элементов. Обсуждаются основные виды программных комплектаций и дополнительных модулей в составе Fidesys по типам решаемых задач и возможностям использования (платформы). Рассматриваются форматы входных данных (CAD-модели), поддерживаемых Fidesys, и реализованные модули интеграции со сторонними пакетами для проектирования. Рассматриваются типы и виды конечных и спектральных элементов. Обсуждается состав и основные функции графического интерфейса пользователя CAE Fidesys.

Приводятся примеры решения как тестовых задач для верификации разработанного комплекса программ (включая, международные верификационные примеры NAFEMS), так и прикладных задач прочностного инженерного анализа из различных отраслей

промышленности: анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) боковины тележки железнодорожного вагона, сосуда давления, защитной решетки подруливающего устройства ледокола, тонкостенной транспортировочной рамы, кессона авиационного крыла, лопатки авиационного двигателя; модальный анализ элементов ротора электродвигателя, гармонический анализ бака на раме под действием сейсмических нагрузок; нелинейный контактный анализ цангового замка с изменяемой областью контакта, нелинейный анализ НДС и устойчивости опоры подшипника авиационного двигателя при обрыве лопатки вентилятора, анализ высоконелинейного деформирования ограничителя хлыстовых перемещений при разрывах трубопроводов с учетом контактной, физической и геометрической нелинейностей, анализ напряженно-деформированного состояния горных выработок с исследованием результатов расчета в зависимости от параметров крепей.

В заключении приводятся основные результаты и выводы диссертационной работы.

Глава 1. Модели и алгоритмы решения задач о наложении конечных деформаций

1.1 Введение

Использование универсальной CAE-системы (промышленного пакета) значительно упрощает исследователю решение краевых задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ), так как сводится к достаточно простому заданию их параметров в рамках интерфейса пользователя [178, 823, 824, 825], но не позволяет самому оценить достоверность результатов из-за закрытости кода и используемых методов решения. Поэтому данные пакеты удобны при решении стандартных задач МДТТ, а для новых типов задач желательно разработать специализированную программу с последующим сравнением полученных результатов.

Для малых деформаций использование универсальных CAE систем практически полностью решает проблему отыскания решения краевой задачи. Такие CAE применимы (и достаточно хорошо апробированы) даже в задачах, связанных с принудительным изменением формы тела. Более сложен случай, когда в процессе нагружения в теле происходит перераспределение (физическое наложение) конечных деформаций [150, 577]. Такое перераспределение необходимо учитывать, например, в задачах, когда в процессе нагружения (эксплуатации) неоднократно изменяются границы и граничные условия. Примером могут служить задачи об удалении (или добавлении) части уже нагруженного тела, принудительном изменении формы концентратора напряжений (например, вязкое развитие концентратора), изменении свойств части тела при нагружении.

Данные задачи обычно формулируются с помощью теории многократного наложения больших деформаций [127, 138, 576, 578]. Основным их отличием, с точки зрения решения, от задач, решаемых в рамках стандартной нелинейной теории упругости, является необходимость решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для нескольких векторов перемещений. Подобный подход не проработан в существующих CAE-системах (промышленных универсальных расчетных пакетах). Отсутствие функционала наложения деформаций [583, 588, 593] при последовательном образовании концентраторов напряжений в твердых телах не позволяет, в частности, исследовать образование дефектов, связанное с накопленными деформациями, дефект должен изначально присутствовать в материале, при этом есть свобода только в выборе состояния, где известна его форма. Введение промежуточных состояний позволяет, например, отследить возникновение больших деформаций в сплошном теле, затем удалить часть тела или заменить свойства в некоторой области, моделировать перераспределение деформаций, вызванных данными изменениями, с

корректным учетом предварительных напряжений. Необходимо учитывать, что образование полостей и включений в нагруженном теле приводит к возникновению конечных дополнительных деформаций, которые физически накладываются на уже имеющиеся в теле деформации.

В теории многократного наложения больших деформаций [127, 131, 138] рассматривается нагружение тел в несколько этапов, когда дискретно изменяются границы и граничные условия, причем деформации, вызванные переходом в новое состояние (конфигурацию), конечны. Такой подход позволяет в рамках статических и квазистатических постановок задачи учесть влияние последовательности, в которой к телу прикладываются внешние воздействия. Под внешним воздействием понимается не только приложение к телу внешних поверхностных или массовых сил, но и изменение связности области, занимаемой телом (т.е. добавление или удаление в процессе нагружения частей тела).

Подчеркнем, что используемый термин «наложение больших деформаций» не следует понимать как математическую суперпозицию деформаций [578, 583]. Это означает, что мы не можем определять параметры напряженно-деформированного состояния тела от суммарного внешнего воздействия на него как сложение параметров напряженно-деформированного состояния тела от каждого воздействия на него, как в случае малых деформаций. Кроме того, связь между тензором напряжений и соответствующим ему тензором деформаций, входящих в определяющие соотношения, является нелинейной. Представления тензоров деформаций через градиенты векторов перемещений также нелинейные. Решение такой задачи крайне сложно, так как в этом случае необходимо решить систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелинейными граничными условиями. Именно поэтому постановка и решение задачи, в которой в процессе нагружения дискретно изменяются граница и граничные условия (задача о поэтапном нагружении тела), достаточно сложны.

В данной главе рассматриваются математические модели статических и динамических задач теории многократного наложения больших деформаций [127, 591, 594, 751] о последовательном образовании концентраторов напряжений (полостей и включений) в нагруженном теле. Приведены кинематические соотношения этой теории, рассмотрены определяющие соотношения для нелинейно-упругих материалов, используемые далее в работе при решении задач, записаны уравнения равновесия и граничные условия. Сформулированы математические постановки граничных задач теории многократного наложения больших деформаций об образовании концентраторов напряжений в предварительно нагруженных телах [129, 130, 131, 132], а также алгоритмы их численной дискретизации на основе метода конечных элементов (МКЭ). Приведен общий алгоритм решения задач о последовательном

образовании концентраторов напряжений в нагруженных телах. Учитывается, что возникновение в теле концентратора напряжений приводит (по крайней мере, в окрестности образованной граничной поверхности) к появлению в теле больших дополнительных деформаций, которые «физически» накладываются на уже имеющиеся в теле большие деформации. Рассмотрена постановка динамической задачи теории наложения больших деформаций [127, 131, 583, 584] и ее решение с использованием МКЭ. Получено решение новых теоретически важных задач о последовательном образовании полостей и включений в предварительно нагруженном теле с большими начальными деформациями. В том числе получено решение задачи о росте дефекта в нагруженном теле с учетом возникновения и развития зоны предразрушения, возникающей вблизи концентратора напряжений при выполнении заданного критерия прочности. Рассматривается зависимость получаемого решения от размеров конечноэлементной сетки.

1.2 Математические модели наложения конечных деформаций

В этом параграфе для полноты и последовательности изложения материала приведем полную математическую модель задачи нелинейной теории упругости с наложением конечных деформаций на конечные [127, 131, 138, 158].

Основные термины и обозначения теории многократного наложения больших деформаций

$\overset{n}{r}$ - радиус-вектор частицы в n-м состоянии;

ξ^i - лагранжевы «вмороженные» координаты частицы;

$\overset{n}{\mathfrak{э}}_i$ - базисные векторы в n-м состоянии.

Знак (индекс) над символом, кроме $\mathfrak{э}$ и r, указывает номер состояния, в координатном базисе которого вычисляется данная величина (причем индекс *0* соответствует начальному состоянию, индекс *N* - конечному).

$u_n = \overset{n}{r} - \overset{n-1}{r}$ - вектор перемещений, характеризующий переход из предыдущего $(n-1)$-го состояния в последующее n-е состояние;

$\overset{p}{\nabla} = \overset{p}{\mathfrak{э}}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}(\ )$ градиент;

$\Psi_{q,p} = I + \sum_{n=q+1}^{p} \overset{q}{\nabla} u_n = \left(I - \sum_{n=q+1}^{p} \overset{q}{\nabla} u_n \right)^{-1}$ - аффинор деформаций; $\Psi_{q,p} = \Psi_{q,m} \cdot \Psi_{m,p}$.

$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{m,p} \cdot \Psi^*_{m,p} - \Psi_{m,q} \cdot \Psi^*_{m,q}\right)$ - тензор деформаций, описывающий изменение деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p и отнесенный к координатному базису m - го состояния;

$G_{q,p} = \Psi_{q,p} \cdot \Psi^*_{q,p}$ - тензорная мера деформаций, описывающая изменение деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p и соответствующая мере Грина ($G_{0,1}$ - тензорная мера Грина);

$F_{q,p} = \Psi^*_{q,p} \cdot \Psi_{q,p}$ - тензорная мера деформаций, описывающая изменение деформаций при переходе тела из состояния q в состояние p и соответствующая мере Фингера ($F_{0,1}$ - тензорная мера Фингера);

ρ_n, f_n - плотность и массовая сила в n-м состоянии;

$\Delta_{m,n}$ - относительное изменение объема при переходе из m-го в n-е состояние;

$\sigma_{0,n}$ - тензор истинных напряжений, описывающий накопленные в теле напряжения при переходе из начального в n-е состояние (при $n = 1$ - тензор Коши);

$\overset{n}{\Sigma}_{0,n} = \left(1 + \Delta_{0,n}\right)\sigma_{0,n}$ - тензор обобщенных (полных для n-го состояния) напряжений, определенный в координатном базисе n-го состояния;

$\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$ - тензор обобщенных (полных для n-го состояния) напряжений, определенный в координатном базисе произвольного m-го состояния: $\overset{m}{\Sigma}_{0,n} = \Psi^*_{n,m} \cdot \overset{n}{\Sigma}_{0,n} \cdot \Psi_{n,m}$;

$\overset{m}{\Sigma}_{q,p} = \overset{m}{\Sigma}_{0,p} - \overset{m}{\Sigma}_{0,q}$ - тензор обобщенных дополнительных напряжений, определенный в координатном базисе произвольного m-го состояния.

$\overset{k}{\Gamma}_n$ - граница тела в n-м состоянии в координатах k-го состояния; $\overset{k}{N}_n$ - нормаль к $\overset{k}{\Gamma}_n$

В Таблице 1 приведены величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние при отсутствии наложения, и соответствующие им величины при многократном наложении больших деформаций. В этой таблице *n* - номер текущего состояния.

Таблица 1 Соответствие между величинами, характеризующими напряженно-деформированное состояние при многократном наложении больших деформаций и без него [127, 138, 158].

Без наложения	Ψ	G	F	$\overset{0}{E}$	E	Δ	σ	$\overset{0}{\Sigma}$
При наложении	$\Psi_{0,n}$	$G_{0,n}$	$F_{0,n}$	$\overset{0}{\mathrm{E}}_{0,n}$	$\overset{n}{\mathrm{E}}_{0,n}$	$\Delta_{0,n}$	$\sigma_{0,n}$	$\overset{0}{\Sigma}_{0,n}$

Отметим, что тензоры $\overset{m}{\mathrm{E}}_{0,n}$ и $\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$ при $m \neq 0$ и $m \neq n$, а также тензоры $\overset{m}{\mathrm{E}}_{p,n}$ и $\overset{m}{\Sigma}_{p,n}$ при $p \neq 0$ и $p \neq n$ не имеют аналогов в «обычной» нелинейной теории упругости.

Кинематика деформаций

В отличие от традиционной нелинейной теории упругости, теория наложения больших деформаций не ограничивается рассмотрением начального и конечного состояния тела, а рассматривает также и необходимое число промежуточных состояний, каждому из которых соответствует собственный координатный базис, в координатах которого может при необходимости быть сформулирована математическая постановка. Будем различать N состояний тела [127, 576, 578]:

- начальное или естественное (ненапряженное) состояние, когда в теле отсутствуют напряжения и деформации;
- *(n-2)* промежуточных состояний, в которые поочередно переходит тело под влиянием внешних воздействий или из-за вязкоупругих процессов, происходящих в нем; при этом в теле накапливаются (возникают) большие дополнительные деформации и напряжения, которые накладываются на уже имеющиеся большие деформации и напряжения;
- конечное или текущее состояние, в которое тело переходит после приложения к нему в заранее заданном порядке всех нагрузок, а в случае вязкоупругих тел и к заданному моменту времени.

Под внешними нагрузками в дальнейшем понимается

- приложение массовых сил,
- приложение или удаление нагрузки, как по существующим границам областей, так и по вновь полученным после удаления или добавления частей тела.

Так как процессы, происходящие в теле, являются упругими, то существуют векторы перемещений $u_n\left(\xi^k, t\right)$ из предыдущего $(n-1)$-го состояния в последующее n-е; здесь ξ^k означают лагранжевы координаты частиц тела, приписанные им в одном из состояний, t - время, а n - номер состояния, в котором находится частица (Рисунок 1). Радиус-векторы одной и той же частицы в каждом состоянии обозначим через $\overset{n}{r}\left(\xi^k, t\right)$, в случае $n = 0$: $\overset{0}{r} = \overset{0}{r}\left(\xi^k\right)$.

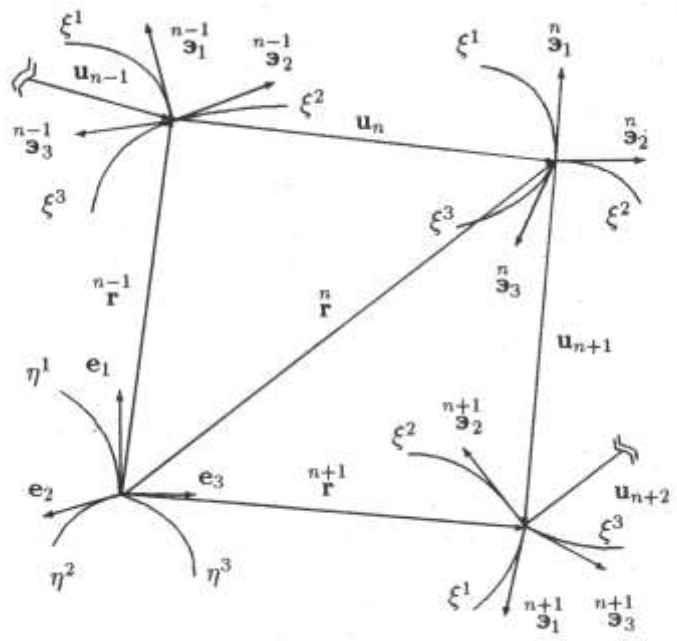


Рисунок 1 Схема перехода из $(n-1)$- го в n - е и $(n+1)$ - е состояние.

Обозначим перемещения при переходе между соседними состояниями с помощью

$$u_n = \overset{n}{r} - \overset{n-1}{r}\ , \tag{1}$$

откуда

$$\overset{n}{r} = \overset{q}{r} + \sum_{m=q+1}^{n} u_m\ . \tag{2}$$

Базисные векторы в каждом из состояний определяются традиционным образом как касательные к координатным линиям:

$$\overset{n}{э}_i = \frac{\partial \overset{n}{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \overset{q}{r}}{\partial \xi^i} + \sum_{p=q+1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial \xi^i} \quad (n > q). \tag{3}$$

$$\overset{n}{э}_i = \frac{\partial \overset{n}{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \overset{q}{r}}{\partial \xi^i} - \sum_{p=q+1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial \xi^i} \quad (n < q) \tag{4}$$

Если при дифференцировании в (3) и (4) векторов $u_p = \overset{q}{u}{}^j_p \overset{q}{э}_j$ использовать базис $\overset{q}{э}_i$, то получим выражение базиса $\overset{n}{э}_i$ через базис $\overset{q}{э}_i$.Здесь и далее индекс над символом, кроме $\overset{n}{э}_i$ и $\overset{n}{r}$, указывает номер состояния, в координатном базисе которого вычисляется (или к которому относится) данная величина (причем индекс *0* соответствует начальному состоянию, индекс *N* - конечному). Из (3) и (4) следует, что базисные векторы в одном из состояний можно задавать

произвольно, а базисные векторы остальных *(N-1)* состояний определяются однозначно с помощью производных от перемещений.

Кроме лагранжевой системы координат, может быть введена система отсчета в общем случае с криволинейными координатами η^i, относительно которой рассматриваем движение частиц тела. Координаты, занимаемые частицей в каждом из состояний, обозначим через $\overset{n}{\eta}{}^i$:

$$\overset{n}{\eta}{}^i = f_n^i\left[\xi^k,\, u_m^j\left(\xi^p,\, t\right)\right] = f_n\left(\xi^k,\, t\right). \tag{5}$$

Координаты $\overset{n}{\eta}{}^i$, занимаемые частицей в один произвольный момент времени, можно принять в качестве лагранжевых. Уравнения (5) могут быть разрешены относительно ξ^k в любой момент времени $t = \tau$ [158, 232, 233]:

$$\xi^m = \left[f_m^j\left(\eta,\, \tau\right)\right]^{-1}. \tag{6}$$

В силу вышеизложенного все характеристики напряженно-деформированного состояния можно в соответствии с типом решаемой задачи считать зависящими либо от лагранжевых координат и времени, либо от координат системы отсчета и времени. Базисные векторы системы отсчета $\overset{n}{e}_i$ в каждом из состояний по определению вычисляются следующим образом:

$$\overset{n}{e}_i = \frac{\partial \overset{n}{r}\left(\overset{n}{\eta}{}^k,\, t\right)}{\partial \overset{n}{\eta}{}^i}. \tag{7}$$

Базисные векторы системы отсчета $\overset{n}{e}_i$ связаны с векторами $\overset{n}{э}_j$ соотношениями:

$$\overset{n}{e}_i = \frac{\partial \xi^j}{\partial \overset{n}{\eta}{}^i}\,\overset{n}{э}_j, \quad \overset{n}{э}_i = \frac{\partial \overset{n}{\eta}{}^j}{\partial \xi^i}\,\overset{n}{e}_j. \tag{8}$$

В качестве отсчетной системы можно выбрать только одну из этих систем или любую другую, если это удобно при решении задачи.

Как и в случае отсутствия наложения деформаций, произвольный вектор в лагранжевых системах координат имеет одни и те же координаты, поскольку данные координаты вморожены в тело, но при этом базисные векторы системы изменяются с деформацией тела, поэтому изменяется и сам вектор (не обязательно изменяется его длина, возможны просто повороты как жесткого целого). Соответствие между векторами, соединяющими две бесконечно близкие

частицы, $d\overset{0}{r},\ d\overset{1}{r},\ldots,\ d\overset{p}{r},\ldots,\ d\overset{N}{r}$ в разных состояниях устанавливается, как и ранее, с помощью аффиноров деформаций:

$$d\overset{p}{r} = d\overset{p-1}{r}\cdot\Phi_p,\quad \Phi_p = \overset{p-1}{э^i}\,\overset{p}{э}_i,$$

$$d\overset{p}{r} = d\overset{q}{r}\cdot\Phi_{q+1}\cdot\Phi_{q+2}\cdot\ldots\cdot\Phi_p = d\overset{q}{r}\cdot\Psi_{q,p}\quad (p>q), \tag{9}$$

$$\Psi_{q,p} = \prod_{i=q+1}^{p}\Phi_i,\qquad \text{т.е. } \Phi_p = \Psi_{p-1,p},$$

$$\Psi_{q,p} = \Psi_{q,f}\cdot\Psi_{f,p}\quad (q<f<p), \tag{10}$$

$$\Psi_{q,p} = \overset{q}{э^i}\,\overset{p}{э}_i,$$

$$d\overset{q}{r} = d\overset{p}{r}\cdot\Psi_{q,p}^{-1}. \tag{11}$$

Аффиноры деформации $\Psi_{q,p}$ могут быть представлены, как это следует из (5)-(8), и как функции координат системы отсчета. Для постановки в перемещениях аффиноры деформаций через градиенты векторов перемещений представляются с учетом (3), (4) и (9)-(11) следующим образом:

$$\Psi_{p-1,p} = \Phi_p = I + \overset{p-1}{\nabla} u_p = \left(I - \overset{p}{\nabla} u_p\right)^{-1}, \tag{12}$$

$$\Psi_{q,p} = I + \sum_{n=q+1}^{p}\overset{q}{\nabla} u_n = \left(I - \sum_{n=q+1}^{p}\overset{p}{\nabla} u_n\right)^{-1}. \tag{13}$$

Отметим также, что выражение для $\Psi_{q,p}$ может быть записано не только в пространствах p - го и q - го состояний, но и любых других.

Аффинор деформаций не может быть использован в качестве меры деформации, поскольку изменяется и при жестких движениях, поэтому вводят в рассмотрение тензоры деформаций. В общем виде полуразность квадратов расстояний между бесконечно близкими частицами одного и того же элемента тела при его последовательном переходе из q -го в p - е состояние определяется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left[\left(d\overset{p}{r}\right)^2 - \left(d\overset{q}{r}\right)^2\right] = d\overset{0}{r}\cdot\overset{0}{\mathrm{E}}_{q,p}\cdot d\overset{0}{r} = \ldots =$$

$$= d\overset{m}{r}\cdot\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p}\cdot d\overset{m}{r} = \ldots = d\overset{N}{r}\cdot\overset{N}{\mathrm{E}}_{q,p}\cdot d\overset{N}{r}, \quad (14)$$

причем из равенств (14) и (9)-(11) следует, что

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{m,p}\cdot\Psi^{*}_{m,p} - \Psi_{m,q}\cdot\Psi^{*}_{m,q}\right) \quad (m \le q, m \le p), \quad (15)$$

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{m,p}\cdot\Psi^{*}_{m,p} - \Psi_{q,m}^{\ -1}\cdot\Psi^{*\ -1}_{q,m}\right) \quad (q \le m < p), \quad (16)$$

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{p,m}^{\ -1}\cdot\Psi^{*\ -1}_{p,m} - \Psi_{q,m}^{\ -1}\cdot\Psi^{*\ -1}_{q,m}\right) \quad (q < m, p \le m). \quad (17)$$

Здесь $\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p}$ - тензор деформаций, характеризующий переход из q-го в p-е состояние и определенный в координатном базисе m-го состояния. В дальнейшем тензоры $\mathrm{E}_{0,N}$ будем называть тензорами полных деформаций, тензоры $\mathrm{E}_{0,1}$ - начальных деформаций, а тензоры $\mathrm{E}_{m,n}$ $(m \ne 0,\ n \ne 1,\ m < n)$ - соответствующих дополнительных деформаций.

Учитывая, что $\Psi_{q,p}^{\ -1} = \Psi_{p,q}$ тождества (16), (17) запишем следующим образом:

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{m,p}\cdot\Psi^{*}_{m,p} - \Psi_{m,q}\cdot\Psi^{*}_{m,q}\right). \quad (18)$$

Из (14)-(16) или (18) следует, что тензоры $\mathrm{E}_{q,p}$, определяемые в пространствах различных состояний, связаны так:

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \Psi_{m,n}\cdot\overset{n}{\mathrm{E}}_{q,p}\cdot\Psi^{*}_{m,n}. \quad (19)$$

Кроме того, из (18) вытекает, что

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \overset{m}{\mathrm{E}}_{q,f} + \overset{m}{\mathrm{E}}_{f,p} \quad (q < f < p), \quad (20)$$

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \sum_{n=q+1}^{p}\overset{m}{\mathrm{E}}_{n-1,n}. \quad (21)$$

Таким образом, тензор полных деформаций $\overset{m}{\mathrm{E}}_{0,N}$, определенный в пространстве m - го состояния, равен сумме тензора начальных деформаций $\overset{m}{\mathrm{E}}_{0,1}$ и тензоров дополнительных деформаций $\overset{m}{\mathrm{E}}_{n-1,n}$ $(n = 2,3,\ldots,N)$.

В заключение приведем выражения для тензоров $\overset{0}{\mathrm{E}}_{0,n}$ и $\overset{n}{\mathrm{E}}_{0,n}$, которые часто используются в полной математической постановке:

$$\overset{0}{\mathrm{E}}_{0,n} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{0,n} \cdot \Psi^{*}_{0,n} - I\right), \tag{22}$$

$$\overset{n}{\mathrm{E}}_{0,n} = \frac{1}{2}\left(I - \Psi_{0,n}^{-1} \cdot \Psi^{*\,-1}_{0,n}\right). \tag{23}$$

Эти выражения являются очевидными частными случаями формул (15), (17) соответственно.

Для постановки в перемещениях тензоры деформаций также как и аффиноры могут быть выражены через градиенты смещений при помощи (13), (15)-(17)

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=q+1}^{p}\left(\overset{m}{\nabla} u_n + u_n \overset{m}{\nabla}\right) + \sum_{n=m+1}^{p}\sum_{j=m+1}^{p} \overset{m}{\nabla} u_n \cdot u_j \overset{m}{\nabla} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=m+1}^{q}\sum_{j=m+1}^{q} \overset{m}{\nabla} u_n \cdot u_j \overset{m}{\nabla}\right] \quad (m < q < p), \tag{24}$$

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=q+1}^{p}\left(\overset{m}{\nabla} u_n + u_n \overset{m}{\nabla}\right) + \sum_{n=m+1}^{p}\sum_{j=m+1}^{p} \overset{m}{\nabla} u_n \cdot u_j \overset{m}{\nabla} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=q+1}^{m}\sum_{j=q+1}^{m} \overset{m}{\nabla} u_n \cdot u_j \overset{m}{\nabla}\right] \quad (q < m < p), \tag{25}$$

$$\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=q+1}^{p}\left(\overset{m}{\nabla} u_n + u_n \overset{m}{\nabla}\right) + \sum_{n=p+1}^{m}\sum_{j=p+1}^{m} \overset{m}{\nabla} u_n \cdot u_j \overset{m}{\nabla} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=q+1}^{m}\sum_{j=q+1}^{m} \overset{m}{\nabla} u_n \cdot u_j \overset{m}{\nabla}\right] \quad (q < p < m). \tag{26}$$

Приведем вид тензоров деформаций $\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1}$, $\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,2}$, $\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,2}$, $\overset{2}{\mathrm{E}}_{2,3}$, $\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,3}$, $\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,3}$ через соответствующие градиенты смещений при однократном наложении деформаций:

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1} = \frac{1}{2}\left(\overset{2}{\nabla} u_1 + u_1 \overset{2}{\nabla} - \overset{2}{\nabla} u_1 \cdot u_1 \overset{2}{\nabla} - \overset{2}{\nabla} u_2 \cdot u_1 \overset{2}{\nabla} - \overset{2}{\nabla} u_1 \cdot u_2 \overset{2}{\nabla}\right), \tag{27}$$

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\overset{2}{\nabla} u_2 + u_2 \overset{2}{\nabla} - \overset{2}{\nabla} u_2 \cdot u_2 \overset{2}{\nabla}\right), \tag{28}$$

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,2}=\frac{1}{2}\left(\overset{2}{\nabla}u_1+\overset{2}{\nabla}u_2+u_1\overset{2}{\nabla}+u_2\overset{2}{\nabla}+\left(\overset{2}{\nabla}u_1+\overset{2}{\nabla}u_2\right)\cdot\left(u_1\overset{2}{\nabla}+u_2\overset{2}{\nabla}\right)\right)=$$

$$=\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1}+\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,2}, \qquad (29)$$

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{2,3}=\frac{1}{2}\left(\overset{2}{\nabla}u_3+u_3\overset{2}{\nabla}+\overset{2}{\nabla}u_3\cdot u_3\overset{2}{\nabla}\right), \qquad (30)$$

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,3}=\frac{1}{2}\left(\overset{2}{\nabla}u_2+u_2\overset{2}{\nabla}+\overset{2}{\nabla}u_3+u_3\overset{2}{\nabla}-\overset{2}{\nabla}u_2\cdot u_2\overset{2}{\nabla}+\overset{2}{\nabla}u_3\cdot u_3\overset{2}{\nabla}\right)=$$

$$=\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,2}+\overset{2}{\mathrm{E}}_{2,3}, \qquad (31)$$

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,3}=\frac{1}{2}\left[\overset{2}{\nabla}u_1+u_1\overset{2}{\nabla}+\overset{2}{\nabla}u_2+u_2\overset{2}{\nabla}+\overset{2}{\nabla}u_3+u_3\overset{2}{\nabla}+\overset{2}{\nabla}u_3\cdot u_3\overset{2}{\nabla}-\right.$$

$$\left.-\left(\overset{2}{\nabla}u_1+\overset{2}{\nabla}u_2\right)\cdot\left(u_1\overset{2}{\nabla}+u_2\overset{2}{\nabla}\right)\right]=$$

$$=\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1}+\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,3}=\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,2}+\overset{2}{\mathrm{E}}_{2,3}=\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1}+\overset{2}{\mathrm{E}}_{1,2}+\overset{2}{\mathrm{E}}_{2,3}. \qquad (32)$$

Из соотношений (24)-(26) следует, что во всех случаях использования базиса промежуточного состояния (когда оно имеется), тензоры $\overset{m}{\mathrm{E}}_{q,p}$ параметрически зависят не только от градиентов u_m, но и от $\overset{m}{\nabla}u_n$ $\left(m\neq n\right)$, и это вызывает дополнительные трудности при постановке и решении задач в координатных базисах «более поздних» состояний, так как тензоры «более ранних» состояний, определяемые в базисах «более поздних» состояний, зависят и от градиентов векторов смещений, описывающих переход частицы в «более поздние» состояния. Для (27)

$$\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1}=\overset{2}{\mathrm{E}}_{0,1}\left(\overset{2}{\nabla}u_1,\,u_1\overset{2}{\nabla},\,\overset{2}{\nabla}u_2,\,u_2\overset{2}{\nabla}\right).$$

Как и в случае традиционной нелинейной теории упругости для описания деформаций могут быть использованы и другие тензоры

$$G_{k,n}=\Psi_{k,n}\cdot\Psi_{k,n}^{*}=I+2\overset{k}{\mathrm{E}}_{k,n}, \qquad (33)$$

$$F_{k,n}=\Psi_{k,n}^{*}\cdot\Psi_{k,n}=\left(I-2\overset{n}{\mathrm{E}}_{k,n}\right)^{-1}. \qquad (34)$$

При отсутствии наложения деформаций тензор $G = G_{0,1}$ совпадает с тензорной мерой деформаций Коши-Грина, а тензор $F = F_{0,1}$ совпадает с тензорной мерой деформаций Фингера.

Приведем соотношения для изменения элементарного объема при деформации [127, 138]:

$$\frac{d\overset{n}{V}}{d\overset{m}{V}} = 1 + \Delta_{m,n} = \det \Psi_{m,n}. \tag{35}$$

Используя формулу связи между инвариантами тензора [232], соотношение (35) можно записать в виде:

$$1 + \Delta_{m,n} = \frac{1}{6}\left(\Psi_1^{\,3} - 3\Psi_1\Psi_2 + 2\Psi_3\right), \tag{36}$$

где $\Psi_k = \Psi_{m,n}^{\;\;k} : I$.

Из (36) и (13) следуют выражения для относительного объемного расширения через градиенты векторов перемещения [127]:

$$\begin{aligned} 1 + \Delta_{n,n+1} = 1 + \overset{n}{\nabla}\cdot u_{n+1} + \frac{1}{2}\left(\overset{n}{\nabla}\cdot u_{n+1}\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}\overset{n}{\nabla} u_{n+1} : \overset{n}{\nabla} u_{n+1} + \frac{1}{6}\left(\overset{n}{\nabla}\cdot u_{n+1}\right)^3 - \\ - \frac{1}{2}\left(\overset{n}{\nabla}\cdot u_{n+1}\right)\overset{n}{\nabla} u_{n+1} : \overset{n}{\nabla} u_{n+1} + \frac{1}{3}\left(\overset{n}{\nabla} u_{n+1}\right)^3 : I \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \Delta_{n,n+1}\right)^{-1} = 1 - \overset{n+1}{\nabla}\cdot u_{n+1} + \frac{1}{2}\left(\overset{n+1}{\nabla}\cdot u_{n+1}\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}\overset{n+1}{\nabla} u_{n+1} : \overset{n+1}{\nabla} u_{n+1} - \frac{1}{6}\left(\overset{n+1}{\nabla}\cdot u_{n+1}\right)^3 + \\ + \frac{1}{2}\left(\overset{n+1}{\nabla}\cdot u_{n+1}\right)\overset{n+1}{\nabla} u_{n+1} : \overset{n+1}{\nabla} u_{n+1} - \frac{1}{3}\left(\overset{n+1}{\nabla} u_{n+1}\right)^3 : I \end{aligned} \tag{38}$$

Для нахождения объемного расширения может быть также использована формула [127, 138]

$$1 + \Delta_{m,n} = \left(1 + \Delta_{m,p}\right)\left(1 + \Delta_{p,n}\right). \tag{39}$$

Приведем также геометрическое соотношение, связывающее площади элементарной ориентированной площадки в различных состояниях:

$$dS_n = \left(1+\Delta_{k,n}\right)\left(\overset{k}{N}\cdot G_{k,n}{}^{-1}\cdot\overset{k}{N}\right)^{1/2} dS_k, \tag{40}$$

где dS_n - площадь элементарной площадки в n - м состоянии; dS_k - площадь элементарной площадки в k-м состоянии; $\overset{k}{N}$ - вектор единичной нормали к элементарной площадке в k-м состоянии.

Вектор единичной нормали к площадке в n-м состоянии $\overset{n}{N}$ может быть определен по формуле [127]

$$\overset{n}{N} = \left(\overset{k}{N}\cdot G_{k,n}{}^{-1}\cdot\overset{k}{N}\right)^{-1/2} \Psi_{k,n}{}^{-1}\cdot\overset{k}{N}. \tag{41}$$

Соотношения (40) и (41) используются для записи граничных условий в координатах различных состояний [127].

Тензоры напряжений

Введем обозначение для тензора истинных напряжений n-го состояния (т.е. напряжений, накопленных в теле при его переходе из начального (ненапряженного) в n-е состояние и рассчитанных на единицу площади этого состояния) [127]

$$\overset{n}{\sigma}_{0,n} = \sigma_{0,n}^{ij}\, \overset{n}{э}_i\, \overset{n}{э}_j.$$

Тензор обобщенных напряжений будет иметь вид

$$\overset{n}{\Sigma}_{0,n} = \left(1+\Delta_{0,n}\right)\overset{n}{\sigma}_{0,n}, \tag{1}$$

$$\left(1+\Delta_{0,n}\right) = \prod_{m=0}^{n-1}\left(1+\Delta_{m,m+1}\right), \tag{2}$$

$\left(1+\Delta_{0,n}\right)$ - кратность изменения объема частицы при ее переходе из начального в n-е состояние (в дальнейшем при решении конкретных задач используется именно кратность изменения объема); $\Delta_{m,m+1}$ - соответственно, относительное изменение объема частицы при ее переходе из m-го в $\left(m+1\right)$-е состояние; $\overset{n}{\Sigma}_{0,n}$ - тензор обобщенных напряжений.

Тензор $\overset{n}{\Sigma}_{0,n}$ совпадает с тензором истинных напряжений $\overset{n}{\sigma}_{0,n}$ в случае несжимаемого материала. При $n = N$ тензор $\overset{N}{\Sigma}_{0,N}$ называется тензором полных обобщенных напряжений (и

вообще $\overset{n}{\Sigma}_{0,n}$ можно рассматривать как тензор полных обобщенных напряжений для n-го состояния).

Тензор полных обобщенных напряжений может быть записан в координатах произвольного промежуточного состояния:

$$\overset{m}{\Sigma}_{0,n} = \Psi^{*}_{n,m} \cdot \overset{n}{\Sigma}_{0,n} \cdot \Psi_{n,m}. \tag{3}$$

Из равенства (3) вытекает следующая связь между тензорами обобщенных напряжений $\Sigma_{0,n}$ (являющимися полными для n-го состояния):

$$\overset{p}{\Sigma}_{0,n} = \Psi^{*}_{p,q}{}^{-1} \cdot \overset{q}{\Sigma}_{0,n} \cdot \Psi_{p,q}{}^{-1}. \tag{4}$$

Тензоры обобщенных дополнительных напряжений вводятся следующим образом [127]:

$$\overset{m}{\Sigma}_{q,p} = \overset{m}{\Sigma}_{o,p} - \overset{m}{\Sigma}_{o,q}. \tag{5}$$

Учитывая соотношения (4), получим следующую связь между тензорами обобщенных дополнительных напряжений $\Sigma_{q,p}$, определенными в пространствах различных состояний

$$\overset{m}{\Sigma}_{q,p} = \Psi^{*}_{m,n}{}^{-1} \cdot \overset{n}{\Sigma}_{q,p} \cdot \Psi_{m,n}{}^{-1} \ (q < p). \tag{6}$$

Последнее тождество является общим для всех значений n, m, p, q. Тензоры $\overset{n}{\Sigma}_{0,1}$ будем называть тензорами начальных обобщенных напряжений, определяемыми в координатном базисе n-го состояния.

Уравнения движения и граничные условия

Приведем уравнения движения и граничные в координатном базисе произвольного m-го состояний для частицы, находящейся в n-м состоянии, т.е. обладающей полными (для n-го состояния) напряжениями. Рассмотрение начнем с вида уравнения движения для этой частицы в координатном базисе n-го состояния $\overset{n}{Э}_i$, имеющего традиционный вид

$$\overset{n}{\nabla} \cdot \overset{n}{\sigma}_{0,n} + \rho_n \overset{n}{F}_n = \rho_n \overset{n}{a}_n, \tag{1}$$

где $\overset{n}{\sigma}_{0,n}$ - тензор соответствующих полных истинных напряжений; ρ_n, $\overset{n}{F}_n$, $\overset{n}{a}_n$ -плотность, массовая сила и ускорение частицы в n-м состоянии (и отнесенные к n-му состоянию).

Введем обозначения

$$\overset{m}{F}_n = \overset{n}{F}_n \cdot \Psi_{m,n}{}^{-1}, \ \overset{m}{a}_n = \overset{n}{a}_n \cdot \Psi_{m,n}{}^{-1}, \tag{2}$$

и преобразуем уравнение движения (1) к виду

$$\overset{m}{\nabla}\cdot\overset{m}{\Sigma}_{0,n}-\overset{m}{\Sigma}_{0,n}\cdot\overset{m}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,n}\right)+\overset{m}{\Sigma}_{0,n}:\left(\overset{m}{\nabla}\Psi_{m,n}\right)\cdot\Psi_{m,n}^{-1}-$$

$$-\left(\overset{m}{\nabla}\cdot\Psi_{m,n}^{*\,-1}\right)\cdot\Psi_{m,n}^{*}\cdot\overset{m}{\Sigma}_{0,n}+\overset{m}{F}_{n}\,\rho_{m}\left(1+\Delta_{0,m}\right)=\overset{m}{a}_{n}\,\rho_{m}\left(1+\Delta_{0,m}\right).\quad(3)$$

Здесь учтено также, что

$$\rho_{q}=\left(1+\Delta_{q,p}\right)\rho_{p}\quad\left(q<p\right).$$

Уравнение (3) можно называть, следуя терминологии работ [127, 138], уравнением движения для тензора $\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$ обобщенных (полных для n-го состояния) напряжений, определенного в координатном базисе произвольного m-го состояния.

Перейдем теперь к граничным условиям для тензора $\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$ обобщенных (полных для n-го состояния) напряжений, определенного в координатном базисе произвольного m-го состояния. Как и для уравнений движения начнем с рассмотрения граничных условий в базисе итогового состояния для тензора истинных напряжений, которые имеют наиболее привычный вид:

$$\overset{m}{n}\cdot\overset{m}{\sigma}_{0,m}=\overset{m\,(m)}{\mathrm{P}_{n}^{m}},\quad(4)$$

здесь $\overset{m}{n}$ - нормаль; $\overset{m\,(m)}{\mathrm{P}_{n}^{m}}$ - вектор истинных нормальных напряжений на площадке $\overset{m}{d}o=\overset{m}{n}\left|\overset{m}{d}o\right|$. Перейдем теперь к обобщенным напряжениям, используя их связь с истинными, а также кинематические соотношения для элементарных площадок

$$\overset{m}{\Sigma}_{0,m}=\left(1+\Delta_{0,m}\right)\overset{m}{\sigma}_{0,m},\quad(5)$$

$$\overset{m}{d}o=\left(1+\Delta_{0,m}\right)\overset{0}{d}o\cdot\Psi_{0,m}^{*\,-1},\quad(6)$$

$$\overset{m}{d}o=\left(1+\Delta_{q,m}\right)\overset{q}{d}o\cdot\Psi_{q,m}^{*\,-1}.\quad(7)$$

В тождествах (6), (7) $\overset{0}{d}o,\ \overset{1}{d}o,\ \ldots,\ \overset{N}{d}o$ - векторные значения одной и той же элементарной площадки в начальном, промежуточных и конечном состояниях.

Учитывая тождества (5-7), преобразуем выражение (4) к виду

$$\overset{q}{n}\cdot\overset{q}{\Sigma}_{0,m}=\overset{q\,(m)}{Q_{n}^{q}},\quad(8)$$

где

$$\overset{q}{Q}{}_{n}^{q\,(m)} = \left(1+\Delta_{0,q}\right)\frac{\left|\overset{q}{d}\,o\right|}{\left|\overset{m}{d}\,o\right|}\overset{m}{\mathrm{P}}{}_{n}^{m\,(m)}\cdot\Psi_{m,q}{}^{-1}. \qquad (9)$$

Приведем граничные условия в конкретном случае с двумя промежуточными состояниями

В координатном базисе первого промежуточного состояния:

$$\overset{1}{n}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,1} = \left(1+\Delta_{0,1}\right)\overset{1}{\mathrm{P}}{}_{n}^{1\,(1)},$$

$$\overset{1}{n}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,2} = \overset{1}{Q}{}_{n}^{1\,(2)},$$

$$\overset{1}{n}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,3} = \overset{1}{Q}{}_{n}^{1\,(3)},$$

где

$$\overset{1}{Q}{}_{n}^{1\,(2)} = \left(1+\Delta_{0,1}\right)\frac{\left|\overset{1}{d}\,o\right|}{\left|\overset{2}{d}\,o\right|}\overset{2}{\mathrm{P}}{}_{n}^{2\,(2)}\cdot\Psi_{1,2}, \quad \overset{1}{Q}{}_{n}^{1\,(3)} = \left(1+\Delta_{0,1}\right)\frac{\left|\overset{1}{d}\,o\right|}{\left|\overset{3}{d}\,o\right|}\overset{3}{\mathrm{P}}{}_{n}^{3\,(3)}\cdot\Psi_{1,3}.$$

В координатном базисе второго промежуточного состояния:

$$\overset{2}{n}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,1} = \overset{2}{Q}{}_{n}^{2\,(1)},$$

$$\overset{2}{n}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,2} = \left(1+\Delta_{0,2}\right)\overset{2}{\mathrm{P}}{}_{n}^{2\,(2)},$$

$$\overset{2}{n}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,3} = \overset{2}{Q}{}_{n}^{2\,(3)},$$

где

$$\overset{2}{Q}{}_{n}^{2\,(1)} = \left(1+\Delta_{0,2}\right)\frac{\left|\overset{2}{d}\,o\right|}{\left|\overset{1}{d}\,o\right|}\overset{1}{\mathrm{P}}{}_{n}^{1\,(1)}\cdot\Psi_{1,2}{}^{-1}, \quad \overset{2}{Q}{}_{n}^{2\,(3)} = \left(1+\Delta_{0,2}\right)\frac{\left|\overset{2}{d}\,o\right|}{\left|\overset{3}{d}\,o\right|}\overset{3}{\mathrm{P}}{}_{n}^{3\,(3)}\cdot\Psi_{2,3}.$$

В координатном базисе конечного состояния:

$$\overset{3}{n}\cdot\overset{3}{\Sigma}_{0,1} = \overset{3}{Q}{}_{n}^{3\,(1)},$$

$$\overset{3}{n}\cdot\overset{3}{\Sigma}_{0,2}=\overset{3}{Q}{}^{(2)}_{n^3},$$

$$\overset{3}{n}\cdot\overset{3}{\Sigma}_{0,3}=\left(1+\Delta_{0,3}\right)\overset{3}{\mathrm{P}}{}^{(3)}_{n^3},$$

где

$$\overset{3}{Q}{}^{(1)}_{n^3}=\left(1+\Delta_{0,3}\right)\frac{\left|\overset{3}{d}\,o\right|}{\left|\overset{1}{d}\,o\right|}\overset{1}{\mathrm{P}}{}^{(1)}_{n^1}\cdot\Psi_{1,3}{}^{-1},\quad \overset{3}{Q}{}^{(2)}_{n^3}=\left(1+\Delta_{0,3}\right)\frac{\left|\overset{3}{d}\,o\right|}{\left|\overset{2}{d}\,o\right|}\overset{2}{\mathrm{P}}{}^{(2)}_{n^2}\cdot\Psi_{2,3}{}^{-1}.$$

Определяющие соотношения теории наложения больших деформаций

Для упругого материала, как известно [158, 232], связь между тензором обобщенных напряжений $\overset{n}{\Sigma}_{0,n}$ и тензором деформаций $\overset{n}{E}_{0,n}$ в базисе текущего состояния задается зависимостью:

$$\overset{n}{\Sigma}_{0,n}=\frac{\partial A_n}{\partial\overset{n}{E}_{0,n}}\cdot\left(I-2\overset{n}{E}_{0,n}\right)$$

Здесь A_n – упругий потенциал. Для изотропного упругого материала потенциал A_n является функцией инвариантов соответствующего тензора деформаций [158]. Примером такого материала является используемый в данной работе материал Мурнагана [630]. Ниже представлено определяющее соотношение для этого материала [127, 158]:

$$\overset{0}{\Sigma}_{0,n}=\lambda\left(\overset{0}{E}_{0,n}\cdot\cdot I\right)I+2G\overset{0}{E}_{0,n}+3C_3\left(\overset{0}{E}_{0,n}\cdot\cdot I\right)^2I+C_4\left(\overset{0}{E}{}^{2}_{0,n}\cdot\cdot I\right)I+$$

$$+2C_4\left(\overset{0}{E}_{0,n}\cdot\cdot I\right)\overset{0}{E}_{0,n}+3C_5\left(\overset{0}{E}_{0,n}\right)^2.$$

Математическая модель образования концентраторов напряжений в нагруженном теле

Теперь мы можем перейти к полной математической постановке (сформулировать математическую модель) задачи нелинейной теории упругости с учетом наложения больших деформаций на уже присутствующие в теле большие деформации. В отличие от традиционной нелинейной теории в задачах наложения присутствует произвольное число промежуточных состояний, при этом, как форма границы, так и граничные условия могут быть заданы в произвольном состоянии. Более того, форма и связность тела могут многократно изменяться в различных состояниях: в теле могут появляться отверстия, часть тела может менять свойства.

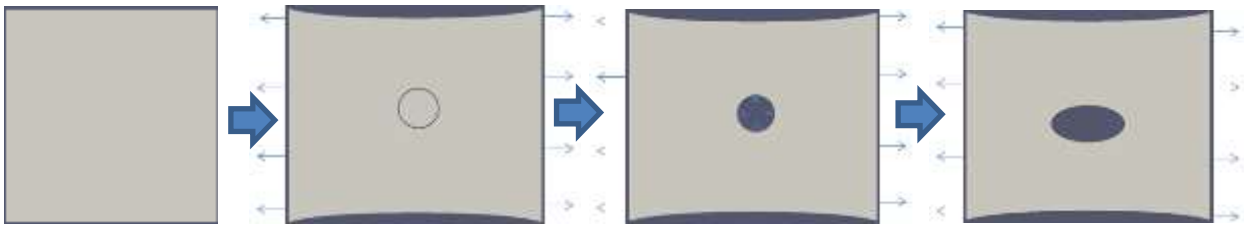


Рисунок 2. Слева направо. 1. Начальное ненагруженное состояние. 2. Деформированное состояние в результате приложения внешних нагрузок (конечные деформации). В нагруженном теле наметили область концентратора напряжений. 3. Удалили область. Ее действие заменили силами реакции, распределенными по границе. 4. Изменили силы по границе области на конечную величину. Произошло перераспределение (наложение) конечных деформаций. Изменилась форма тела и концентратора напряжений.

Рассмотрим модель образования отверстия в теле в рамках теории наложения конечных деформаций (Рисунок 2). Изначально ненагруженное тело под действием внешних нагрузок переходит в первое промежуточное состояние, в результате чего накапливает большие деформации. Далее в теле намечается контур будущего отверстия, вычисляются усилия, действующие на данной границе, часть тела удаляется, а его действие заменяется вычисленными усилиями (принцип освобождаемости от связей). Далее эти силы, перешедшие в разряд внешних, «мгновенно» изменяем на большую величину, например, уменьшаем до нуля [127, 131, 138]. Тело, приобретая (теряя) большие дополнительные деформации и напряжения (по крайней мере, в окрестности вновь образованной граничной поверхности), переходит во второе промежуточное состояние. Как и в случае без наложения, форма отверстия (дефекта, влияющего на остаточную прочность и свойства материала) может быть известна в любом из состояний, наиболее удобно при этом рассматривать задачу в координатах того состояния, где известна форма.

В рамках теории наложения возможно рассмотрение задач, в которых граничные условия задаются в различных состояниях, например, в задаче о последовательном образовании дефектов, когда форма каждого дефекта известна в момент его возникновения или сразу после освобождения вновь образовавшейся границы. Возможно задание граничных условий в перемещениях в координатах любого из состояний или задание смешанных граничных условий.

Выпишем полную математическую постановку (опишем математическую модель) для задачи об образовании в теле дефекта в промежуточном состоянии.

В этом случае возможны следующие варианты постановки задачи:

1. Если задана форма границы в начальном состоянии, то после приложения начальных усилий определяем поле начальных деформаций и форму границы в первом промежуточном состоянии. Далее, прикладывая дополнительные внешние усилия, определяем поля больших

дополнительных деформаций и форму границы в конечном состоянии. Система уравнений равновесия с граничными условиями в этом случае запишется следующим образом:

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,1}-\overset{0}{\Sigma}_{0,1}\cdot\overset{0}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,1}\right)+\overset{0}{\Sigma}_{0,1}:\left(\overset{0}{\nabla}\Psi_{0,1}\right)\cdot\Psi_{0,1}^{-1}-$$

$$-\left(\overset{0}{\nabla}\cdot\Psi_{0,1}^{*\,-1}\right)\cdot\Psi_{0,1}^{*}\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,1}+\rho_0\overset{0}{F}_1=0, \tag{1}$$

$$\overset{0}{n}\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,1}=\overset{0}{Q}{}_n^{0\,(1)}, \tag{2}$$

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,2}-\overset{0}{\Sigma}_{0,2}\cdot\overset{0}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,2}\right)+\overset{0}{\Sigma}_{0,2}:\left(\overset{0}{\nabla}\Psi_{0,2}\right)\cdot\Psi_{0,2}^{-1}-$$

$$-\left(\overset{0}{\nabla}\cdot\Psi_{0,2}^{*\,-1}\right)\cdot\Psi_{0,2}^{*}\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,2}+\rho_0\overset{0}{F}_2=0, \tag{3}$$

$$\overset{0}{n}\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,2}=\overset{0}{Q}{}_n^{0\,(2)}. \tag{4}$$

Видим, что независимо от того, в каком состоянии заданы определяющие соотношения, уравнения равновесия (1) с граничными условиями (2) зависят только от градиентов вектора u_1, а это значит, что система уравнений (1) и (3) с граничными условиями (2) и (4) «распадается».

2. При задании формы границы в первом промежуточном состоянии ранее рассмотренный алгоритм решения сохранится. То есть: после приложения начальных усилий определяем поле начальных деформаций и форму границы в начальном состоянии (если это требуется). Далее, прикладывая дополнительные внешние усилия, определяем поля больших дополнительных деформаций и форму границы в конечном состоянии.

Система уравнений равновесия с граничными условиями в этом случае запишется так:

$$\overset{1}{\nabla}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,1}-\overset{1}{\Sigma}_{0,1}\cdot\overset{1}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,1}\right)+\overset{1}{F}_1\,\rho_1\left(1+\Delta_{0,1}\right)=0, \tag{5}$$

$$\overset{1}{n}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,1}=\left(1+\Delta_{0,1}\right)\overset{1}{\mathrm{P}}{}_n^{1\,(1)}, \tag{6}$$

$$\overset{1}{\nabla}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,2}-\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\cdot\overset{1}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,2}\right)+\overset{1}{\Sigma}_{0,2}:\left(\overset{1}{\nabla}\Psi_{1,2}\right)\cdot\Psi_{1,2}^{-1}-$$

$$-\left(\overset{1}{\nabla}\cdot\Psi_{1,2}^{*\,-1}\right)\cdot\Psi_{1,2}^{*}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,2}+\overset{1}{F}_2\,\rho_1\left(1+\Delta_{0,1}\right)=0, \tag{7}$$

$$\overset{1}{n}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,2}=\overset{1}{Q}{}_n^{1\,(2)}. \tag{8}$$

Видим, что и в этом случае, независимо от того, в каком состоянии заданы определяющие соотношения, уравнения равновесия (5) с граничными условиями (6) зависят только от градиентов вектора u_1, а это значит, что наша система уравнений (5) и (7) «распадается».

3. При задании формы границы в конечном состоянии ранее рассмотренный алгоритм решения не подходит, так как система уравнений равновесия с граничными условиями в этом случае примет вид

$$\overset{2}{\nabla}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,1}-\overset{2}{\Sigma}_{0,1}\cdot\overset{2}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,1}\right)+\overset{2}{\Sigma}_{0,1}:\left(\overset{2}{\nabla}\Psi_{1,2}{}^{-1}\right)\cdot\Psi_{1,2}-$$

$$-\left[\left(\overset{2}{\nabla}\cdot\Psi^{*}_{1,2}\right)\cdot\Psi^{*}_{1,2}{}^{-1}\right]\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,1}+\overset{2}{F}_1\rho_2\left(1+\Delta_{0,2}\right)=0, \qquad (9)$$

$$\overset{2}{n}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,1}=\overset{2}{Q}{}^{(1)}_{n^2}, \qquad (10)$$

$$\overset{2}{\nabla}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,2}-\overset{2}{\Sigma}_{0,2}\cdot\overset{2}{\nabla}\ln\left(1+\Delta_{0,2}\right)+\rho_2\overset{2}{F}_2=0. \qquad (11)$$

$$\overset{2}{n}\cdot\overset{2}{\Sigma}_{0,2}=\left(1+\Delta_{0,2}\right)\overset{2}{\mathrm{P}}{}^{2}_{n}, \qquad (12)$$

здесь $\overset{2}{Q}{}^{(1)}_{n^2}=\left(1+\Delta_{0,2}\right)\dfrac{\left|\overset{2}{d}\,o\right|}{\left|\overset{1}{d}\,o\right|}\overset{2}{\mathrm{P}}{}^{2}_{n}\cdot\Psi_{1,2}{}^{-1}$.

$$\rho_1=\left(1+\Delta_{1,2}\right)\rho_2,$$

$$\rho_0=\left(1+\Delta_{0,1}\right)\rho_1=\left(1+\Delta_{0,2}\right)\rho_2,$$

$$\left(1+\Delta_{0,2}\right)=\left(1+\Delta_{0,1}\right)\left(1+\Delta_{1,2}\right),$$

$$\Psi_{0,2}=\Psi_{0,1}\cdot\Psi_{1,2}.$$

Видим, что в этом случае, независимо от того, в каком состоянии заданы определяющие соотношения, уравнения равновесия (9) с граничными условиями (10) зависят не только от градиентов векторов u_1, но и от градиентов вектора u_2, а это значит, что система уравнений (9) и (11) не распадается, более того она не распадается в базисе любого другого состояния, кроме начального и первого.

Из этого, в частности, следует, что стандартные пакеты для решения задач нелинейной теории упругости не подходят для решения задач такого типа, даже в случае нагружения тела в два этапа (однократного наложения больших деформаций).

В общем случае при задании формы границы в одном из промежуточных состояний (n-м состоянии) при $n>1$ решение задачи наталкивается на значительные (как и в последнем

примере) трудности, так как определяющие соотношения для тензоров обобщенных напряжений $\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$, уравнения движения (или равновесия) и граничные условия, сформулированные для тензора $\overset{m}{\Sigma}_{0,n}$, зависят от аффиноров деформации $\Psi_{m,n}$, а это значит, что система уравнений не «распадается».

Наибольшие трудности указанного характера возникают при решении задач в координатах конечного состояния. Но постановка и решение задач в этом состоянии порой необходима, например, для случая последовательного образования концентраторов напряжений в предварительно напряженном теле с большими начальными деформациями, когда требуется, чтобы в конечном состоянии (или в заданный момент времени для тела из вязкоупругого материала) все концентраторы имели заданную форму, т.е. необходимо определить форму каждого концентратора в момент его образования. Существенные трудности возникают не только при постановке таких задач, но и при их решении. Они связаны с тем, что, в каком бы состоянии задача ни решалась, граница области в этом состоянии частично неизвестна (за исключением бесконечно протяженных тел).

В рамках данной теории возможно рассмотрение задач, в которых граничные условия задаются в различных состояниях, например, в задаче о последовательном образовании концентраторов напряжений в предварительно напряженном теле с большими начальными деформациями, когда форма каждого концентратора напряжений известна сразу после его образования или (подчеркнем, что это другая задача) в момент образования. Возможно задание граничных условий и в перемещениях в координатах любого из состояний или задание смешанных граничных условий.

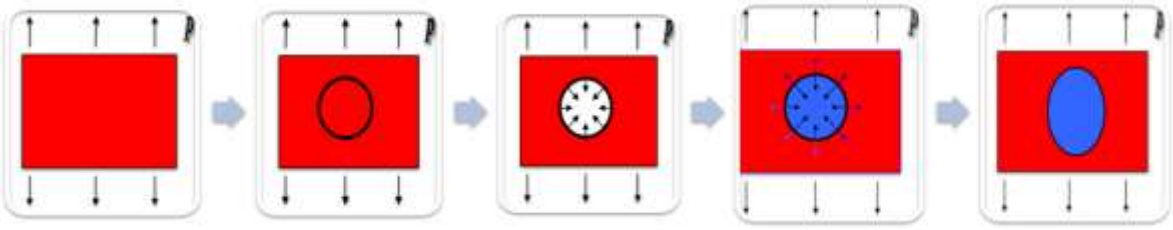


Рисунок 3 Образование включения в нагруженном теле

Постановка задачи об образовании области с новыми свойствами (включения) в нелинейно упругом теле (Рисунок 3) следующая: пусть в теле, находящемся в начальном (ненапряженном) состоянии, под воздействием внешних нагрузок возникли конечные статические деформации. Тело перешло в первое промежуточное состояние. Далее, в этом теле мысленно намечается замкнутая поверхность (будущая граница включения). Внутри части тела, ограниченной этой поверхностью, скачкообразно меняются механические свойства материала. Внутри образовавшегося включения и в матрице возникают дополнительные конечные

деформации (по крайней мере, вблизи вновь образованного включения) и напряжения, которые накладываются, на уже имеющиеся в теле. Тело (матрица и включение) переходит в конечное состояние.

Момент образования включения моделируется различными способами.

В области включения напрямую производится замена материала, после чего тело переходит в новое состояние. Часть, намеченная для замены свойств, удаляется из тела по принципу освобождения от связей, таким образом, напряжения в остальной части тела сохраняются. Свободное пространство заменяется новым материалом. При этом считаем, что к границе включения приложены силы противоположные силам, действующим по образованной граничной поверхности матрицы. Затем силы, действующие на границе, удаляются и материал переходит в новое состояние. Предполагается, что на границе тела и образованного включения заданы условия прилипания.

Модель роста дефекта в нагруженном теле с зонами предразрушения

Постановка рассмотренных задач механики деформируемых твердых тел обусловливается предположением о сплошности среды. Поэтому образование и развитие нарушений сплошности пород (повреждений или дефектов) можно описывать только при допущении о том, что трещины существовали до нагружения либо возникли в его процессе. Повреждением может считаться трещина ненулевого раскрытия. В рамках обсуждаемой модели понятия трещины и микротрещины аналогичны: и те, и другие являются концентраторами напряжений внутри тела. Учет взаимодействия трещин закономерно требует учета их размеров и расположения относительно граничной поверхности. Отметим, что строение вещества – задача материаловедения, и материал тела не может рассматриваться и изучаться с использованием аппарата механики деформируемых твердых тел. В рамках этой теории термин “трещина” относится к очагу концентрации напряжений, который начинает принудительно менять свою форму (расти, раскрываться) под внешним воздействием при выполнении некоторого условия. Внешнее воздействие также меняет напряженно-деформированное состояние нагружаемого тела, и в некоторых случаях эти изменения должны быть заданы (например, при учете конечных деформаций) [127, 138, 158, 232]. Новая форма концентратора напряжений определяется соответствующим механическим критерием либо, в противном случае, задается исследователем; при этом не предполагается лавинообразный рост трещины (т. е. выполняется критерий разрушения). Например, это может быть форма трещины, поглотившей второстепенную трещину в соответствии с моделью вязкого роста [17, 18, 263, 264, 265].

В качестве критерия прочности обычно используется одно или несколько экспериментальных значений (при этом дополнительно могут быть включены параметры концентратора напряжений, такие как характерный размер дефекта), которые сравниваются с расчетными. Когда значение такого критерия оказывается превышено, начинается рост существующих трещин. В этом случае необходимо знать форму граничной поверхности трещины в ненагруженном состоянии тела (начальное состояние с точки зрения нелинейной теории упругости) или в текущий / конечный момент выполнения критерия. Данное условие существенно для определения напряженно-деформированного состояния тела, параметры которого входят в критерий прочности. В некоторых моделях принудительного роста трещин [127, 130, 147, 148, 580] силы (например, сцепления) могут добавляться или убираться. Внешние силы могут действовать на поверхность трещины (или на ее часть) до или после того, как достигнуто значение критерия прочности. Следует отметить, что при решении задачи определения напряженно-деформированного состояния твердого тела в рамках механики деформируемых твердых тел необходимо учитывать момент начала действия сил. Также следует учитывать форму нагружаемой граничной поверхности. Например, нагрузка может быть приложена в момент, когда начинают действовать все внешние силы, либо в заданный пользователем момент, при условии, что деформация не является малой. В этом случае мы имеем дело с задачей последовательного нагружения тела [232, 267].

В рамках рассматриваемой модели предполагается, что возникновение и рост дефекта (трещины) происходит не мгновенно. Вводится понятие зоны предразрушения, которая представляет собой некоторую часть (части) твердого тела (включение), в пределах которых его свойства меняются под воздействием внешних сил. Другими словами, зона предразрушения в твердом теле возникает при превышении критерия прочности, а границы этой зоны определяются выполнением этого критерия.

На первом этапе построения модели (и ее использования) предлагается описывать изменение свойств твердого тела внутри зоны предразрушения, изменяя только коэффициенты в определяющих соотношениях либо сами соотношения. На втором этапе логично рассматривать микропоры и микровключения, возникающие последовательно или одновременно внутри зоны предразрушения. Затем материал этой зоны заменяется материалом с эффективными свойствами на каждом этапе изменения его свойств. Это существенно, например, для эластомеров, в которых происходит кристаллизация под воздействием растяжения при нагружении [138, 149, 158, 345, 591]. Свойства эффективной среды для случая конечных деформаций можно определить, используя подход, предложенный в работах [137, 144, 511, 513, 575, 579, 581, 585, 594].

В случае малых деформаций задача роста зоны предразрушения и изменения ее свойств может быть решена при помощи аппарата, разработанного для задач о включениях и для оценки свойств эффективных сред [43, 575, 581, 587, 591, 751]. Для практических расчетов может быть использовано программное обеспечение для производственного применения (CAE-системы). Следует отметить, что главное ограничение в данном случае состоит в возможности определить параметры напряженно-деформированного состояния твердого тела на основе совокупности нагружений как сумму соответствующих параметров на каждом этапе нагружения.

Если зона предразрушения возникает в твердом теле, испытывающем конечные деформации (хотя бы вблизи этой зоны), решение задачи усложняется, но ситуация более точно отражает действительность. Для решения таких проблем применяется аппарат теории многократного наложения больших деформаций с введением понятия программы нагружения. Это понятие, в частности, предполагает, что образование зоны предразушения (или рост трещин) происходит, как только выбранный критерий начинает выполняться. Процесс не “ждет”, пока все внешние силы достигнут определенных значений (или пока все нагрузки начнут действовать на тело), т. е. он не ждет полного выполнения программы нагружения (которая обычно задается пользователем). Программа нагружения коррелирует с программой (развитием) процесса возникновения и расширения зон предразрушения: деградации материала вплоть до его исчезновения (откола).

Механическая постановка задачи с использованием нелокального критерия прочности может быть следующей [147, 148, 158, 267, 511]. Пусть в процессе нагружения внутри твердого тела возникает некая область, в пределах которой достигается или превышается некое значение критерия. Эта область мысленно убирается, и ее воздействие на остальную часть тела заменяется силами, распределенными по замкнутой поверхности (по принципу ослабления элементов жесткости), что не меняет напряженно-деформированного состояния остальной части тела. Затем полость, образующаяся на месте изъятой области, заполняется упругим материалом с другими свойствами.

Считается, что возникшее включение (которое играет роль зоны предразрушения) совпадает по форме с изъятой частью тела, а силы, действующие на границы включения, противоположны силам, действующим на вновь образованную границу тела. Тогда силы, действующие на границу тела, образованную за счет убранной части, и на границу зоны предразрушения квазистатистически (например, изотермально) сводятся к нулю, не вызывая динамических эффектов. Это создает дополнительные большие (как минимум, в окрестности включения) напряжения и деформации, которые накладываются на начальные большие

напряжения и деформации, уже существующие в теле и в зоне предразрушения. В терминах теории многократного наложения больших деформаций можно сказать, что тело переходит в следующее состояние.

Затем проводится проверка критериев прочности. Если новая область появилась там, где этот критерий выполняется (или превышен), вышеописанная процедура формирования включения повторяется.

Постановку задачи можно усложнить, предположив, что зона предразрушения возникла на одной из стадий программы нагружения. Если программа продолжается, необходимо учесть возможность возникновения зоны предразрушения с новыми свойствами (например, внутри уже существующей зоны предразрушения). Например, таким изменением свойств тела может стать изменение его плотности.

Ясно, что этот процесс может продолжаться до тех пор, пока не образуется трещина. Трещина моделируется удалением части твердого тела. Изъятие части твердого тела предполагает, например, отделение одной его части от другой или изменение свойств убранной части таким образом, что она перестает взаимодействовать с оставшейся частью тела.

На втором этапе построения модели (в ходе которого уточняются свойства материала зоны предразрушения) учитывается, что образование трещины в зоне предразрушения вызывает сложные физико-химические процессы, которые на начальной стадии роста трещины порождают хаотически-разнонаправленные микровключения и микротрещины, которые впоследствии сольются в одну макротрещину. Данный микротрещиноватый материал зоны предразрушения заменяется материалом с эффективными свойствами по методу, описанному в работах [147, 202, 232]. Затем решается задача для тела, содержащего зону предразрушения. Кроме того, желательно учесть произвольные расстояния между микротрещинами и их размеры. Отметим также, что рост трещин в контексте данной модели описывается образованием зоны предразрушения на конце (вершине) трещины.

Предполагается, что на границе зоны предразрушения и остальной части тела выполняются условия слипания (равенство соответствующих смещений и напряжений).

$$(\overset{k}{N}_n \cdot \overset{k}{\Sigma}_{0,n}\big|_{\overset{k}{\Gamma_n}})\big|_{matrix} = (\overset{k}{N}_n \cdot \overset{k}{\Sigma}_{0,n}\big|_{\overset{k}{\Gamma_n}})\big|_{prefracturezone}$$

$$\left(\vec{u}_n\big|_{\overset{k}{\Gamma_n}}\right)\big|_{matrix} = (\vec{u}_n\big|_{\overset{k}{\Gamma_n}})\big|_{prefracturezone},$$

Для определения размеров зоны предразрушения можно использовать различные критерии прочности. Принимается во внимание, что изменение свойств материала тела в зоне предразрушения и дальнейшее разрушение в ее пределах происходят в конечной области и не

мгновенно [149]. В работе [148] предложен нелокальный критерий прочности при условии конечных деформаций для твердых тел из упругих и вязкоупругих материалов. Этот критерий полезен для анализа вязкого роста трещин (критерий Левина–Морозова).

Заметим, что критерии разрушения, основанные на осреднении их значений в пространстве или во времени (но не для конечных деформаций и вязкоупругих тел), известны [147, 153, 267]. Первым критерием такого вида является, вероятно, критерий Вигарда [148].

В качестве объяснения ниже описывается простейший нелокальный критерий прочности для зоны предразрушения (Рисунок 4). Нелокальный критерий представляет собой локальный критерий $V = V_k$, примененный к зоне предразрушения для определения этой области (зоны) и для задания такого значения превышения параметра прочности ($\alpha\%$), при котором в "опасной точке" мгновенно возникает зона предразрушения. Также предполагается, что в области, ограниченной изолинией, величина критерия V превышает предельное значение V_k не более чем на $\alpha\%$. По этой изолинии условие прочности справедливо для локального критерия $V = V_k$ (в замкнутой области внутри изолинии $V_k \le V \le V_k(1+\alpha/100)$).

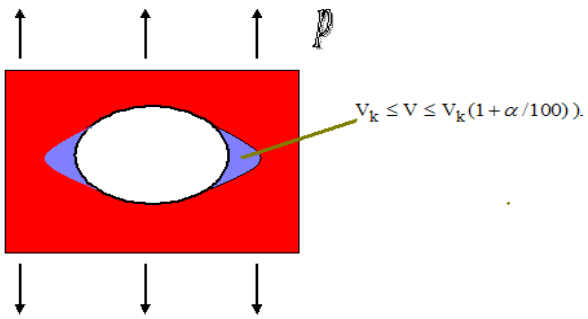


Рисунок 4 Применение нелокального критерия прочности для определения размеров первой зоны предразрушения

Степень разрушения задается внутри области, ограниченной этой изолинией. Например, может предварительно задаваться пористость материала $\Delta\rho$ как отражение разрушения или образования микровключений. Материал зоны предразрушения приобретает другие (эффективные) свойства, при этом образование зоны с новыми свойствами ведет к перераспределению напряжений и деформаций в теле, в результате чего меняется форма зоны предразрушения.

Далее мы увеличиваем (на некоторую заданную величину) внешнюю нагрузку (или добавляем новую), согласно программе нагружения, и определяем соответствующее напряженно-деформированное состояние. Затем, как и на первом этапе, проверяем выполнение нелокального критерия прочности в исходном материале, с определением новой границы зоны предразрушения. Внутри этой зоны находим зону предразрушения следующего уровня, с

использованием того же нелокального критерия прочности (конечно, если он выполнялся) (Рисунок 5).

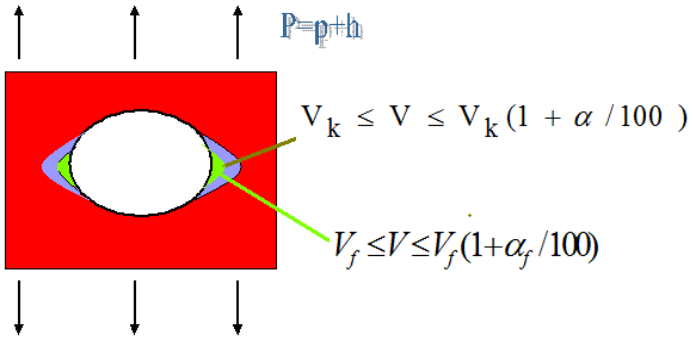


Рисунок 5 Применение нелокального критерия прочности для определения размеров первой и второй зон предразрушения

В пределах новой зоны предразрушения свойства материала изменяются (например, пористость возрастает на величину $\Delta\rho_1$). Возникновение новой зоны с новыми свойствами закономерно приводит к перераспределению напряжений и деформаций в теле.

В дальнейшем нагружение продолжается, все стадии повторяются и зоны предразрушения определяются по описанной выше схеме. Например, пористость может одновременно расти от стадии к стадии, пока не достигнет предельного значения в последней зоне предразрушения (на заключительной стадии). Достижение предела пористости в последней зоне предразрушения означает исчезновение (откол) материала. Обычно это происходит по границе дефекта (трещины).

Внешняя нагрузка может далее возрастать в ходе расширения зон предразрушения и прогрессирующего откола. Заметим, что в данной модели зоны предразрушения образуются и меняются мгновенно, и поэтому возможные уточнения могут быть связаны только с их “физическим”, а не с “вычислительным” аспектом.

1.3 Численное решение задач теории многократного наложения больших деформаций

Приведем основные соотношения теории наложения конечных деформаций для случая, когда форма тела известна в промежуточном состоянии (в момент образования полости) [127, 138]:

Уравнение равновесия:

$$\overset{k}{\nabla}\cdot[(1+\Delta_{0,k})^{-1}\overset{k}{\sum}_{0,n}\cdot\Psi_{k,n}]=0 \qquad (1)$$

Граничные условия (для случая задания давления на границе полости):

$$(\overset{k}{N}_n \cdot \overset{k}{\Sigma}_{0,n}\Big|_{\overset{k}{\Gamma}_n}) \big|_{отв} = (1+\Delta_{0,n})\overset{k}{P}_n \cdot \Psi^{*-1}_{k,n} \cdot \Psi^{-1}_{k,n};$$

$$(\overset{k}{N}_n \cdot \overset{k}{\Sigma}_{0,n} \mid_{\overset{k}{\Gamma}_n}) \big|_{матр} = (\overset{k}{N}_n \cdot \overset{k}{\Sigma}_{0,n} \mid_{\overset{k}{\Gamma}_n}) \big|_{вкл}; \qquad (2)$$

$$(u_n \mid_{\overset{k}{\Gamma}_n}) \big|_{матр} = (u_n \mid_{\overset{k}{\Gamma}_n}) \big|_{вкл}$$

Определяющие соотношения для материала Мурнагана:

$$\overset{0}{\Sigma}_{0,n} = \lambda(\overset{0}{E}_{0,n} : I)I + 2G\overset{0}{E}_{0,n} + 3C_3(\overset{0}{E}_{0,n} : I)^2 I + C_4(\overset{0}{E}_{0,n}{}^2 : I)I + 2C_4(\overset{0}{E}_{0,n} : I)\overset{0}{E}_{0,n} + 3C_5(\overset{0}{E}_{0,n})^2$$

$$\overset{k}{\Sigma}_{0,n} = (1+\Delta_{0,n})\Psi^{*}_{k,n}{}^{-1} \cdot \sigma_{0,n} \cdot \Psi^{-1}_{k,n} \qquad (3)$$

$$\sigma_{0,n} = (1+\Delta_{0,n})^{-1}\Psi^{*}_{0,n} \cdot \overset{0}{\Sigma}_{0,n} \cdot \Psi_{0,n}$$

Геометрические соотношения:

$$\overset{0}{E}_{0,n} = \frac{1}{2}(\Psi_{0,n} \cdot \Psi^{*}_{0,n} - I)$$

$$1+\Delta_{0,n} = \det \Psi_{0,n} \qquad (4)$$

$$\Psi_{0,n} = \Psi_{0,k} \cdot \Psi_{k,n}$$

$$\Psi_{k,n} = I + \sum_{i=k+1}^{n} \overset{k}{\nabla} u_i$$

Математическая постановка для случая, когда форма тела известна в конечном состоянии (в деформированном):

Уравнение равновесия:

$$\overset{n}{\nabla} \cdot \sigma_{0,n} = 0 \qquad (5)$$

Граничные условия:

$$(\overset{n}{N}_n \cdot \sigma_{0,n}\Big|_{\overset{n}{\Gamma}_n}) \big|_{отв} = \overset{n}{P}_n;$$

$$(\overset{n}{N}_n \cdot \sigma_{0,n}\Big|_{\overset{n}{\Gamma}_n}) \big|_{матр} = (\overset{n}{N}_n \cdot \sigma_{0,n}\Big|_{\overset{n}{\Gamma}_n}) \big|_{вкл}; \qquad (6)$$

$$(u_n \mid_{\overset{n}{\Gamma}_n}) \big|_{матр} = (u_n \mid_{\overset{n}{\Gamma}_n}) \big|_{вкл}$$

Геометрические соотношения:

$$1+\Delta_{0,n}=\det\Psi_{0,n}$$

$$\Psi_{0,n}=\Psi_{0,1}\cdot\Psi_{1,n}$$

$$\Psi_{0,n}=(I-\sum_{i=1}^{n}\nabla u_i)^{-1} \qquad (7)$$

$$\Psi_{1,n}=(I-\sum_{i=2}^{n}\nabla u_i)^{-1}$$

Из приведенных вариантов постановки задач теории многократного наложения больших деформаций видна их важная особенность: для того, чтобы найти решение задачи для n-го состояния в координатах k-го состояния, необходимо знать векторы перемещений из начального в первое, из первого во второе, …, из (k-1)-го в k-е состояние (или, по крайней мере, сумму этих векторов), причем эти векторы (или их сумма) должны быть известны в координатах k-го состояния. В связи с этим решение задач теории многократного наложения больших деформаций более сложно, чем решение “обычных” задач нелинейной упругости при больших деформациях, и не может быть найдено с помощью стандартных пакетов конечноэлементного анализа, в которых решение (перемещения узловых элементов) ищется на предварительно построенной сетке, не меняющейся в процессе решения. Далее мы рассмотрим особенности применения (и возникающие при этом трудности) метода конечных элементов (МКЭ) для решения задач теории многократного наложения больших деформаций [131].

Алгоритм решения задачи о последовательном образовании концентраторов напряжений

Как уже было отмечено, решение одной задачи теории многократного наложения больших деформаций о последовательном образовании концентраторов напряжений требует решения целой серии задач нелинейной теории упругости. Каждую из этих отдельных задач будем решать с применением метода конечных элементов [131]. При этом возникает одна существенная особенность, которой не было в случае решения задач классической теории упругости. До этого момента решение задачи (перемещения узловых элементов) искалось на предварительно построенной сетке, не меняющейся в процессе решения.

Однако для решения задачи о последовательном образовании концентраторов напряжений необходимо перестраивать текущую конечноэлементную сетку с учетом новой границы возникшего концентратора и изменения форм границ ранее образованных концентраторов (Рисунок 6).

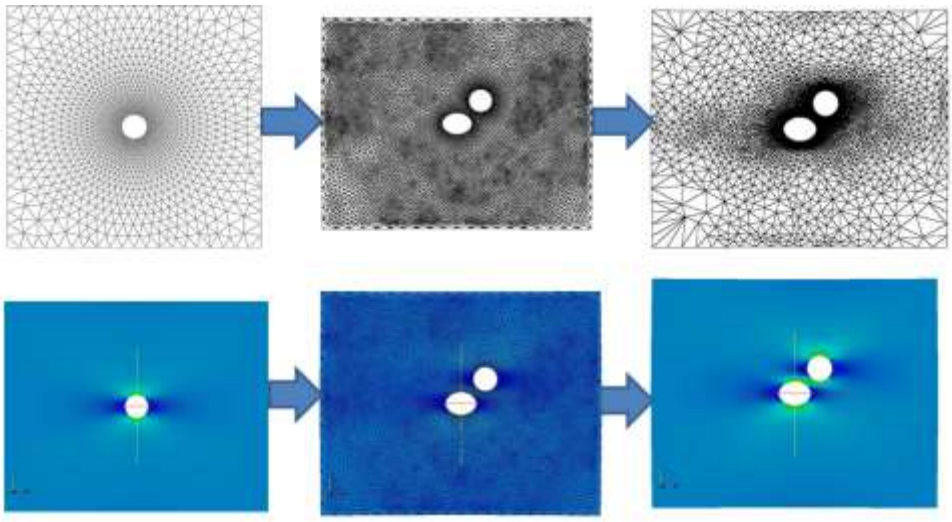


Рисунок 6 Адаптивное перестроение сетки в процессе решения задачи о пошаговом образовании полостей

Описание каждого элемента конечноэлементного разбиения содержит, помимо его геометрических параметров (например, координаты вершин) и их функций (площадь, длины ребер), ряд физических параметров, хранящих историю деформирования данного элемента, его упругие свойства, пористость материала элемента и другие.

При построении конечноэлементного разбиения может быть создан глобальный массив ребер данного разбиения. Каждое ребро массива хранит информацию о своих вершинах и элементах, которым данное ребро принадлежит. Таким образом, любой элемент разбиения будет хранить информацию о граничащих с ним элементах посредством своих ребер. Данное обстоятельство может быть использовано при построении линии одинакового уровня напряжений, проходящей через соседние элементы. Естественно, что при перестроении конечноэлементной сетки глобальный массив ребер разбиения вместе с сопутствующими ему ссылками должен быть пересчитан.

Помимо информации о ребрах, каждый элемент хранит также номер области, его содержащей, что позволяет определить, на каком этапе решения задачи (который определяется по номеру промежуточного состояния) возник данный элемент (или изменились его свойства в случае образования включения) вместе с охватывающей его областью. Физические свойства элемента характеризуются параметрами определяющего соотношения, например, пятью параметрами потенциала Мурнагана. При появлении пор внутри материала элемента [106,137] его осредненные упругие свойства (а соответственно и упругие параметры) меняются, причем для определения их новых значений могут быть использованы методики, позволяющие заменить пористый материал на соответствующий ему эффективный материал с теми же упругими свойствами (подробно данный вопрос рассмотрен в третьей главе). Данный набор параметров

характеризует элемент не только как часть сетки, покрывающей область, но и как часть физического тела, занимающего рассматриваемую область пространства.

Историю деформирования каждого элемента отражает его аффинор деформаций Ψ [158,195,220]. В простейшем случае (при отсутствии наложения деформаций) $\Psi = I + \nabla u$, где I– единичная матрица, u – вектор перемещений внутри элемента. При переходе от одного промежуточного состояния к другому меняется и аффинор деформаций $\Psi_{0,n+1} = \Psi_{0,n} \cdot \Psi_{n,n+1}$ [125, 150], где $\Psi_{k,n}$ - аффинор накопленных деформаций при переходе из k-го в n-ое состояние. Таким образом, образование нового концентратора напряжений (переход к следующему состоянию) требует, помимо перестроения конечноэлементной сетки и переноса параметров элементов со старой сетки на новую [131], также и обновления аффинора деформаций для каждого элемента с учетом накопленных в последнем состоянии деформаций. Для этого будем применять следующий алгоритм решения задач о последовательном образовании концентраторов напряжений в нагруженном теле при конечных деформациях для случая, когда форма концентраторов известна в момент образования:

- По заданным начальным и граничным условиям, решая краевую задачу для исходного тела, находим вектор перемещений u_1 из начального состояния в первое промежуточное, аффинор начальных деформаций $\Psi_{0,1}$ и форму тела в первом промежуточном состоянии.
- Далее в координатах первого промежуточного состояния решается задача об образовании первого концентратора напряжений. Решение этой задачи позволяет определить вектор перемещений u_2 из первого промежуточного состояния во второе, а, следовательно, и форму первого концентратора во втором промежуточном состоянии (Рисунок 7).

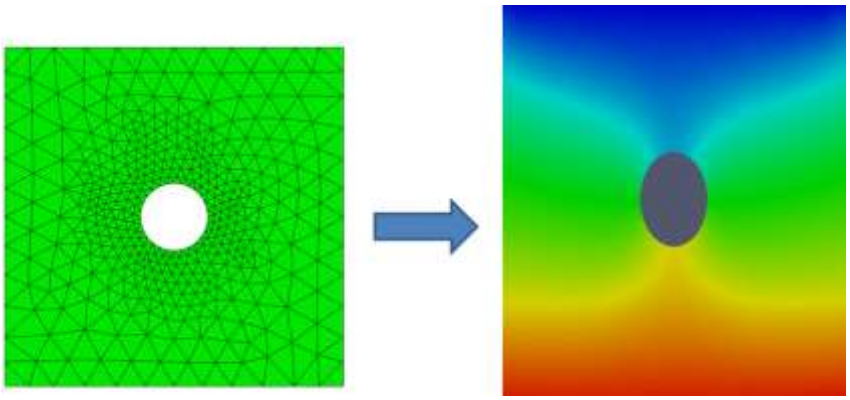


Рисунок 7 Решение задачи об образовании первого концентратора напряжений в координатном базисе первого промежуточного состояния

- Строится новая конечноэлементная сетка для области, занимаемой телом во втором промежуточном состоянии (с учетом намеченного контура второго концентратора напряжений). Задача об образовании первого концентратора напряжений решается в координатах второго промежуточного (актуального) состояния. Решение этой задачи позволяет определить аффинор деформаций $\Psi_{0,2}$ в координатах второго промежуточного состояния на сетке, которая потребуется на следующем этапе вычислений (Рисунок 8).

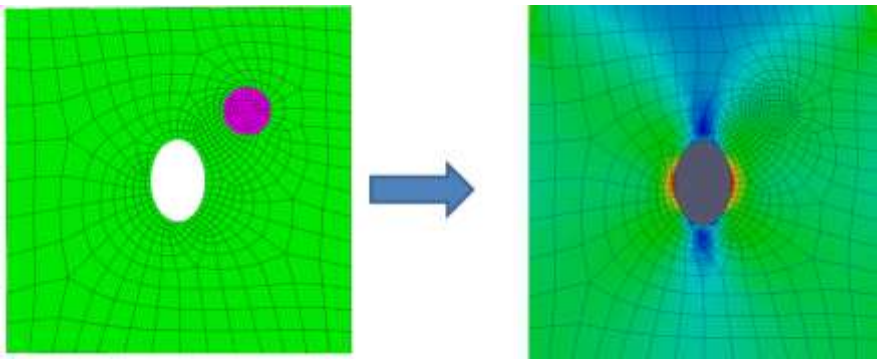


Рисунок 8 Решение задачи об образовании первого концентратора напряжений в координатном базисе второго промежуточного состояния

- Решается в координатах второго промежуточного состояния задача об образовании второго концентратора. Решение этой задачи позволяет определить вектор перемещений u_3 из второго промежуточного состояния в третье, а, следовательно, и форму первых двух концентраторов в третьем промежуточном состоянии (Рисунок 9).

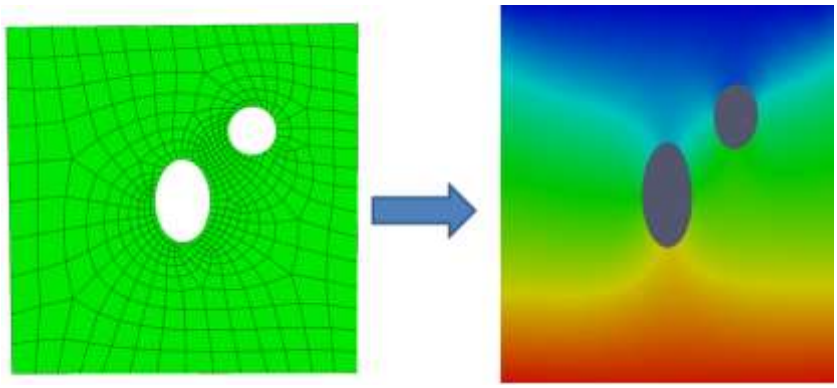


Рисунок 9 Решение задачи об образовании второго концентратора напряжений в координатном базисе второго промежуточного состояния

- Далее, если число концентраторов больше двух, вычисления могут быть продолжены по аналогичной схеме.

В связи с приведенным выше описанием возникает вопрос: зачем на промежуточных этапах вычислений дважды решать задачу об образовании каждого концентратора (например, задача

об образовании первого концентратора решается сначала в координатах первого промежуточного состояния, а затем - в координатах второго промежуточного состояния)? Дело в том, что полученное, например, на втором этапе вычислений решение задачи об образовании первого концентратора напряжений будет известно в координатном базисе первого промежуточного состояния. В то же время для решения задачи об образовании второго концентратора напряжений в координатном базисе второго промежуточного состояния необходимо знать представление компонент аффинора деформаций $\Psi_{0,2}$ в координатном базисе второго промежуточного состояния. А такое представление не может быть сразу найдено на втором этапе вычислений, поскольку его получение требует решения системы нелинейный уравнений, связывающих координаты произвольной точки тела в первом промежуточном состоянии с координатами этой же точки во втором промежуточном состоянии: $\overset{2}{r} = u_2(\overset{1}{r}) + \overset{1}{r}$, здесь $\overset{k}{r}$ - координаты Лагранжевой точки в *k*-м промежуточном состоянии. Например, при использовании изопараметрического метода спектральных элементов (рассмотренного во второй главе) вектора $u_2(\overset{1}{r}), \overset{1}{r}$ представляются в виде разложения по нелинейным базисным функциям формы элемента, где коэффициентами разложения выступают значения данных векторов в узлах Лагранжевой спектральноэлементной сетки. Соответственно данная задача сводится к решению нелинейной системы для определения значений функций форм в Лагранжевой точке с координатами $\overset{2}{r}$ во втором промежуточном состоянии. Найдя координаты этой же точки в первом промежуточном состоянии, можно определить значение аффинора накопленных деформаций в данной точке путем прямой подстановки координат в разложение аффинора по базисным функциям формы внутри спектрального элемента.

Численная дискретизация

Выпишем вариационную постановку краевой задачи теории наложения конечных деформаций с учетом физической и геометрической нелинейностей.

Неизвестными являются перемещения узлов КЭ сетки. Для сведения исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений используется метод Галеркина. Для простоты дальнейшего изложения ограничимся примером постановки и решения двумерной задачи об образовании концентратора напряжений в нагруженном теле [138, 146].

Рассмотрим произвольный треугольный элемент (Рисунок 10).

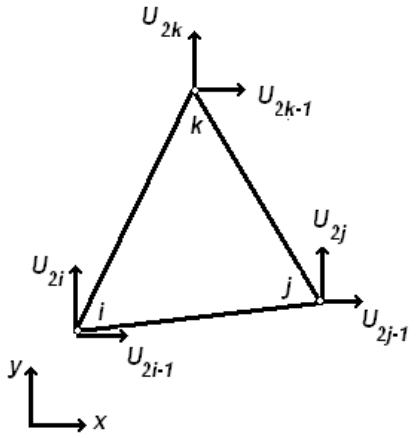


Рисунок 10 Треугольный симплекс элемент

Неизвестными на нем являются узловые перемещения $U_{2i}, U_{2i-1}, U_{2j}, U_{2j-1}, U_{2k}, U_{2k-1}$.

Перемещения внутри элемента задаются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u &= N_i U_{2i-1} + 0U_{2i} + N_j U_{2j-1} + 0U_{2j} + N_k U_{2k-1} + 0U_{2k} \\ \upsilon &= 0U_{2i-1} + N_i U_{2i} + 0U_{2j-1} + N_j U_{2j} + 0U_{2i-1} + N_k U_{2k} \end{aligned}; \begin{Bmatrix} u \\ \upsilon \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Возьмем, для определенности, уравнения, соответствующие постановке задаче об образовании в нагруженном теле концентратора напряжений, когда его форма задана в конечном состоянии (4-6). Запишем галеркинские уравнения для произвольной области D с границей Γ, соответствующие исходной дифференциальной постановке:

$$\iint_D N_i \cdot (\nabla \cdot \sigma_{0,n}) dS = 0$$

Преобразуем данное уравнение, используя формулу Грина [238,259]:

$$\iint_D N_i \cdot (\nabla \cdot \sigma_{0,n}) dS = \int_\Gamma \vec{n} \cdot N_i \cdot \upsilon_{0,n} d\Gamma - \iint_D (\nabla N_i) \cdot \sigma_{0,n} dS = 0$$

Представим интеграл по всей области как сумму интегралов по элементам разбиения:

$$\iint_D (\nabla N_i) \cdot \sigma_{0,n} dS = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\Delta_i} (\nabla N_i) \cdot \sigma_{0,n} dS$$

Таким образом, на каждом элементе мы можем записать с учетом вышеприведенных соотношений:

$$\iint\limits_{\Delta_m} \begin{pmatrix} \nabla N_i \\ \nabla N_j \\ \nabla N_k \end{pmatrix} \cdot \sigma_{0,n} dS = K_m \left(\begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \right),$$

где $K_m(U)$ - локальная матрица жесткости для *m*-го элемента, в общем случае являющаяся нелинейным оператором (вектором внутренних сил) относительно узловых перемещений. Подставляя выражение для перемещений на данном элементе (8) в формулы (7) и принимая за *u* и *v* суммарные перемещения из 0-го в n-ое состояние, получим представление аффинора деформаций $\Psi_{0,n}$ через узловые перемещения, по которому находим выражение для тензора деформаций $E_{0,n}$ через узловые перемещения. Далее находим тензор напряжений $\sigma_{0,n}$ как функцию неизвестных узловых перемещений.

Глобальная матрица жесткости (глобальный вектор внутренних сил в нелинейном случае) получается суммированием расширенных матриц для каждого элемента $K(U) = \sum_{i=1}^{N} K_i(U)$. Подобным же образом получается правая часть системы алгебраических (в общем случае, нелинейных) уравнений, равная сумме интегралов по границе на соответствующих элементах.

Если данный элемент является граничным, то добавляются граничные условия, в частном случае заданного по границе давления имеющие вид $\overset{n}{n} \cdot \sigma_{0,n} = -\overset{n}{n} P$, где P – скалярная величина (давление). Если контур свободен от нагрузок, то имеем следующее граничное условие $\overset{n}{n} \cdot \sigma_{0,n} = 0$. С учетом заданных граничных условий (6) получаем:

$$F = \sum_{m=1}^{L} \int_{\Gamma_m} \overrightarrow{n_m} \begin{pmatrix} N_j \\ N_k \end{pmatrix} P d\Gamma$$

Рассмотрим теперь, как будет выглядеть решение методом конечных элементов задачи об образовании в нагруженном теле концентратора напряжений, когда его форма задана в промежуточном состоянии (1-4).

Уравнение равновесия (геометрия тела и граничные условия известны в координатах 1-го промежуточного состояния):

$$\overset{1}{\nabla}\cdot\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\cdot\Psi_{1,2}\right]=0$$

Перепишем уравнение равновесия, используя метод Галёркина, в вариационной постановке:

$$\iint\limits_{D} N_i\left\{\overset{1}{\nabla}\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\,\Psi_{1,2}\right]\right\}=0 \qquad (9)$$

где N_i - функции формы. Далее преобразуем полученное выражение с помощью формулы Грина:

$$\iint\limits_{D}\left(\nabla N_i\right)\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\,\Psi_{1,2}\right]dS=\int\limits_{\Gamma}\overset{1}{n}\cdot N_i\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\,\Psi_{1,2}\right]d\Gamma \qquad (10)$$

Рассмотрим правую часть уравнения (6.4.10):

$$R=\int\limits_{\Gamma}\overset{1}{n}\cdot N_i\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\,\Psi_{1,2}\right]d\Gamma \qquad (11)$$

Выразим тензор обобщенных напряжений Пиолы-Кирхгофа через тензор истинных напряжений:

$$\overset{1}{\Sigma}_{0,2}=\left(1+\Delta_{0,2}\right)\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot\sigma_{0,n}\cdot\Psi_{1,2}^{-1} \qquad (12)$$

и подставим его в правую часть (11), в результате получим:

$$R=\int\limits_{\Gamma}\overset{1}{n}\cdot N_i\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\Delta_{0,2}\right)\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot\sigma_{0,n}\cdot\Psi_{1,2}^{-1}\cdot\Psi_{1,2}\right]d\Gamma \qquad (13)$$

$$R=\int\limits_{\Gamma}\overset{1}{n}\cdot N_i\left[\left(1+\Delta_{1,2}\right)\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot\sigma_{0,n}\right]d\Gamma \qquad (14)$$

Далее, т.к. граничные условия для тела в конечном состоянии, записанные в координатах промежуточного состояния, имеют вид (6):

$$\overset{n-1}{N}_n\cdot\overset{n-1}{\Sigma}_{0,n}\Big|_{\overset{n-1}{\Gamma}_n}=-P(1+\Delta_{0,n})\overset{n-1}{N}_n\cdot\Psi_{n-1,n}^{*-1}\cdot\Psi_{n-1,n}^{-1} \qquad (15)$$

Где P-приложенное к телу внешнее давление. Перепишем (15) для n=2

$$\overset{1}{n}\cdot\overset{1}{\Sigma}_{0,2}\Big|_{\overset{1}{\Gamma}}=-P(1+\Delta_{0,2})\overset{1}{n}\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot\Psi_{1,2}^{-1} \qquad (16)$$

Подставим полученное граничное условие в формулу (11)

$$R = \int_{\Gamma} -P(1+\Delta_{0,2})\overset{1}{n}\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot\Psi_{1,2}^{-1}\cdot N_i\left[\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\Psi_{1,2}\right]d\Gamma$$

$$R = \int_{\Gamma} -P\overset{1}{n}\cdot(1+\Delta_{0,2})\cdot\left(1+\Delta_{0,1}\right)^{-1}\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot N_i d\Gamma \qquad (17)$$

$$R = \int_{\Gamma} -P\overset{1}{n}\cdot(1+\Delta_{1,2})\cdot\Psi_{1,2}^{*-1}\cdot N_i d\Gamma$$

Видно, что формулы (14) и (17) идентичны, если тензор истинных напряжений будет задан на границе как $\sigma_{0,n} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$ для случая приложенного по границе давления.

Таким образом, в обоих случаях формулировки задачи теории многократного наложения больших деформаций с помощью МКЭ получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений: *K(U)=R*, где *U* – искомый вектор узловых перемещений. Ее решение находится методом Ньютона-Канторовича [138]. Для этого на каждой итерации данного метода находится производная оператора *K(U)* путем суммирования расширенных матриц Якоби $\frac{dK_m(U)}{dU}$ для каждого из элементов разбиения. $\frac{dK_m(U)}{dU}$ вычисляется в два этапа. На первом этапе вычисляется матрица производных $\frac{dK_m}{d\Psi_{i,j}}$, такой подход позволяет обобщить процедуру нахождения решения для различных определяющих соотношений. На втором этапе с использованием формул, полученных путем аналитического дифференцирования функций формы, вычисляется $\frac{d\Psi_{i,j}}{dU}$. Искомые производные $\frac{dK_m(U)}{dU}$ вычисляются по правилу дифференцирования сложной функции: $\frac{dK_m(U)}{dU} = \frac{dK_m}{d\Psi_{i,j}}\cdot\frac{d\Psi_{i,j}}{dU}$.

Модели и методы решения нестационарных задач наложения больших деформаций

В рассмотренных ранее постановках задач теории многократного наложения больших деформаций мы пренебрегали влиянием различных динамических эффектов, вызванных образованием концентраторов напряжений, приложением/снятием нагрузок и другими изменениями в напряженно-деформированном состоянии тела.

Физическая постановка динамической задачи об образовании концентратора напряжений в нагруженном теле [140, 583] такая же, как и для случая статической задачи, за

исключением того, что возникновение концентратора приводит к деформированию тела в динамическом режиме. Приведем в качестве примера механическую постановку задачи о динамическом образовании полостей. Пусть в нелинейно-упругом теле, находящемся в начальном (ненапряженном) состоянии, под воздействием внешних нагрузок возникли большие плоские статические деформации. Тело перешло в первое промежуточное состояние. Далее, в этом теле мысленно намечается замкнутая поверхность (будущая граница полости). Затем область, ограниченная этой поверхностью, мысленно удаляется. Под удалением можно понимать, например, “откол” одной части от другой или изменение свойств “удаляемой” части тела таким образом, что она не взаимодействует с оставшейся частью тела. Действие удаленной части тела на оставшуюся заменяется по принципу освобождаемости от связей силами, распределенными по данной поверхности. Это не приводит к изменению напряженно-деформированного состояния в оставшейся части тела. Далее предполагается, что эти силы, перешедшие в разряд внешних, изменяются, мгновенно или по заданному закону на большую величину, например, уменьшаются до нуля. Такое изменение поверхностных сил вызывает появление в оставшейся части тела дополнительных больших (по крайней мере, в окрестности вновь образованной граничной поверхности) деформаций. Эти деформации “физически” накладываются на уже имеющиеся начальные.

Образование полости вызывает динамические эффекты в оставшейся части тела. Далее, используя предложенную модель, можем продолжить «принудительное» образование полостей в заданные моменты времени (например, когда в центре полости достигнут максимум по той или иной комбинации компонент тензора напряжений или тензора деформаций).

Постановка задачи о динамическом образовании включения частично повторяет постановку задачи об образовании полости. Данная постановка задачи является частным случаем постановки задач, предложенной В.А. Левиным для задач теории многократного наложения больших деформаций [127,577] и развивает подход Эшелби [429] на случай конечных деформаций.

Пусть в нелинейно-упругом теле, находящемся в начальном (ненапряженном) состоянии, под воздействием внешних нагрузок возникли большие статические плоские начальные деформации. Тело перешло в первое промежуточное состояние. Далее в этом теле мысленно намечается замкнутая поверхность (будущая граница включения). Внутри части тела, ограниченной этой поверхностью, скачкообразно меняются механические свойства материала, что может привести к динамическим эффектам как во включении, так и в теле (матрице). В результате внутри образовавшегося включения и в оставшейся части тела возникают большие

деформации (по крайней мере, вблизи границы вновь образованного включения), которые накладываются на большие начальные деформации и напряжения, имеющиеся в теле.

Есть несколько моделей образования включения. Будем использовать следующую модель образования включения. Мысленно удаляем часть тела, ограниченную намеченной поверхностью, а ее действие на оставшуюся часть тела заменяем по принципу освобождаемости от связей силами, распределенными по этой поверхности. Такое действие не изменит напряженно-деформированное состояние оставшейся части тела. Затем полость, образованную удалением части тела, заполняем упругим материалом с другими свойствами. Считаем, что по поверхности включения действуют силы, противоположные силам, действующим по вновь образованной границе тела. Далее силы, действующие как по границе тела, образованной удалением его части, так и по границе включения, например, уменьшаются до нуля. Это вызывает возникновение больших (по крайней мере, в окрестности включения) деформаций и напряжений, которые накладываются на большие уже имеющиеся деформации.

При решении конкретных задач для упругого включения предполагается, что на границе тела (матрицы) и образованного включения заданы условия прилипания.

Образование жесткого включения происходит по той же схеме. При рассмотрении конкретной плоской задачи для случая начального однородного состояния тела до образования включения считается, что граница включения не деформируется.

Образование включения вызывает динамические эффекты как в оставшейся части тела (матрице), так и во включении. Далее, используя предложенную модель, можем продолжить образование включений и полостей в заданные моменты времени (например, когда в центре полости или включении достигнут максимум по той или иной комбинации компонент тензора напряжений или тензора деформаций). Так как образование включения происходит в теле, уже имеющем конечные деформации, и приводит к возникновению дополнительных деформаций, для решения задачи используется теория многократного наложения больших деформаций [127,578].

Решение задач о последовательном образовании $M \geq 0$ концентраторов напряжений осуществляется по следующему алгоритму:

- В координатах начального состояния (на момент времени $\tau_0 = 0$) решается задача о начальной эволюции тела под воздействием начальных напряжений. Постановка данной задачи включает соотношения для динамических задач, при k = 0 и n = 1. Для динамических задач используется следующий частный случай начальных условий:

$$u(t_0) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(t_0) = 0$$

Решение этой задачи позволяет найти вектор перемещений u_1 из состояния на момент времени $\tau_0 = 0$ в состояние на момент времени $\tau_1 > \tau_0$, когда будет образован первый концентратор напряжений, а следовательно, и границу тела на момент времени τ_1.

- Задача о начальной эволюции тела решается в координатах состояния на момент времени τ_1. Решение этой задачи позволяет определить аффинор деформаций $\Psi_{0,1}$, а также скорости v_1 на момент времени τ_1 для динамических задач, которые потребуются на следующем этапе вычислений.
- Решается в координатах состояния на момент времени τ_1 задача об образовании первого концентратора и дальнейшей эволюции тела до момента времени $\tau_2 > \tau_1$ образования второго концентратора. Постановка данной задачи включает соотношения для динамических задач, при k = 1 и n = 2. Для динамических задач используется следующий частный случай начальных условий:

$$u(t_1) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(t_1) = v_1$$

Решение этой задачи позволяет найти вектор перемещений u_2 из состояния на момент времени τ_1 в состояние на момент времени τ_2, а следовательно, и границу тела на момент времени τ_2.

- Задача об образовании первого концентратора и дальнейшей (до момента времени τ_2) эволюции тела решается в координатах состояния на момент времени τ_2. Решение этой задачи позволяет определить аффинор деформаций $\Psi_{0,2}$, а также скорости v_2 на момент времени τ_2 для динамических задач, которые потребуются на следующем этапе вычислений.
- Решается в координатах состояния на момент времени τ_2 задача об образовании второго концентратора и дальнейшей эволюции тела до момента времени $\tau_3 > \tau_2$ образования

третьего концентратора. Постановка данной задачи включает соотношения для динамических задач, при k = 2 и n = 3. Для динамических задач используется следующий частный случай начальных условий:

$$u(t_2) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(t_2) = v_2$$

Решение этой задачи позволяет найти вектор перемещений u_3 из состояния на момент времени τ_2 в состояние на момент времени τ_3, а следовательно, и границу тела на момент времени τ_3.

- Задача об образовании второго концентратора и дальнейшей (до момента времени τ_3) эволюции тела решается в координатах состояния на момент времени τ_3. Решение этой задачи позволяет определить аффинор деформаций $\Psi_{0,3}$, а также скорости v_3 на момент времени τ_3 для динамических задач, которые потребуются на следующем этапе вычислений.
- Далее, если число концентраторов больше двух, вычисления продолжаются по аналогичной схеме до момента τ_M образования M -го концентратора.
- Решается в координатах состояния на момент времени τ_M задача об образовании *M*-го концентратора и дальнейшей эволюции тела до момента времени τ_{RES}, в котором будут вычисляться результаты. Постановка данной задачи включает соотношения для динамических задач, при k = M и n = $M+1$. Для динамических задач используется следующий частный случай начальных условий:

$$u(t_M) = 0; \frac{\partial u}{\partial t}(t_M) = v_M$$

Решение этой задачи позволяет найти вектор перемещений u_{M+1} из состояния на момент времени τ_M в состояние на момент времени τ_{RES}, а следовательно, и границу тела на момент времени τ_{RES}.

- Задача об образовании M - того концентратора и дальнейшей (до момента времени τ_{RES}) эволюции тела решается в координатах состояния на момент времени τ_{RES}. Решение этой задачи позволяет определить аффиноры деформаций $\Psi_{0,M+1}$, тензор полных истинных напряжений $\sigma_{0,M+1}$, а также значения других тензорных характеристик напряжений и деформаций и их комбинации.

Отметим, что в данном алгоритме задача об образовании каждого концентратора решается дважды (например, задача об образовании первого концентратора решается сначала в координатах состояния на момент времени τ_1, а затем - в координатах состояния на момент времени τ_2). Это делается потому, что полученное, например, на третьем этапе вычислений решение задачи об образовании первого концентратора будет зависеть функционально от координат состояния на момент времени τ_1. В то же время для решения задачи об образовании второго концентратора в координатах состояния на момент времени τ_2 необходимо знать функциональную зависимость компонент аффинора деформаций $\Psi_{0,2}$ от координат состояния на момент времени τ_2, поэтому вводится дополнительный (в данном случае, четвертый) этап вычислений.

Приведем теперь систему дифференциальных уравнений и граничных условий, описывающих математическую постановку задачи в координатах текущего состояния [583, 584].

Уравнение движения:

$$\overset{n}{\nabla}\cdot[(1+\Delta_{0,n})^{-1}\sum\nolimits_{0,n+1}^{n}(t)\cdot\Psi_{n,n+1}(t)]-\rho_n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

Начальные условия:

$$u(0)=u_n;\frac{\partial u}{\partial t}(0)=v_n$$

Граничные условия:

$$(\overset{n}{N}_{n+1}(t)\cdot\overset{n}{\Sigma}_{0,n+1}(t)\Big|_{\Gamma^{n}_{n+1}(t)})\,|_{отв}=(1+\Delta_{0,n+1}(t))\,\overset{n}{P}_{n+1}(t)\cdot\Psi^{*-1}_{n,n+1}(t)\cdot\Psi^{-1}_{n,n+1}(t);$$

$$(\overset{n}{N}_{n+1}(t)\cdot\overset{n}{\Sigma}_{0,n+1}(t)\Big|_{\Gamma^{n}_{n+1}(t)})\,|_{матр}=(\overset{n}{N}_{n+1}(t)\cdot\overset{n}{\Sigma}_{0,n+1}(t)\Big|_{\Gamma^{n}_{n+1}(t)})\,|_{вкл};$$

$$(u(t)\,|_{\Gamma^{n}_{n+1}(t)})\,|_{матр}=(u(t)\,|_{\Gamma^{n}_{n+1}(t)})\,|_{вкл}$$

Определяющие соотношения для потенциала Мурнагана:

$$\overset{0}{\Sigma}_{0,n+1}(t)=\lambda(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t):I)I+2G\,\overset{0}{E}_{0,n+1}(t)+3C_3(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t):I)^2I+$$

$$+C_4(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t)^2:I)I+2C_4(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t):I)\,\overset{0}{E}_{0,n+1}(t)+3C_5(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t))^2$$

$$\overset{n}{\Sigma}_{0,n+1}(t)=(1+\Delta_{0,n+1}(t))\cdot\Psi^{*}_{n,n+1}{}^{-1}(t)\cdot\sigma_{0,n+1}(t)\cdot\Psi^{-1}_{n,n+1}(t)$$

$$\sigma_{0,n+1}(t)=(1+\Delta_{0,n+1}(t))^{-1}\Psi^{*}_{0,n+1}(t)\cdot\overset{0}{\Sigma}_{0,n+1}(t)\cdot\Psi_{0,n+1}(t)$$

$$E_{0,n+1}(t)=\frac{1}{2}(\Psi_{0,n+1}(t)\cdot\Psi^{*}_{0,n+1}(t)-I)$$

Геометрические соотношения:

$$1+\Delta_{0,n+1}(t)=\det\Psi_{0,n+1}(t)\qquad\Psi_{0,n+1}(t)=\Psi_{0,n}\cdot\Psi_{n,n+1}(t)$$

$$\Psi_{n,n+1}(t)=I+\overset{n}{\nabla}u(t)$$

$$\rho=\frac{\rho_0}{\left|\Psi_{0,n}\right|}$$

Решение представленной системы дифференциальных уравнений будем искать с помощью метода конечных элементов. Вариационную постановку исходных уравнений в частных производных получим с использованием методом Галеркина. С учетом граничных условий и применения формулы Грина [238] она принимает следующий вид:

$$\forall i:\int_{\Omega}N_i\cdot(\overset{n}{\nabla}\cdot[(1+\Delta_{0,n})^{-1}\overset{n}{\sum}_{0,n+1}(t)\cdot\Psi_{n,n+1}(t)]-\rho_n\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial u}{\partial t})d\Omega=0$$

$$\forall i:\int_{\Omega}N_i\cdot\overset{n}{\nabla}\cdot[(1+\Delta_{0,n})^{-1}\overset{n}{\sum}_{0,n+1}(t)\cdot\Psi_{n,n+1}(t)]d\Omega-\int_{\Omega}N_i\cdot\rho_n\frac{\partial^2u}{\partial t^2}d\Omega-\int_{\Omega}N_i\cdot\mu\frac{\partial u}{\partial t}d\Omega=0$$

$$\forall i:\int_{\Omega}[N_i\cdot\rho_n\frac{\partial^2\vec{\imath}}{\partial t^2}+N_i\cdot\mu\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla N_i\cdot(1+\Delta_{0,n})^{-1}\cdot\overset{n}{\Sigma}_{0,n+1}(t)\cdot\Psi_{n,n+1}(t)]d\Omega-\int_{\Gamma}N_i\cdot(1+\Delta_{n,n+1}(t))\,\overset{n}{P}_{n+1}(t)\cdot\Psi^{*-1}_{n,n+1}(t)d\Gamma=0$$

здесь Ω - область, занимаемая телом, N_i - функция формы, $\vec{\imath}$ - нормаль к границе тела Γ.

Аппроксимация неизвестных перемещений $\vec{\imath}$ функциями формы [231, 792] запишется следующим образом:

$\vec{u}(\cdot)$ $\vec{u}(\cdot)$ $\sum_{k=1} N_k \vec{u}_k(\cdot)$, N_k - функции формы, $\vec{u}_k(\cdot)$ - неизвестные узловые перемещения. После подстановки данных разложений в вариационную постановку получаем следующую систему уравнений:

$$M \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + C \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + K(\vec{u}, \ldots \vec{u}, \ldots \qquad (18)$$

Здесь $\vec{u}$ - вектор неизвестных узловых перемещений;

$M = \int_{\Omega} N^T \cdot \rho_n \cdot N d\Omega - \textit{матрица масс};$

$C = \int_{\Omega} N^T \cdot \mu \cdot N d\Omega - \textit{матрица демпфирования};$

$K(\vec{u}(\cdot)) \int_{\Omega} \ldots_{0,n} \ldots_{0,n+1}(\ldots \vec{u}(\cdot)) \ldots_{n,n+1}(\ldots \vec{u}(\cdot)) \ldots$ *ператор) жесткости*;

$F(\vec{u}(\cdot)) \ldots (\ldots \vec{u}(\cdot)))_{n+1}(\cdot) \ldots^{1}_{n,n+1}(\nabla \vec{u}(\cdot)) \ldots$ *вектор нагрузок*.

N - вектор, составленный из функций формы N_k.

В случае закона демпфирования Рэлея [29] матрица демпфирования может быть записана в следующем виде:

$$[C] = \alpha[M] + \left(\beta + \frac{2}{\Omega}\xi\right)[K] + \sum_{j=1}^{N_m}[\alpha_j^m[M_j]] + \sum_{j=1}^{N_m}\left[\left(\beta_j^m + \frac{2}{\Omega}\xi_j^m\right)[K_j]\right] + \sum_{k=1}^{N_e}[C_k]$$

α- демпфирование матрицы масс;

β- демпфирование матрицы жесткости;

ξ- конструкционное демпфирование;

α_j^m- коэффициент демпфирования матрицы масс j-го материала;

β_j^m- коэффициент демпфирования матрицы жесткости j-го материала;

ξ_j^m- конструкционное демпфирование j-го материала;

C_k- матрица демпфирования k-го элемента;

N_m- количество материалов с заданным демфированием;

N_e- количество элементов с заданным демпфированием.

Заметим, что нелинейность в полученной системе уравнений (18) присутствует только по самим перемещениям, а не по их производным по времени. Данное обстоятельство позволяет применять хорошо известные методы решения динамических задач линейной теории упругости. Для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений будем использовать дискретизацию по времени по методу SS22 [787]. Данный метод является методом

второго порядка точности по времени. В [791] также рассматривается возможность применения аналогичного по своим характеристикам метода GN22.

Предположим, что нам известно решение задачи на n-м шаге по времени - $\vec{u}_n$. Тогда на (n+1)-м шаге будем искать его в следующем виде:

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \frac{d\vec{u}_n}{dt}\tau + \alpha \cdot \frac{\tau^2}{2}, \tag{19}$$

$\tau = t_{n+1} - t_n$, α - неизвестный вектор-поправка.

Подставляя данное представление в (18) и записывая его для некоторого момента времени в промежутке от t_n до t_{n+1}, получаем

$$\begin{aligned} &M \cdot \alpha + K(\vec{u}_{n+1}, \frac{d\vec{u}_{n+1}}{dt}, \frac{\tau^2}{2} \cdot \alpha) - f = 0, \\ &\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \theta_1 \tau \frac{d\vec{u}_n}{dt} \end{aligned} \tag{20}$$

После решения данной системы нелинейных уравнений (20) методом Ньютона-Канторовича и нахождения α находим $\vec{u}_{n+1}$, $\frac{d\vec{u}_{n+1}}{dt}$ по формулам (19). Безусловная устойчивость данного метода гарантирована при $1 \geq \theta_2 \geq \theta_1 \geq \frac{1}{2}$ [791]. В случае явной схемы ($\theta_2 = 0$) шаг интегрирования по времени выбирается исходя из условия Куранта - значение, равное отношению минимального характерного размера элемента к максимальной скорости распространения упругой волны $v = \sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}}$ [234]. Стоит отметить, что в случае нелинейной связи между напряжениями и деформациями скорости упругих волн будут, в отличие от линейной теории упругости, величинами, зависящими от уровня накопленных в теле деформаций, что при использовании явной схемы требует пересчета шага по времени.

Изложенный подход позволяет моделировать развитие дефектов (повреждений) различной природы, возникающих и развивающихся в нагруженном теле при конечных деформациях с учетом динамических эффектов. Этот подход развивает модели, предложенные В.А. Левиным и Е.М. Морозовым [148]. При наличии динамических критериев прочности (для конечных деформаций) результаты решения задач такого типа и результаты решения задач о принудительном нестационарном образовании включений в нагруженных телах могут быть использованы в задачах теории прочности.

1.4 Результаты решения модельных задач

В данном параграфе рассматриваются результаты решения задач, постановки и методы решения которых приведены в предыдущих параграфах. Приводится ряд модельных задач о возникновении концентраторов напряжений в нагруженных телах, решения которых найдены методом конечных элементов. Подробно рассматривается задача о возникновении и росте зоны предразрушения вблизи вершины носика эллиптической полости. Приводятся и анализируются зависимости параметров напряженно-деформированного состояния от материала тела и образуемых включений. Анализируется влияние нелинейных эффектов и зависимость получаемого решения от размеров конечноэлементной сетки.

Одновременное образование эллиптического и кругового отверстий в нагруженном теле

Приведем результаты решения плоской задачи об одновременном образовании в нагруженном теле, механические свойства которого описываются определяющим соотношением Мурнагана со следующими параметрами

$\lambda / G = 2.1, C_3 / G = -0.07, C_4 / G = -0.38, C_5 / G = 0.34, G = 0.186$, эллиптического и кругового отверстий (Рисунок 11).

Отношения полуосей эллипса 10:1, радиус отверстия – 1. К телу приложена нагрузка в виде одноосного растяжения вдоль оси OY величиной $p = 0.015G$

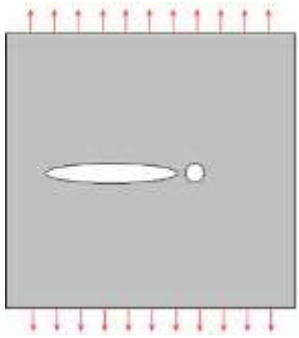


Рисунок 11 Диаграмма нагружения

На Рисунок 12 приведено поле компоненты тензора истинных напряжений σ_{22} / G.

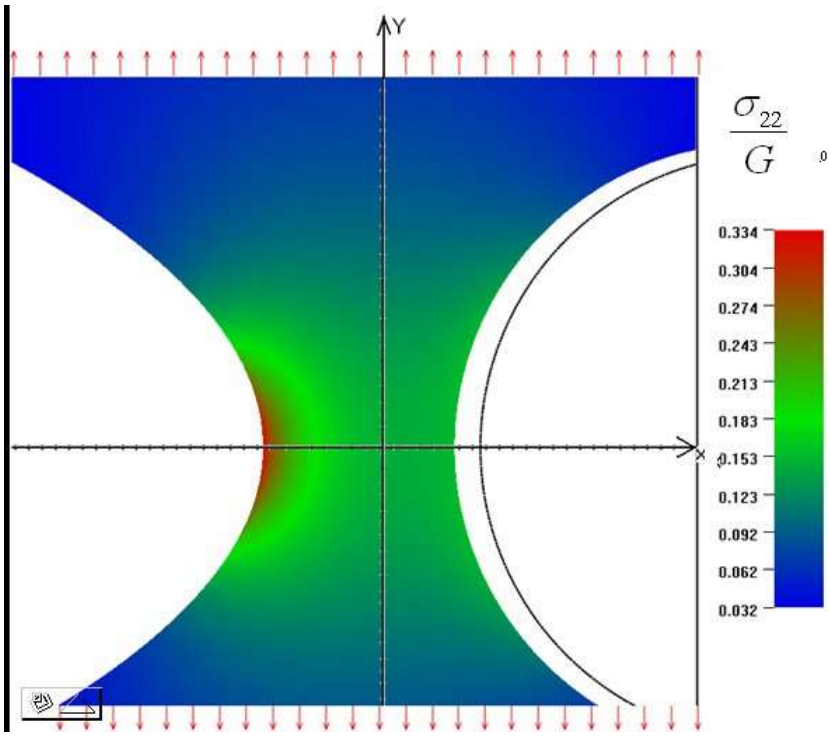


Рисунок 12 Распределение компоненты тензора истинных напряжений σ_{22}/G

На Рисунок 13 приведен график изменения вдоль оси X первой главной компоненты тензора истинных напряжений.

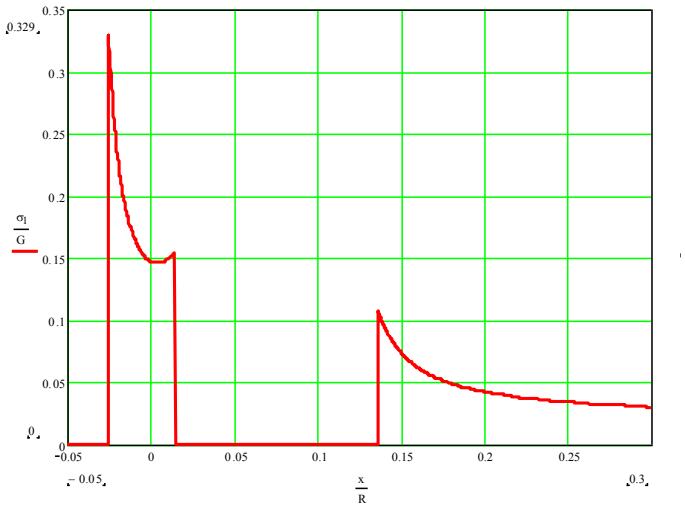


Рисунок 13 График изменения первой главной компоненты тензора истинных напряжений

Последовательное образование эллиптического и кругового отверстий в нагруженном теле

Приведем теперь результаты решения плоской задачи о последовательном образовании в предварительно нагруженном теле эллиптического и кругового отверстий (Рисунок 14). Свойства материала тела описываются потенциалом Мурнагана:

$\lambda / G = 2.1, C_3 / G = -0.07, C_4 / G = -0.38, C_5 / G = 0.34, G = 0.186$.

Отношения полуосей эллипса 10:1, радиус отверстия – 1.Одноосное начальное растяжение вдоль оси OYc нагрузкой $p = 0.015G$

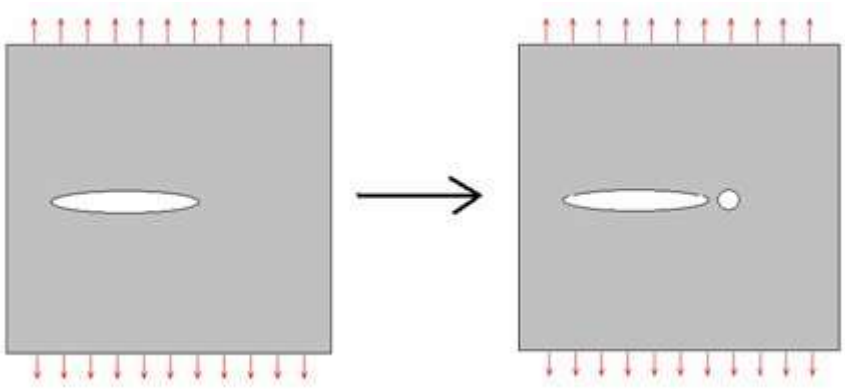


Рисунок 14 Диаграмма нагружения

На Рисунок 15 приведено поле распределения компоненты тензора истинных напряжений σ_{22} / G:

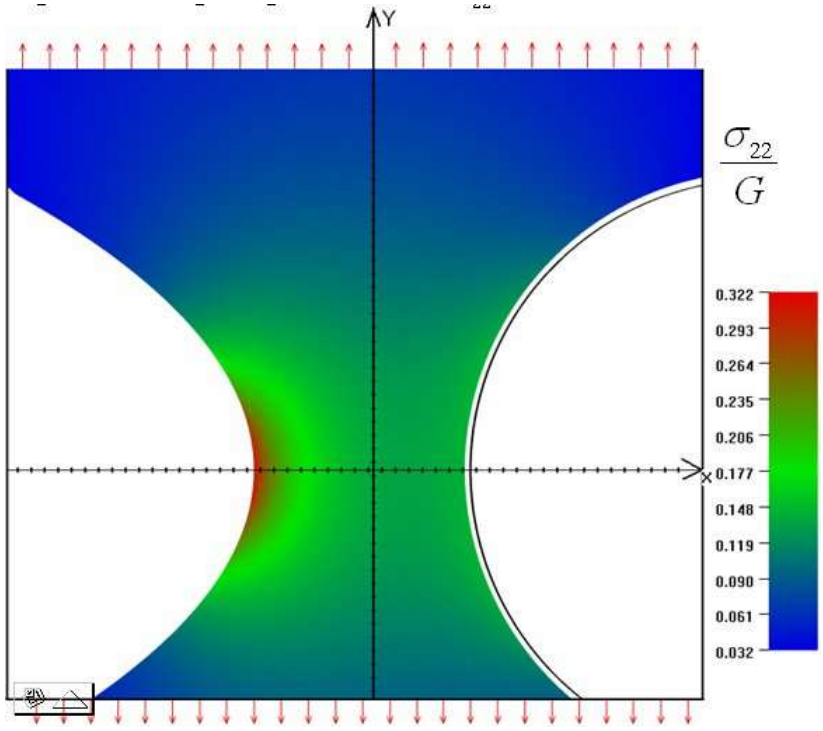


Рисунок 15 Распределение компоненты тензора истинных напряжений σ_{22} / G

На Рисунок 16 приведен график изменения вдоль оси X первой главной компоненты тензора истинных напряжений.

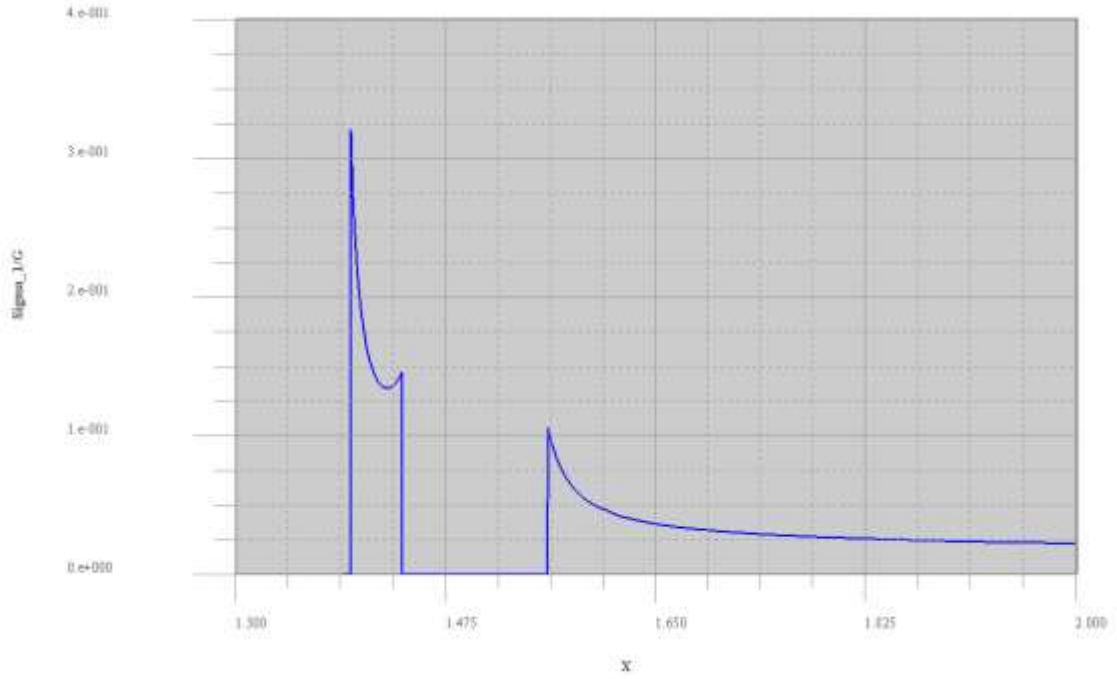


Рисунок 16 График изменения первой главной компоненты тензора истинных напряжений

Отметим снижение уровня концентрации напряжений по отношению к случаю одновременного образования отверстий, рассмотренному ранее.

Представляется интересным также проанализировать зависимость концентрации напряжений в данной задаче от расстояния между концентраторами напряжений (Рисунок 17).

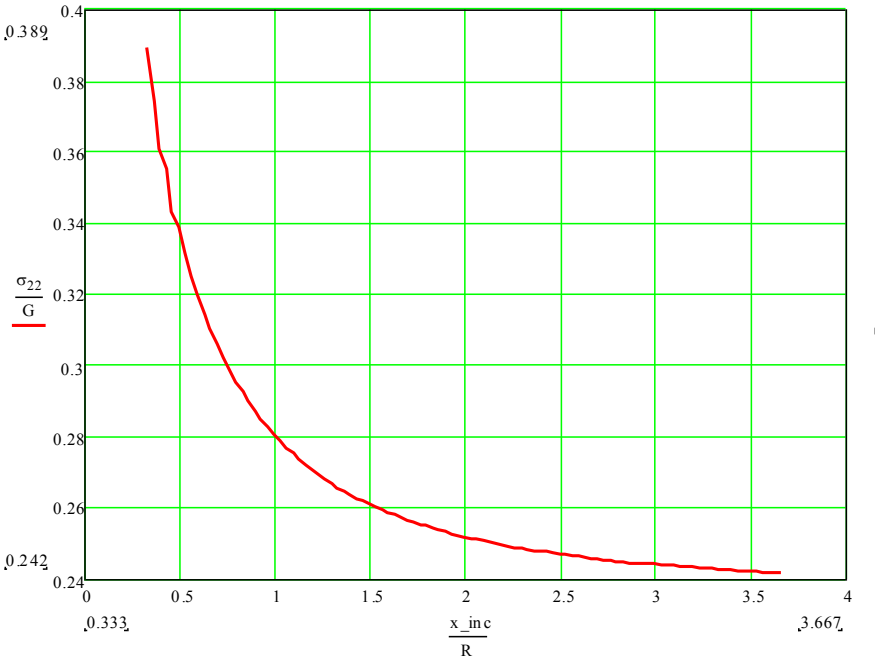


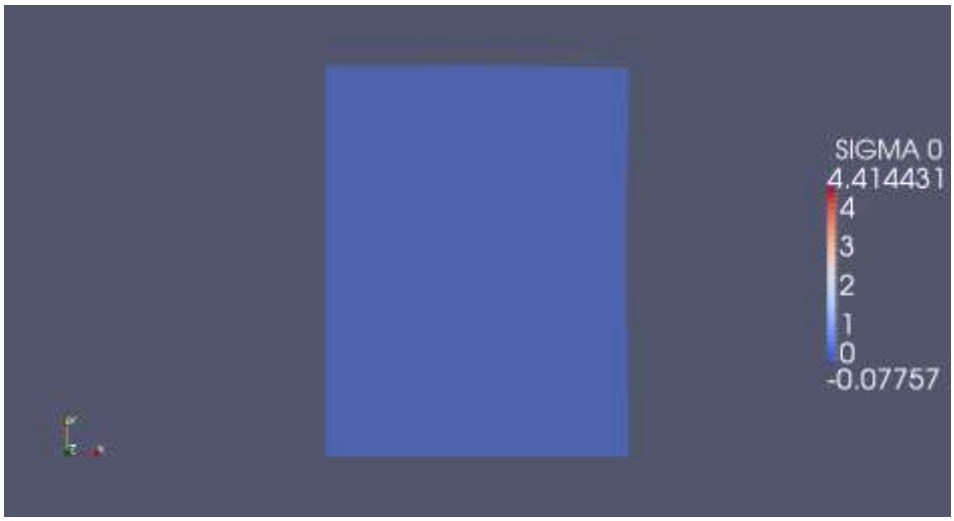
Рисунок 17 Изменение максимального значения компоненты σ_{22}/G в зависимости от расстояния между отверстиями. Координата x отнесена к радиусу кругового отверстия.

Задача о последовательном образовании двух круговых отверстий, форма которых задана в конечном состоянии

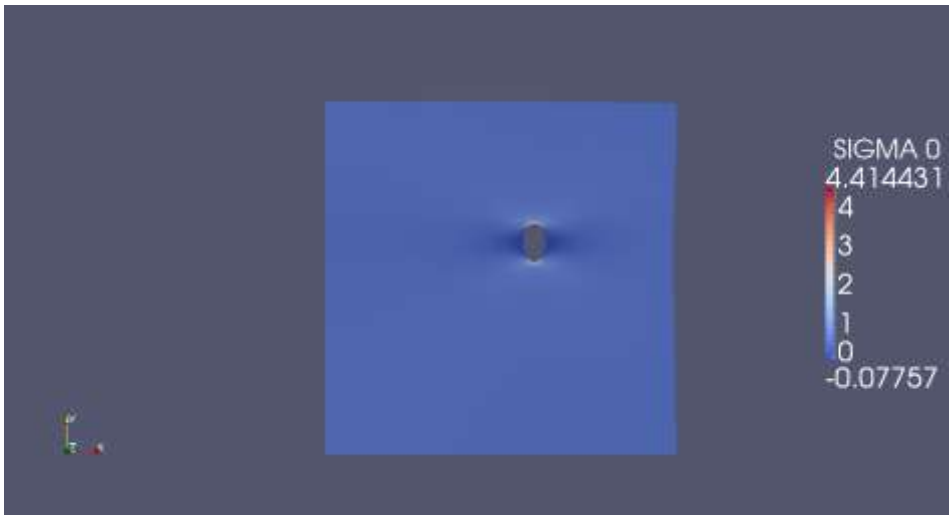
Данная задача является модельной задачей о последовательном возникновении дефектов в нагруженном теле, форма которых задана в конечном состоянии, т.е. отверстия стали круговыми после деформирования, вызванного последовательным наложением конечных деформаций. Отметим, что постановка и решение такого класса задач возможны только в рамках теории многократного наложения больших деформаций [127].

В нагруженном теле $\sigma_{11}/G=0.5$, $\sigma_{22}/G=0$ (одноосное растяжение) из материала Мурнагана ($\lambda=1.44$, $G=0.74$, $C_3=0$, $C_4=0$, $C_5=0$) последовательно образуются два отверстия, принимающих в конечном состоянии круговую форму. На рисунках ниже приведены распределения первой главной компоненты тензора истинных напряжений в различных состояниях.

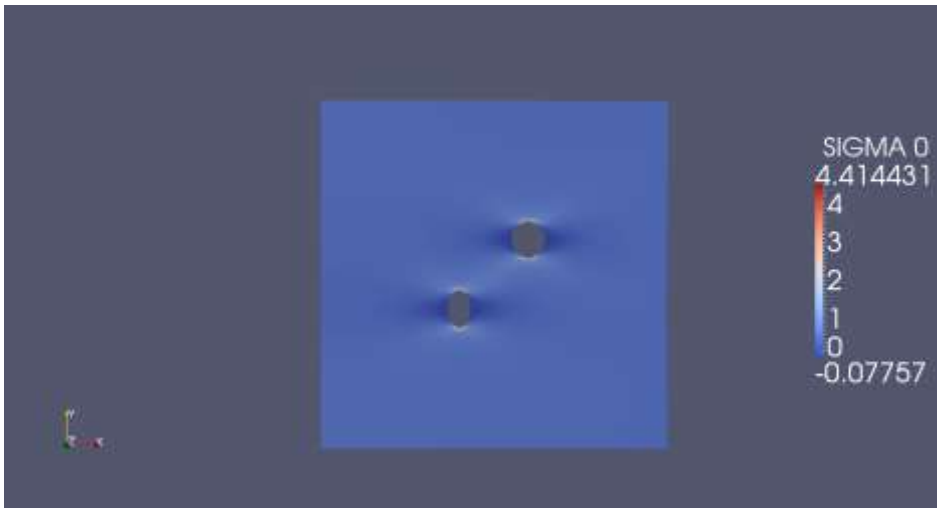
Первое промежуточное состояние (однородное напряженно-деформированное состояние пластины до образования первого отверстия):



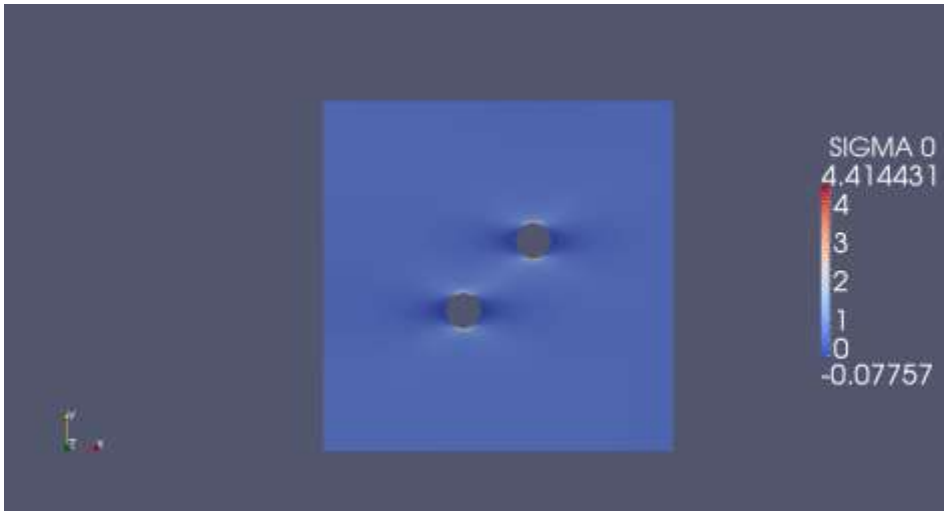
Второе промежуточное состояние (после образования первого отверстия):



Третье промежуточное состояние (после образования второго отверстия):



Конечное состояние:



На последнем рисунке видно, что отверстия в конечном состоянии стали круговыми, как и требовалось граничными условиями данной задачи.

Задача о распаде начального разрыва

Рассмотрим прямоугольную упругую пластину с отношением сторон 1:20, закрепленную шарнирами, как показано на Рисунок 18. Пластина состоит из 2-х частей с разрывными внутренними деформациями на границе между частями. Одна часть недеформирована, другая нагружена растягивающей нагрузкой вдоль горизонтальной оси (в этой части есть собственные деформации). В начальный момент времени нагрузка мгновенно снимается. Система выходит из состояния равновесия и по пластине из ее центра начинают распространяться две волны: налево - волна нагружения, направо - волна разгрузки.



Рисунок 18 Схема закрепления пластины

Материал пластины описывается потенциалом Мурнагана ($\lambda = 0.39$, $G = 0.186$, $C_3 = -0.013$, $C_4 = -0.07$, $C_5 = 0.063$). Плотность материала $\rho = 1$.

Рассматривались различные величины начального нагружения правой половины пластины $\sigma_{xx} = 0.1G, G, 2.5G$.

На Рисунок 19 изображена зависимость скоростей волн нагрузки и разгрузки от величины начального нагружения.

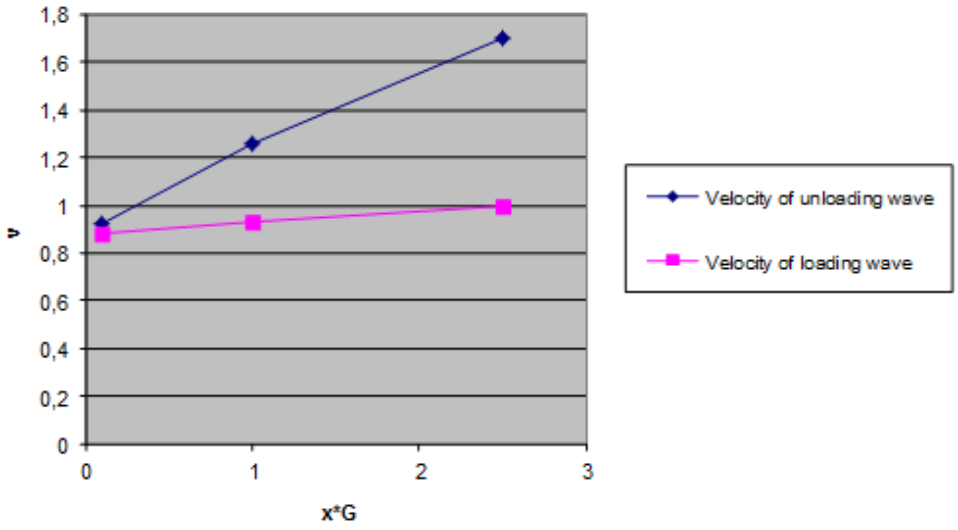
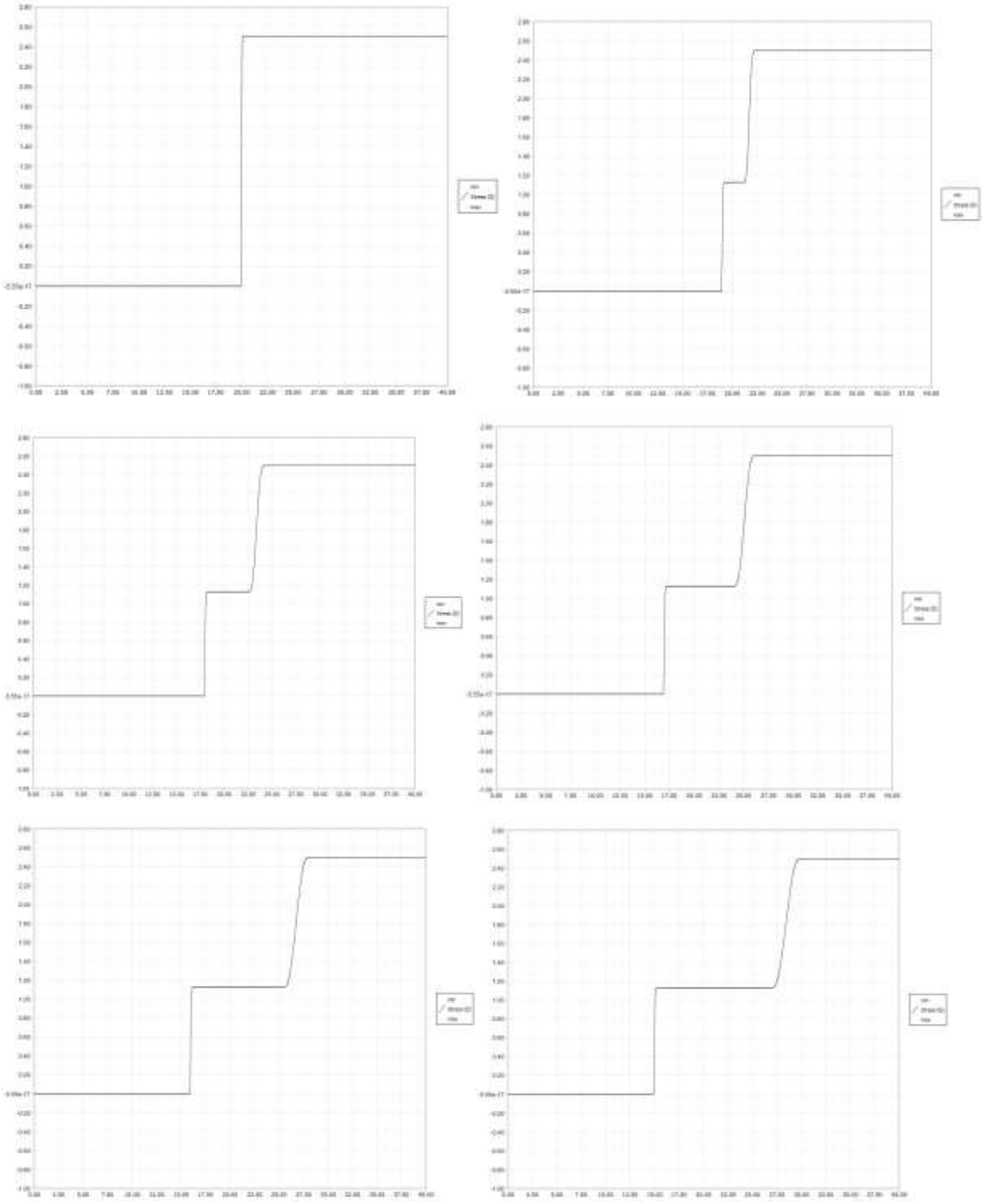


Рисунок 19 Зависимость скоростей волн нагрузки и разгрузки от величины начального нагружения

Как и следовало ожидать, разница между скоростями волн увеличивается с ростом начальной нагрузки ввиду зависимости скоростей волн от величины начального нагружения в случае нелинейно упругого материала с начальными деформациями.

На рисунках ниже изображено изменение компоненты тензора напряжений σ_{xx} вдоль средней линии пластины в различные моменты времени для случая начальной растягивающей нагрузки 2.5G.

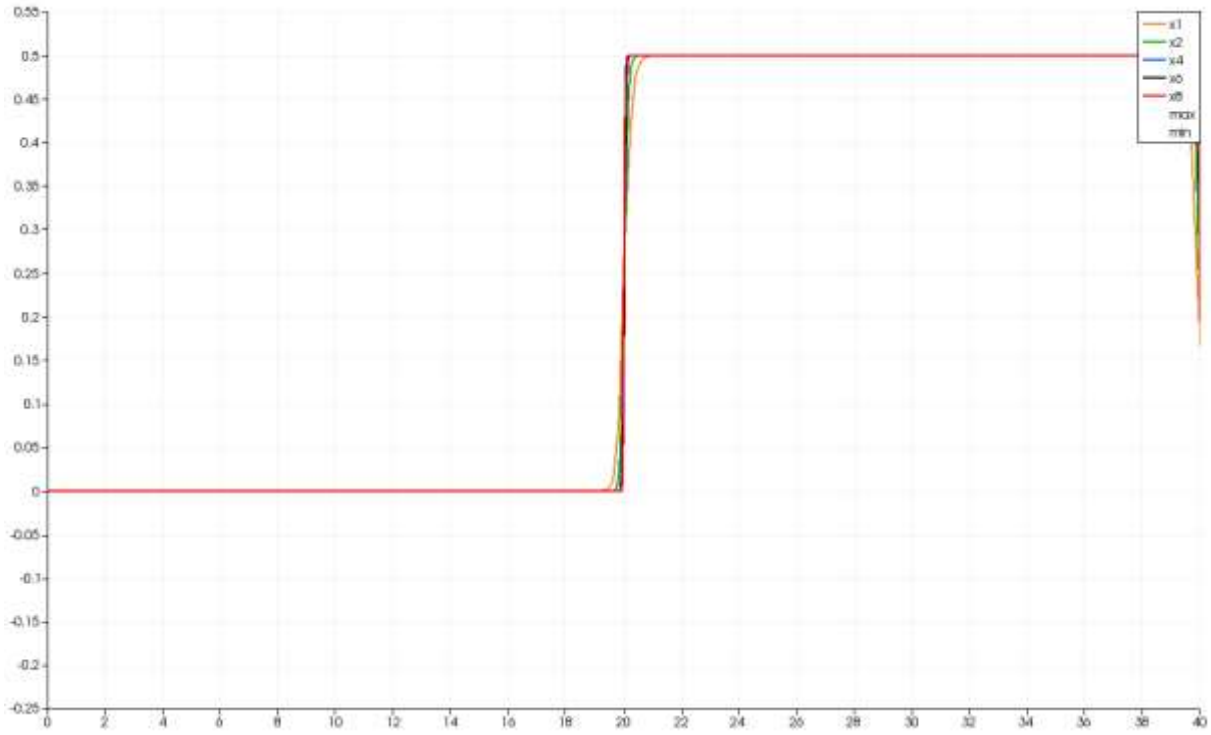


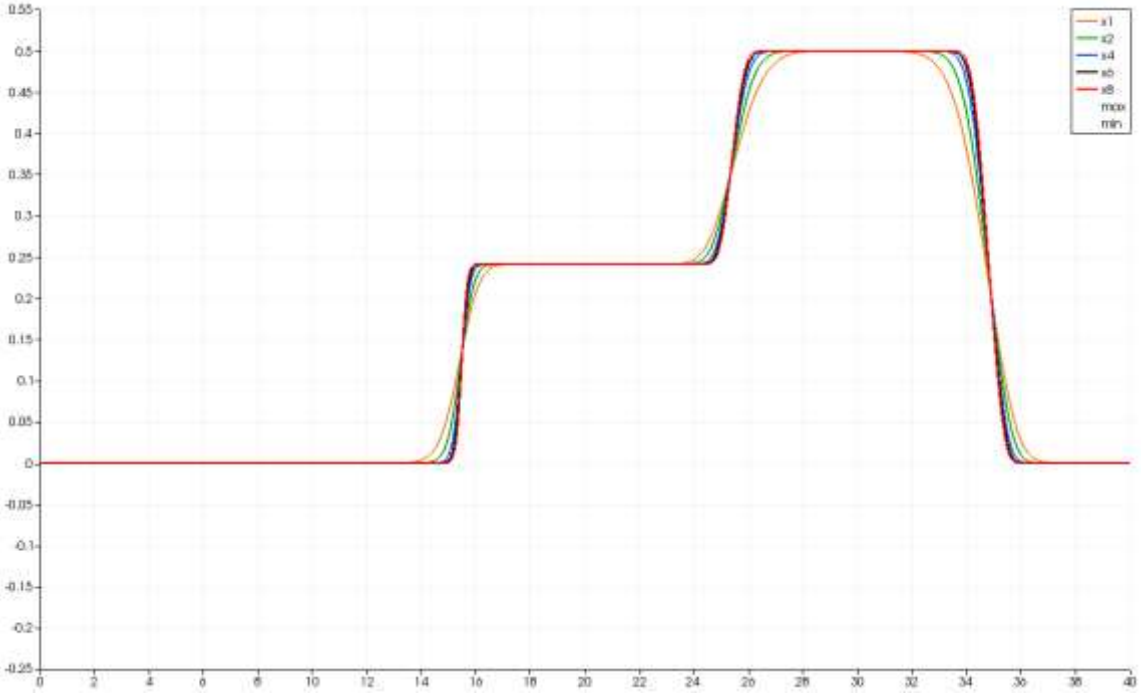
Для проверки результатов численного решения данной задачи приведем серию расчетов на численную сходимость. Было проведено 5 расчетов с постепенно уменьшающимся шагом по времени и пространству.

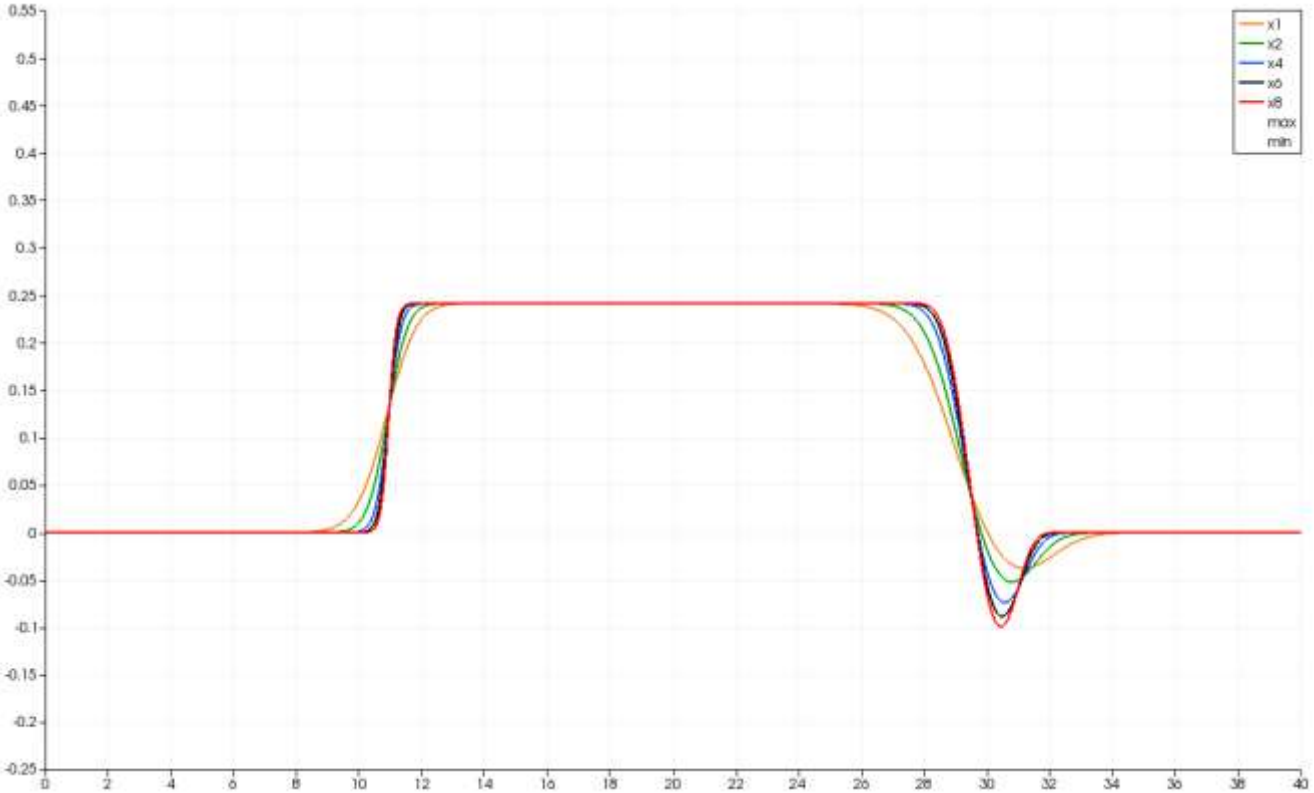
Решение	Количество точек на длинной стороне	Шаг по времени

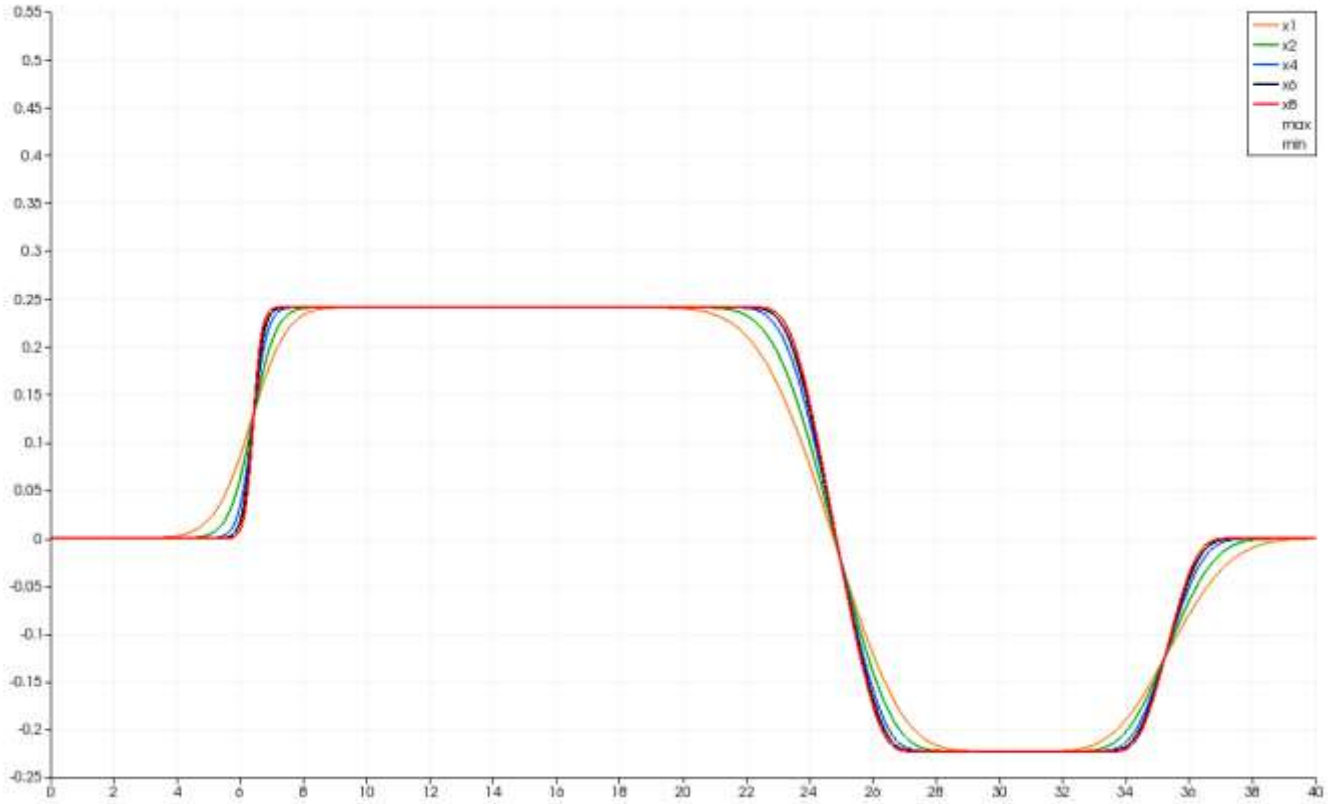
x1	400	0.2
x2	800	0.1
x4	1600	0.05
x6	2400	0.033
x8	3200	0.025

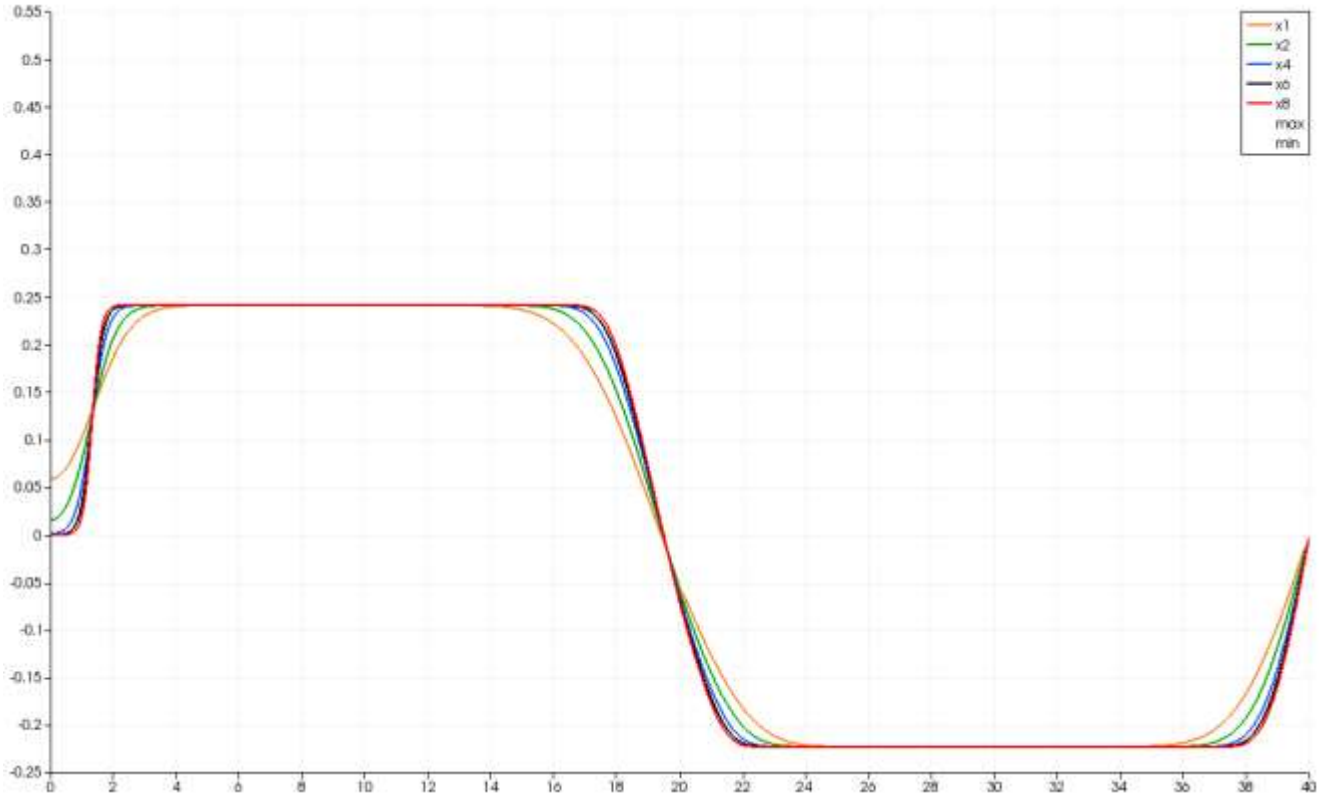
На рисунках ниже изображено изменение компоненты σ_{xx} тензора истинных напряжений вдоль средней линии пластины в различные моменты времени, полученное из численных решений на различных конечноэлементных сетках.




x1
x2
x4
x6
x8
max
min


x1
x2
x4
x6
x8
max
min



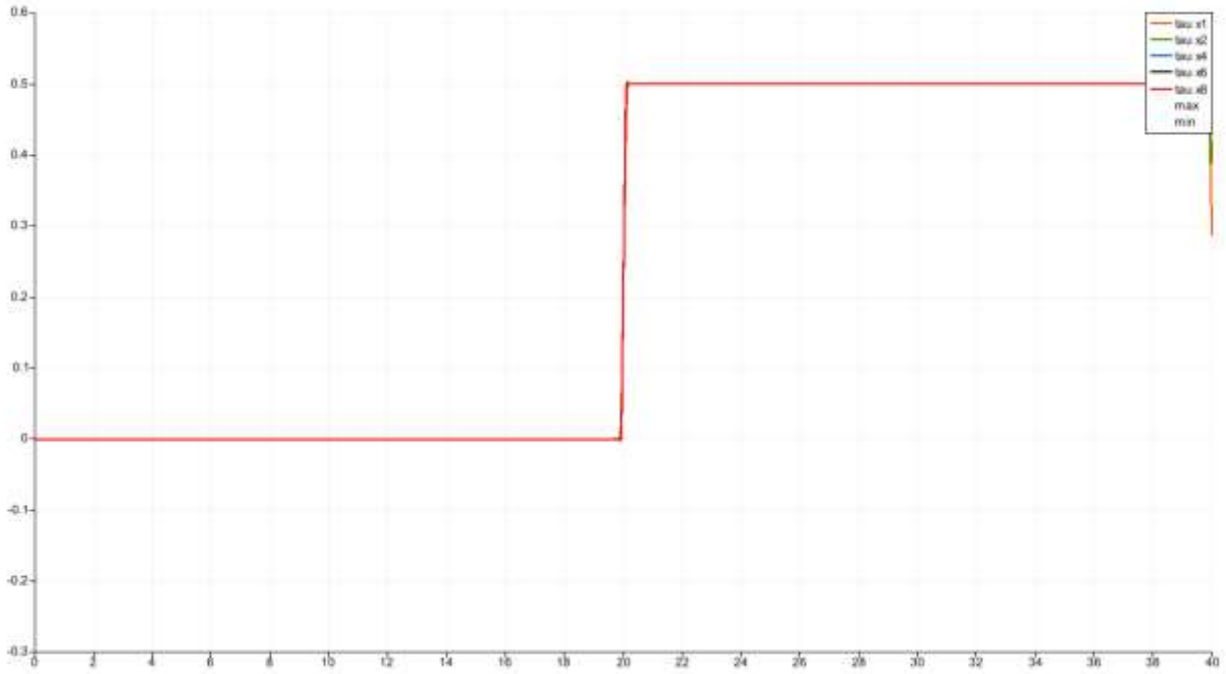


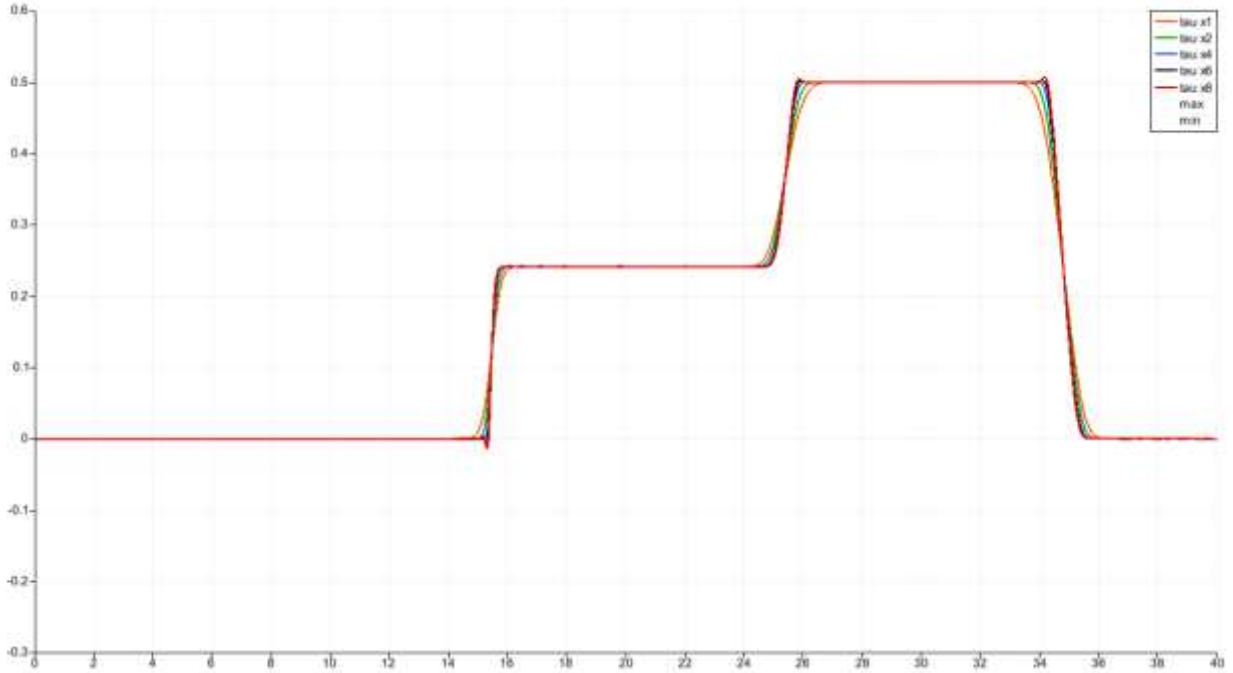
Из приведенных графиков видно, что черная и красная линии, которые соответствуют самому подробному разбиению, практически накладываются друг на друга, что свидетельствует о наличии сеточной сходимости по пространству.

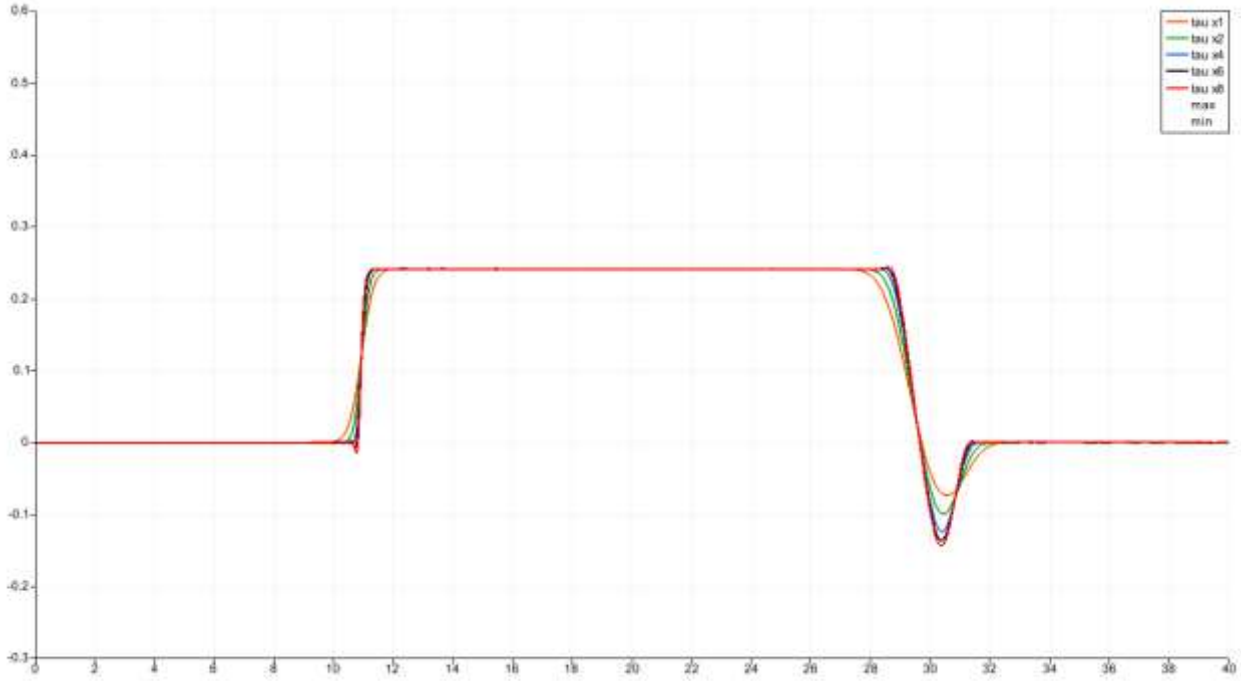
Для оценки численной сходимости по времени приведем 5 расчетов с постепенно уменьшающимся шагом по времени и постоянным шагом по пространству.

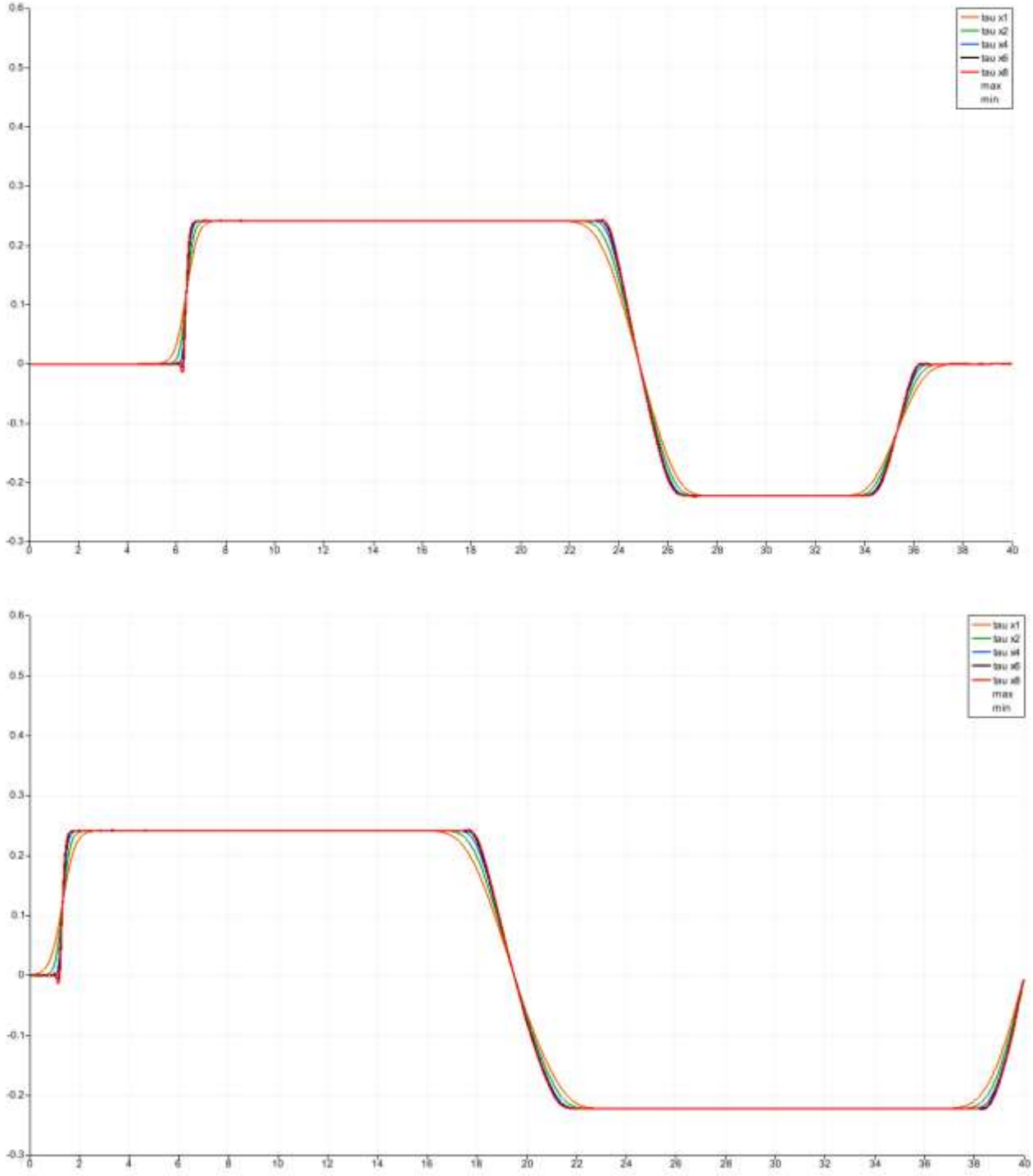
Решение	Количество точек вдоль пластины	Шаг по времени
tau x1	1600	0.05
tau x2	1600	0.025
tau x4	1600	0.0125
tau x6	1600	0.0083
tau x8	1600	0.00625

На рисунках ниже изображено изменение компоненты σ_{xx} тензора истинных напряжений вдоль средней линии пластины в различные моменты времени, полученное из численных решений для различных шагов дискретизации по времени.




tau x1
tau x2
tau x4
tau x6
tau x8
max
min


tau x1
tau x2
tau x4
tau x6
tau x8
max
min



Как и ранее, отметим, что черная и красная линии, которые соответствуют минимальным шагам по времени, практически накладываются друг на друга, что свидетельствует о наличии сходимости по времени.

Задача о динамическом образовании двух круговых отверстий и возникновении включений в нагруженном теле

Рассматриваемая задача является модельной задачей о возникновении дефектов в нагруженном теле, при динамическом воздействии и при конечных деформациях. Отметим что постановка таких задач, как и ранее, осуществляется на базе теории многократного наложения больших деформаций [127].

В нагруженном теле $\sigma^{\infty}_{0,l_{11}}$ /G=0, $\sigma^{\infty}_{0,l_{22}}$ /G=p, p/G=0.1 (одноосное растяжение) из материала Мурнагана (λ /G =2.1, C_3/G =-0.07, C_4/G =-0.37, C_5/G=0.34) одновременно образуются два круговых (в момент образования) отверстия $R_1=R_2$. Координаты (здесь и далее отнесены к R_1) центров отверстий $x^1{}_1$=-1.5, $x^1{}_2$=0; $x^2{}_1$=1.5, $x^2{}_2$=0, то есть линия, соединяющая их центры, перпендикулярна нагрузке, расстояние между центрами h/R_1=3 (Рисунок 20). Образование отверстий приводит в теле к нестационарным эффектам (так как нагрузки по контурам образуемых отверстий снимаются «мгновенно») и перераспределению конечных деформаций (Рисунок 21).

Далее при прохождении волны через точку $x^3{}_1$ =0, $x^3{}_2$=2 (координаты отнесены к R_1) образуется круговое (в момент образования) включение R_3= R_1 (Рисунок 22) из материала Мурнагана (λ /G_1=2.24, G/G_1 =2.56, $C3/G_1$=-1.96, C_4/G_1=3.61, C_5/G_1=-11.13 и G/G_1=0.39**)**. Образование включения приводит в теле к новым динамическим эффектам и перераспределению конечных деформаций (Рисунок 23).

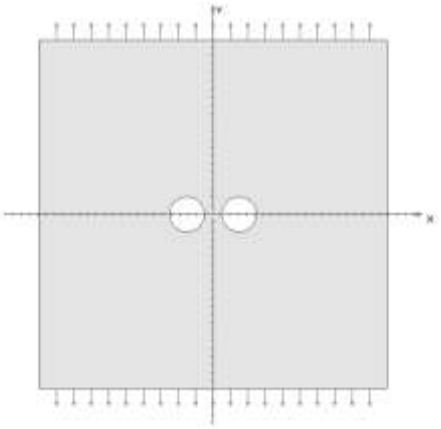


Рисунок 20 Диаграмма нагружения в момент образования отверстий

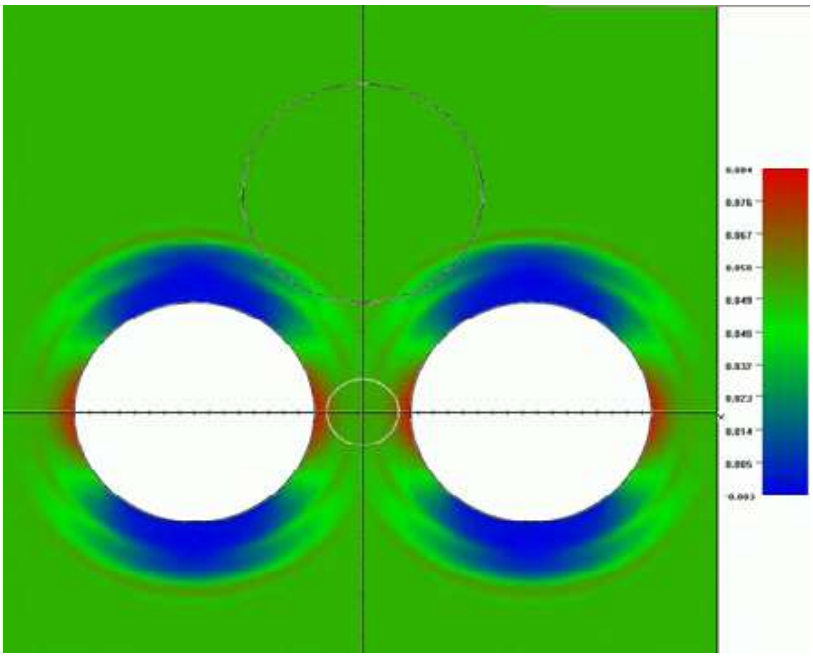


Рисунок 21 Распределение поля полных истинных напряжений. Белые линии указывают контур будущих включений.

Далее показано распределение первой главной компоненты тензора истинных напряжений в момент образования включения.

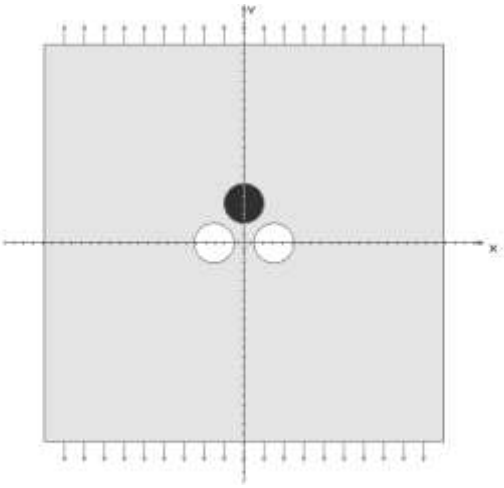


Рисунок 22 Диаграмма нагружения в момент образования включения

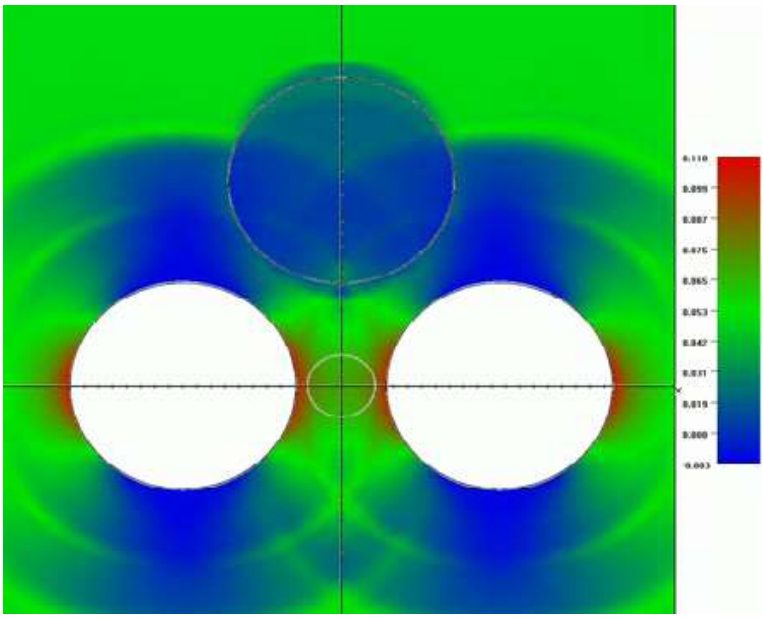


Рисунок 23 Распределение поля полных истинных напряжений в момент образования первого упругого включения.

Модельная задача о росте дефекта в нагруженном теле

Приведем пример решения модельной задачи о последовательном образовании зон предразрушения при конечных деформациях. В данной задаче в нагруженном теле было образовано эллиптическое отверстие с соотношением полуосей 1:10 (Рисунок 24). Увеличение внешних нагрузок привело к образованию первой зоны предразрушения вблизи “носика” отверстия – части тела, где скачком поменялись свойства тела (как вариант, появились микропоры), которые определялись с помощью методов, позволяющих рассчитать эффективные свойства пористых материалов и их распределение при конечных деформациях (подробно данный метод описан в третьей главе). Размеры зоны определялись по изолинии критериальных значений растягивающей компоненты тензора истинных напряжений.

Задача решалась при начальном одноосном растяжении ($\sigma_{11}^{\infty} = 0, \quad \sigma_{22}^{\infty} = p$). Материал тела считается нелинейно-упругим и описывается моделью Мурнагана ($\frac{\lambda}{G} = 2{,}097, \frac{C_3}{G} = -0{,}0689, \frac{C_4}{G} = -0{,}37464, \frac{C_5}{G} = -0{,}33709$).

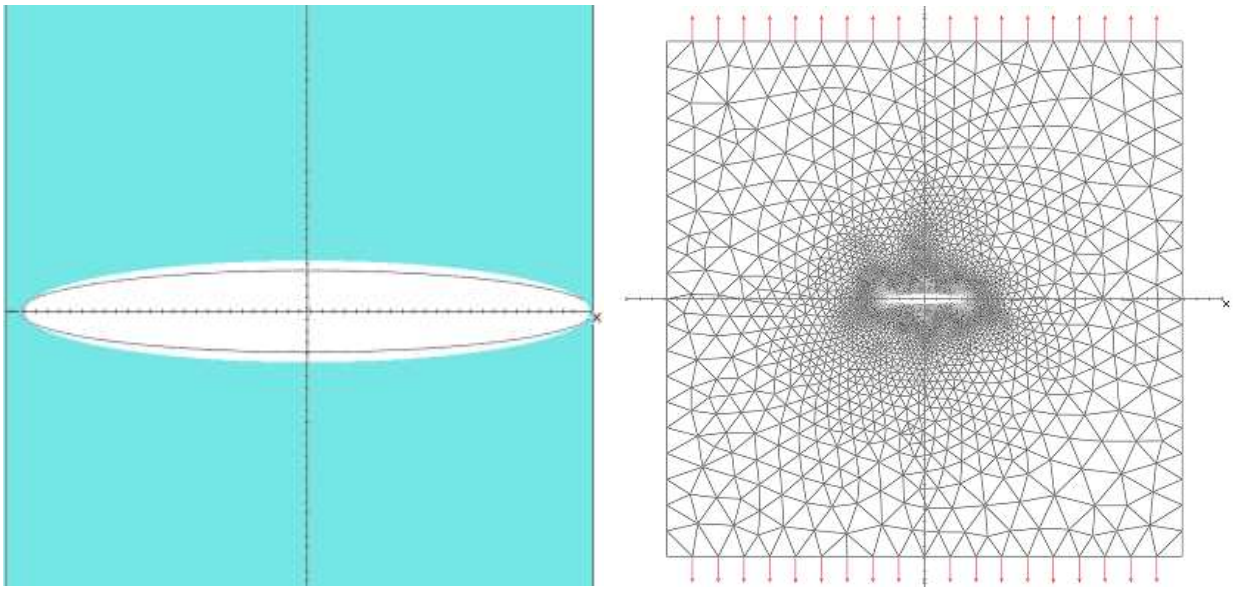


Рисунок 24 Диаграмма начального нагружения

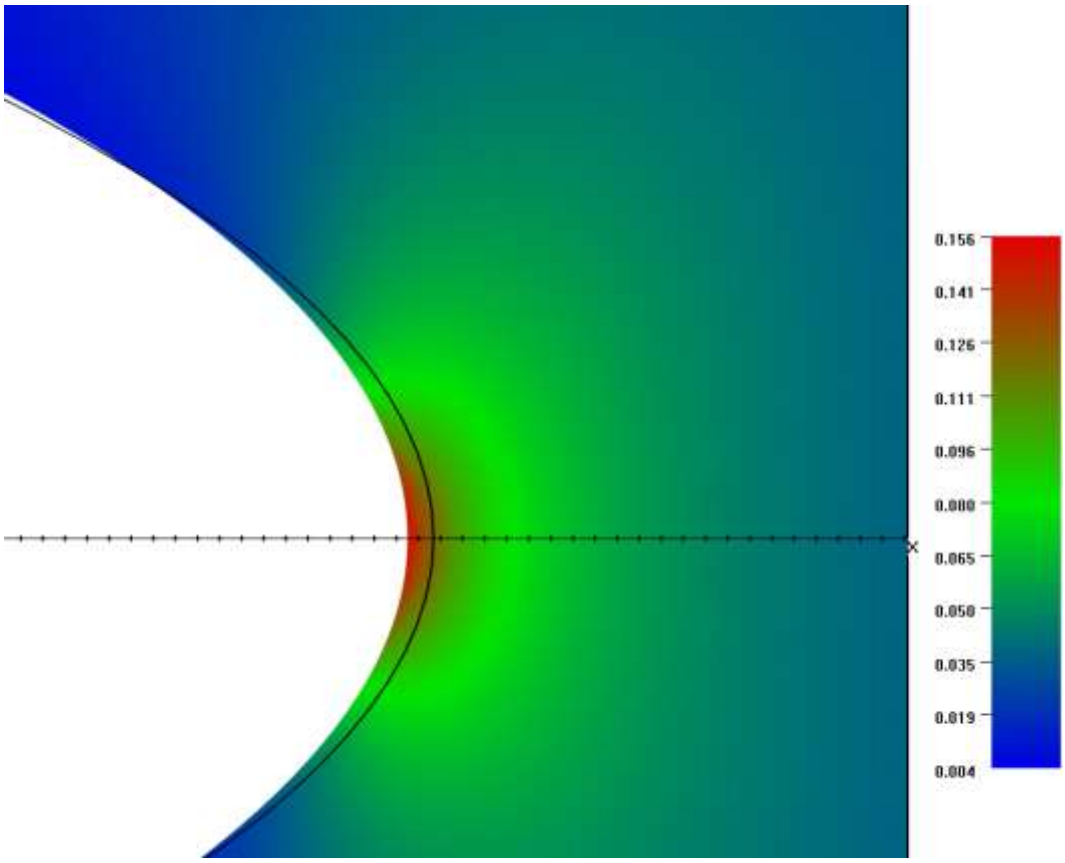


Рисунок 25 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений вблизи образованного эллиптического отверстия (черная линия – исходная граница отверстия).

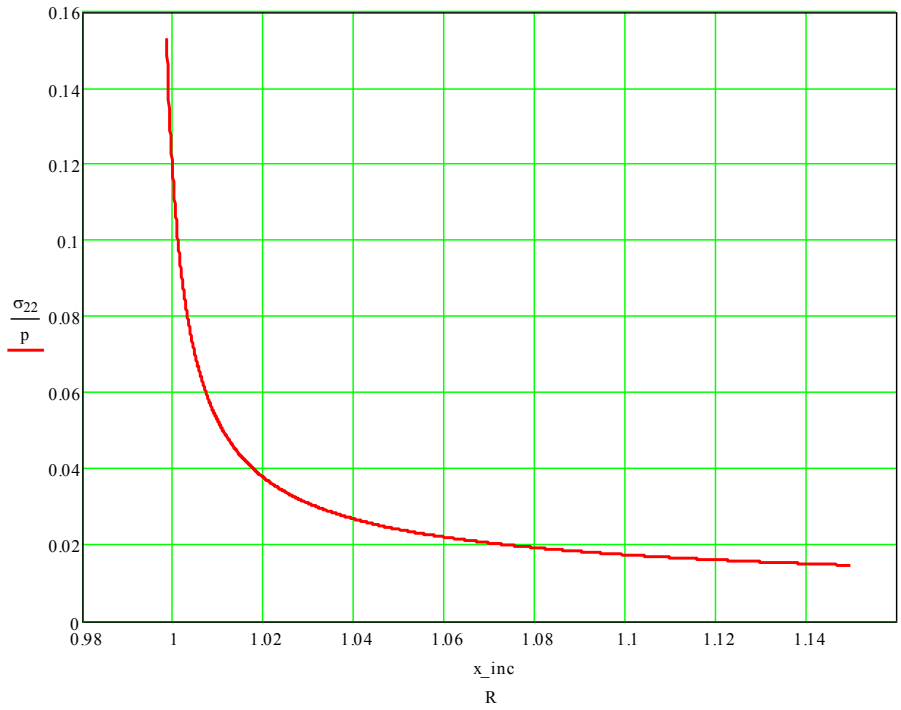


Рисунок 26 Напряжения у вершины эллиптической полости

При дальнейшем увеличении внешней нагрузки формируются две зоны предразрушения. Первая (Рисунок 27) возникает при $V_k/G = 0{,}84$ (α=0,05). Это критериальное значение достигалось при нагрузке $p/G = 0{,}05$. В зоне предразрушения происходит раскрытие микропор, соответствующих пористости эффективного матерала 6%. Возникновение зоны с новыми свойствами приводит к перераспределению деформаций (Рисунок 28).

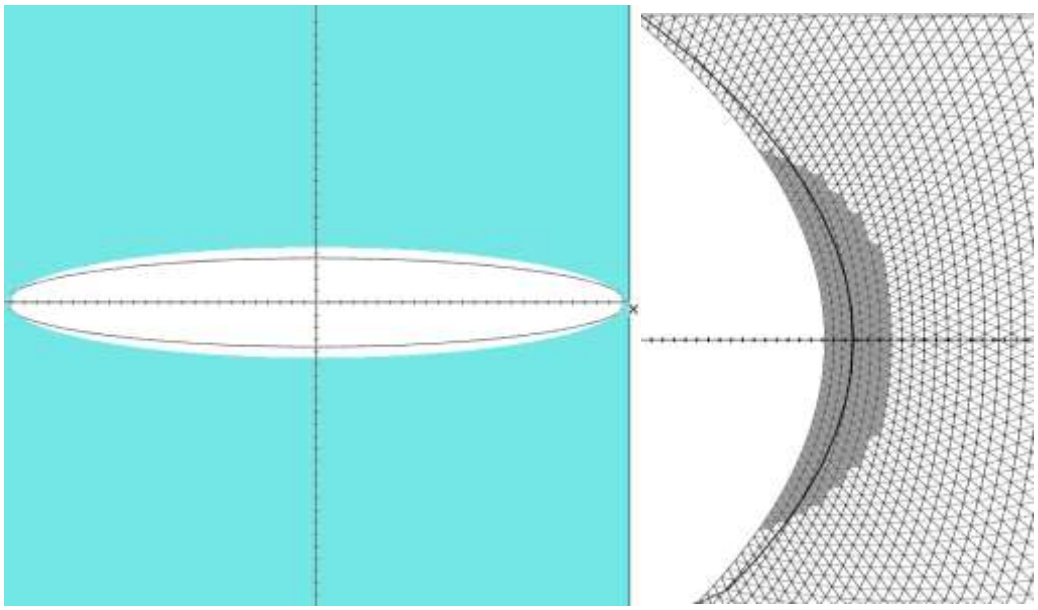


Рисунок 27 Образование первой зоны предразрушения. Зона предразрушения показана серым цветом.

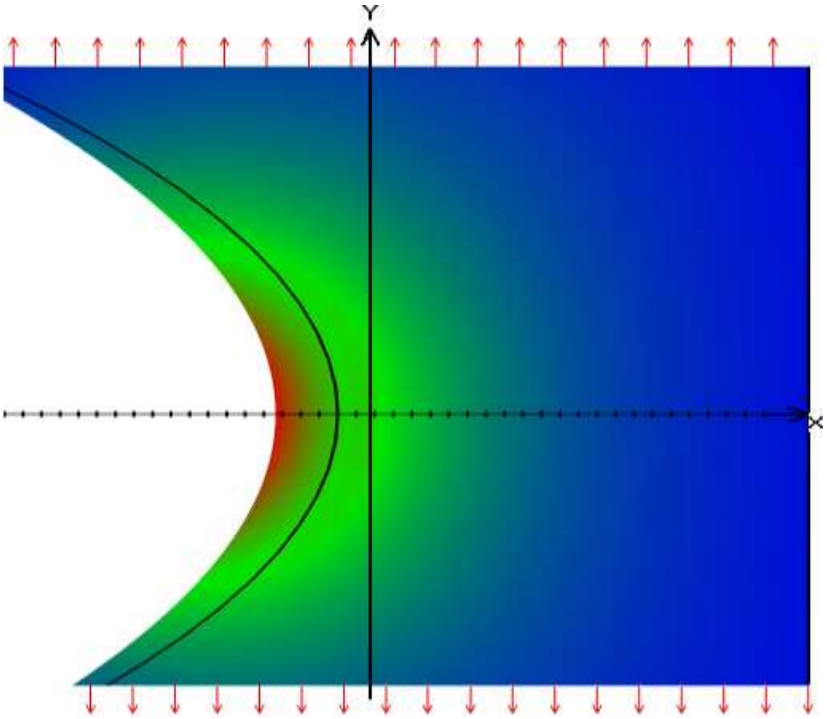


Рисунок 28 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений после образования первой зоны предразрушения (черная линия – исходная граница отверстия).

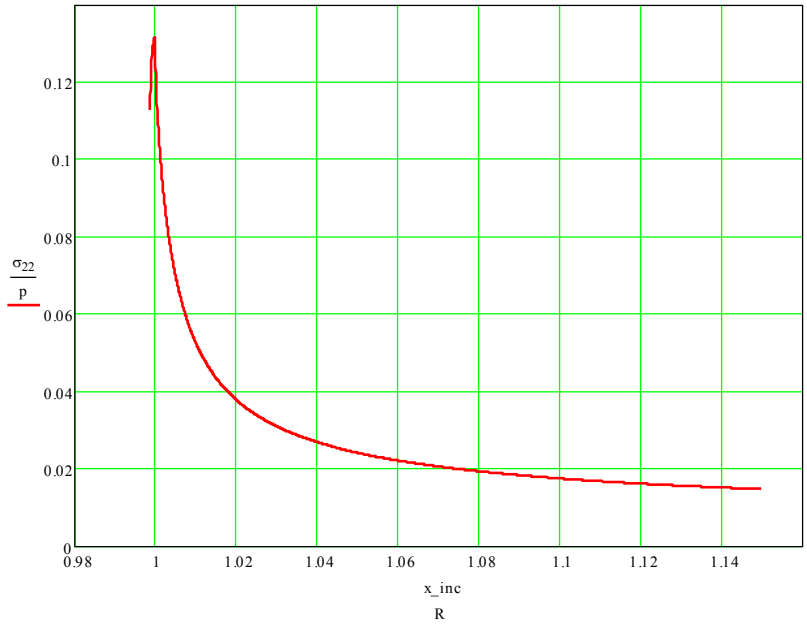


Рисунок 29 Напряжения у вершины полости после образования первой зоны предразрушения

Внутри первой зоны предразрушения при выполнении программы нагружения формируется вторая зона предразрушения (Рисунок 30) при $V_k/G = 1{,}167$ при нагрузке $p/G = 0{,}075$ ($\alpha = 0{,}05$).

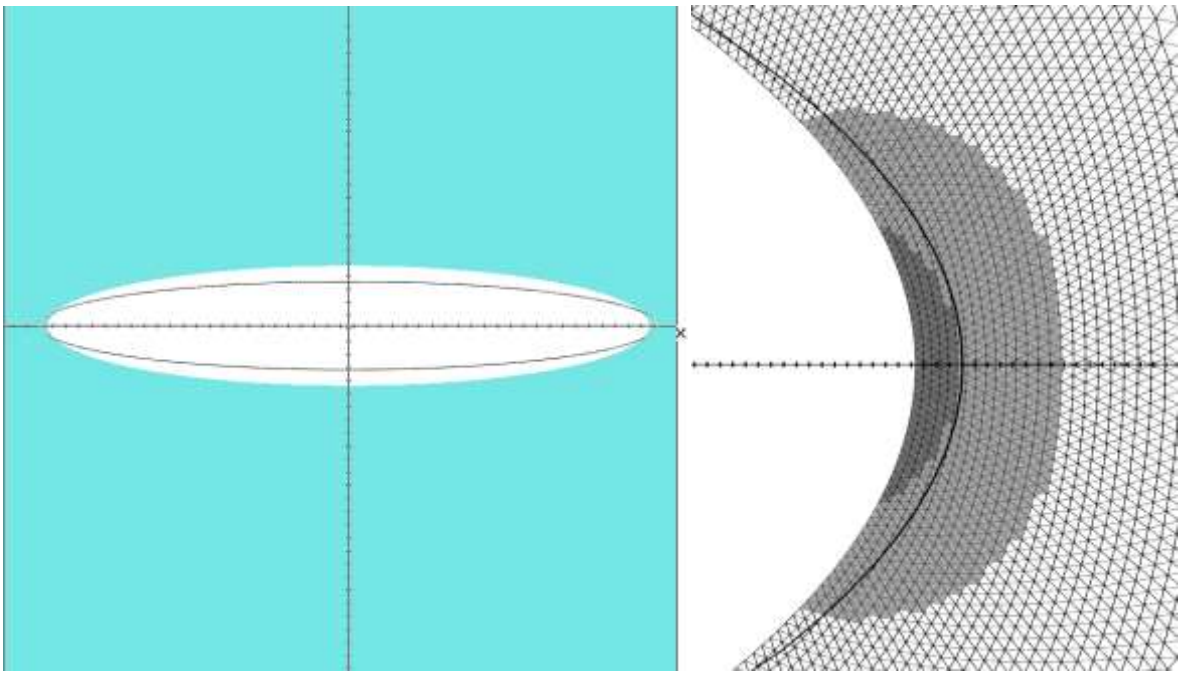


Рисунок 30 Образование второй зоны предразрушения. Зона предразрушения показана серым цветом (вторая зона темнее, чем первая)

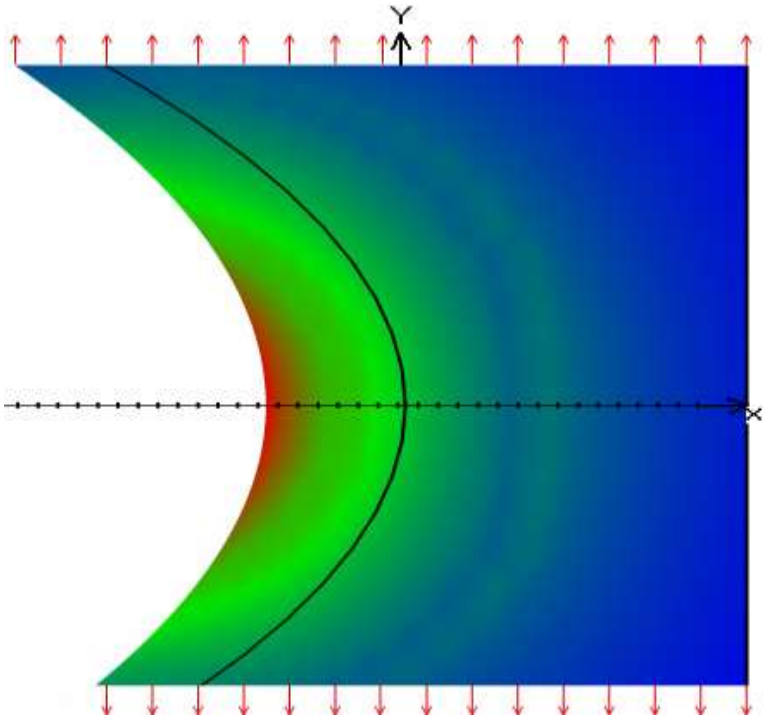


Рисунок 31 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений после образования второй зоны предразрушения (черная линия – исходная граница отверстия).

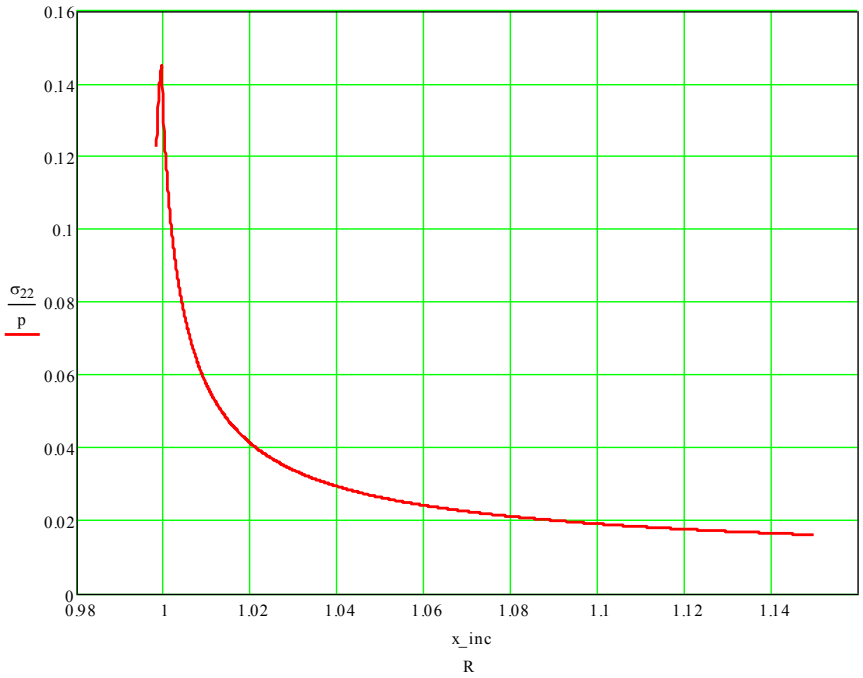


Рисунок 32 Напряжения у вершины полости после образования второй зоны предразрушения

Считается, что во второй зоне предразрушения происходит дополнительное раскрытие микропор, соответствующих пористости эффективного матерала 9%. Возникновение зоны с новыми свойствами приводит к перераспределению деформаций (Рисунок 31). Естественно происходит и эволюция первой зоны предразрушения.

Далее при выполнении программы нагружения происходит образование зоны откола (Рисунок 33) при $V_k/G = 1{,}45$ (при нагрузке $p/G = 0,11$).

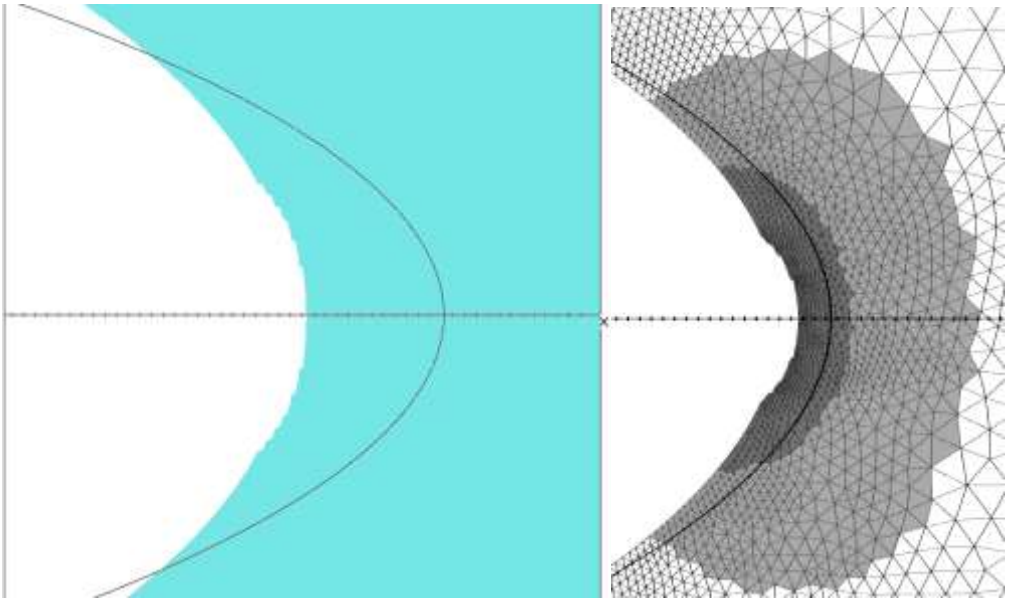


Рисунок 33 Образование зоны откола

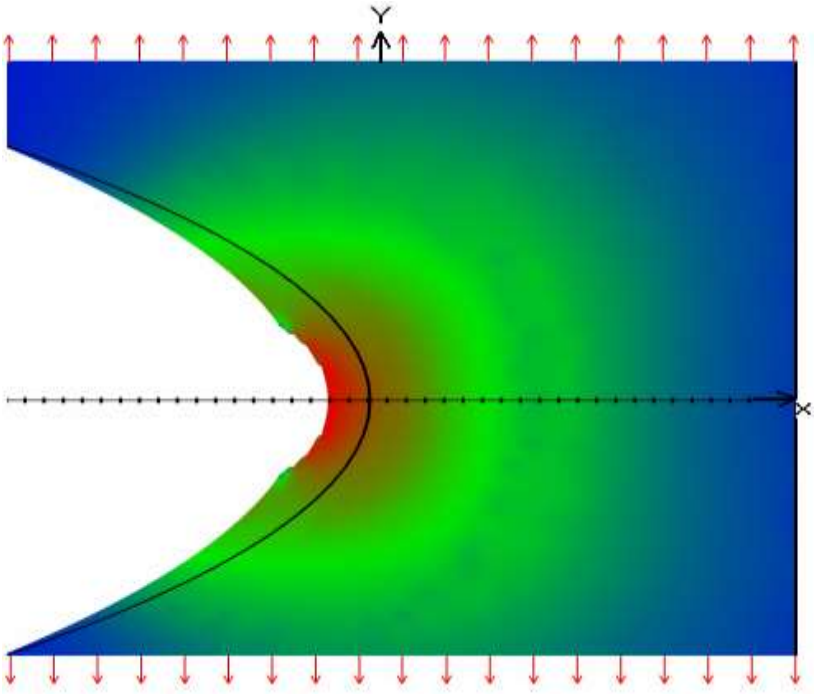


Рисунок 34 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений после образования зоны откола (черная линия – исходная граница отверстия).

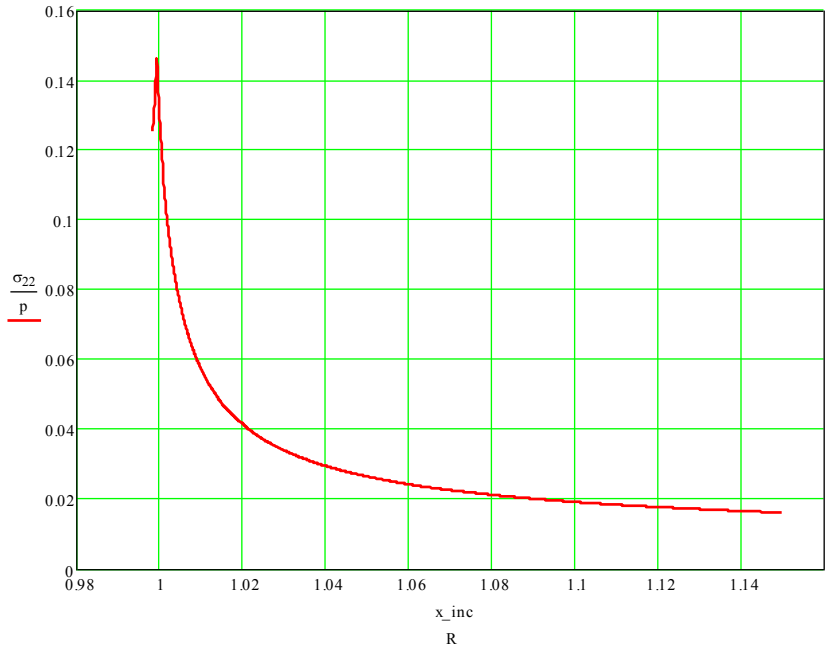


Рисунок 35 Напряжения у вершины полости после образования зоны откола

Дальнейшее образование зон откола может быть продолжено по той же схеме. Рассматривалось образование 10 последовательных зон откола (Рисунок 36).

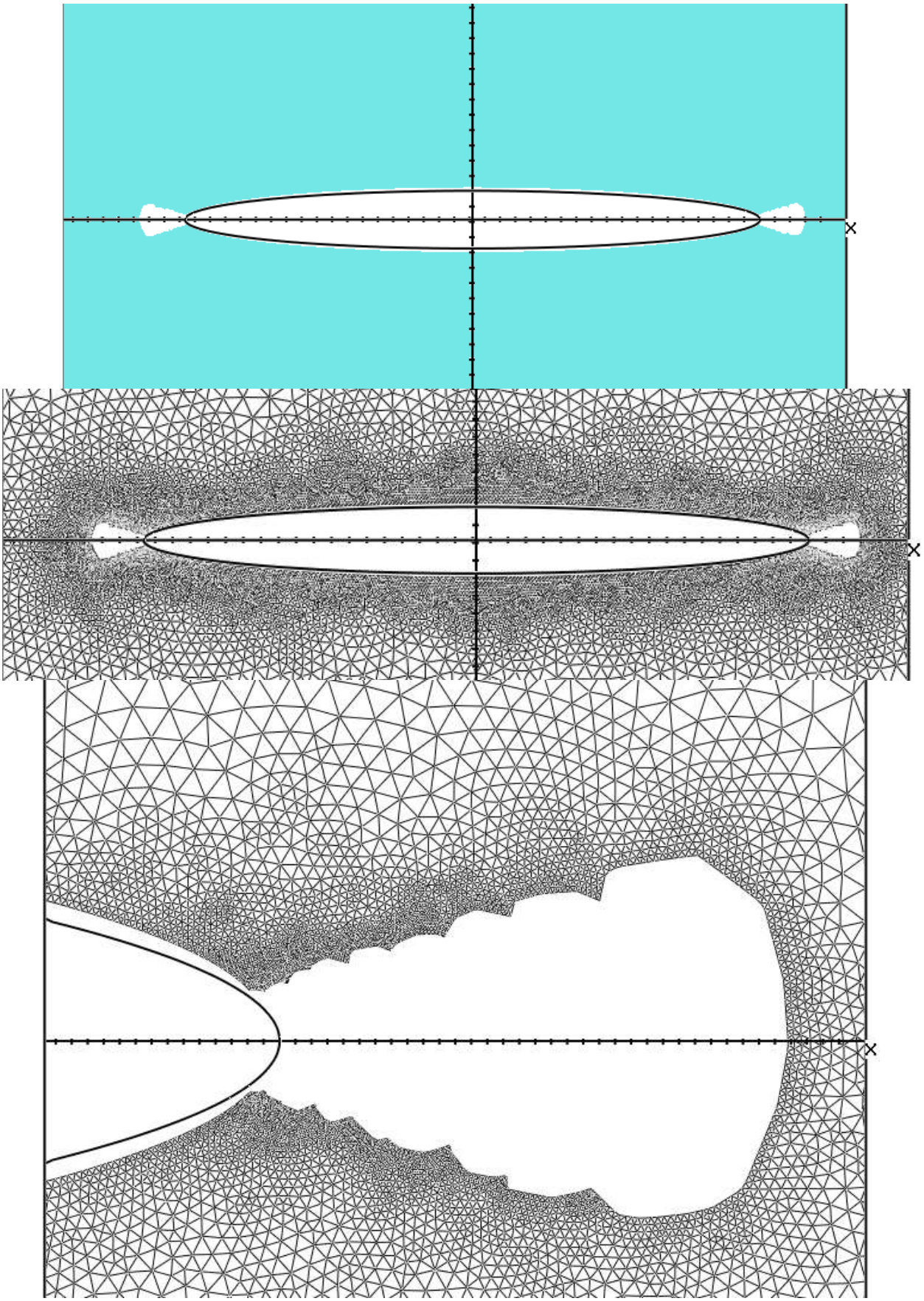


Рисунок 36 Последовательное образование зон откола

Отметим, что сравнение результатов решения данной задачи и задачи, в которой не учитывались образование зон предразрушения, показало снижение уровня напряжений на вершине дефекта на 15–25 % в случае, если образование зон предразрушения на разных стадиях нагружения входит в условия задачи.

На Рисунок 37 приведен пример остановки роста трещины в результате поглощения ею дополнительных концентраторов напряжений.

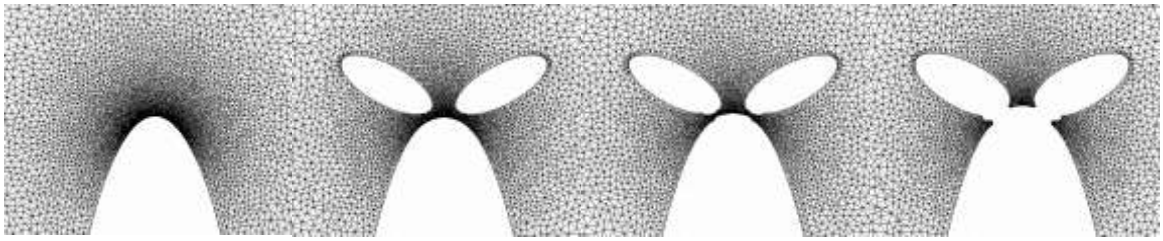
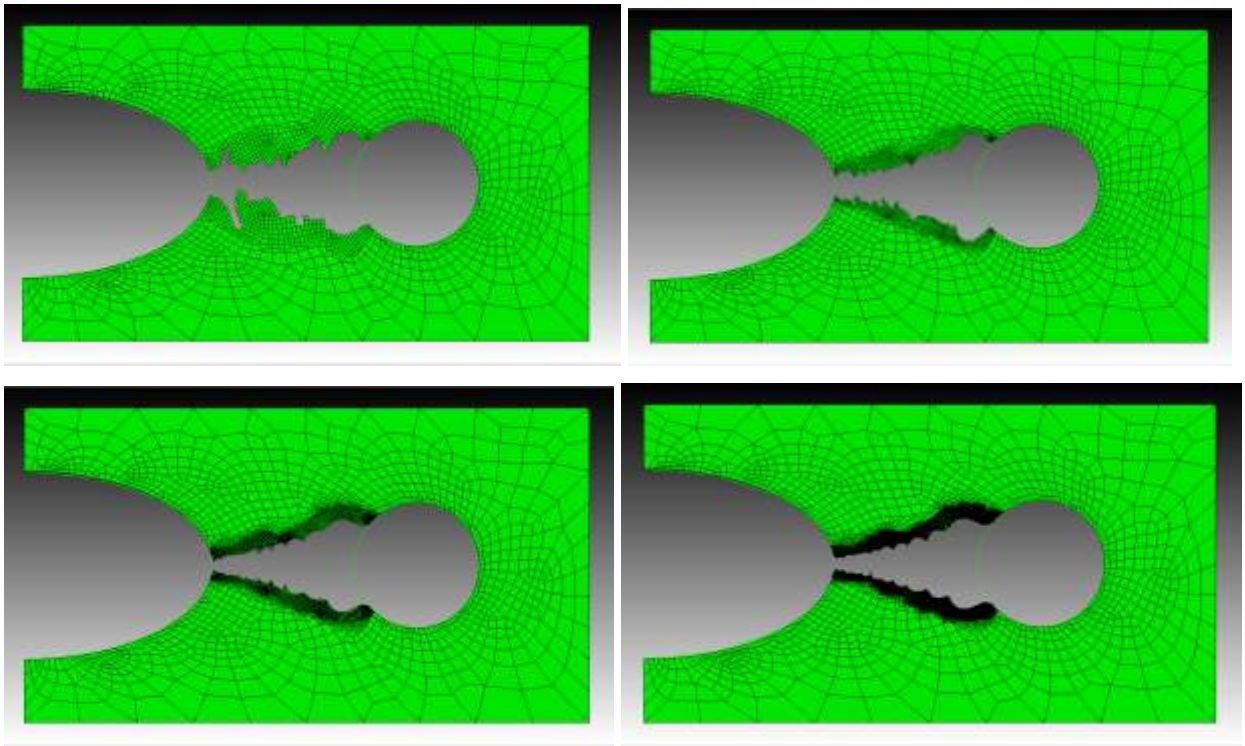


Рисунок 37 Остановка роста трещины в результате поглощения полостей

Для случая круговой полости, поглощаемой основной трещиной, проведен анализ на сеточную сходимость – зависимость площади зоны откола от размеров конечноэлементной сетки.



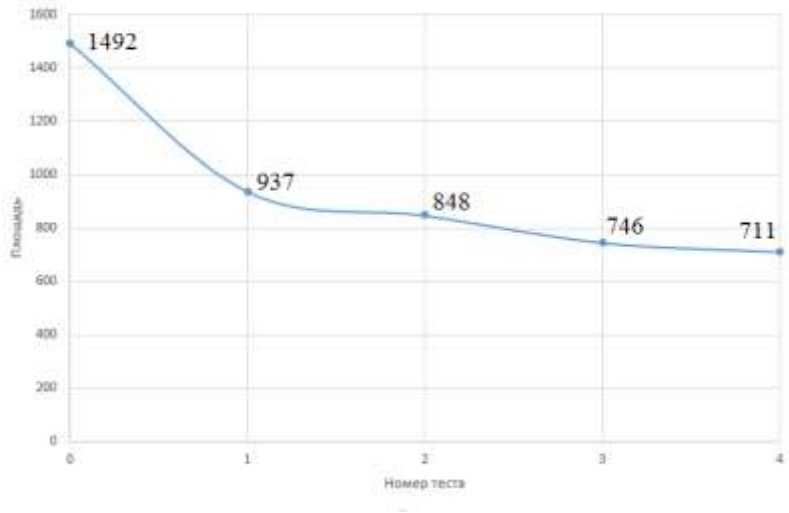


Рисунок 38 Зависимость площади зоны откола от размеров конечноэлементной сетки.

Задача Ламе-Гадолина при конечных деформациях

Данная задача является обобщением классической задачи на случай конечных деформаций [58]. Цилиндрическая полая труба сжимается под действием внешнего давления, приложенного с внешней стороны, таким образом, что ее внешний радиус становится равным 1. После чего труба вставляется в недеформированную трубу, внутренний радиус которой равен 1 (т.е. совпадает с внешним радиусом первой трубы после ее предварительной деформации). Затем нагрузка, приложенная к первой трубе, снимается, и эта труба вступает во взаимодействие со второй трубой. Это приводит к дополнительной деформации обеих труб (Рисунок 39).

Радиусы первой трубы до деформации: внутренний – 0.7, внешний – 1.2. Радиусы второй трубы до деформации: внутренний – 1, внешний – 1.3. Механические свойства обеих труб описываются материалом Мурнагана

$(\lambda_1 = 0.39, G_1 = 0.186, C3_1 = -0.013, C4_1 = -0.07, C5_1 = 0.063)$.

Радиусы первой трубы в промежуточном состоянии: внутренний – 0.464, внешний – 1.

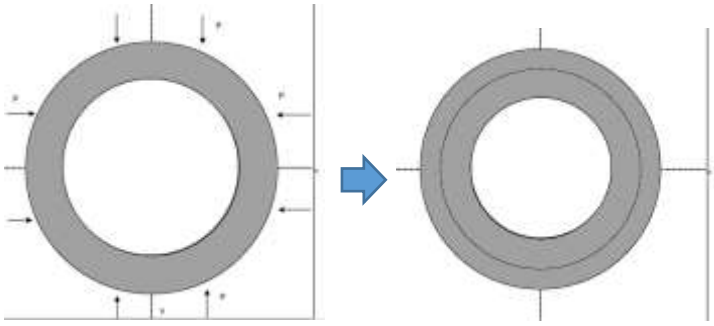


Рисунок 39 Задача Ламе-Гадолина

На Рисунок 40 приведено распределение поля напряжений в координатном базисе промежуточного состояния.

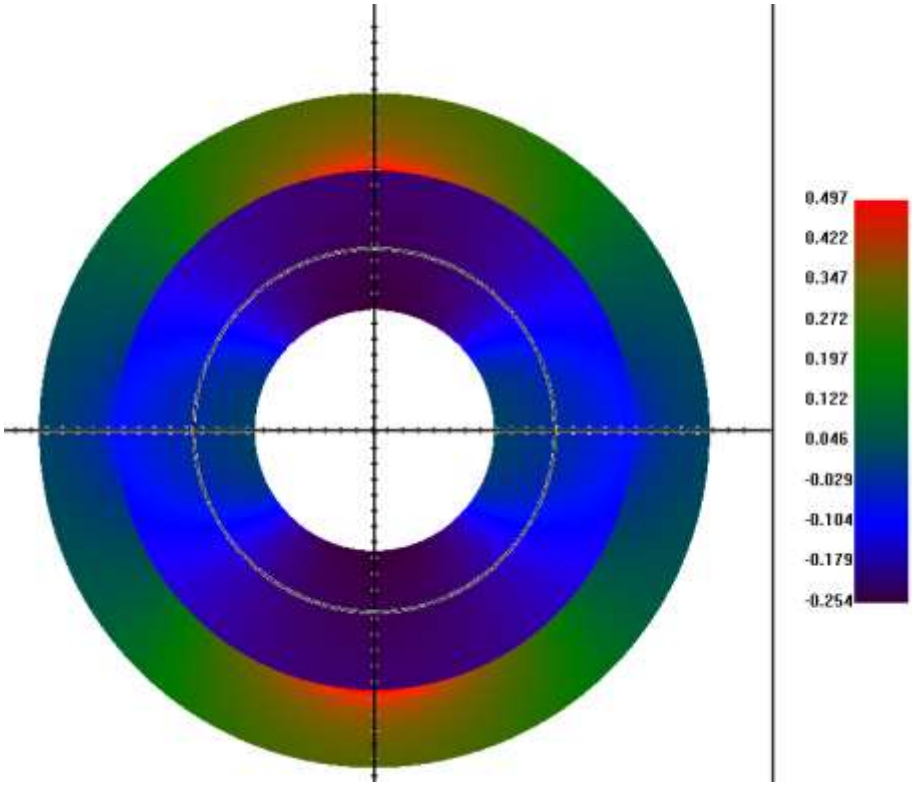


Рисунок 40 Распределение компоненты напряжений σ_{xx} / G

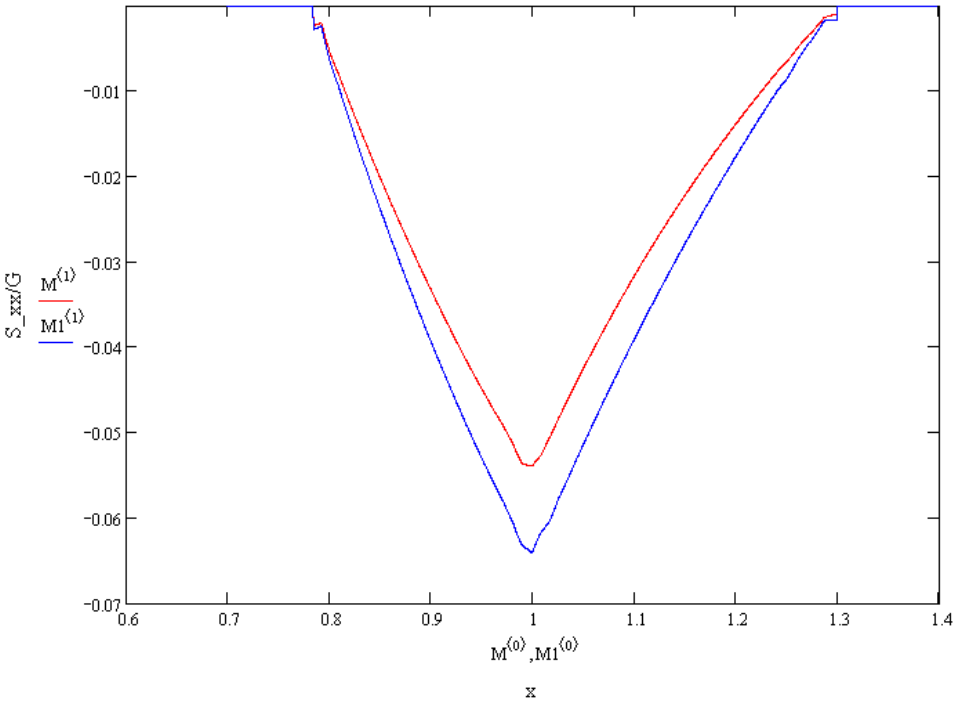
Рассмотрим теперь результаты решения задачи о вставке предварительно деформированной круговой трубы в недеформированную из другого материала. Радиус первой трубы до деформации: внутренний – 1.0, внешний – 1.2. Радиусы второй трубы до деформации: внутренний – 1, внешний – 1.3. Материалы обеих труб описываются потенциалом Мурнагана. Параметры материала первой трубы:

$\lambda_1 = 0.39, G_1 = 0.186, C3_1 = -0.013, C4_1 = -0.07, C5_1 = 0.063$.

Параметры материала второй трубы:

$\lambda_2 = 1.07, G_2 = 0.477, C3_2 = -0.93, C4_2 = 1.72, C5_2 = -5.31$.

Для сравнения, на Рисунок 41 представлено также распределение напряжений для случая, когда материал второй трубы совпадает с материалом первой.



Распределение тангенциального напряжения в промежуточном состоянии

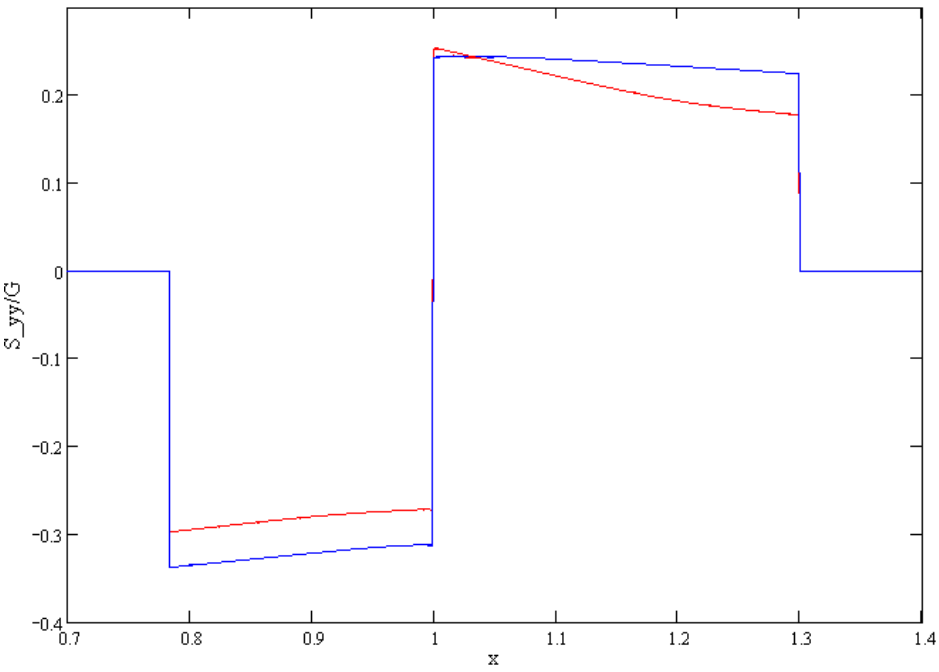


Рисунок 41 Распределение напряжений в первом промежуточном состоянии. Синим представлено решение для случая труб из разного материала, Красным – для случая труб из одинакового материала.

На Рисунок 42 представлено поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений.

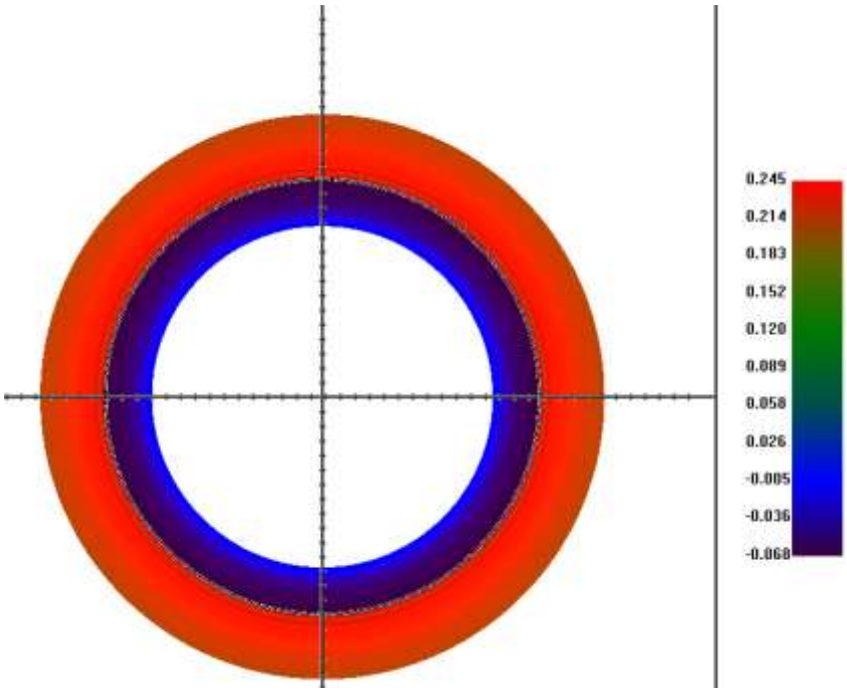


Рисунок 42 Распределение компоненты напряжений σ_1 / G_1

Приведем также результаты решения задачи Ламе-Гадолина для случая, когда приложение внутреннего давления происходит мгновенно и приводит к динамическим эффектам и взаимодействию труб в нестационарном режиме с волновыми процессами внутри них (Рисунок 43).

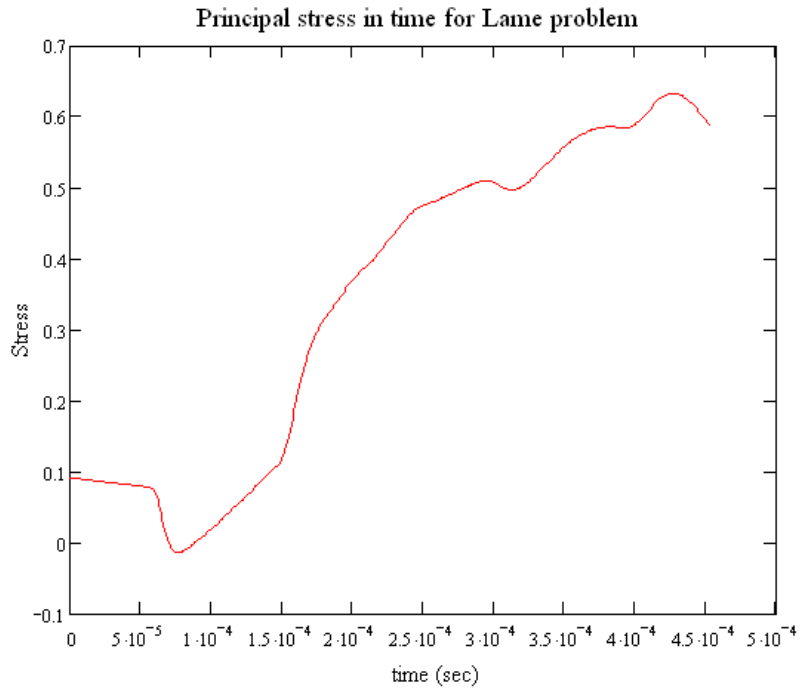


Рисунок 43 Изменение во времени первой главной компоненты тензора истинных напряжений в точке на границе между двумя трубами (R=1) для задачи о динамическом приложении внутреннего давления после статической вставки труб.

На Рисунок 44 представлены поля первой главной компоненты тензора истинных напряжений в различные моменты времени

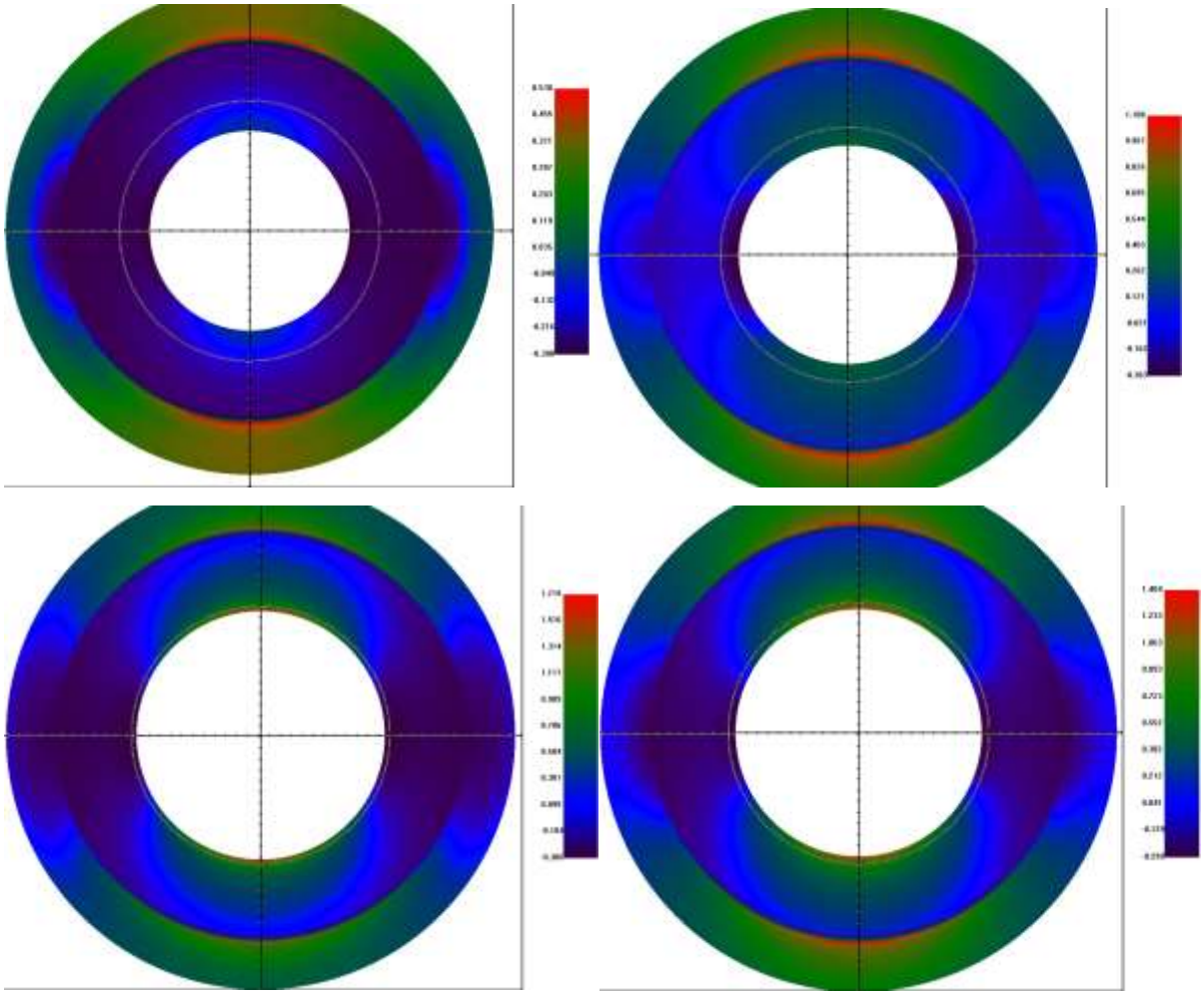


Рисунок 44 Поля первой главной компоненты тензора истинных напряжений в различные моменты времени

1.5 Заключение

В данной главе приведены математические модели статических и динамических задач теории многократного наложения больших деформаций, предложены алгоритмы их численной дискретизации на основе метода конечных элементов, рассмотрены примеры решенных модельных задач о последовательном образовании полостей и включений в нагруженном теле с использованием разработанного алгоритма. Учитывается, что образование концентраторов напряжений приводит к перераспределению в теле больших деформаций (возникновению в теле дополнительных больших, по крайней мере, в окрестности концентратора деформаций), которые физически накладываются на уже имеющиеся в теле деформации. При малых деформациях возможна суперпозиция деформаций, то есть параметры напряженно-деформированного состояния тела от суммарного внешнего воздействия на тело определяются

как сложение параметров напряженно-деформированного состояния тела от каждого воздействия на тело. При конечности деформаций это не так. При наложении конечных деформаций меняется и форма образованных концентраторов напряжений. В рассмотренных в главе модельных задачах считается, что форма концентраторов напряжений задана в момент образования. Рассмотрены постановка и решение динамических задач распространения волновых процессов в нелинейно упругих телах с начальными, вообще говоря, конечными деформациями. Учитывается, что распространение упругих волн приводит к возникновению больших дополнительных деформаций, которые физически накладываются на уже имеющиеся в теле деформации. Приведены поля напряжений в различные моменты времени и изменение максимальных напряжений во времени.

Рассмотрена модель роста дефектов в нагруженных телах с возникновением и развитием зон предразрушения в рамках механики деформируемого твердого тела. Предполагается, что начальная трещина существует в сплошной упругой среде и растет при увеличении внешнего воздействия (нагрузки). Данная модель и численный алгоритм, рассмотренные в главе, применимы к описанию роста трещин с поглощением вторичных концентраторов напряжений. Рост трещины происходит, когда нарушаются некоторые критерии прочности в области максимальной концентрации напряжений. Эти критерии могу быть нелокальными, и рост трещин моделируется как поэтапный процесс. Этот процесс может быть описан в рамках теории многократного наложения больших деформаций с учетом критериев прочности. Результаты численного моделирования методом конечных элементов получены с использованием программного обеспечения CAE FIDESYS.

Выводы:

1. Разработан алгоритм численного решения краевых задач теории многократного наложения больших деформаций на основе метода конечных.
2. Решена серия задач о математическом моделировании перераспределения конечных деформаций при изменении связности области, занимаемой телом, в процессе нагружения.

Глава 2. Модели и алгоритмы решения динамических задач с волновыми процессами на основе метода спектральных элементов

2.1 Введение

В данной главе представлены основные положения метода спектральных элементов (МСЭ) [131, 540, 541, 542, 547, 584], начиная с выбора базисных функций и квадратур для интегрирования по элементу, предложена модификация МСЭ для изопараметрической дискретизации краевых задач теории упругости в областях с криволинейными граничными поверхностями, разработан алгоритм построения оптимальных (в сравнении с промышленными сеточными генераторами) спектральноэлементных сеток для данных областей, рассматривается применение МСЭ для решения плоских и пространственных задач о распространении волновых процессов в упругих и вязкоупругих средах [366, 375, 376, 592, 593], приводятся результаты расчета данных задач и их сравнение с аналитическими решениями. С использованием МСЭ получено решение задачи о полноволновом моделировании в неоднородной преднапряженной среде с наведенной анизотропией [584, 614], вызванной концентрацией напряжений вблизи полостей и включений в твердом теле. Проведены исследования по изучению и численному моделированию на основе изопараметрического МСЭ динамики акустических волн в сложных неоднородных трехмерных пористых средах. Разработана математическая модель описываемого процесса распространения акустических волн на основе системы трехмерных неоднородных уравнений Био [349, 671] с переменными коэффициентами с учетом анизотропии сред и комбинированных неотражающих граничных условий, препятствующих отражению волн от границ расчетной области. Предложена методология тестирования программных комплексов на основе МСЭ для моделирования распространения волновых процессов в неоднородных средах.

При геофизическом исследовании структуры Земной коры немаловажную роль играют волновые явления, происходящие в толще горных пород [2, 5, 6, 362, 365, 534, 537, 544, 555, 572, 609, 642, 670, 710, 752, 753]. Эти явления, как и любые природные явления, носят сложный характер, вызванный множественными переотражениями волнового поля от сложной топографии Земной поверхности, а также от границ между геопластами. Следовательно, для корректного моделирования, прогнозирования и диагностики таких явлений необходимо разработать математическую модель реальных волновых процессов в трехмерных неоднородных сложноструктурированных областях с учетом пористости и анизотропии горных пород [133, 371, 432, 566, 625, 626, 665, 672, 679, 702].

Теория волновых процессов в твердом теле является классическим разделом механики деформируемого твердого тела. Несмотря на огромное количество исследований [44, 71, 75, 93, 117, 118, 224, 290, 404, 545, 620, 642, 705, 707, 709, 710, 711], рассмотрение проблем в рамках этой теории по-прежнему является актуальной задачей современной геофизики и сейсмики ввиду сложности наблюдаемых волновых процессов в реальных средах со сложной геометрией. Развитие вычислительной техники в последние годы, доступность суперкомпьютерных ресурсов позволили начать рассмотрение данной задачи с позиции полноволнового трехмерного моделирования, учитывающего все особенности реальной модели и протекающие волновые явления (дифракция, интерференция и т.д.) [375, 376, 538, 545, 552, 553].

Вопрос трехмерного моделирования распространения и рефракции акустических волн может играть немаловажную роль для целей мониторинга и прогнозирования результатов акустического зондирования [205, 375, 603, 671, 703]. Принимая во внимание неоднородность реальных сред, в качестве рассеивателей акустических волн необходимо рассматривать в рамках модели пористые структуры с возможным наличием трещин и трещиноватых коридоров [312, 313, 484, 631, 774, 785]. Для оперативной оценки обстановки близи скважины в процессе бурения могут быть использованы автономные системы акустического каротажа [207], использующие результаты наблюдений с акустических антенн и возможности трехмерного полноволнового моделирования, что может быть применено для решения обратной задачи об определении расположения, формы и типов неоднородностей сред по результатам акустической разведки [310, 432].

При решении задач полноволнового сейсмического моделирования в трехмерных областях с неоднородной структурой слоев [373, 374, 409, 768] одной из основных проблем является необходимость выполнения коллосального объема вычислений. Данная проблема выходит на первый план в случае решения обратных задач сейсмики [281, 609], когда по данным на приемниках акустических сигналов требуется восстановить сейсмический портрет среды, через которую прошли акустические волны с излучателя – задача интерпретации данных акустического каротожа или сейсмического профилирования. Для решения такого рода задач необходимо многократное решение серии прямых задач о распространение сейсмических волн в геопластах при заданных параметрах среды. В зависимости от типа выполняемого каротожа и частот излучателя решение задач может требовать построения расчетной сетки, состоящей из сотен миллионов элементов. Ясно, что большинство современных пакетов не в состоянии не только решить данную проблему в разумные сроки, но элементарно загрузить ее в расчетные ядра всвязи с упомянутыми выше гигантскими объемами данных. Всвязи с этим в настоящее время возникает потребность в усовершенствовании методов моделирования распространения

волн в неоднородной сложнопостроенной трехмерной среде. Численные эксперименты позволяют значительно оптимизировать процесс нефтедобычи, поэтому моделирование волновых процессов в неоднородных средах становится все более актуальной задачей механики твердого тела. Для ее решения существует ряд методов численного моделирования. Среди них, возможно, самый известный, метод конечных разностей [604, 608, 752]. Однако, использование данного метода становится затруднительным для областей со сложной пространственной формой граничных поверхностей: при наличии наклонных и криволинейных разломов, пересекающих скважину, каротажного устройства внутри скважины, а также в случае необходимости учёта анизотропии свойств породы вокруг скважины. Показали свою эффективность псевдоспектральные методы [431, 735], но они ограничены в применении для моделей с гладкими изменениями свойств материала. Метод спектральных элементов, используемый в данной работе, стал применяться в задачах сейсмического моделирования в работах [540, 541, 542]. Метод позволяет высокоточно моделировать распространение различных типов волн. С использованием данного метода достаточно легко учесть анизотропию материала [534] и границы твёрдой и жидкой фаз [535]. Метод позволяет осуществить эффективное распараллеливание вычислительного процесса на системах с распределённой памятью [541], а также на гибридных MultiGPU системах [538, 545]. Несмотря на активный интерес исследователей к разрывному методу Галёркина при моделировании распространения волн [421, 520, 521, 522, 523], он до сих пор является относительно дорогим методом с точки зрения используемой памяти (требуется хранить данные для большего числа неизвестных и решать большее число уравнений ввиду наличия потоков между элементам) и имеет более жесткое ограничение на шаг по времени в условии Куранта (например, в шесть раз меньше, чем МСЭ, как показано в работе [402].

Другим аспектом, требующим детальной проработки, является учет влияния трещин, присутствующих вблизи раздела геослоев, на результаты сейсмического зондирования [625, 626]. Более того сейсмический отклик растущей трещиноватости [87, 139, 226, 782] может быть использован в задачах пассивной сейсмики, когда отсутствует искусственный генератор волн, а наблюдения ведутся за отраженными волнами от неоднородностей (трещины, каверны и т.п.) в геопластах.

Для решения поставленной задачи был разработан программный комплекс для моделирования процессов распространения сейсмических волн в трехмерных неоднородных анизотропных (с возможным наличием анизотропной вязкоупругости) геофизических пластах, в том числе содержащих системы трещин и трещиноватостей, в которых наблюдаются значительные локальные концентрации напряжений и конечные деформации [584, 588, 590]. В

комплексе используется механическая постановка на базе трехмерных анизотропных уравнений упругости с учетом вязко- и пороупругих эффектов и FSI-взаимодействием (жидкость-твердое тело). Существующие пакеты численного моделирования, принятые в мировой расчетной практике (например, универсальные *ANSYS, LS-DYNA, COMSOL* и специализированные *PETREL, TESSERAL),* не позволяют моделировать распространение сейсмических волн при перераспределении конечных деформаций (образования дефектов) вблизи растущих трещин и при их взаимодействии (раскрытие/закрытие берегов, объединение, изменение свойств), и тем более с учетом изменения свойств материала в процессе нагружения. Также, как уже отмечалось, перечисленные пакеты не могут быть использованы для расчета больших задач на специализированных гибридных вычислительных системах и суперкомпьютерах [134, 135].

В разработанном программном комплексе использован изопараметрический метод спектральных элементов [131] для дискретизации системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих постановку краевой задачи о распространении упругих волн в трехмерных неоднородных средах [133]. МСЭ является модификацией метода конечных элементов [25, 82, 299, 488, 733, 742, 786]. Исторически метод впервые был применен для моделирования течения жидкостей [662], где требовались высокая точность и большая скорость вычислений. В конце 90-х годов прошлого века ряд французских математиков [534, 539, 542] успешно адаптировал метод для задач сейсмического моделирования, введя специальным образом подобранную кубатурную формулу для интегрирования по пространственным координатам, что в конечном счете позволило перейти к полностью явной схеме по времени. Данный факт резко выделил МСЭ в ряду конечноэлементных методов, требующих обращения матрицы масс для интегрирования по времени. Кроме того, выбор в качестве функций формы полиномов Лагранжа, построенных по узлам кубатурной формулы Гаусса-Лежандра-Лобатто, позволил достичь спектральной сходимости (в отличие от h-p конечных элементов [461, 557, 739, 788]), что дало название самому методу.

Таким образом, основными особенностями МСЭ, благодаря которым он нашел широкое применение в различных приложениях [286, 322, 323, 338, 341, 351, 359, 361, 362, 363, 366, 371, 397, 414, 423, 424, 425, 426, 442, 458, 478, 479, 493, 554, 555, 556, 557, 558, 563, 565, 568, 569, 570, 571, 572, 615, 659, 663, 664, 722, 755, 768], являются:

- явная схема интегрирования по времени;
- высокий и легко варьируемый порядок аппроксимации по пространству;
- спектральная сходимость (точность решения растет с экспоненциальной скоростью при увеличении порядка схемы) вычислительной схемы;

- возможность использования неструктурированных сеток даже для трехмерных областей сложной формы;
- относительная простота в распараллеливании алгоритма.

Однако в случае краевых задач упругости для областей с криволинейными граничными поверхностями предпочтительным является применение изопараметрического метода спектральных элементов, позволяющего осуществить дискретизацию области с той же точностью, что и само решение внутри нее.

2.2 Изопараметрический метод спектральных элементов (МСЭ)

Как и в случае метода конечных элементов (МКЭ) [410, 488], разобьем расчетную область Ω на непересекающиеся элементы $\Omega_e, e=1,..,n_e$ так, что $\Omega=\bigcup_e^{n_e}\Omega_e$, как показано на Рисунок 45.

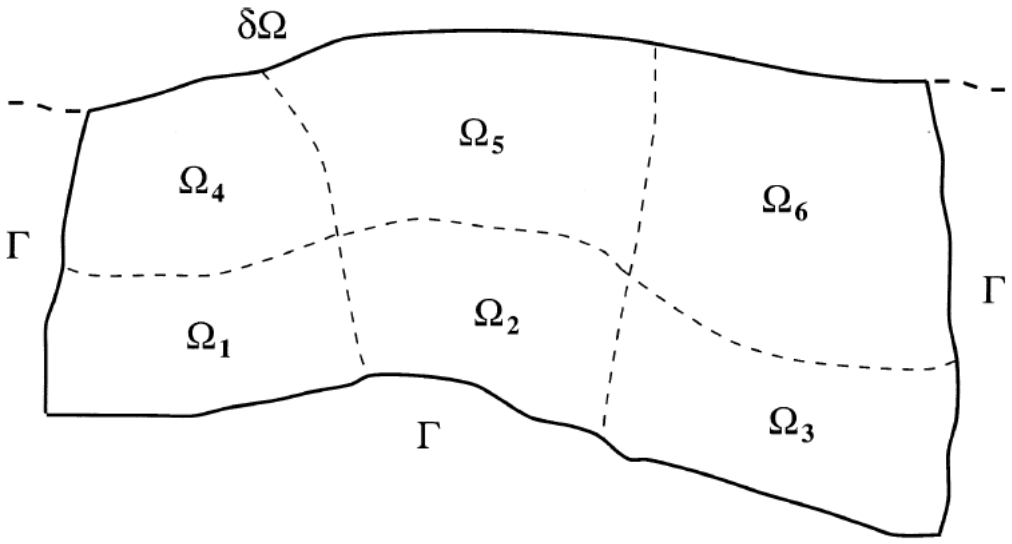


Рисунок 45 Разбиение области на спектральные элементы.

Граница Γ расчетной области аналогично разбивается на непересекающиеся граничные элементы $\Gamma_b, b=1,..,n_b$, так, что $\Gamma=\bigcup_{b=1}^{n_b}\Gamma_b$.

В случае МСЭ в качестве элементов объемной дискретизации применяются гексаэдры, а в качестве граничных элементов - четырехугольники. Под граничными элементами понимаются грани гексаэдров, лежащие на границе Γ. Данный выбор элементов обусловлен особенностями построения кубатурной формулы и набора базисных функций внутри элемента со свойством тензоризации при дискретизации уравнений упругости, которые рассмотрены далее.

Рассмотрим граничные элементы. Каждый граничный элемент изоморфен квадрату. Следовательно, для каждого граничного элемента существует отображение, переводящее квадрат в граничный элемент $\Gamma_b, b = 1,..,n_b$ (Рисунок 46). Эталонный квадрат определим в системе координат (ξ,η): $-1 \le \xi \le 1, -1 \le \eta \le 1$, которая иногда называется естественной системой координат. Каждый граничный элемент Γ_b задается набором n_a контрольных или опорных точек $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}(\xi_a, \eta_a)$, $a = 1,\ldots,n_a$. Четыре вершины элемента всегда используются как опорные, но центры ребер и центр элемента могут также использоваться как дополнительные опорные точки. Для граничного элемента с прямыми ребрами четырех контрольных точек достаточно, в то время как для криволинейного может понадобиться 9 контрольных точек, чтобы точнее описать форму границы. На Рисунок 46 проиллюстрированы четырехугольные элементы, заданные 4 и 9 контрольными точками.

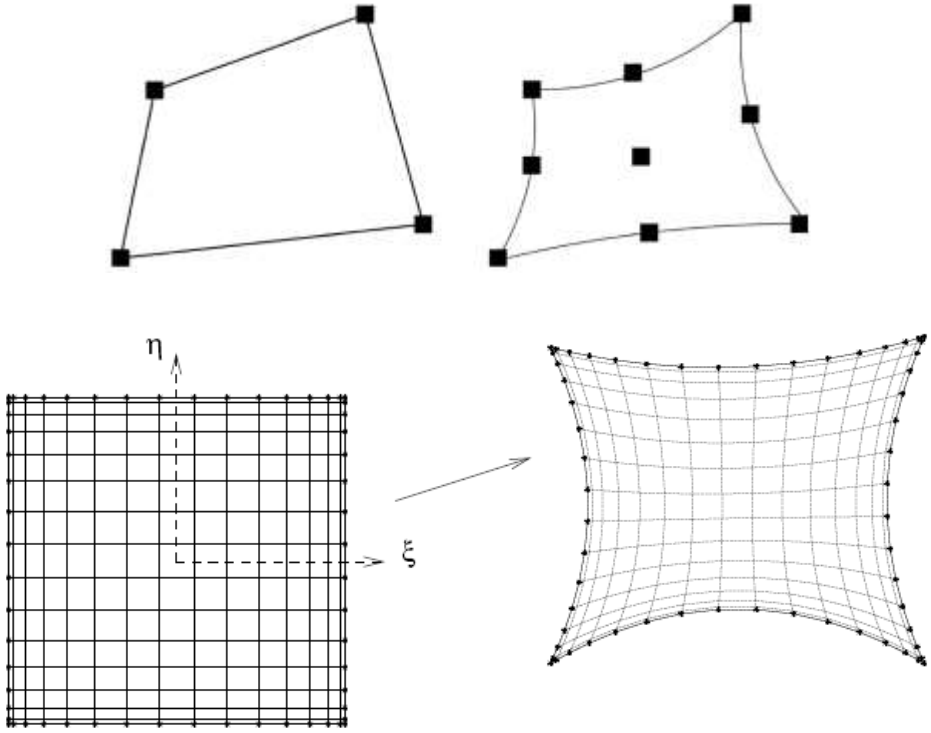


Рисунок 46 Четырехугольные элементы, заданные 4 и 9 контрольными точками (сверху). Отображение эталонного квадрата на криволинейный спектральный элемент (снизу).

Для граничного элемента связь между точкой $\mathbf{x}$ внутри элемента и точкой (ξ,η) в эталонном элементе Λ может быть записана в виде:

$$\mathbf{x}(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{n_a} N_a(\xi,\eta)\mathbf{x}_a \qquad (1)$$

Функции формы $N_a(\xi,\eta)$ являются прямыми произведениями интерполяционных многочленов Лагранжа. Многочлены Лагранжа степени n_l задаются в терминах n_l+1 контрольной точки: $-1\le\xi_\alpha\le 1, \alpha=0,...,n_l$:

$$l_\alpha^{n_l}(\xi)=\frac{(\xi-\xi_0)}{(\xi_\alpha-\xi_0)}\cdots\frac{(\xi-\xi_{\alpha-1})}{(\xi_\alpha-\xi_{\alpha-1})}\frac{(\xi-\xi_{\alpha+1})}{(\xi_\alpha-\xi_{\alpha+1})}\cdots\frac{(\xi-\xi_{n_l})}{(\xi_\alpha-\xi_{n_l})}$$

Заметим, что многочлен Лагранжа, по определению, в контрольных точках может принимать значение 0 или 1:

$$l_\alpha^{n_l}(\xi_\alpha)=\delta_{\alpha\beta}$$

Два многочлена Лагранжа степени 1 с двумя контрольными точками $\xi=-1$ и $\xi=1$ записываются следующим образом:

$$l_0^1(\xi)=\frac{1-\xi}{2}, l_1^1(\xi)=\frac{1+\xi}{2}$$

В качестве примера, выпишем 4 функции формы, являющиеся произведениями многочленов Лагранжа степени 1, связанные с четырехугольным элементом, содержащим 4 контрольные точки:

$$N_1(\xi,\eta)=l_0^1(\xi)_0^1(\eta), N_2(\xi,\eta)=l_1^1(\xi)_0^1(\eta),$$
$$N_3(\xi,\eta)=l_1^1(\xi)_1^1(\eta), N_4(\xi,\eta)=l_0^1(\xi)_1^1(\eta)$$

Аналогично определяются функции формы для четырехугольного элемента, являющиеся произведениями многочленов Лагранжа степени 2, связанные с четырехугольным элементом, содержащим 9 контрольных точек.

Нормаль к граничному элементу задается следующим выражением:

$$\mathbf{n}=\frac{1}{J_b}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\times\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}$$

где J_b - якобиан преобразования: $J_b=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|$

Геометрия элемента, определяемая отображением (1), должна обеспечивать положительность якобиана во всех внутренних точках эталонного элемента Λ, что накладывает ограничения на процесс генерации сетки [489]. Чтобы вычислить якобиан, необходимо вычислить шесть частных производных: $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}$ и $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}$. Это осуществляется дифференцированием функции отображения:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}(\xi,\eta)=\sum_{a=1}^{n_a}\frac{\partial N_a(\xi,\eta)}{\partial \xi}\mathbf{x}_a$$
$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}(\xi,\eta)=\sum_{a=1}^{n_a}\frac{\partial N_a(\xi,\eta)}{\partial \eta}\mathbf{x}_a$$

Частные производные $\frac{\partial N_a}{\partial \xi},\frac{\partial N_a}{\partial \eta}$ определяются аналитически дифференцированием многочленов Лагранжа.

Аналогично плоскому случаю рассмотрим элементы объема. Каждый элемент объема Ω_e, который является гексаэдром, можно отобразить на эталонный куб. Эталонный куб определим в естественной системе координат $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\varsigma)$: $-1\le\xi\le 1,-1\le\eta\le 1,-1\le\varsigma\le 1$. Аналогично граничным элементам, каждый объемный элемент определен в терминах контрольных узлов $\mathbf{x}_a=\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_a)$, $a=1,\ldots,n_a$ и функций формы $N_a(\boldsymbol{\xi})$. Чтобы задать элемент требуется, как минимум, 8 узловых точек. Добавляя серединные точки и центральную точку, число контрольных узлов становится 27, что позволяет более точно воспроизвести криволинейную геометрию тела (Рисунок 47).

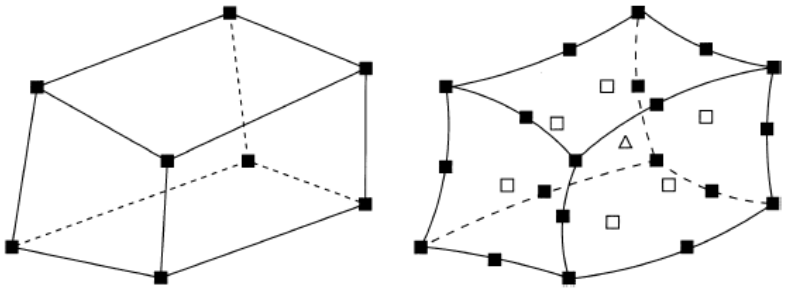


Рисунок 47 Гексаэдральные элементы, заданные 8 и 27 контрольными точками.

Отображение эталонного куба на элемент объема может быть записано, по аналогии с двумерным случаем, в виде:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{a=1}^{n_a}N_a(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_a \qquad (2)$$

Функции формы 8-точечного элемента являются тройными произведениями многочленов Лагранжа степени 1, а для 27-точечного элемента – степени 2.

Элемент объема $dxdydz$ внутри рассматриваемого элемента Ω_e связан с элементом объема $d\xi d\eta d\varsigma$ в эталонном кубе соотношением:

$$dxdydz=J_e d\xi d\eta d\varsigma$$

где J_e - якобиан отображения:

$$J_e = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \varsigma)} \right|$$

Чтобы посчитать якобиан J_e, необходимо посчитать все элементы матрицы Якоби $\partial \mathbf{x} / \partial \boldsymbol{\xi}$, которые находятся дифференцированием отображения (2):

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{a=1}^{n_a} \frac{\partial N}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}_a$$

Частные производные функций формы определяются многочленами Лагранжа и их производными. Форма объемных элементов, задаваемые отображением (2), как и прежде, должна обеспечивать положительность якобиана, что снова приводит к соответствующим ограничениям на сетку. Это, в свою очередь, гарантирует обратимость отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$, что означает существование $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$. Непрерывность сопряжения между соседними элементами обеспечивается совпадением значений интерполяционных многочленов на границах между криволинейными элементами.

Как отмечено выше, геометрия (вообще говоря, криволинейная) объемных и граничных элементов задается с помощью многочленов Лагранжа. В случае изопараметрического МСЭ интерполяционные многочлены Лагранжа используются также для интерполяции функций внутри элемента. Контрольные точки $\xi_\alpha, \alpha = 0, \ldots, n_l$, необходимые для определения многочлена Лагранжа, задаются как набор из $n_l + 1$ точек кубатуры Гаусса-Лежандра-Лобатто (далее, GLL-точки), которые являются корнями уравнения $(1 - \xi^2) P_{n_l}'(\xi) = 0$, где P_{n_l}' - производная многочлена Лежандра степени n_l. Заметим, что среди GLL-точек всегда есть точки +1 и -1.

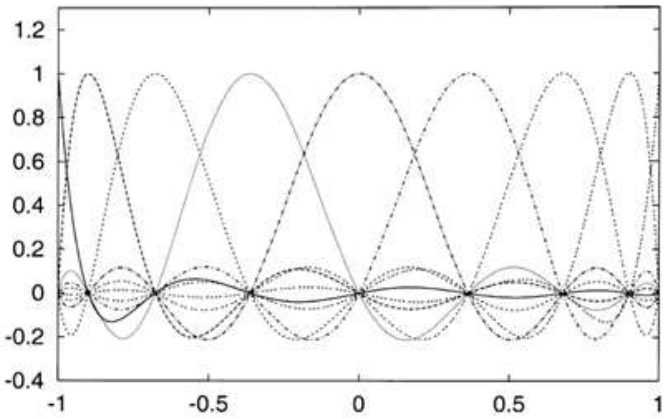


Рисунок 48 Интерполяционные многочлены Лагранжа степени N=8 в точках GLL на отрезке [-1, 1]. Точки GLL видны на горизонтальной оси. Все полиномы Лагранжа, по определению, равны 1 или 0 в каждой из этих точек.

На Рисунок 48 проиллюстрированы 9 многочленов Лагранжа степени 8, построенные на 9 контрольных GLL-точках.

Для вычисления интегралов по объему Ω и границе Γ представим их в виде суммы интегралов по отдельным элементам Ω_e и Γ_b соответственно, и рассмотрим подробнее вопрос интегрирования функции внутри элемента сетки. На граничных элементах Γ_b функция f интерполируется произведениями многочленов Лагранжа степени n_l:

$$f(\mathbf{x}(\xi,\eta)) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n_l} f^{\alpha\beta} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) \tag{3}$$

где коэффициенты $f^{\alpha\beta} = f(\mathbf{x}(\xi_\alpha,\eta_\beta))$ - значения f в узлах интерполяции. Векторная функция $\mathbf{g}$ интерполируется следующим образом:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(\xi,\eta)) = \sum_{\sigma=1}^{3} \mathbf{e}_\sigma \sum_{\alpha,\beta=0}^{n_l} g_\sigma^{\alpha\beta} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) \tag{4}$$

где $g_\sigma^{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\xi_\alpha,\eta_\beta)) \cdot \mathbf{e}_\sigma$. В методе спектральных элементов степень интерполяционного многочлена n_l, как правило, берется в диапазоне от 5 до 10 [542, 710], и совпадает со степенью отображающего многочлена в случае изопараметрического анализа.

Аналогично граничным элементам, внутри элемента объема Ω_e функция f интерполируется тройными произведениями многочленов Лагранжа степени n_l:

$$f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{n_l} f^{\alpha\beta\gamma} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\varsigma) \tag{5}$$

где $f^{\alpha\beta\gamma} = f(\mathbf{x}(\xi_\alpha,\eta_\beta,\varsigma_\gamma))$. Векторная функция $\mathbf{g}$ интерполируется следующим образом:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \sum_{\sigma=1}^{3} \mathbf{e}_\sigma \sum_{\alpha,\beta=0}^{n_l} g_\sigma^{\alpha\beta\gamma} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\varsigma) \tag{6}$$

где $g_\sigma^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta, \varsigma_\gamma)) \cdot \mathbf{e}_\sigma$

Используя полиномиальное представление, выпишем градиент ∇f функции f:

$$\nabla f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \approx \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \partial_i f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \tag{7}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{n_l} f^{\alpha\beta\gamma} [l_\alpha'(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\varsigma) \partial_i \xi + l_\alpha(\xi) l_\beta'(\eta) l_\gamma(\varsigma) \partial_i \eta + l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma'(\varsigma) \partial_i \varsigma]$$

Заметим, что в (7) используются элементы обратной матрицы Якоби. Обратная матрица Якоби $\partial\boldsymbol{\xi} / \partial\mathbf{x}$ существует, если якобиан $J_e = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \varsigma)} \right| \neq 0$, что является одним из необходимых требований к сетке при построении, как было упомянуто ранее. Также отметим, что благодаря выбору базисных функций в виде прямого произведения одномерных интерполяционных многочленов Лагранжа, для вычисления $\nabla f(\xi_{klm})$ в произвольной GLL-точке внутри спектрального элемента необходимо провести линейное по отношению к порядку элемента число арифметических операций (т.к. $l_\alpha(\xi_k) = \delta_{\alpha k}$). Данное свойство метода спектральных элементов называется свойством тензоризации и является одним из его отличительных преимуществ. В частности, свойство тензоризации утрачивается на треугольных/тетраэдральных элементах, где для вычисления производной функции в произвольной точке интегрирования требуется выполнить квадратичное/кубическое количество операций по отношению к порядку элемента. Для используемых на практике порядков аппроксимации (5-8) сокращение числа арифметических операций при использовании свойства тензоризации может достигать 10-20 раз [376].

Теперь выпишем приближенные формулы интегрирования функции f по элементу границы. Используя кубатурную формулу Гаусса-Лежандра-Лобатто [422, 443], включающую границы отрезка интегрирования, получим:

$$\int_{\Gamma_b} f(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\mathbf{x}(\xi,\eta)) J_b(\xi,\eta) d\xi d\eta \approx \sum_{\alpha,\beta=0}^{n_l} \omega_\alpha \omega_\beta f^{\alpha\beta} J_b^{\alpha\beta} \tag{8}$$

где $\omega_\alpha, \alpha = 0,\ldots,n_l$ - веса кубатурной формулы [360], $J_b^{\alpha\beta} = J_b(\xi_\alpha, \eta_\beta)$.

Приближенное интегрирование по объемному элементу Ω_e аналогично можно представить следующей формулой:

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\mathbf{x}(\xi,\eta,\varsigma))J_e(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma \approx \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{n_l} \omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma f^{\alpha\beta\gamma}J_e^{\alpha\beta\gamma} \qquad (9)$$

где $J_e^{\alpha\beta\gamma} = J_e(\xi_\alpha,\eta_\beta,\varsigma_\gamma)$. Отметим, что для численного интегрирования функций и их частных производных по элементу, значения компонент матрицы Якоби должны быть определены только в $(n_l+1)^3$ GLL-точках каждого элемента.

Как мы уже видели, в МСЭ расчетная область делится на элементы, которые в 3D являются гексаэдрами. На каждом индивидуальном элементе функции задаются в GLL-точках. Точки, лежащие на гранях, ребрах и в углах элементов становятся общими для данного элемента и соседних ему. Однако, следует различать узлы сетки, которые определяют элемент (локальная сетка), и все узлы сетки в модели, которые являются общими для соседних друг к другу элементов (глобальная сетка). Для выполнения одного шага по времени в МСЭ необходимо просуммировать вклад со всех элементов, содержащих точку глобальной сетки. В МКЭ эта процедура называется сборкой матрицы системы или ассемблированием [787]. Операция сборки является самой дорогой, с точки зрения операций доступа к памяти при параллельных вычислениях, так как она требует обмена данными между соседними элементами, что приводит к соответствующим обменам между процессорами, если элементы оказались в различных подобластях (подробнее данный вопрос рассмотрен в четвертой главе).

При рассмотрении динамических задач в первой главе была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию дискретной модели во времени:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \qquad (10)$$

где M - глобальная матрица масс, C - глобальная матрица демпфирования, K - глобальная матрица жесткости, F - вектор внешних нагрузок, U - вектор смещения глобальной системы, содержащий значения перемещения $\mathbf{u}$, определенные в узлах глобальной сетки. Рассмотрим, как изменится структура матрицы масс при применении МСЭ для ее вычисления. Для этого рассмотрим интеграл по элементу Ω_e, возникающий в вариационной постановке динамических уравнений упругости:

$$\int_{\Omega_e} \rho(\mathbf{x})\upsilon(\mathbf{x})\ddot{u}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \int_{\Lambda} \rho(\mathbf{x}(\xi))\upsilon(\mathbf{x}(\xi))\ddot{u}(\mathbf{x}(\xi))J_e(\xi)d^3\xi \approx$$

$$\approx \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho(\mathbf{x}(\xi,\eta,\zeta))\left[\sum_{i,j,k=0}^{N} \upsilon_{ijk} l_i(\xi) l_j(\eta) l_k(\varsigma)\right]\left[\sum_{l,m,n=0}^{N} \ddot{u}_{lmn} l_l(\xi) l_m(\eta) l_n(\varsigma)\right] J_e(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma \approx$$

$$\approx \sum_{r,s,t=0}^{N} \{\rho_{rst}\omega_r\omega_s\omega_t\left[\sum_{i,j,k=0}^{N} \upsilon_{ijk} l_i(\xi_r) l_j(\eta_s) l_k(\varsigma_t)\right]\left[\sum_{l,m,n=0}^{N} \ddot{u}_{lmn} l_l(\xi_r) l_m(\eta_s) l_n(\varsigma_t)\right] J_{rst}\}$$

Поскольку вариационная постановка должна выполняться для произвольных пробных функций *v(x)* из линейного функционального пространства, натянутого на базисные вектора – функции формы спектрального элемента, запишем полученное выражение для произвольной функции формы:

$$\int_{\Omega_e} \rho(\mathbf{x})\upsilon(\mathbf{x})\ddot{u}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \approx \sum_{r,s,t=0}^{N} \{\rho_{rst}\omega_{rst}\left[\sum_{i,j,k=0}^{N} \delta_{ir}\delta_{js}\delta_{kt}\right]\left[\sum_{l,m,n=0}^{N} \ddot{u}_{lmn}\delta_{lr}\delta_{ms}\delta_{nt}\right] J_{rst}\} =$$

$$= \sum_{l,m,n=0}^{N} \ddot{u}_{lmn} \sum_{i,j,k=0}^{N}\sum_{r,s,t=0}^{N} \rho_{rst}\omega_{rst}J_{rst}\delta_{ir}\delta_{js}\delta_{kt}\delta_{lr}\delta_{ms}\delta_{nt} =$$

$$= \sum_{l,m,n=0}^{N} \ddot{u}_{lmn} \sum_{i,j,k=0}^{N} \rho_{ijk}\omega_{ijk}J_{ijk}\delta_{(lmn)(ijk)} = \sum_{\alpha=1}^{(N+1)^3} \ddot{u}_{\alpha} \sum_{\beta=1}^{(N+1)^3} \rho_{\beta}\omega_{\beta}J_{\beta}\delta_{\alpha\beta} = M^e_{\alpha\beta}\ddot{u}_{\alpha}$$

Здесь мы сделали замену $\alpha = lmn, \beta = ijk$, так что $\alpha,\beta = 1,..,(N+1)^3$. Верхний индекс в $M^e_{\alpha\beta}$ означает, что это блок в глобальной матрице масс, стоящий на диагонали. Каждый диагональный блок является диагональной матрицей. Каждый элемент в нем задается выражением:

$$M^e_{\alpha\beta} = \rho_{\beta}\omega_{\beta}J_{\beta}\delta_{\alpha\beta} = \rho_{ijk}\omega_{ijk}J_{ijk}\delta_{ijk}$$

Таким образом, получаем, что все недиагональные блоки тождественно нулевые, что, в свою очередь, означает диагональность глобальной матрицы масс и является одним из ключевых достоинств метода спектральных элементов. Подробности построения глобальных матриц масс, жесткости подробно приведены в [542, 704].

В результате для решения системы (10) можно использовать полностью явную схему интегрирования по времени, переместив слагаемые, содержащие матрицы жесткости и затухания, в правую часть. Как было отмечено в главе 1, данная схема условно устойчива. Условие устойчивости Куранта диктуется отношением минимального размера элемента к максимальной скорости упругой волны. Согласно [363], условие устойчивости для метода спектральных элементов в неоднородной среде задается неравенством:

$$dt \le C \min_{\Omega_e \in \Omega} \frac{dl_e}{V_e} \qquad (11)$$

в котором по всем элементам сетки ищется минимум отношения наименьшего расстояния между GLL-точками в элементе к максимальной скорости распространения волны в среде, в которой находится данный элемент. C - число Куранта, которое определяется эмпирически и всегда меньше 1 (0.8 - 0.9 на сетках с хорошим качеством элементов).

Стоит сделать замечание касательно точности получаемого решения при использовании полностью явной схемы интегрирования по времени. Как было получено ранее, использование интерполяционных многочленов Лагранжа в совокупности с квадратурами и кубатурами Гаусса-Лежандра-Лобатто приводит к диагональной матрице масс, что в дальнейшем ведет к явной схеме интегрирования по времени. Однако, даже на квадратном элементе с постоянными по элементу упругими свойствами правило интегрирования Гаусса-Лежандра-Лобатто дает точный результат только для многочленов степени $2n_l - 1$. В то же время, интегрирование по эталонному элементу при вычислении матрицы масс, как мы видели, приводит к интегрированию двух многочленов степени n_l - произведение смещения и тестовой функции. В связи с чем результат интегрирования многочлена степени $2n_l$ неточен даже случае квадратного элемента [539].

Следует также отметить, что при использовании цилиндрических (или полярных) координат GLL-квадратура вырождается на оси симметрии. Поэтому в случае цилиндрических координат, если ось симметрии принадлежит области, в которой решается задача, для соосных (коаксиальных) элементов используются другие квадратуры и аппроксимирующие полиномы, например, квадратура Гаусса-Якоби-Лобатто позволяет получить невырожденный якобиан на оси [641].

Построение спектральноэлементных сеток

В настоящий момент проблема построения оптимальных сеток подробно изучена для случая треугольной сетки на плоскости. Это случай, так называемой, триангуляции Делоне [78, 237], для которой доказаны некоторые свойства оптимальности [237]. Существует большое количество методов и программ по ее построению при наличии заранее заданной системы точек. В случае ее отсутствия эффективным методом построения треугольной сетки является, так называемый, метод продвигаемого фронта (Advancing Front Method) [610, 611]. Для тетраэдральной сетки в 3D также существует понятие триангуляции Делоне и достаточно широкий выбор программных продуктов и методов по построению тетраэдральных сеток.

Как было упомянуто ранее, метод спектральных элементов использует для дискретизации криволинейные в общем случае четырехугольные и гексаэдральные сетки. Преимуществом данных сеток является тот факт, что для получения одной и той же точности при вычислениях

на гексаэдральной или четырехугольной сетках требуется гораздо меньше элементов, чем в случае тетраэдральной или треугольной сеток. Кроме того, в ряде случаев (так называемых, “жестких” задач, в особенности при больших деформациях и физической нелинейности материала тела) использование гексаэдральной или четырехугольной сеток высокого порядка позволяет получить решение в большем диапазоне значений граничных условий, чем при использовании треугольных и тетраэдральных сеток первого порядка. Это обстоятельство связано с так называемым эффектом запирания (locking) МКЭ-сетки, приводящим к завышенной жесткости конечноэлементной системы [488, 787].

В настоящий момент не существует надежных методов построения неструктурированных четырехугольных и гексаэдральных сеток, устойчиво работающих и дающих приемлемое качество сетки при построении на произвольной геометрии тела (computer aided design (CAD) модели). Одним из хорошо зарекомендовавших себя методов построения качественной четырехугольной неструктурированной сетки является алгоритм "Paving", разработанный национальной лабораторией Sandia [763] и реализованный в коммерческом пакете Cubit(tm) [799]. Этот метод имеет сходство с методом продвигаемого фронта, но элементы сетки в нем уже не треугольники, а четырехугольники, а сам метод в целом сложнее в реализации.

Что касается построения неструктурированных гексаэдральных сеток в 3D, здесь также не существует методов построения, дающих приемлемое качество сетки, построенной на произвольной геометрии (CAD-модели). При построении сетки на геометрической модели, состоящей из примитивов таких, как цилиндр, ситуация упрощается. Достаточно построить четырехугольную сетку в круге, например, методом "Paving", затем достроить сетку до гексаэдральной в цилиндре с равномерным шагом вдоль цилиндра. Ниже (Рисунок 49) приведён пример сетки для такой геометрии. Она содержит около 100000 элементов и имеет 4-ый порядок аппроксимации по пространству, что соответствует 64 базисным полиномам Лагранжа (построенным по GLL-узлам) на каждый элемент. В результате получаем почти 3000000 узлов. Более того, если требуется обеспечить уменьшение размера элементов при приближении к центру, то потребуется задавать более мелкий шаг сетки вдоль оси цилиндра, что приведет к росту общего числа элементов в сетке и ухудшению качества сетки по такому параметру как соотношение сторон, которое может достигать в данном случае значения 100.

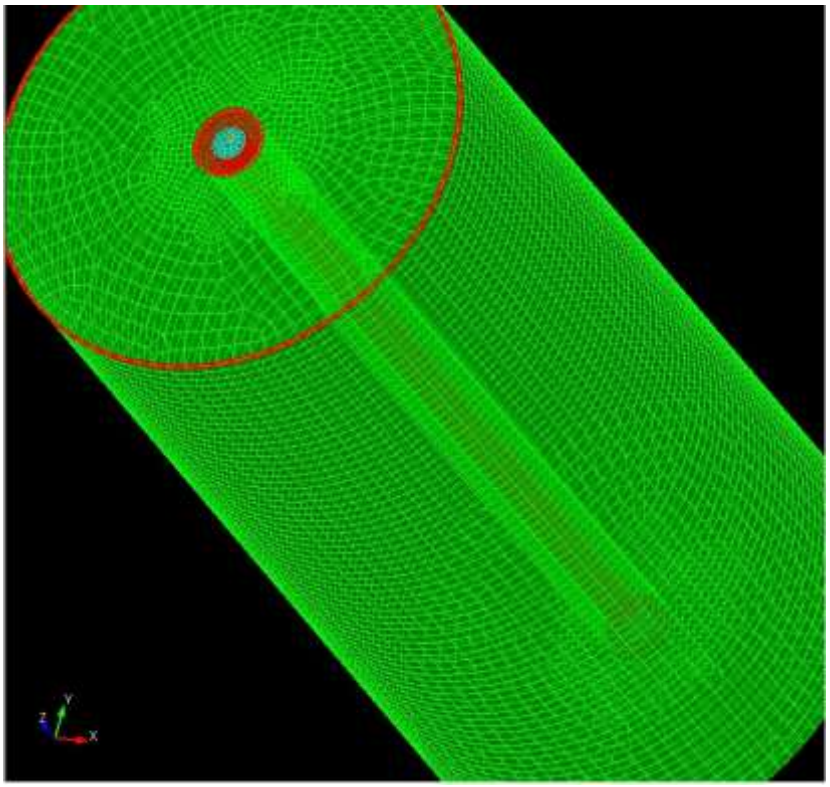
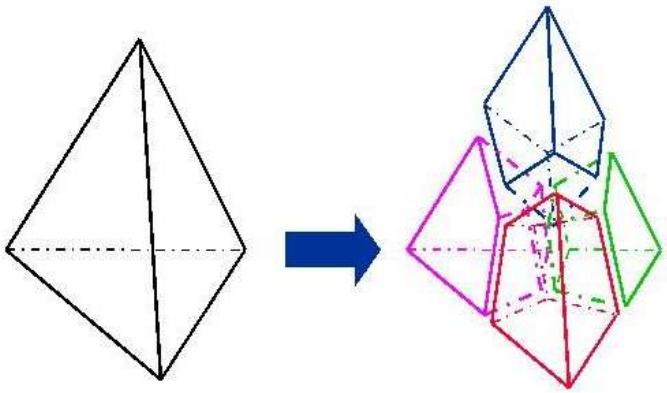


Рисунок 49 Неструктурированная гексаэдральная сетка на цилиндре

В случае более сложной геометрии не всегда можно построить полностью гексаэдральную сетку. В этих случаях можно построить сначала сетку, состоящую из тетраэдров, а затем разбить каждый тетраэдр на 4 гексаэдра (THex), добавляя к каждому ребру серединную точку и еще одну точку внутри тетраэдра (Рисунок 50). Итоговая сетка (Рисунок 51) не обладает близким к кубическому соотношением геометрических размеров для полученных гексаэдральных элементов, в ней также нарушен баланс между числом элементов и числом узлов, характерный для гексаэдральных сеток, рассмотренных ранее, но она, тем не менее, позволяет применить МСЭ даже для пространственных областей сложной формы.



Conversion of a tetrahedron to four hexahedra, as performed by the THex algorithm.

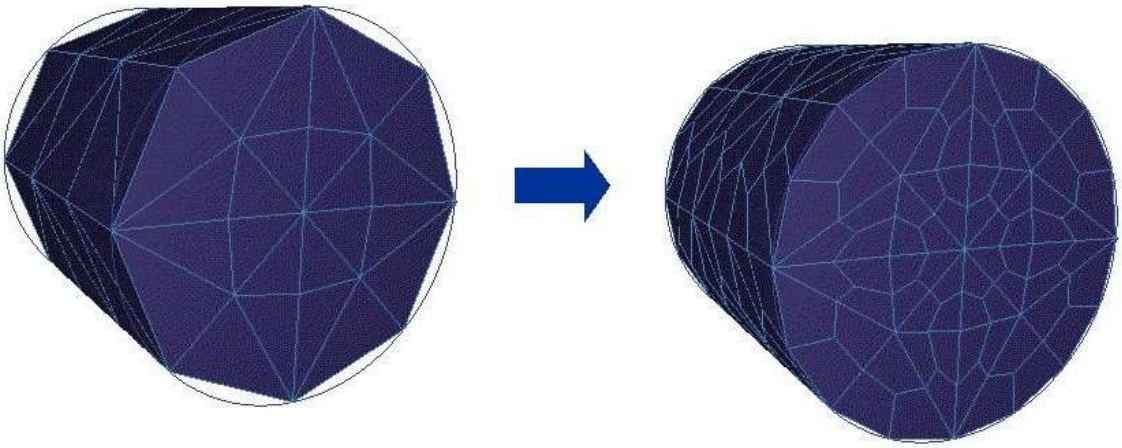


Рисунок 50 Получение гексаэдральной сетки из тетраэдральной

Метод спектральных элементов, как и метод конечных элементов, чувствителен к сетке и ее качеству. Использование сеток плохого качества может привести, например, к увеличению длительности расчета, к плохой или недостаточной сходимости решения, неточным результатам, накоплениям численных ошибок в процессе расчета.

Как любой другой численной метод, основанный на работе с неструктурированными сетками, МСЭ требует гладкого изменения якобиана от элемента к элементу и приемлемое искажение элемента (отклонение от эталонного куба). Чтобы описать искажение элемента, вводят несколько параметров. Качество сетки по какому-либо параметру выбирается равным качеству наихудшего по этому параметру элемента. Одним из так параметров является, так называемый, коэффициент скошенности элемента (*skewness* или *skew factor*)

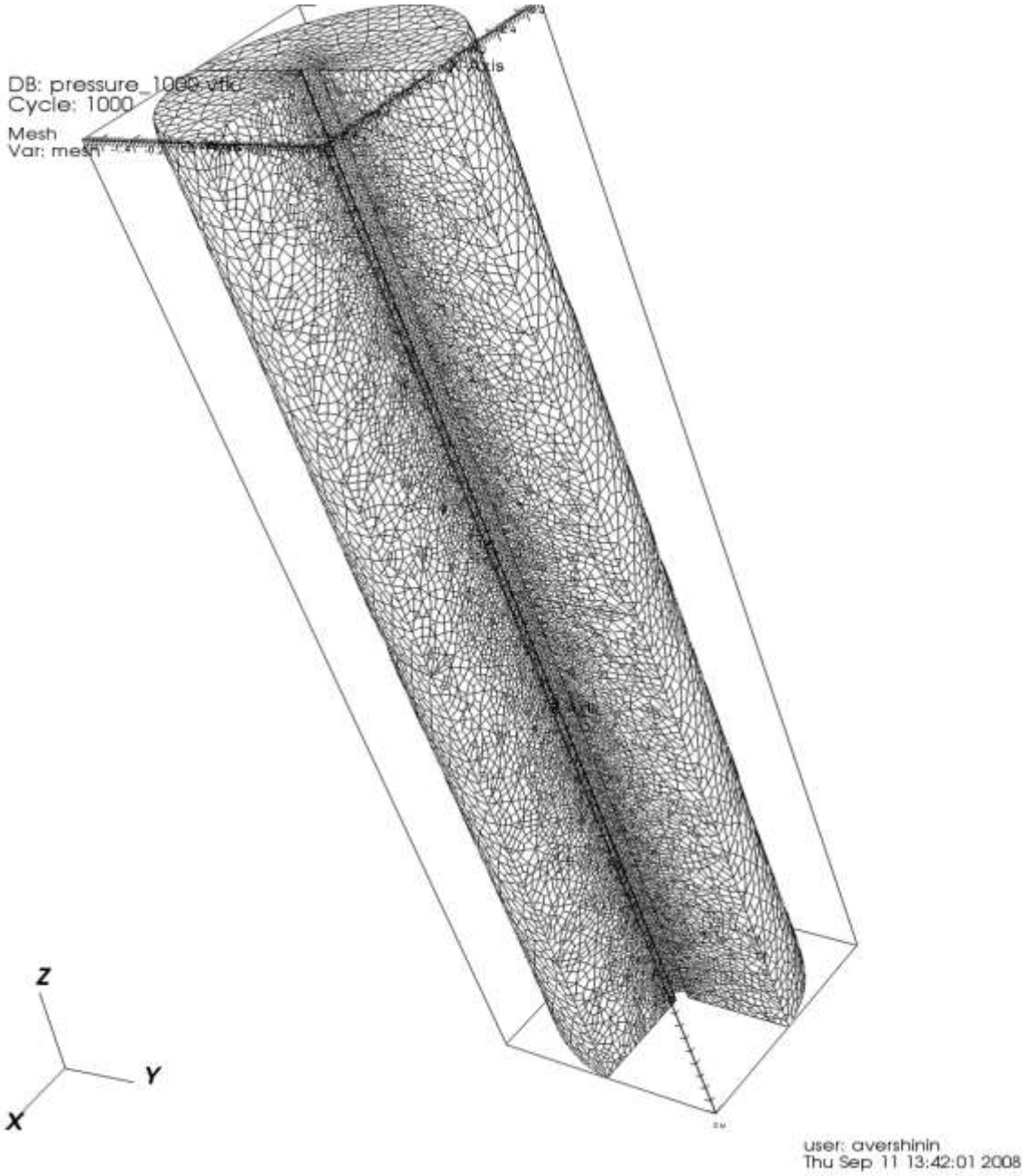


Рисунок 51 Гексаэдральная сетка, полученная путем разбиения тетраэдральной

$$Skew = \max\left[\frac{\theta_{max} - \theta_e}{180^O - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{min}}{\theta_e}\right],$$

где θ_{max} - максимальный по всем граням угол в элементе, θ_{min} - минимальный по всем граням угол в элементе, θ_e - оптимальный угол, равный 90^O для сетки из четырехугольников или гексаэдров.

Этот параметр показывает, насколько сильно углы элемента отличаются от наилучшего. Чем больше этот параметр, тем меньше синус "плохого" угла, тем меньше наименьшее попарное расстояние между GLL-точками в этом элементе, тем заведомо меньше число

Куранта и шаг интегрирования по времени. Для куба, очевидно, коэффициент скошенности равен 0. Если максимальный по всем элементам $Skew < 0.5$, то сетка считается "отличной", если $Skew < 0.85$, то "хорошей".

Другим параметром, описывающим искажение элемента, является соотношение сторон (*Edge Ratio*):

$$EdgeRatio = \frac{l_{\max}}{l_{\min}}$$

где $l_{\max}$ - длина самого длинного ребра в элементе, $l_{\min}$ - длина самого короткого ребра в элементе. Этот параметр показывает, насколько вытянут элемент. Как правило, значения $EdgeRatio < 4$ считаются хорошими, значения $EdgeRatio < 8$ - допустимыми. Для идеального куба $EdgeRatio = 1$.

Таким образом, skew factor и edge ratio количественно показывают, как исходный элемент отличается от идеального куба. В качестве примера сравнения качества сеток, построенных различными методами, рассмотрим задачу построения неструктурированной конформной гексаэдральной сетки для системы из 4х вложенных цилиндров. Радиусы цилиндров и требуемые шаги сетки в каждом из них приведены в таблице 1.

id	R, м	h, м
1	0.03429	0.15
2	0.060325	0.15
3	0.0762	0.15
4	3	0.1

Таблица 1. Радиусы вложенных цилиндров и шаги сетки в них.

Высота модели $H = 7$. Построим сетку для данной модели, используя различные методы и генераторы сеток. Первый способ – описанный выше метод разбиения тетраэдральной сетки на гексаэдральную (T-Hex).

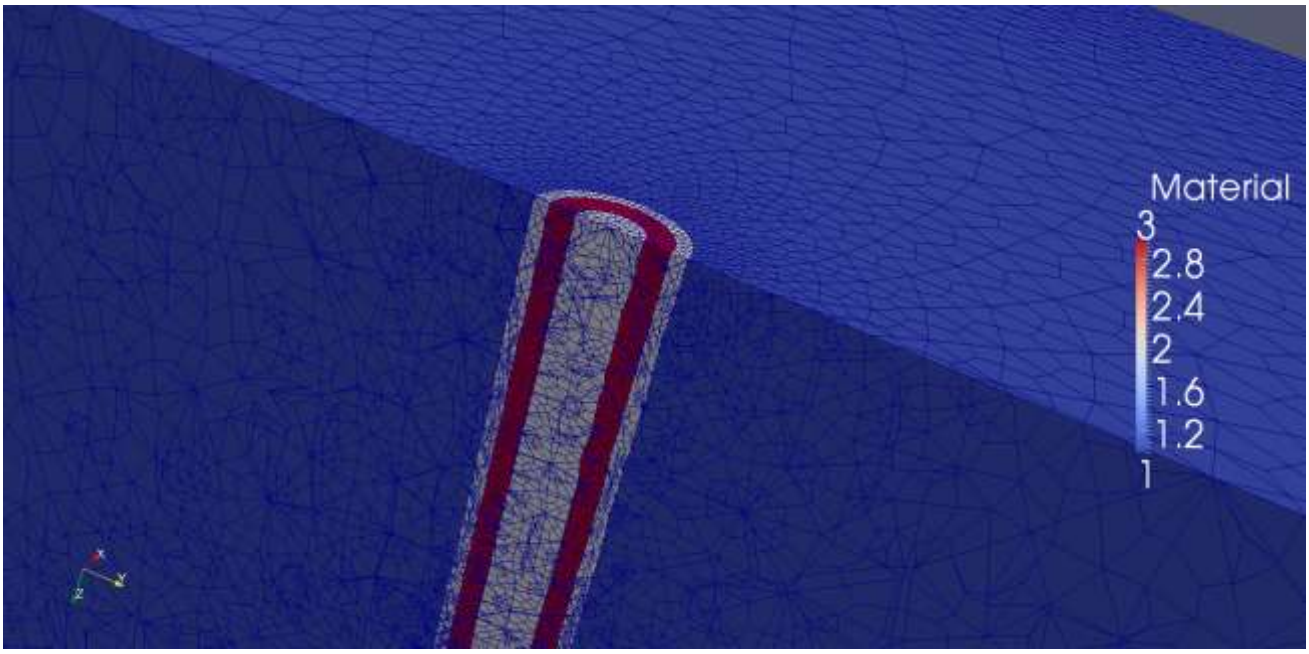


Рисунок 52 Неструктурированная гексаэдральная сетка, построенная методом THex.

На Рисунок 52 представлен фрагмент сетки для заданной геометрии, построенный генератором тетраэдральных сеток и дальнейшей трансформации полученной тетраэдральной сетки в гексаэдральную путем разбиения каждого тетраэдра на гексаэдры. Статистика по полученной сетке приведена в таблице 2.

Метод	Число Элементов	Соотношение ребер	Коэффициент скошенности	Минимальное ребро
T-Hex	1 400 024	13.41976	0.97394	0.000896

Таблица 2. Статистика по качеству сетки, построенной методом THex.

Как видно из таблицы, данная сетка имеет неудовлетворительное качество по двум параметрам: соотношение сторон и коэффициент скошенности. Неудовлетворительное значение коэффициента скошенности можно объяснить тем, что для тетраэдральной сетки оптимальным является угол, равный 60 градусам (это учитывается при построении тетраэдральной сетки), в то время как для гексаэдра он равен 90 градусам.

Далее рассмотрим сетку, построенную промышленным генератором гексаэдральных сеток Hexotic(tm) [802]. На Рисунок 53 представлен фрагмент сетки. В таблице 3 приведена статистика по сетке.

Метод	Число Элементов	Соотношение ребер	Коэффициент скошенности	Минимальное ребро
Hexotic	1 273 824	4.096975	0.809425	0.00158

Таблица 3. Статистика по качеству сетки, построенной пакетом Hexotic(tm).

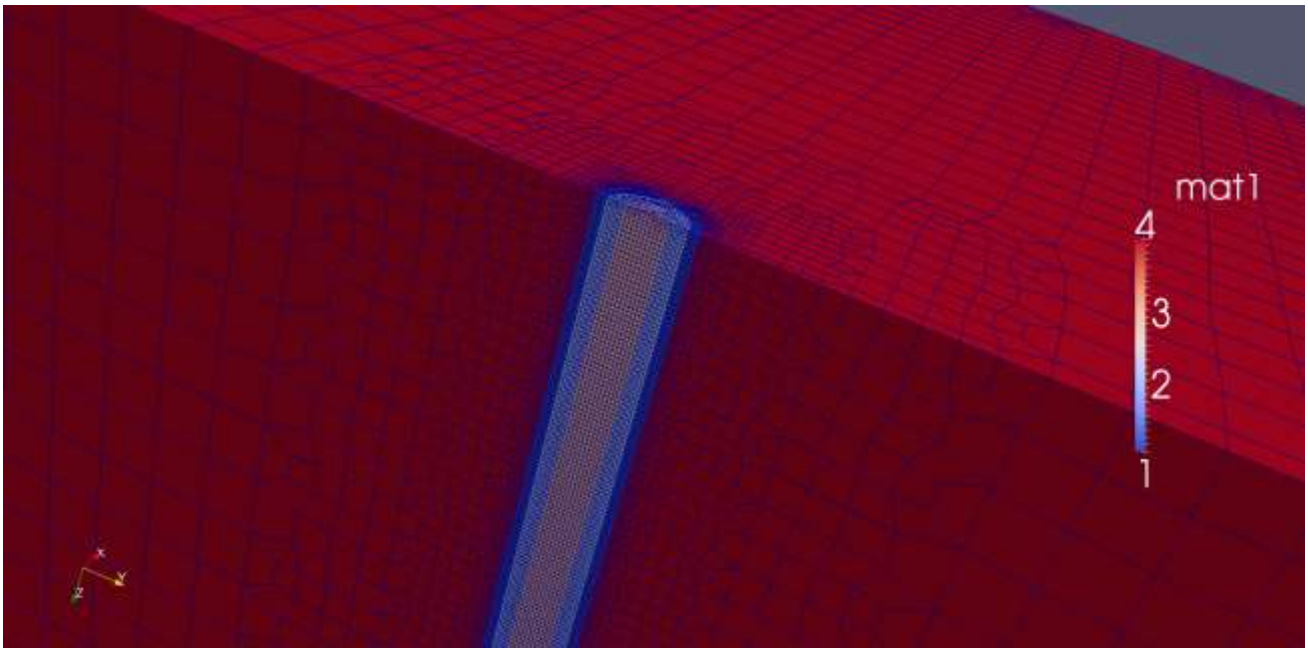


Рисунок 53 Неструктурированная гексаэдральная сетка, построенная пакетом Hexotic(tm).

В отличие от предыдущего примера, сетка удовлетворяет критериям качества, и, что немаловажно, наикратчайшее ребро среди всех элементов оказалось больше. Но при этом общее число элементов сетки не сильно отличается от предыдущего примера. И, как видно из Рисунок 53, размеры элементов внутри первых трех цлиндров слишком малы, и, следовательно, наикратчайшее ребро среди всех элементов недостаточно велико.

Последний пример - пример сетки, полученной генератором Cubit(tm) [799].

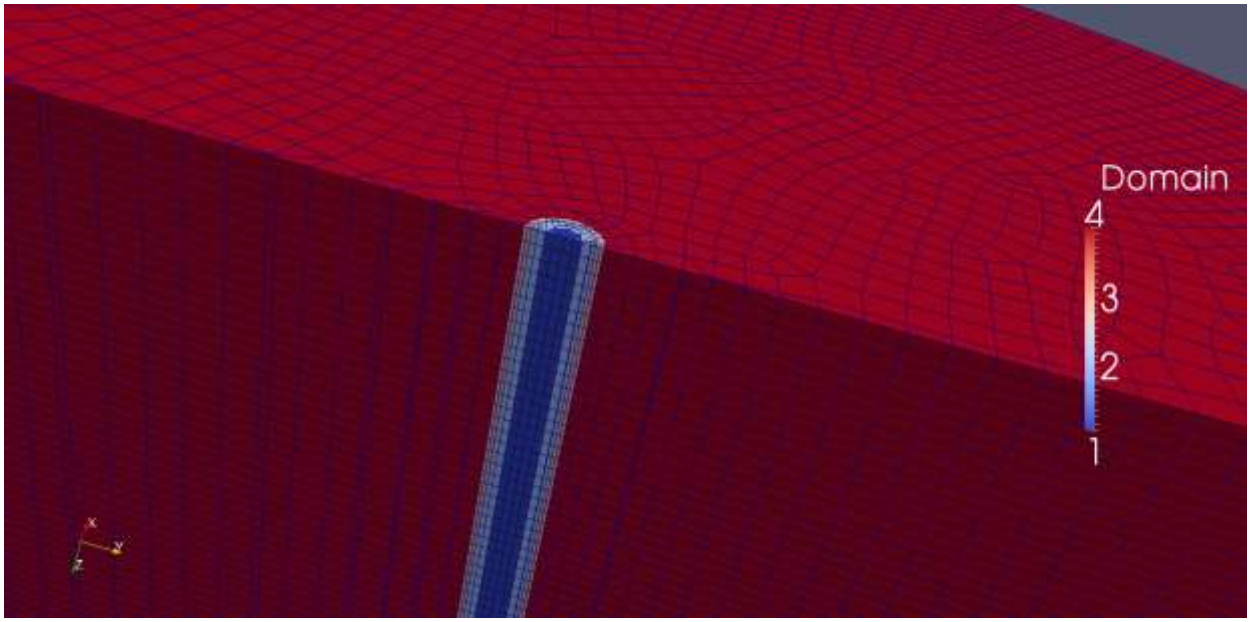


Рисунок 54 Неструктурированная гексаэдральная сетка, построенная пакетом Cubit(tm).

Метод	Число Элементов	Соотношение	Коэффициент	Минимальное

		ребер	скошенности	ребро
Cubit	947 592	5.714688	0.815385	0.005425

Таблица 4. Статистика по качеству сетки, построенной пакетом Cubit(tm).

На Рисунок 54 представлен фрагмент сетки. В таблице 4 приведена статистика по сетке. Данная сетка имеет вполне приемлемое качество, и, вдобавок, меньшее число элементов и большую длину наикратчайшего ребра. Тем не менее, у данной сетки (и у самого генератора) есть один недостаток - несмотря на то, что все четурехугольные элементы на верхем торце цилиндра имеют приемлемое качество и различные длины ребер в различных подобластях, все элементы объемной сетки имеют одинаковую толщину вдоль оси *z* - шаг по оси *z*. Это объясняется тем, что в данном генераторе реализован метод построения объемных сеток – *Sweep (Протяжка)*, в котором сначала строится неструктурирования четырехугольная сетка в плоскости *OXY*, например, алгоритмом "*Paving*" [763]. Затем на основе данной двумерной сетки строится объемная трехмерная сетка, структурированная в плоскости, содержащей ось *Z*. Сетки, построенные данным способом, могут иметь неудовлетворительное значение соотношения сторон (*Edge Ratio*) ввиду того, что наименьшая и наибольшая длины ребер среди всех элементов двумерной сетки могут различаться на порядки, например, в случае областей с концентраторами напряжений небольшого относительного размера. При этом длины ребер вдоль *Z* у данных элементов имеют одинаковые (или близкие) значения.

Повышение порядка элементов сетки.

Как было замечено, следует различать узлы сетки, которые определяют объемный элемент (локальная сетка из GLL-узлов), и все узлы сетки в модели, которые являются общими для соседних друг к другу элементов (глобальная сетка). В случае сетки первого порядка объемным элементом является гексаэдр (шестигранник), который задается 8-ю опорными точками. Форму элемента можно уточнить, введя дополнительные точки на каждом ребре, на каждой грани и внутри элемента, тем самым повысив число точек до 27 и получив криволинейный элемент 2-го порядка. В общем случае элемент *N*-порядка задается $(N+1)^3$ опорными точками. Процедура повышения порядка элементов позволяет точнее описывать криволинейные границы области без увеличения общего количества элементов, уточнять расположение GLL-точек, тем самым повышая точность решения.

Генерация криволинейной сетки может быть реализована как отдельная функция, делающая преобразование уже построенной сетки 1-го порядка в сетку высокого порядка. Например, это может быть выполнено следующим образом. На первом этапе создается связанный список всех ребер и всех граней исходной сетки. Каждое ребро помечается как граничное или неграничное - ребро является граничным, если оба его конца лежат на границе

между подобластями, в противном случае ребро негранничное. Аналогично ребрам, каждая грань элемента помечается как граничная, если хотя бы два ребра, принадлежащих этой грани, являются граничными, в противном случае грань считается негранничной. Затем на каждое ребро наносим *N-1* GLL-точек. Если ребро граничное, то точки проецируем на криволинейную границу между подобластями (например, цилиндрическую поверхность), иначе оставляем без изменений.

Формирование внутренних GLL-точек на гранях происходит похожим образом. Выбирается пара так называемых ведущих ребер - пара противоположных граничных ребер с уже нанесенными внутренними точками. Теперь, когда ведущие ребра выбраны, производится цикл по внутренним точкам одного из ведущих ребер (т.е. по всем точкам, принадлежащим ребру, кроме тех, что являются его концами). Для каждой внутренней точки ведущего ребра выбирается соответствующая ей внутренняя точка другого ведущего ребра. Затем на отрезке, соединяющем эти две внутренние точки, расставляются *N-1* GLL-точек, и производится переход к следующей паре точек. Далее, если грань является граничной, то сформированные точки проецируем на криволинейную границу между подобластями (например, цилиндрическую поверхность), иначе оставляем без изменений. Таким образом, мы расставим $(N-1)^2$ точек на всех гранях элементов. После завершения формирования граничных GLL-точек внутренние (внутри объема спектрального элемента) точки формируются на основе отображения (2). В качестве примера, рассмотрим следующую задачу о круговом включении в упругом теле (Рисунок 55).

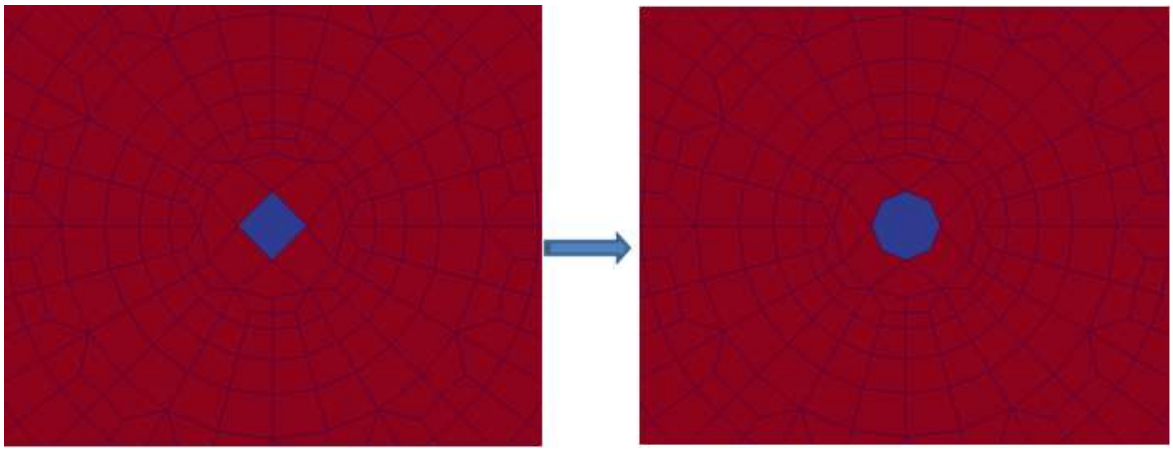


Рисунок 55 Преобразование сетки 1го порядка в сетку 2го порядка с промежуточными узлами

Построим в ней сетку так, чтобы круглое включение описывалось одним элементом - квадратом. Затем преобразуем полученную сетку в криволинейную сетку и рассмотрим на этих сетках распределение GLL-точек для случая спектральных элементов 8го порядка.

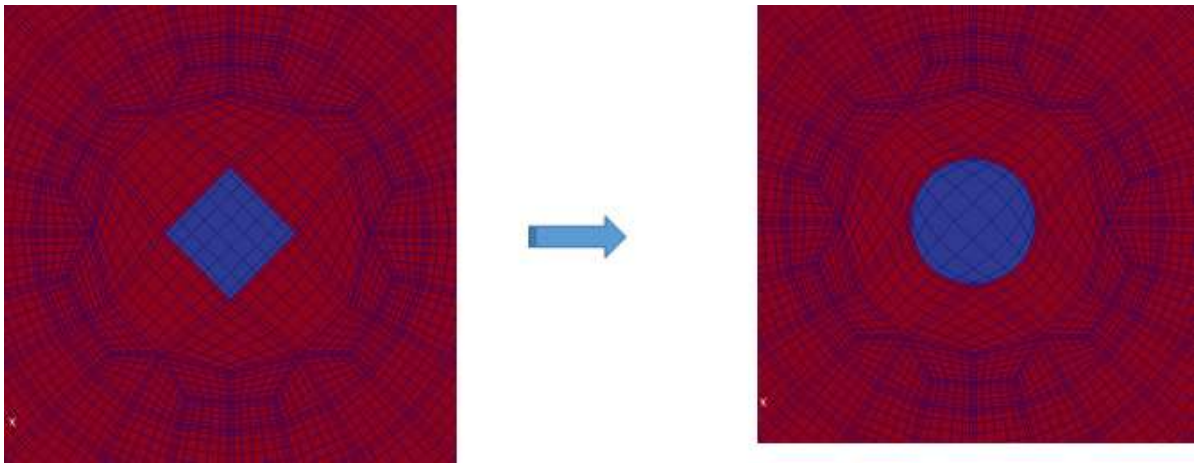


Рисунок 56 Спектральноэлементные сетки. Слева - сетка высокого порядка для исходной дискретизации, справа - сетка с использованием изопараметрических спектральных элементов с адаптированным под геометрию расположением узлов.

Как видно из Рисунок 56 слева, GLL-точки выстраиваются в соответствии с геометрией исходного квадратного элемента. На Рисунок 56 справа GLL-точки выстраиваются уже вдоль границы кругового включения, обеспечивая необходимую точность дискретизации даже на одном спектральном элементе во включении. Таким образом, техника расположения GLL-узлов изопараметрических спектральных элементов в соответствии с исходной криволинейной геометрией тела позволяет точнее осуществлять дискретизацию границ областей, не увеличивая при этом число элементов и узлов сетки. В соответствии с приведенными в предыдущем разделе критериями качества сетки данный подход позволяет существенно сократить общее число элементов и максимизировать минимальный размер элемента. Точность дискретизации области и аппроксимации искомой функции достигается не за счет измельчения сетки, а за счет повышения порядка спектральных элементов с одновременной адаптацией их формы к криволинейной геометрии тела. В [342] показана спектральная сходимость (superconvergence) метода спектральных элементов на гладких решениях: $\|u - u_h\| \leq Ch^N e^{-N}$ в H^1-норме, где h – характерный размер сеточного элемента, N – порядок элемента, C – константа, не зависящая от h и N. Для предложенного изопараметрического метода спектральных элементов проведем оценку скорости убывания вычислительной ошибки в зависимости от порядка элемента на задачах с известными аналитическими решениями: задаче Кирша и задаче Ламе.

Двумерный случай (задача Кирша).

Рассматривается растяжение квадратной пластины из изотропного материала с модулем Юнга 2e11 Па и коэффициентом Пуассона 0.3 со стороной 10 и центральным отверстием диаметром 0.5. Как была отмечено выше, основное преимущество метода спектральных элементов

заключается в быстрой сходимости к точному решению при меньшем количестве узлов по сравнению с методом конечных элементов. Для проверки экспоненциальной сходимости к точному решению даже на грубой исходной сетке рассмотрим дискретизацию расчетной области спектральными элементами относительно большого размера (Рисунок 57).

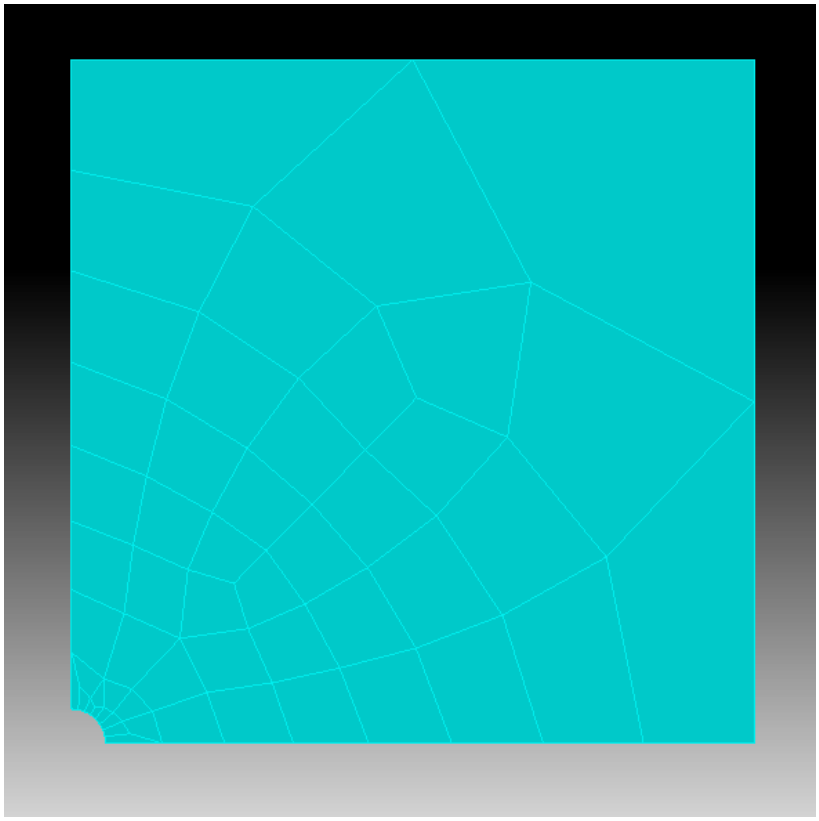


Рисунок 57 Сетка для задачи Кирша

Как известно [234], напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ на границе отверстия должно в три раза превышать растягивающее напряжение на границе пластины. Был проведён расчёт на данной сетке методом спектральных элементов со степенями аппроксимирующих полиномов от 2 до 9. На Рисунок 58 голубой пунктирной линией обозначены результаты для различных степеней аппроксимирующих многочленов для метода спектральных элементов. Для проверки того, что вычислительная ошибка убывает с экспоненциальной скоростью, результаты приведены в логарифмическом масштабе. Для сравнения на графике приведена также линейная функция, обозначенная желтым.

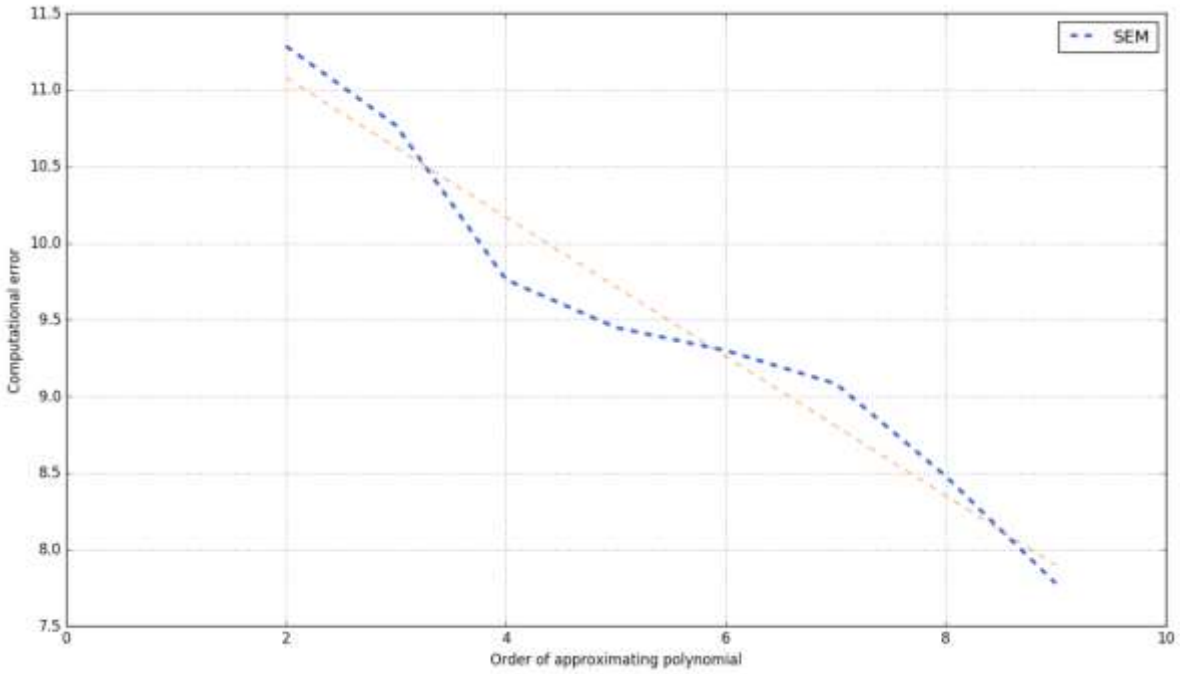


Рисунок 58 Зависимость численной ошибки (в логарифмическом масштабе) от степени аппроксимирующих полиномов для задачи Кирша – голубая пунктирная линия. Жёлтым пунктиром обозначена линейная функция для наглядности.

Трёхмерный случай (задача Ламе).

Рассматривается толстостенный цилиндр высотой 0.5 и радиусом 2, с толщиной стенок 1 из изотропного материала с модулем Юнга 2e11 Па и коэффициентом Пуассона 0.3, нагруженный внутренним и внешним давлениями 1e6 Па и 0.5e6 Па соответственно.



Рисунок 59 Сетка для задачи Ламе

Как и в двумерном случае, исходная сетка бралась достаточно грубой (Рисунок 59) для проверки экспоненциальной сходимости с увеличением порядка элемента.

В соответствии аналитическим решением [234] напряжение на внутренней стенке цилиндра должно быть равно σzz = $2\nu\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$ = -200000, где a – внутренний радиус, b – внешний радиус, pa и pb – соответственно внутреннее и внешнее давления, ν – коэффициент Пуассона.

Численная ошибка (в логарифмическом масштабе) в зависимости от порядка спектрального элемента приведена на Рисунок 60.

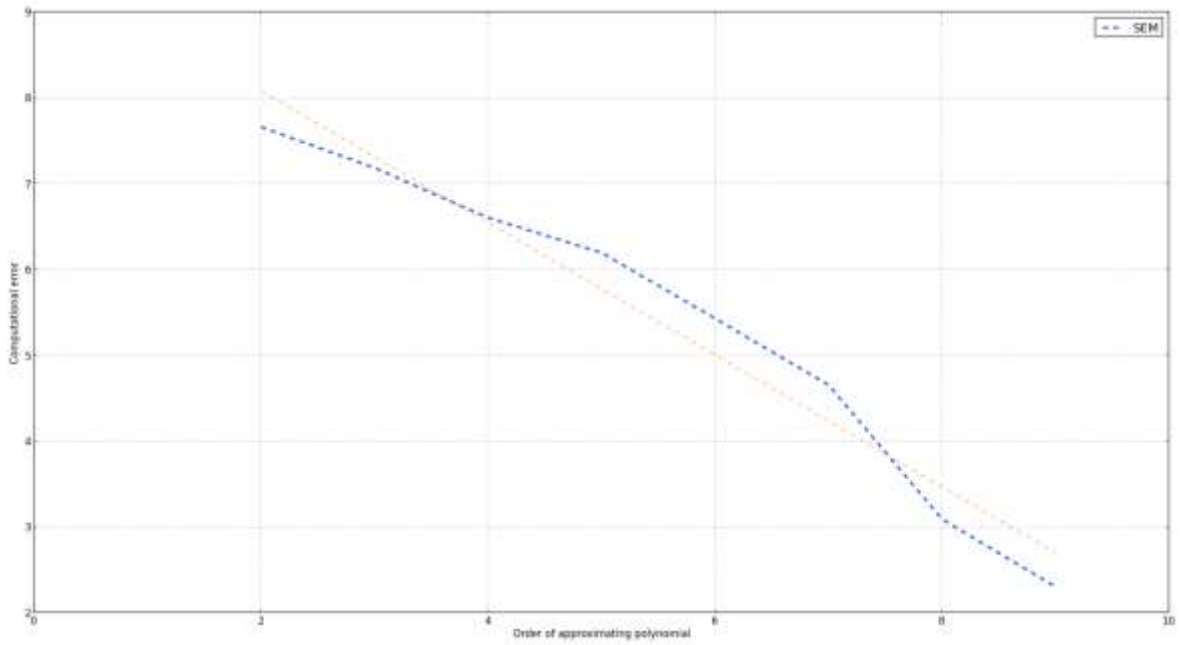


Рисунок 60 Зависимость численной ошибки (в логарифмическом масштабе) от степени аппроксимирующих полиномов для задачи Ламе – голубая пунктирная линия. Жёлтым пунктиром обозначена линейная функция для наглядности.

Как и в двумерном случае, отметим близость полученного графика к линейной функции.

Алгоритм дискретизации задач теории наложения конечных деформаций на основе МСЭ

В заключение данного параграфа изложим пошаговый алгоритм решения краевой задачи теории многократного наложения больших деформаций (Глава 1) с помощью изопараметрического метода спектральных элементов.

1) Построение начальной конечноэлементной сетки:

Построение конформной неструктурированной сетки на геометрической модели (области) происходит с помощью препроцессора CAE Fidesys, поддерживающего возможность разбиения области как на элементы первого порядка, так и на криволинейные элементы. Кроме того, подерживается возможность дискретизации области как тетраэральными элементами, так и гексаэдральными.

2) Вычисление дополнительных узлов сетки изопараметрических спектральных элементов:

Расчет положения дополнительных узлов сетки на геометрической модели для изопараметрических спектральных элементов производится с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа для четырехугольных плоских элементов и трехмерных гексаэдральных

элементов. После чего положение узлов, лежащих на гранях элементов, примыкающих к криволинейным границам тела, корректируется в соответствии с описанным ранее алгоритмом. Также на этом этапе происходит вычисление весовых коэффициентов для использования далее в расчете интегралов с помощью квадратурных формул Гаусса-Лежандра-Лобатто.

3) Построение функций формы для модифицированной сетки:

Расчет локальных функций формы изопараметрических спектральных элементов для четырехугольных плоских элементов и трехмерных гексаэдральных элементов производится с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа и квадратурных узлов Гаусса-Лежандра-Лобатто. N-я функция формы равна единице в N-м узле интегрирования, и равна 0 на остальных узлах интегрирования.

4) Вычисление глобальной матрицы масс (для динамических задач):

Расчет глобальной матрицы масс состоит из двух этапов: вычисление локальной матрицы масс на каждом элементе сетки и сборки глобальной матрицы масс. Локальная матрица масс рассчитывается с помощью вычисления интегралов от произведения плотности среды, заданной на этом элементе, и пар функций формы (происходит перебор всех возможных пар). Вычисление интеграла происходит с помощью квадратурных формул с весовыми коэффициентами, вычисляемыми в пункте 2). Значения этого набора интегралов позволяют сформировать локальную матрицу масс. Сборка глобальной матрицы масс происходит путем подсуммирования значений из локальной матрицы масс в соответствующие элементы глобальной матрицы масс (ассемблирование).

5) Вычисление глобального вектора внутренних сил (для динамических задач и явной схемы интегрирования по времени):

Расчет глобального вектора внутренних сил состоит из трех этапов: вычисление напряжений и градиентов функций формы в узлах сетки геометрической модели, вычисление локального вектора внутренних сил, сборка глобального вектора внутренних сил. Вычисление градиентов функций формы проводится аналитически путем прямого дифференцирования функций формы спектральных элементов. Расчет напряжений в узлах геометрической модели происходит с помощью уже вычисленных градиентов функций формы и упругих свойств, заданных на элементах сетки. Далее проводится расчет элементов локального вектора внутренних сил с помощью вычисления интегралов по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра-Лобатто от произведения напряжений и градиентов функций форм. Сборка глобального вектора внутренних сил происходит путем подсуммирования значений из локального вектора внутренних сил в соответствующие элементы глобального вектора внутренних сил.

6) Вычисление глобальной матрицы жесткости (для линейного приближения в статических задачах или динамических задачах при неявной схеме интегрирования по времени):

Расчет глобальной матрицы жесткости состоит из трех этапов: вычисление значений необходимых параметров материала в узлах сетки и градиентов функций формы в узлах сетки дискретной модели, вычисление локальной матрицы жесткости, сборка глобальной матрицы жесткости. Вычисление градиентов функций формы проводится, как и ранее, аналитически. Расчет элементов локальной матрицы жесткости происходит с помощью численного расчета интегралов от парного произведения градиентов функций форм и соответствующих параметров материалов (в общем случае также изменяющихся внутри элемента). Сборка глобальной матрицы жесткости происходит путем подсуммирования значений из локальной матрицы жесткости в соответствующие элементы глобальной матрицы жесткости.

7) Вычисление вектора внешних сил:

Расчет глобального вектора внешних сил состоит из двух этапов: вычисление локального вектора внешних сил, сборка глобального вектора внешних сил. Вычисление элементов локального вектора внешних сил происходит с помощью расчета объемных интегралов от произведения функций формы и векторов внешних массовых сил, а также расчета поверхностных интегралов от граничных условий. Сборка глобального вектора внешних сил происходит путем подсуммирования значений из локального вектора внешних сил в соответствующие элементы глобального вектора внешних сил.

8) Вычисление неизвестных для следующего временного шага (для динамических задач):

В линейном случае для динамических задач с неявной схемой интегрирования по времени расчет неизвестных для следующего шага по времени происходит с помощью решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных узловых ускорений. Матрица системы формируется на основе глобальной матрицы масс и глобальной матрицы жесткости. Вектор правой части формируется на основе глобального вектора внешних сил. В нелинейном случае для динамических задач с неявной схемой интегрирования по времени составляется система нелинейных алгебраических уравнений из матриц масс, глобального вектора внешних сил, глобального вектора внутренних сил. Система далее решается с помощью метода Ньютона.

9) Интегрирование по времени (для динамических задач):

Интегрирование по времени системы обыкновенных дифференциальных уравнений производится с помощью схемы Ньюмарка 2го порядка точности, дающей возможность

проводить интегрирование как явной, так и неявной схемой по времени. Для динамических задач с явной схемой интегрирования по времени расчет неизвестных на следующем временном слое происходит также с помощью решения СЛАУ, но в данном случае матрицей системы является только матрица масс, которая в силу использования МСЭ имеет диагональный вид, а правая часть системы уравнений является суммой глобальных векторов внутренних и внешних сил. Таким образом, вектор неизвестных узловых ускорений вычисляется простым делением соответствующих элементов вектора правой части СЛАУ на диагональные элементы матрицы СЛАУ.

10) Вычисление неизвестных путем решения СЛАУ (для статических задач):

В линейном приближении расчет неизвестных для статических задач проводится с помощью решения СЛАУ, где матрицей СЛАУ является матрица жесткости, а вектором правой части СЛАУ является глобальный вектор внешних сил. В нелинейном случае расчет неизвестных происходит путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона.

11) Перестроение сетки:

Для следующего расчетного шага наложения необходимо перестроение расчетной сетки с учетом изменившейся геометрии тела в результате нагружения на предыдущем шаге, а также образования включений и полостей. Процесс построения новой сетки аналогичен описанному в пунктах 1-2.

12) Расчет на новой сетке:

После перестроения сетки решается краевая задача теории наложения конечных деформаций в постановке координатного базиса конечного состояния. Далее проводится итерирование пунктов 1-12 для учета наложения конечных деформаций при последовательном образовании/росте дефектов в нагруженном теле в зависимости от заданного перед началом расчета количества расчетных шагов.

2.3 Применение изопараметрического метода спектральных элементов к моделированию волновых процессов

Моделирование распространения упругих волн в сложных трехмерных структурах требует больших вычислительных затрат. В общем случае неоднородной, полностью анизотропной среды необходимо использовать численные методы, такие как метод конечных разностей (МКР) [494] и псевдоспектральный [735] метод. Одна из главных трудностей при использовании МКР в задачах общей анизотропной среды – это необходимость в специальной интерполяция компонент тензора деформаций при определении компонент тензора напряжений

из-за использования сдвинутой сетки [494]. При этом степень анизотропии, которая может быть смоделирована без дополнительной интерполяции, – это призматический случай с осями, ориентированными по осям расчётной сетки. Дополнительная проблема при использовании МКР связана с выполнением граничного условия на свободной границе [690], которое является приближенным и, следовательно, приводит к трудностям в представлении поверхностных волн.

Методы Фурье позволяют получать высокоточные решения для трёхмерных моделей среды, обладающих необходимой степенью гладкости упругих свойств [364, 366]. Кроме того, выполнение точного граничного условия затрудняется в силу периодичности разложения Фурье [550]. Непериодичные базисные функции (например, многочлены Чебышева) были введены для облегчения некоторых связанных с этих трудностей [735]. Однако данный подход приводит к одномерной задаче на свободной границе для обеспечения устойчивости решения [364, 544].

Метод спектральных элементов (МСЭ) был введён [662] в вычислительной динамике жидкостей. Впервые в [711] он был применен в задачах моделирования сейсмических волн в упругих изотропных средах [431, 540, 541, 543, 680, 709, 711]. Этот метод также успешно применялся в задачах, включающих в себя как жидкие, так и твёрдые тела [535, 538]. Отличительная особенность МСЭ, в сравнении с глобальными псевдоспектральными методами, заключается в его возможности работать с моделями со сложным рельефом свободной поверхности, высокоточном представлении поверхностей разломов, границ скачкообразного изменения упругих свойств и преломлённых волн на них. Использование в этих целях неструктурированной сетки позволяет не только корректно описать разрывы упругих свойств в дискретной модели, но и значительно уменьшить требуемый объём памяти.

В данном параграфе представлены результаты моделирования процессов распространения упругих волн с использованием МСЭ в виде полей распределения давления и сейсмограмм (графиков зависимости компонент перемещений/напряжений от времени). Для проверки корректности результатов решения задач с использованием программного кода на базе МСЭ были проведены сравнения с существующими численными и аналитическими решениями. В частности, результаты решения одномерной задачи о распространении плоской волны сравнивались с точным аналитическим решением. Далее разработанный код был протестирован на трёхмерных задачах, содержащих сложные поверхности разрыва с сильными контрастами в упругих свойствах материала, сложным поверхностным релефом (топографией), которые затруднительно учитывать при численном моделировании распространения упругих волн стандартными методами. В дополнении к вышесказанному отметим, что реальные среды зачастую обладают анизотропными упругими и вязкоупругими свойствами. Всвязи с этим в данном параграфе также рассмотрены задачи моделирования распространения волновых

процессов в трёхмерных трансверсально-анизотропных средах, в которах ось симметрии наклонена по отношению к осям координат. Это описание среды всё шире используется для скважинной сейсмической разведки, особенно в трёхмерном случае. Для проверки достоверности результатов численного моделирования методом спектральных элементов было проведено сравнение с аналитическим решением для трёхмерных однородных трансверсально-изотропных моделей.

Трёхмерные задачи нестационарной теории упругости

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ - вектор смещения точки $\mathbf{x}$ в момент времени t, ρ - плотность, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$-тензор напряжений, $\mathbf{S}=\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$ - функция источника. Выпишем систему дифференциальных уравнений, описывающих распространение упругих волн [234]:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{S} \tag{1}$$

Рассмотрим упругие материалы, подчиняющиеся закону Гука:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\hat{\mathbf{c}}:\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2}$$

где $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\dfrac{\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla}{2}$ - тензор деформации, $\hat{\mathbf{c}}$ - тензор Гука 4-го порядка.

Ввиду симметрии тензора Гука, его можно представить в виде тензора 2-го порядка, используя замену индексов [366] (нотация Фойгта): (1, 1)→1, (2, 3) →4, (2, 2) →2, (1, 3)→5, (3, 3) →3, (1, 2) →6. Тогда закон Гука примет вид:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\ C_{41}&C_{42}&c_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\ C_{51}&C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\ C_{61}&C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{pmatrix} \tag{3}$$

В случае однородной изотропной среды компоненты тензора Гука зависят лишь от 2х величин, являющихся коэффициентами Ламе λ,μ:

$$C_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu&\lambda&\lambda&0&0&0\\ \lambda&\lambda+2\mu&\lambda&0&0&0\\ \lambda&\lambda&\lambda+2\mu&0&0&0\\ 0&0&0&\mu&0&0\\ 0&0&0&0&\mu&0\\ 0&0&0&0&0&\mu\end{pmatrix} \tag{4}$$

Закон Гука принимает вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{5}$$

Уравнение (1):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + \mathbf{S} \tag{6}$$

Рассмотрим два частных решения уравнения (6) без функции источника (однородное уравнение).

Пусть $\mathbf{u} = [0,0,u_3(x_3,t)]$. Тогда u_3 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = V_P^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3}, \quad V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{7}$$

Уравнение (7) описывает так называемые волны сжатия-расширения, или Р-волны.

Пусть $\mathbf{u} = [u_1(x_3,t),0,0]$. Тогда u_1 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = V_S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3}, \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{8}$$

Уравнение (8) описывает так называемые волны сдвига, или S-волны. Заметим, что $V_P > V_S$. Для идеальной жидкости $\mu = 0$, поэтому в них отсутствуют S-волны. В этом случае значение перемещения может быть выражено через скалярный потенциал Φ:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \tag{9}$$

Уравнение (6) упрощается:

$$\rho_f \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \nabla(K_f \nabla \Phi) \tag{10}$$

где $K_f = V_f^2 \rho_f^2$ - объемный модуль упругости жидкости. Таким образом, в общем случае имеем постановку задачи, состоящую из связанных системы уравнений в частных производных в твердом теле (6) и волнового уравнения (10) в жидкости при следующих граничных условиях:

$$\rho_f \frac{d^2 \Phi}{dt^2} \mathbf{n} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \tag{11}$$

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \tag{12}$$

суть которые - равенство нормальных напряжений и давления, а также нормальных смещений на границе жидкость-твердое тело.

Ввиду того, что для численного решения представленных выше уравнений в частных производных используется метод спектральных элементов, сформулируем слабую (вариационную) постановку этих уравнений:

$$\forall N \in \Omega$$

$$\iiint_V \rho \ddot{u} N dV = \iiint_V \nabla \cdot \sigma N dV$$

$$\iiint_V \rho_f \ddot{\Phi} N dV = \iiint_V \nabla \cdot (K_f \nabla \Phi) N dV$$

Учитывая граничные условия, получаем:

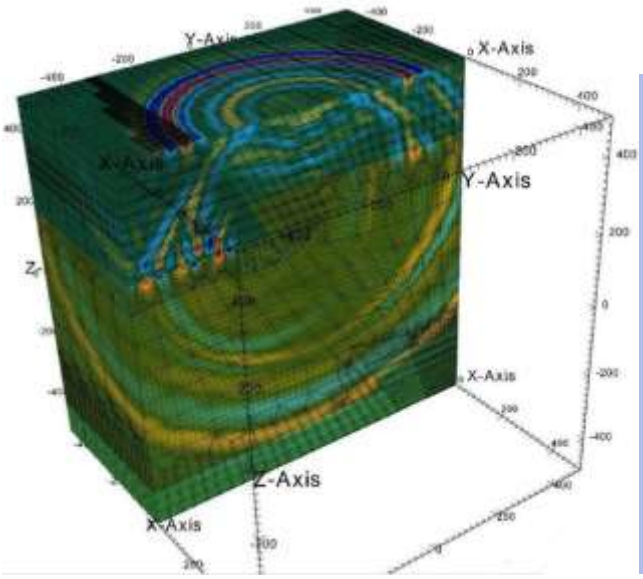
$$\forall N \in \Omega$$

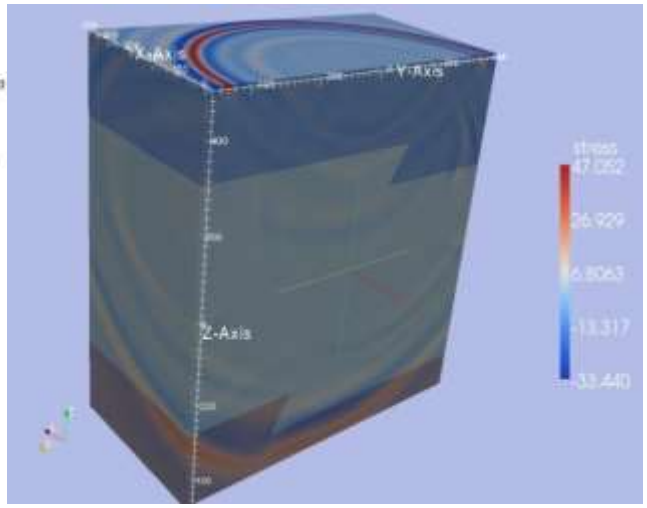
$$\iiint_V \rho \ddot{u} N dV = -\iiint_V \sigma \nabla N dV + \iint_{S_1} N \rho_f \ddot{\Phi} \vec{n} dS + external \quad loads$$

$$\iiint_V \rho_f \ddot{\Phi} N dV = -\iiint_V K_f \nabla \Phi \nabla N dV + \iint_{S_1} N K_f u_n dS + external \quad loads$$

Приведенные выше уравнения полностью описывают распространение волн в упругих средах и их взаимодействие с жидкостью.

Ниже представлен (Рисунок 61) пример решения модельной задачи о распространении упругих волн в трёхмерной слоистой среде с резким (скачкообразным) изменением свойств между слоями. Использовались два вида расчетных сеток: исходная гексаэдральная и конвертированная из тетраэдральной методом THex. В случае данной модели результаты расчета на THex-сетке получились точнее (с меньшим уровнем численной дисперсии) ввиду лучшего качества сетки по параметру коэффицент скошенности (skewness factor).





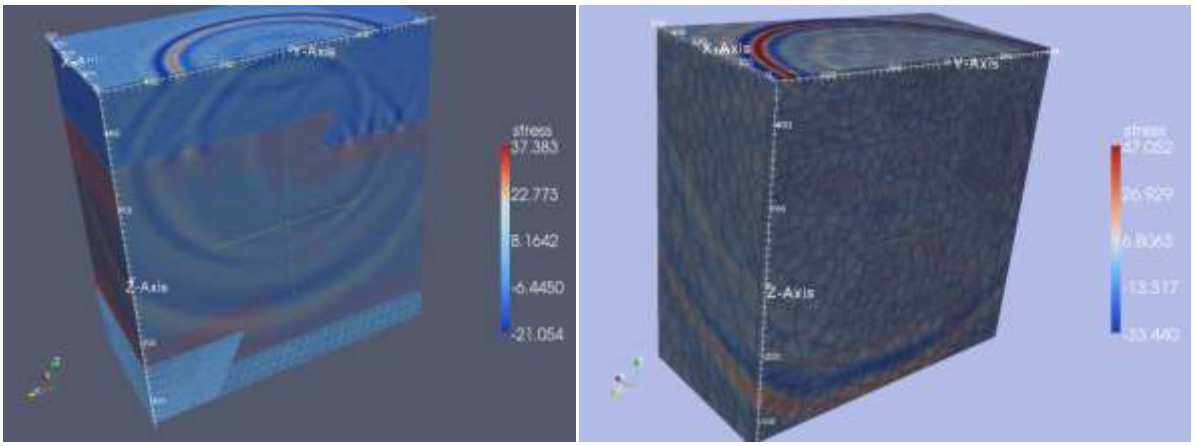
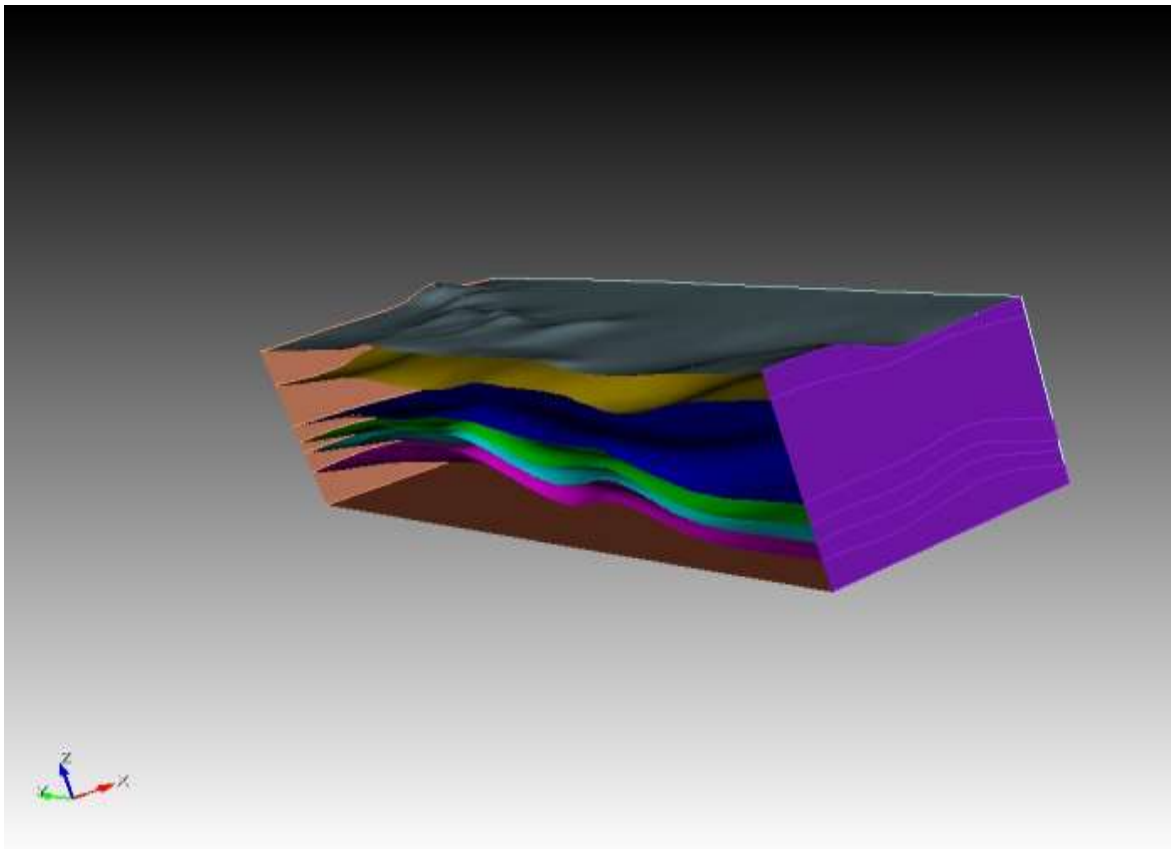


Рисунок 61 Упругие волны в трёхмерной слоистой среде на исходной гексаэдральной сетке (слева) и сконвертированной из тетраэдральной методом THex (справа)

Другим примером эффективности использования метода спектральных элементов может служить задача о распространении упругих волн в сложнопостроенной трехмерной слоистой среде с рельефом свободной поверхности, результаты решения которой представлены на рисунках ниже.



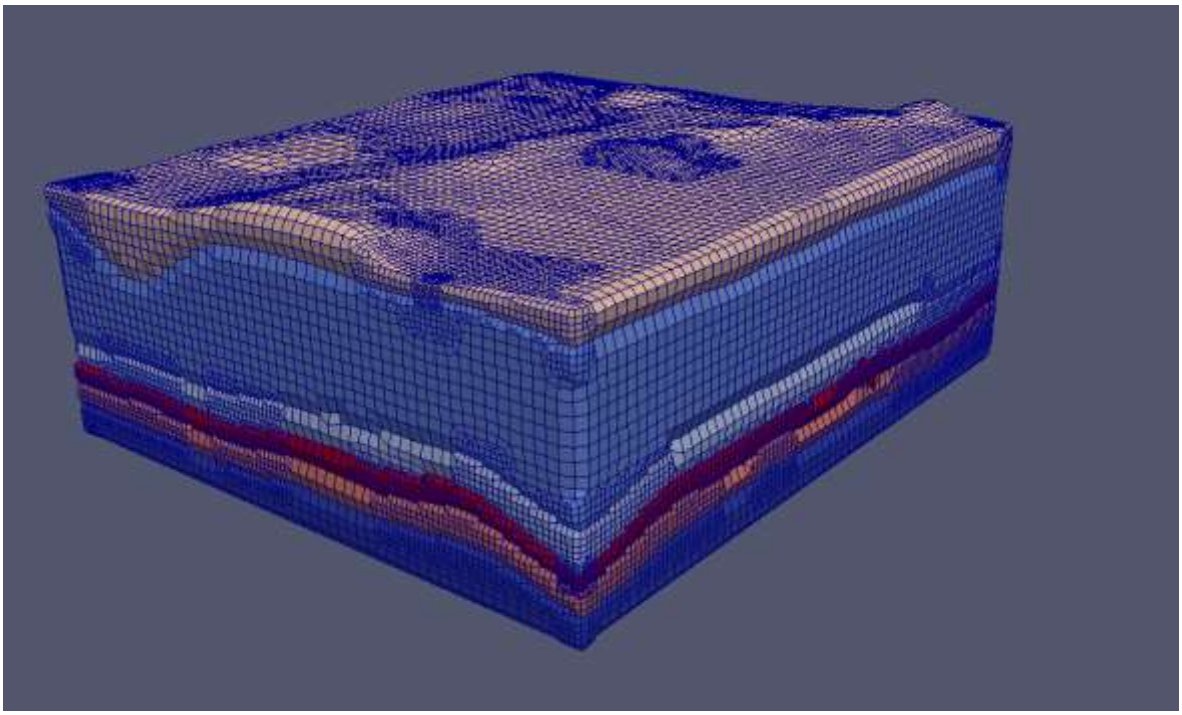


Рисунок 62 Модель и сетка из спектральных элементов для трехмерной среды со сложной поверхностной топографией

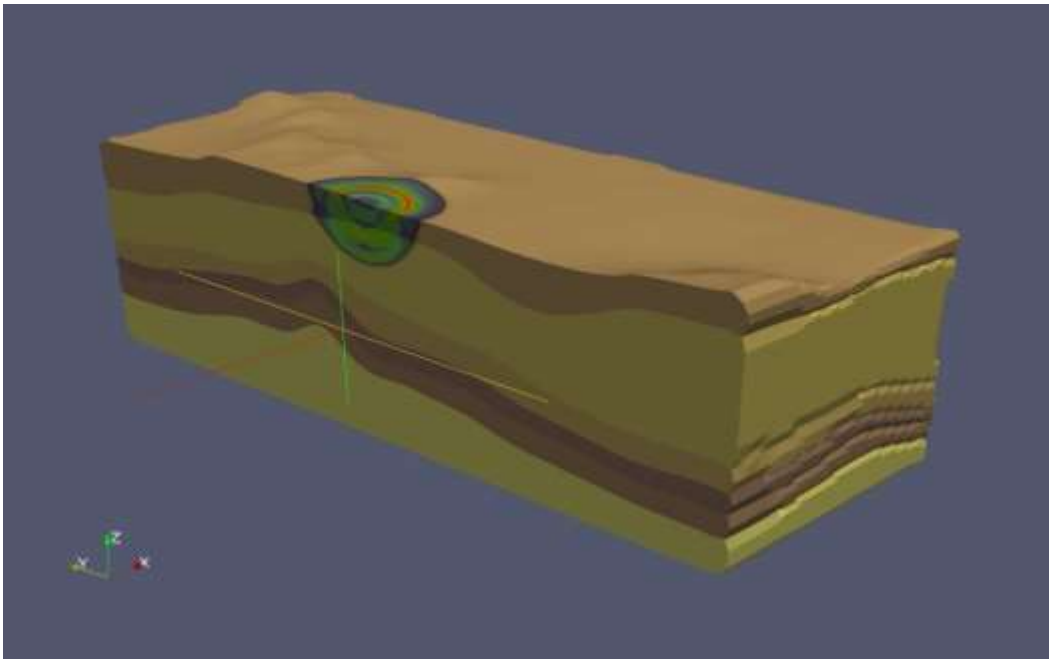


Рисунок 63 Распространение упругих волн вдоль поверхности со сложной топографией.

В заключение раздела приведем результаты решения модельной задачи о распространении волновых процессов в трехмерной среде с наведенной анизотропией. Под наведенной анизотропией в данном случае понимается учет предварительного нагружения тела ввиду:

1. Приложения или снятия внешних нагрузок. Анизотропия механических свойств материала, вызванная деформациями в нем под действием внешних воздействий (например, массовые силы, температурные нагрузки).

2. Образования полостей или включений, возникновения и развития трещин.

В первом случае (Рисунок 64) наведенная анизотропия вызвана действим массовой силы тяжести на упругое тело со включением в виде диапира.

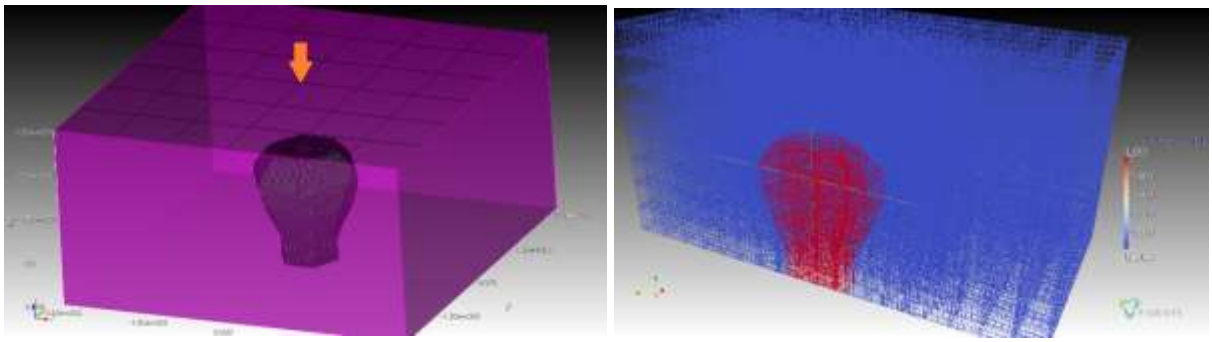


Рисунок 64 Геометрия модели (слева) и ее дискретизация неструктурированной сеткой из спектральных элементов. Стрелкой обозначен источник сейсмических волн.

Распределение начальных напряжений приведено на Рисунок 65. Отметим наведенную анизотропию, вызванную концентрацией напряжений вблизи включения.

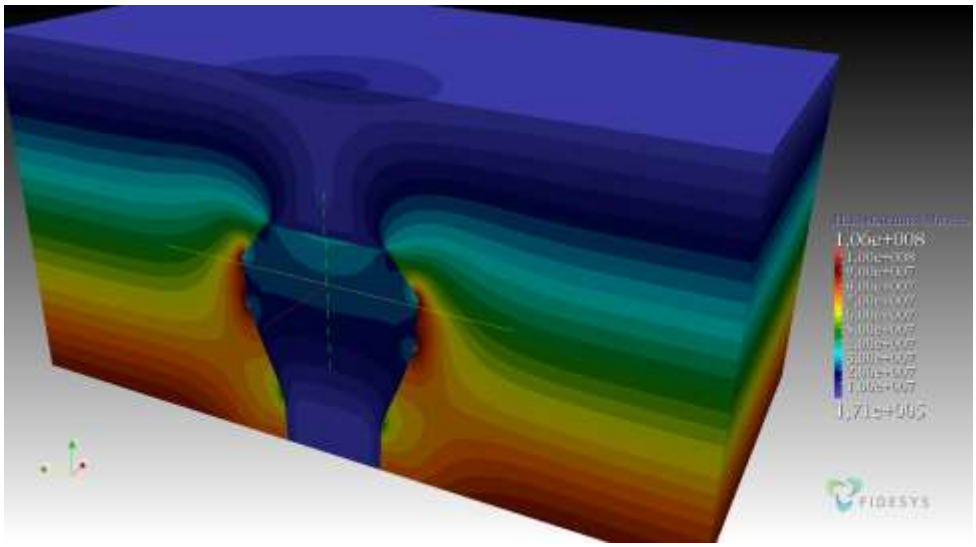


Рисунок 65 Поле начальных напряжений. Наведенная анизотропия свойств массива вблизи включения.

Результаты расчетов (волновые поля) приведены на Рисунок 66.

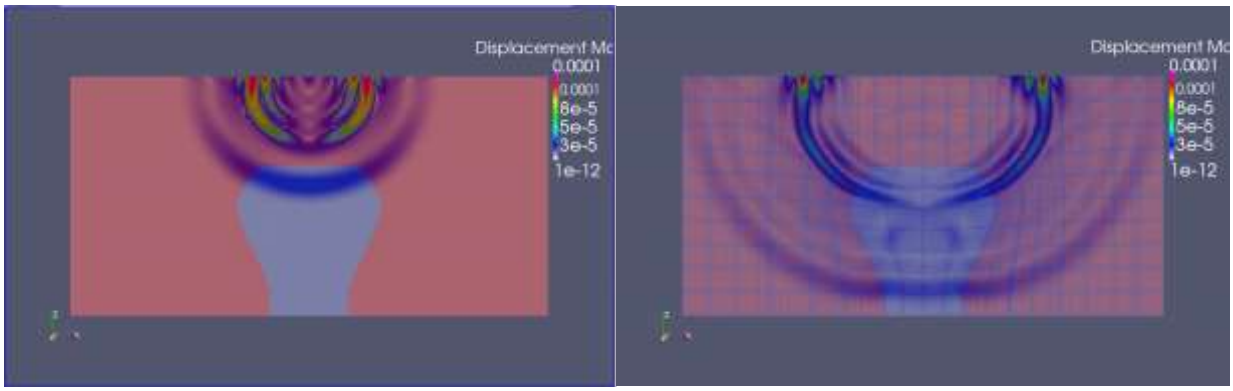


Рисунок 66 Волновое поле (слева), наложенное на неструктурированную сетку из спектральных элементов (справа).

Во втором случае упругие волны распространяются в слоистой среде, содержащей множественные трещины (Рисунок 67).

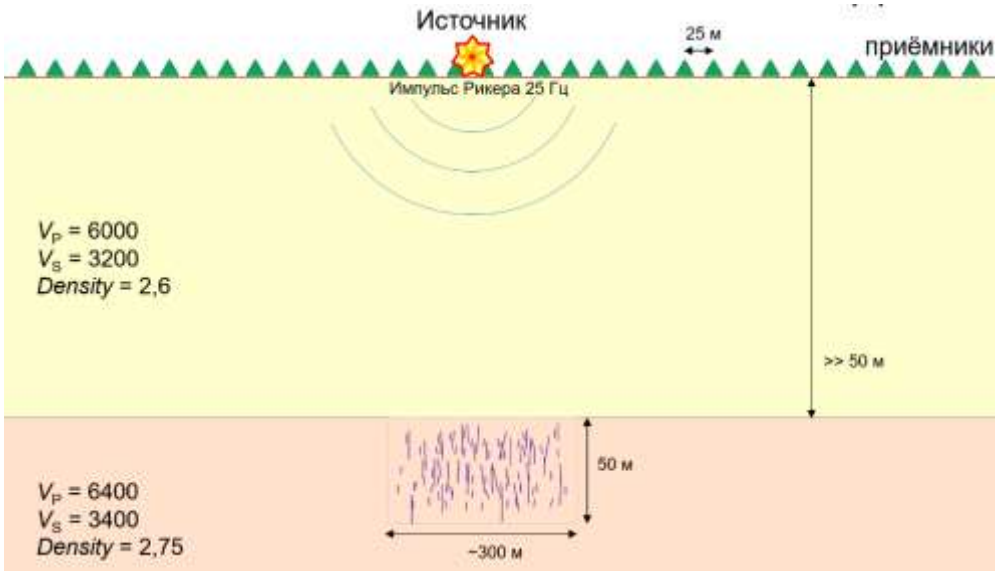


Рисунок 67 Слоистая среда с трещинами

На Рисунок 68 представлены результаты численного моделирования методом спектральных элементов. Наличие трещин приводит к рассеиванию и переотражению упругих волн. Отметим существенно различающийся их характер для разных длин волн (частот источника).

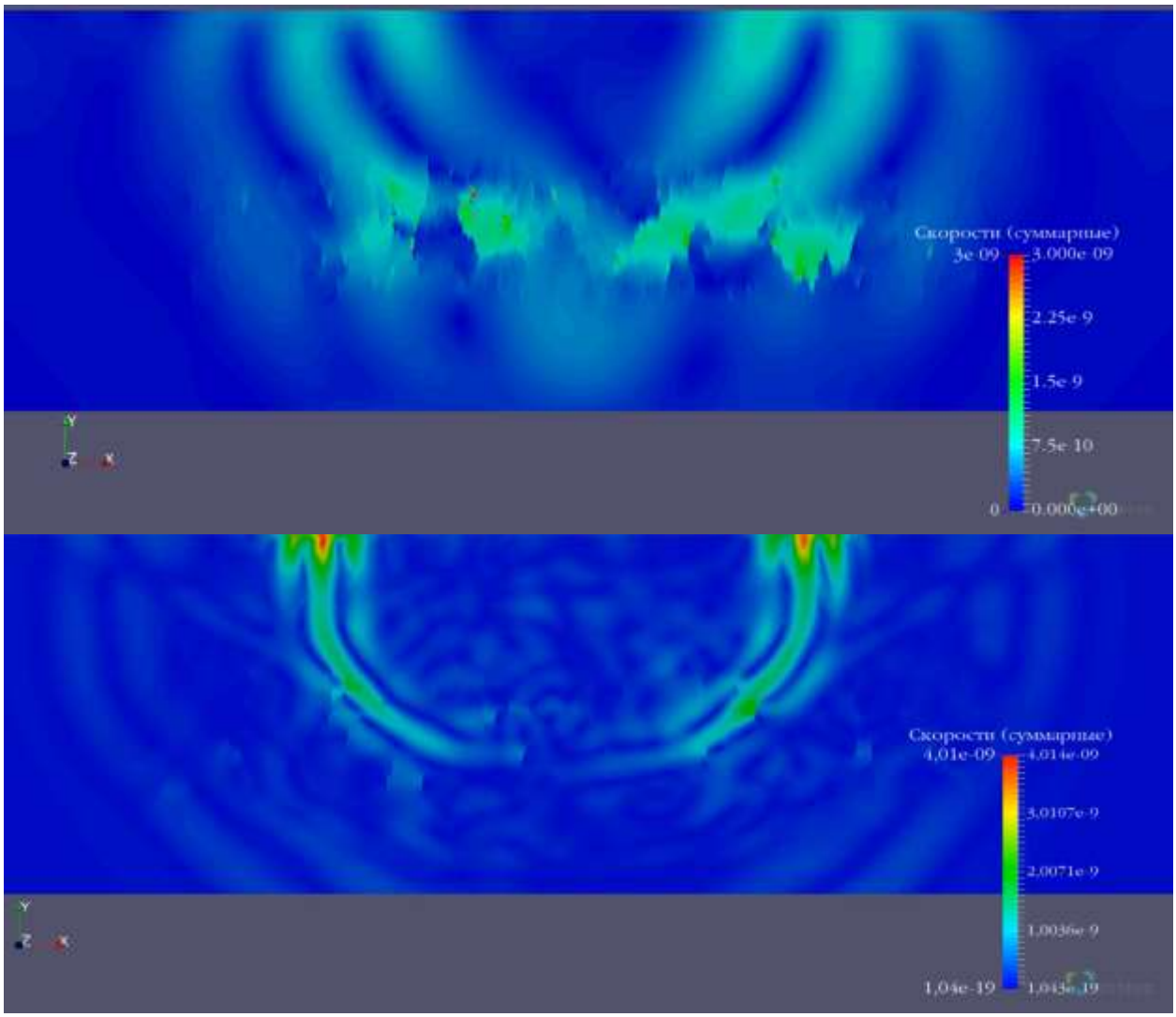


Рисунок 68 Рассеивание упругих волн в трещиноватой среде для низкой частоты (сверху) излучателя и увеличенной в четыре раза (снизу).

Неотражающие граничные условия

Один из аспектов рассматриваемой задачи о распространении упругих волн – это корректное моделирование распространения волн в бесконечной среде. Так как при численном моделировании рассматриваются области конечных размеров, условия специального вида должны быть наложены на внешние (искусственные) границы вычислительной области. Естественные граничные условия (условия свободной поверхности) приводят к отражению волн от искусственной границы, которая отсутствует в исходной аналитической постановке задачи для бесконечной области. Ввиду этого на неизвестные величины на внешних границах области накладываются условия неотражения (препятствующие отражению волн), чтобы уменьшить или полностью убрать искусственный эффект отражения волны.

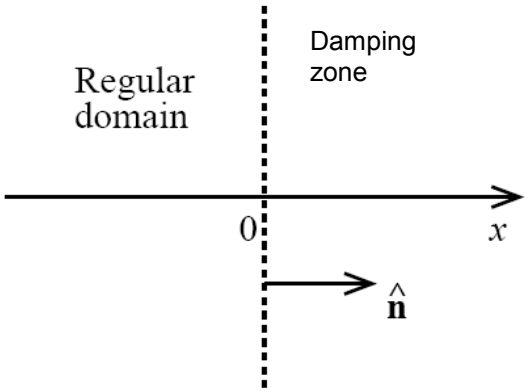


Рисунок 69 Демпфирующий слой на границе расчетной области

Возможны два подхода для подавления отражённой волны; оба применены в разработанной программе. Первый подход основан на введении демпфирующего слоя вдоль границ расчетной области (Рисунок 69). Мы окружаем область вычисления зоной демпфирования. Внутри этого слоя добавляем демпфирующие члены в исходные дифференциальные уравнения, чтобы ликвидировать энергию волны, когда она распространяется в демпфирующем слое. Например, в случае одномерного волнового уравнения это можно сделать следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)^2 \Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\Phi(x,t) = \left(f(x+ct)+g(x-ct)\right)e^{-bt}$$

$$b(x) = b_0\left(\frac{x}{L}\right)^N$$

$$b_0 = -(N+1)c_p \ln(R_c)/(2L)$$

Здесь Rc – коэффициент отражения, Cp – скорость волны, L – ширина адсорбирующего слоя.

Такой выбор функции b(x) позволяет поглотить энергию волн внутри демпинговой зоны, а также обеспечить минимальное отражение от границы между демпинговой зоной и расчетной областью. Изменение коэффициента b(x) внутри трёхмерной области представлено на Рисунок 70.

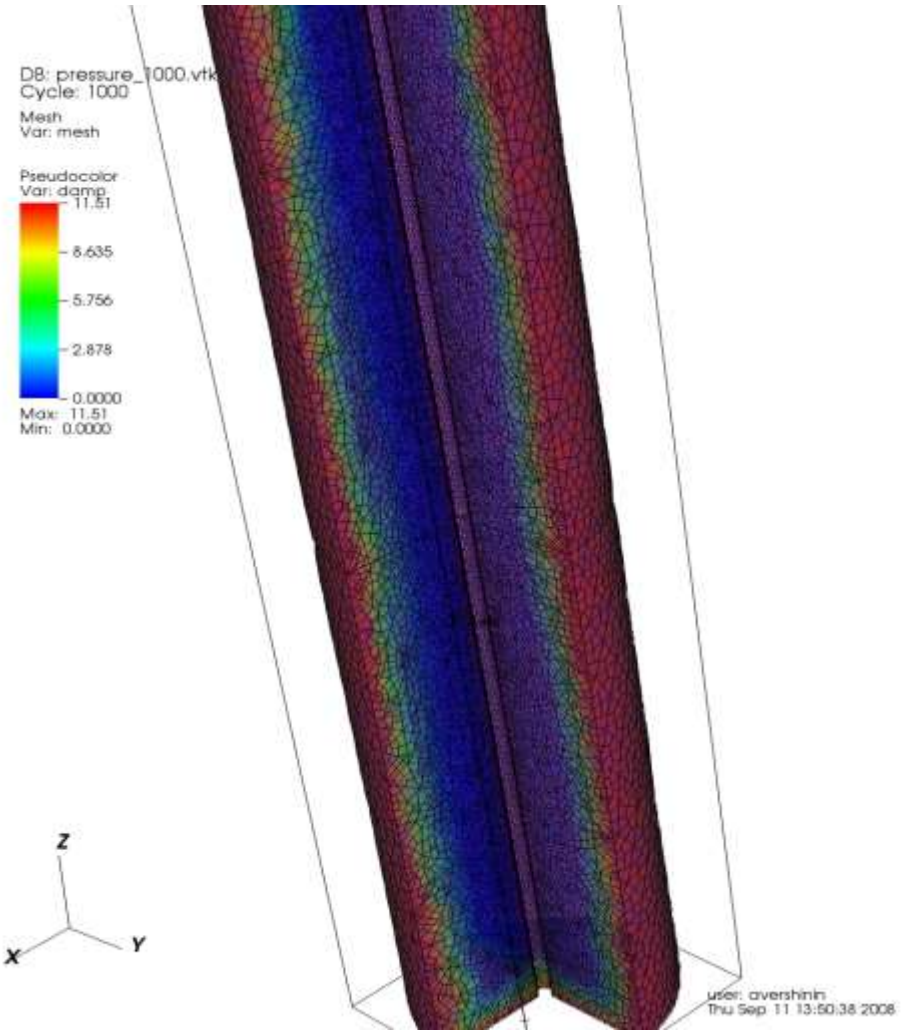


Рисунок 70 Изменение демпфирующего коэффициента внутри расчетной области

Второй подход к неотражающим условиям базируется на использовании аналитического локального условия неотражения (вытекающего из самих уравнений в частных производных, описывающих распространение волн в средах), которое накладывается на внешние границы. Например, для волнового уравнения это условие запишется следующим образом:

$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, где θ – это угол падения волны. Т.к. в общем случае угол падения волны на границу расчетной области неизвестен, θ на практике принимается равным нулю и условия соответственно становятся приближенными.

Для динамических уравнений теории упругости приближенные (точные для волн нормального падения) локальные неотражающие граничные условия имеют следующий вид:

$$-\sigma \cdot \vec{n} = \rho c_p \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} + \rho c_s \frac{\partial \vec{u}_t}{\partial t}$$

$$\vec{u}_n = (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{u}$$

$$\vec{u}_t = \vec{u} - \vec{u}_n$$

где c_p и c_s – это скорости продольной и поперечной волн для изотропного случая. Для анизотропного соответственно имеем:

$$-\sigma \cdot \vec{n} = \rho c_P (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} + \rho c_{SV} (\vec{u} \cdot \vec{t}_1)\vec{t}_1 + \rho c_{SH} (\vec{u} \cdot \vec{t}_2)\vec{t}_2$$

здесь t_1 и t_2 – единичные ортогональные вектора, касательные к внешней границе поглощения с единичной внешней нормалью n, c_P – скорость квазипродольной волны, распространяющейся в направлении n, c_{SV} – скорость квазипоперечной волны, поляризованной в направлении t_1, и c_{SH} – скорость квазипоперечной волны, поляризованной в направлении t_2.

Приведенное локальное граничное условие поглощения основано на одностороннем взаимодействии, которое полностью поглощает волны, падающие под прямым углом на границу, оно менее эффективно для волн, касательных к границе (Clayton&Engquist 1977). Данное условие верно для случая трансверсальной изотропной среды с горизонтальной или вертикальной симметрией; более общий случай анизотропии может быть сведён к случаю, в котором среда станет трансверсально изотропной на границе поглощения.

Некоторые результаты моделирования, демонстрирующие эффект от совместного использования обоих неотражающих граничных условий (локальных и нелокальных), представлены ниже на Рисунок 71. Показано поле распределения давления. Отметим, что упругая волна теряет энергию внутри демпинговой зоны и исчезает после столкновения с внешней границей расчетной области.

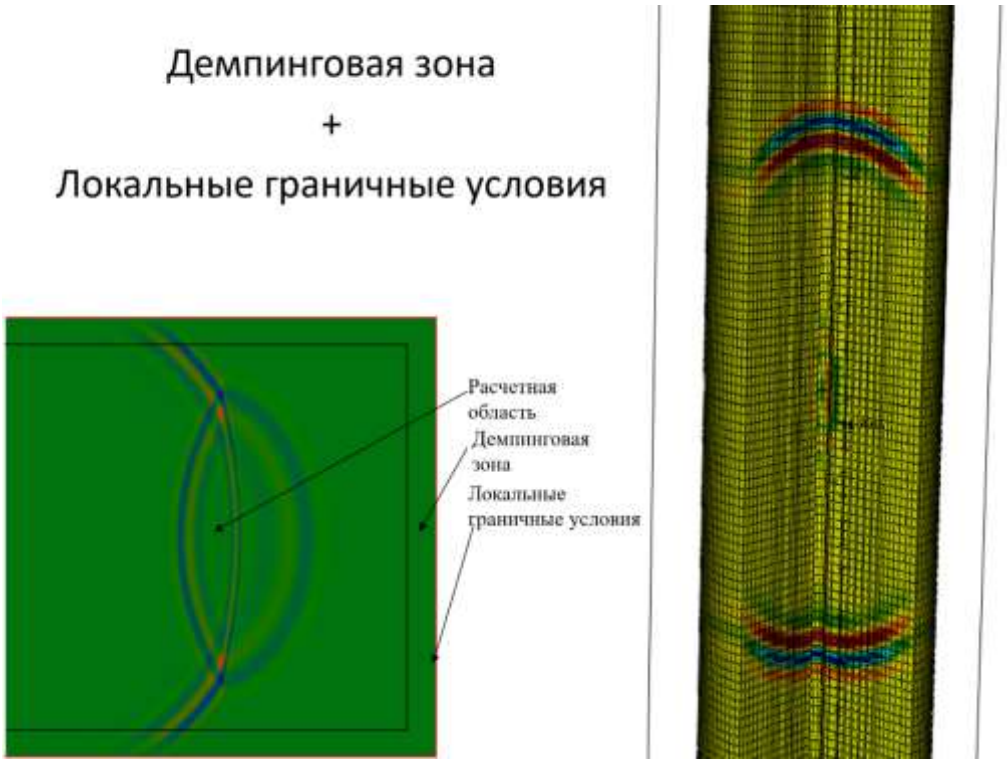


Рисунок 71 Комбинация локальных и нелокальных неотражающих граничных условий

Эффект от использования различных видов неотражающих граничных условий поглощения представлен на рисунках ниже, где проведено сравнение численного решения с аналитическим.

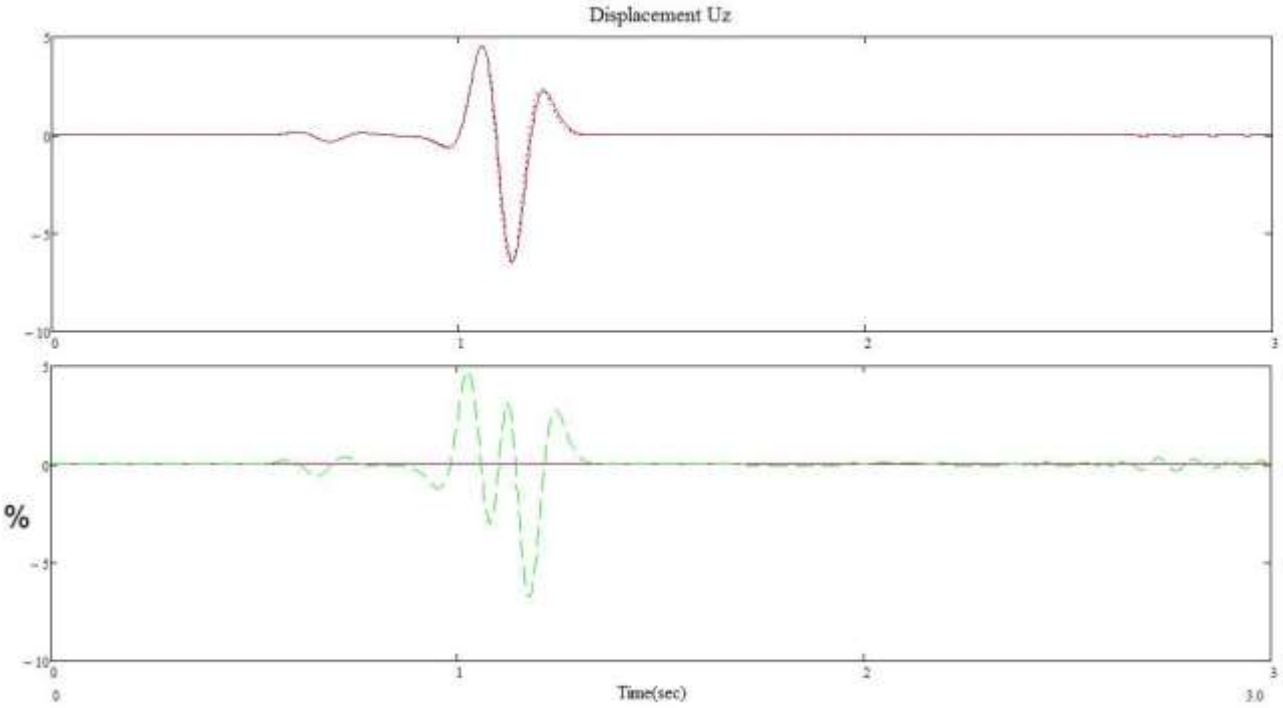


Рисунок 72 Сравнение численного (красным) и аналитического (синим) решений. Зелёным (нижний график) показана относительная разность двух решений в процентах. Использованы локальные и нелокальные неотражающие граничные условия.

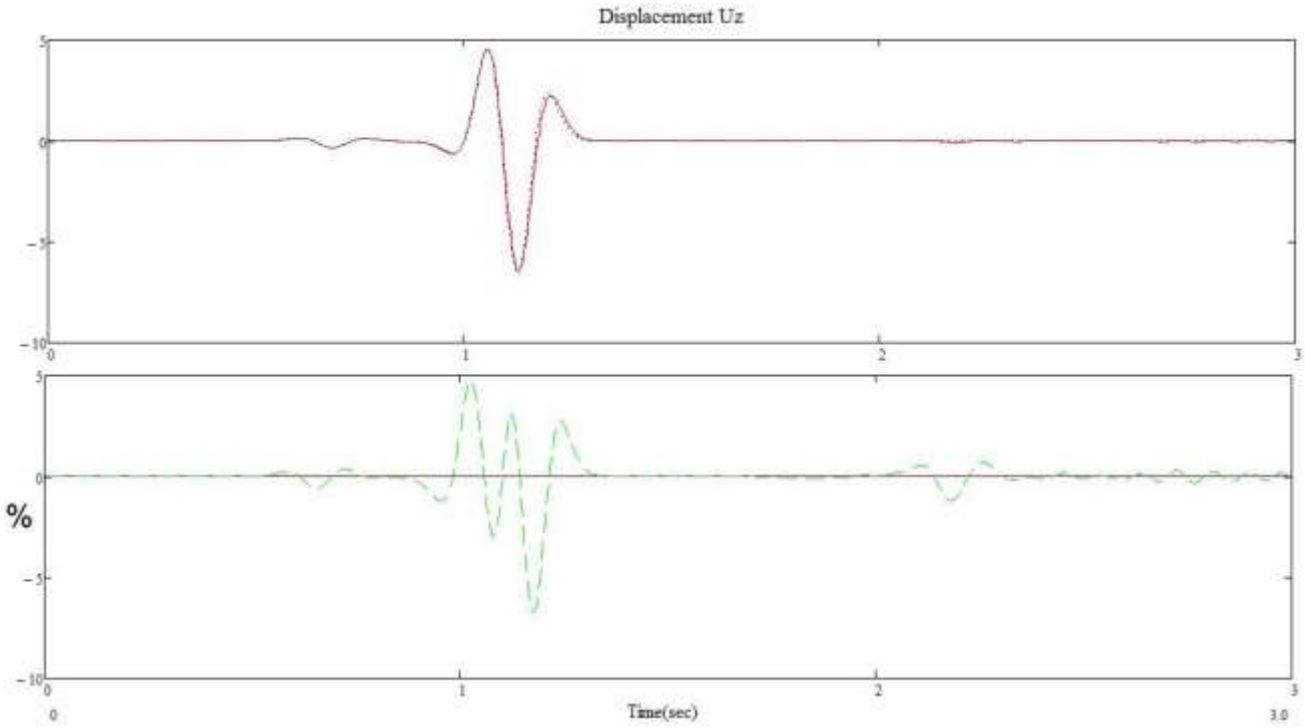


Рисунок 73 Сравнение численного (красным) и аналитического (синим) решений. Зелёным (нижний график) показана относительная разность двух решений в процентах. Использованы только локальные неотражающие граничные условия.

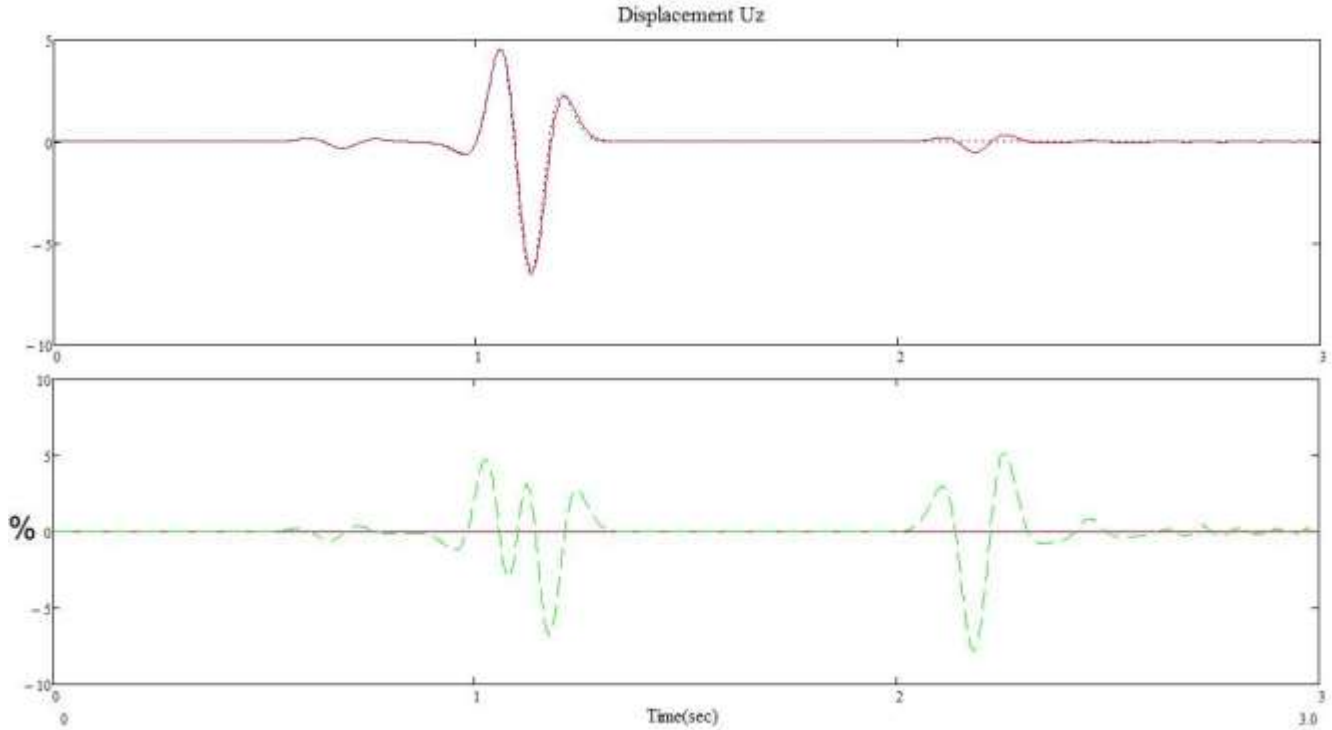


Рисунок 74 Сравнение численного (красным) и аналитического (синим) решений. Зелёным (нижний график) показана относительная разность двух решений в процентах. Использованы только нелокальные неотражающие граничные условия.

Таким образом, комбинация двух типов приближенных неотражающих граничных условий позволяет не только практически полностью нивелировать амплитуду отраженной волны, но и существенно сократить необходимый для подавления волны размер зоны демпфирования, и, как следствие, задавать большее число точек спектральноэлементной сетки внутри расчетной области.

Сравнение с аналитическим решением

Для проверки корректности разработанного метода решения трехмерных динамических задач о распространении упругих волн проведем сравнение численных и аналитических результатов в задаче о точечном источнике в бесконечной изотропной упругой среде.

Рассмотрим бесконечную трёхмерную область с источником в виде сосредоточенной силы *f(t)*, действующей вдоль одной из осей координат, и однородную изотропную упругую среду со скоростями упругих волн α, β .

Эту задачу можно свести к следующим основным положениям (Рисунок 75):

1) Имеется однородная изотропная неограниченная упругая среда;
2) В этой среде определена трехмерная прямоугольная система координат $x_1 x_2 x_3$;
3) В начале координат действует произвольно зависящая от времени точечная сила ***f(t)***, направленная вдоль оси x_i (i=1, 2, 3), имитирующая источник сейсмических смещений;
4) Ставится задача определить величину вектора смещения в произвольной точке среды в произвольный момент времени $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ $(\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ – радиус-вектор положения рассматриваемой точки, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор смещений данной точки вдоль осей координат).

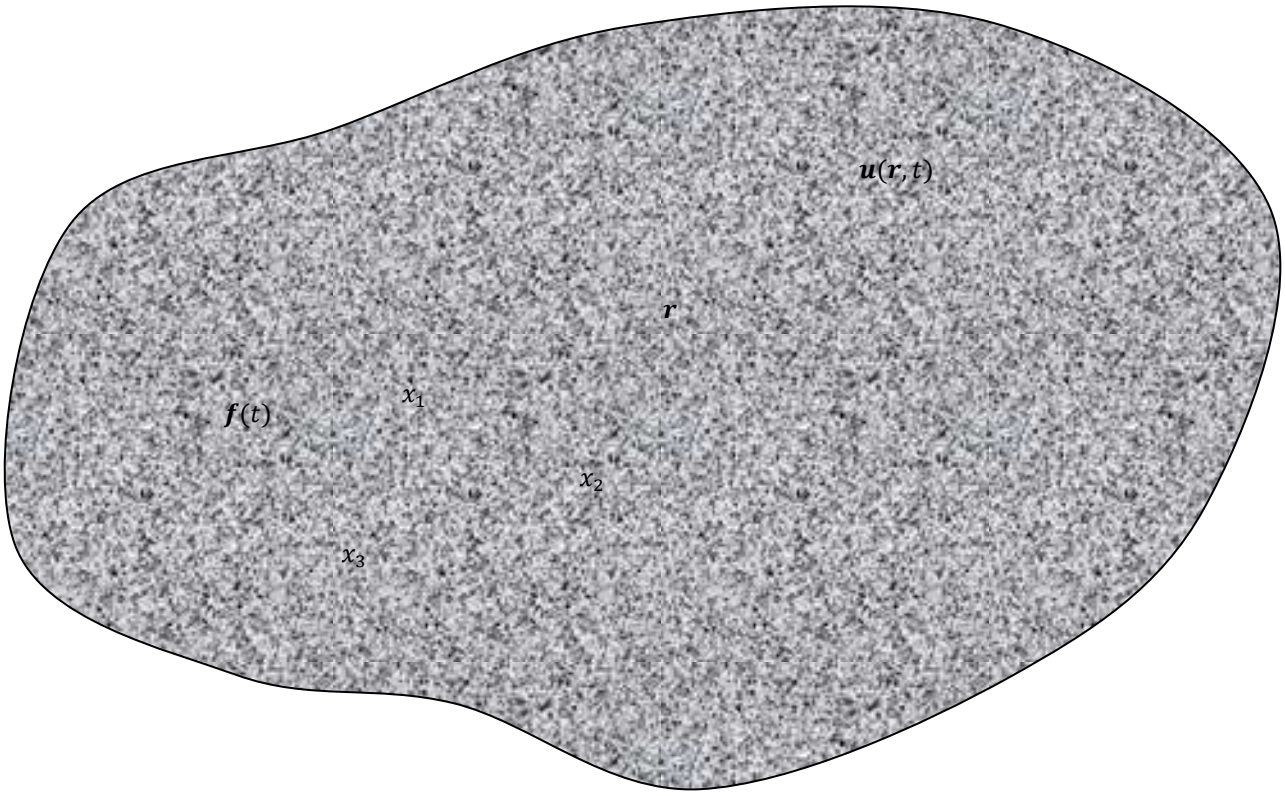


Рисунок 75 Задача о точечном источнике в бесконечной среде

Аналитическое решение данной задачи представляет собой следующую формулу для компонент вектора перемещений [2]:

$$u_i(\mathbf{r},t) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})}{4\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{\gamma_i\gamma_j}{4\pi\rho r\alpha^2}f(t-\frac{r}{\alpha}) - \frac{(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})}{4\pi\rho r\beta^2}f(t-\frac{r}{\beta})$$

здесь i – номер компоненты вектора смещения (i=1,2,3);

j – номер компоненты, вдоль которой действует сила **f**(t) (j=1или 2 или 3);

γ_i –i-я компонента единичного вектора $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, задающего направление на рассматриваемую точку, $\gamma_i = r_i/r$;

δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при i=j, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$);

r – модуль радиуса-вектора $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$;

ρ – плотность материала среды;

α – скорость распространения P-волны, $\alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$;

β – скорость распространения S-волны, $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$,

E – модуль Юнга,

υ – коэффициент Пуассона.

В приведенной формуле можно выделить три слагаемых, первое из которых (пропорциональное r^{-3}) называется смещением в ближней зоне, поскольку в районе точки приложения силы итоговое смещение определяется, прежде всего, этой компонентой. Второе слагаемое соответствует Р-волне, это продольная волна со скоростью распространения α. Третье слагаемое – это так называемая поперечная S-волна, распространяющаяся со скоростью β.

Для проведения численного моделирования в данной задаче использовалась следующая дискретизация методом спектральных элементов:

- 46x46x46 спектральных элементов
- 8-ой порядок аппроксимации по пространству и второй – по времени
- 40.000.000 расчётных узлов и 26.000.000 физических узлов
- 2.3 среднее число точек на минимальную длину волны
- 5500 временных итераций

На рисунках ниже представлены аналитически и численно рассчитанное изменение z-компоненты вектора перемещений во времени.

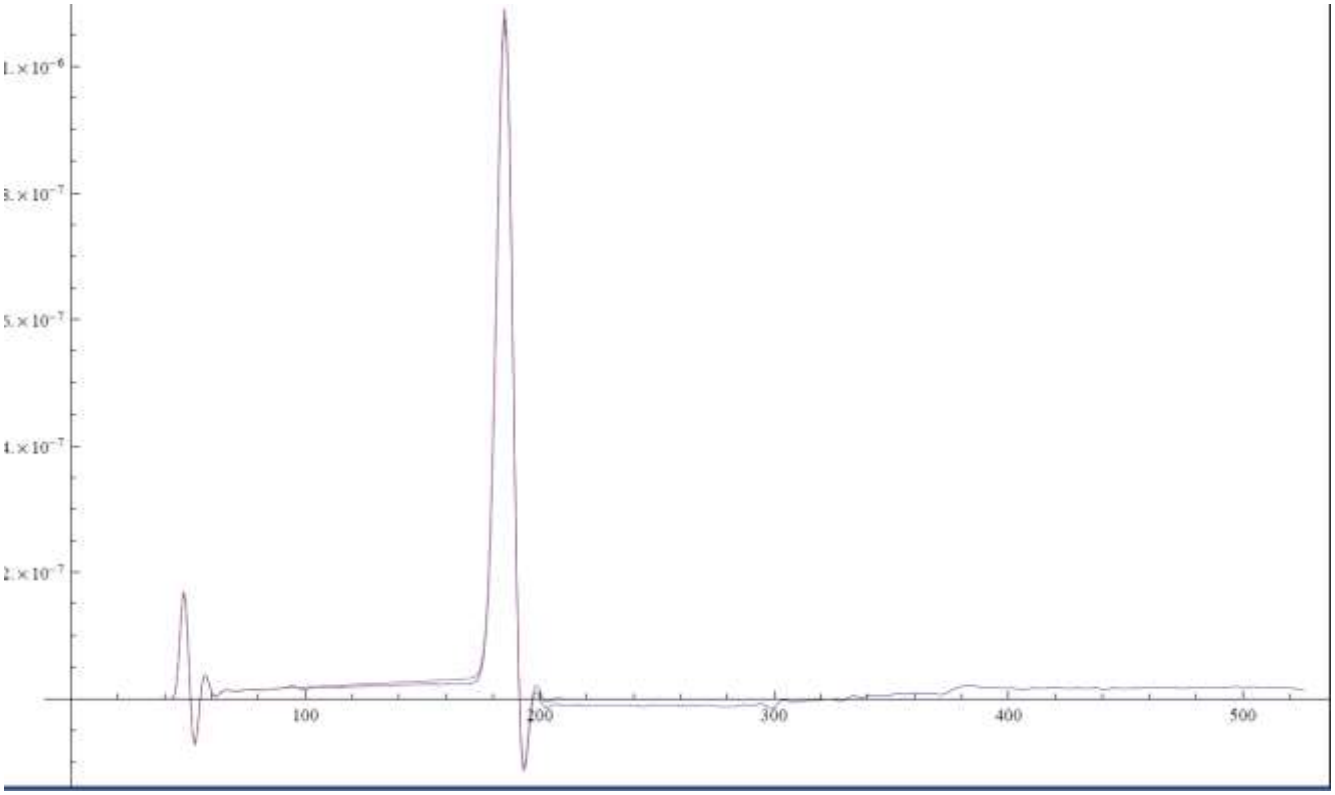


Рисунок 76 Компонента перемещений Uz от времени для аналитического (красным) и численного (синим) решений.

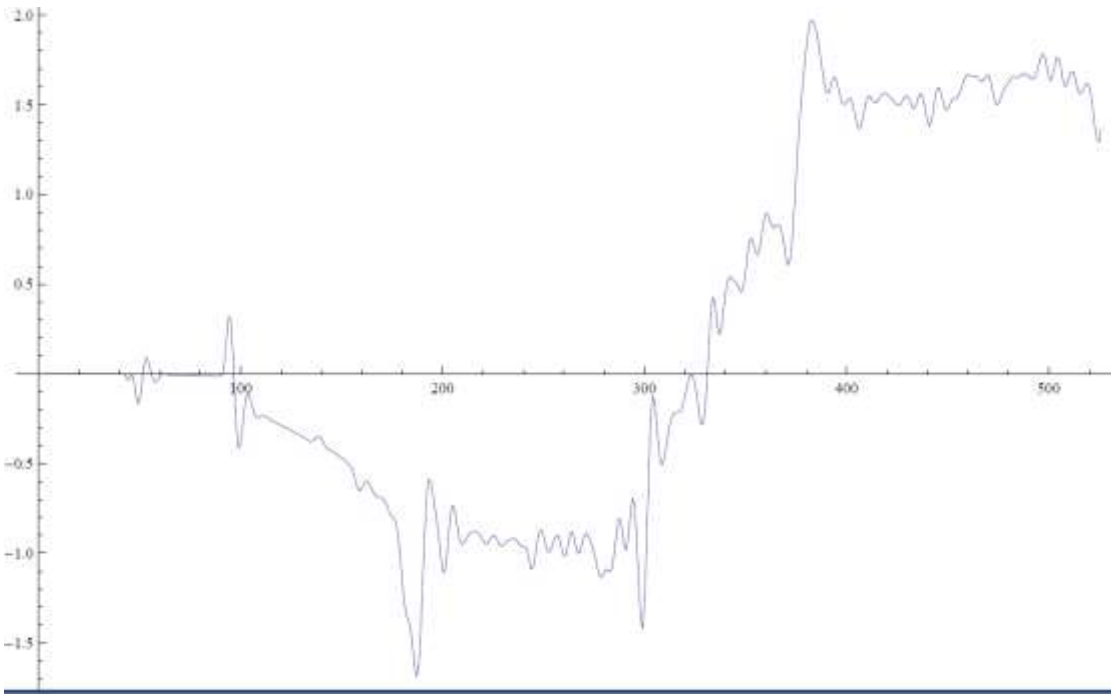


Рисунок 77 Относительная разность (в %) между вычисленной аналитически и численно компонентой Uz поля перемещений.

На Рисунок 78 представлен эффект влияния демпинговой зоны [131, 608] на полученном численном решении (в сравнении с Рисунок 76). Отметим его влияние особенно на “связь” между продольными и поперечными волнами (решение в ближней зоне). Данный факт может служить основанием для необходимости установки демпинговой зоны вдали от измеряемого сигнала на приёмнике сейсмического сигнала. Другими словами, вычислительная область в случае численного моделирования должна быть окружена так называемой зоной “невлияния”, включающей на границах слой демпинговой зоны, который поглощает распространяющиеся внутри него волны. Это наблюдение полностью соответствует хорошо известному принципу Сен-Венана, сформулированному в 1885 г. [700].

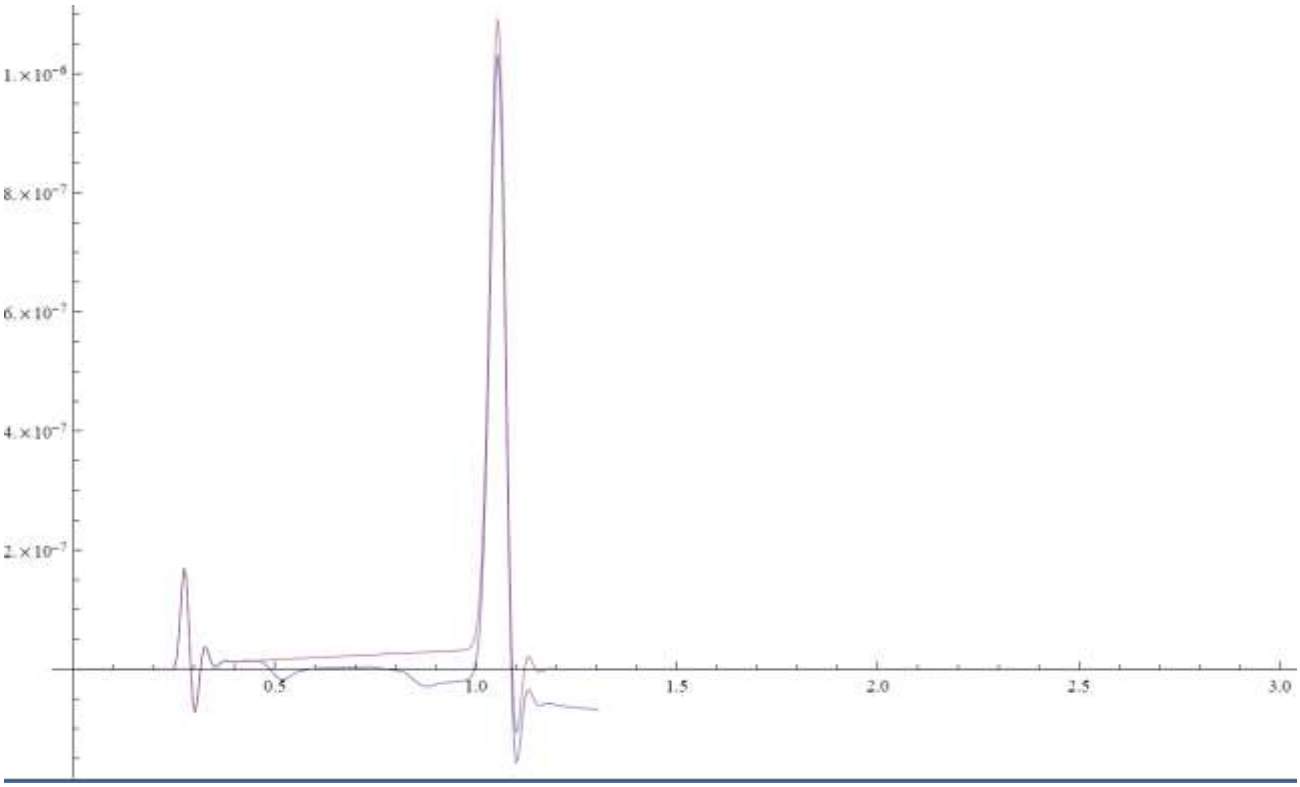


Рисунок 78 Компонента перемещений Uz от времени для аналитического (красным) и численного (синим) решений в случае наличия демпинговой зоны вблизи приёмника сейсмического сигнала.

МСЭ для непрерывно неоднородных сред

Одним из главных преимуществ МСЭ является его способность к моделированию непрерывно неоднородных сред, т.е. сред, в которых свойства материала могут меняться не только от элемента к элементу, но и внутри одного спектрального элемента. Чтобы проиллюстрировать это и одновременно проверить разработанный алгоритм, использующий метод трёхмерных СЭ, рассмотрим одномерное волновое уравнение в непрерывно неоднородной среде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, x \in [1;10]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f(t), x = 1$$

$$\Phi(x,0) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,0) = 0$$

.

Как и в случае волнового уравнения, аналитическое решение для бесконечной области может быть разложено на две волны, представленными двумя гиперболическими уравнениями

первого порядка – решение Д'Аламбера[238]. Поэтому для $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -x\frac{\partial \Phi}{\partial x}, x \in [1;10]$ получим $\Phi = \Phi(\ln x - t)$ и фазовую скорость распространения волны $\frac{dx}{dt} = e^t$.

Ниже представлены результаты численного решения рассмотренной задачи для одномерной области, которая смоделирована как одномерная сетка из трёхмерных спектральных элементов (Рисунок 79).

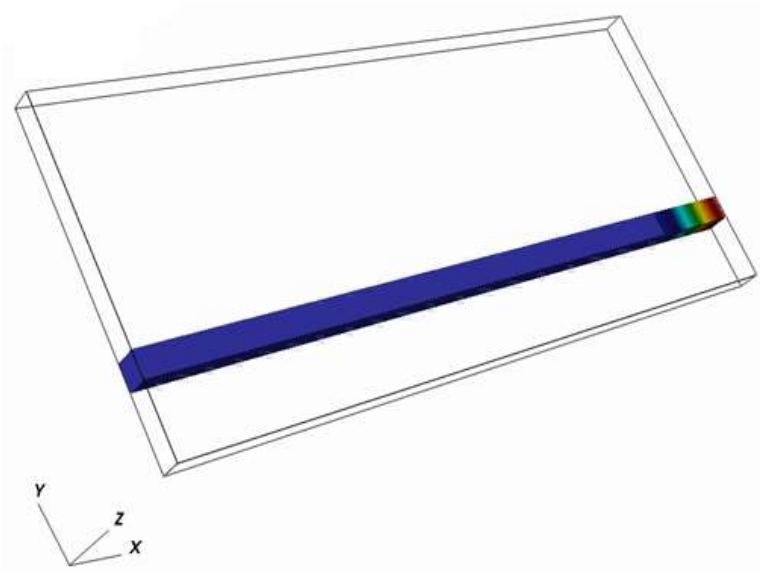


Рисунок 79 Численное моделирование в одномерной задаче о распространении плоских волн в стержне

Ниже представлено изменение давления во времени в данной дискретной модели.

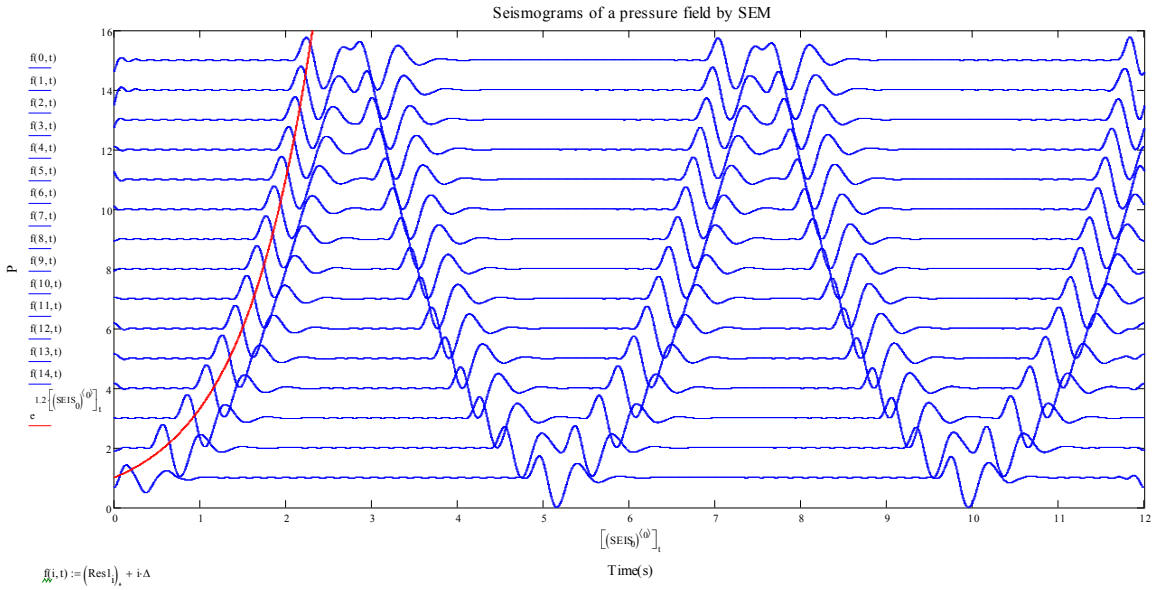


Рисунок 80 Сейсмограммы давления, рассчитанные методом спектральных элементов (синим). Красной линией обозначен аналитический график движения упругой волны вдоль стержня с непрерывно нарастающими упругими свойствами.

На основе анализа полученных сейсмограмм давления, рассчитанных методом спектральных элементов, отметим точное совпадение скорости распространяющейся вдоль стержня упругой волны с её аналитическим значением (красная линия), представленное на Рисунок 80.

В заключение приведем результаты численного моделирования аналогичной трехмерной задачи, в которой модуль упругости среды гладко возрастал с увеличением веритикальной координаты X (Рисунок 81).

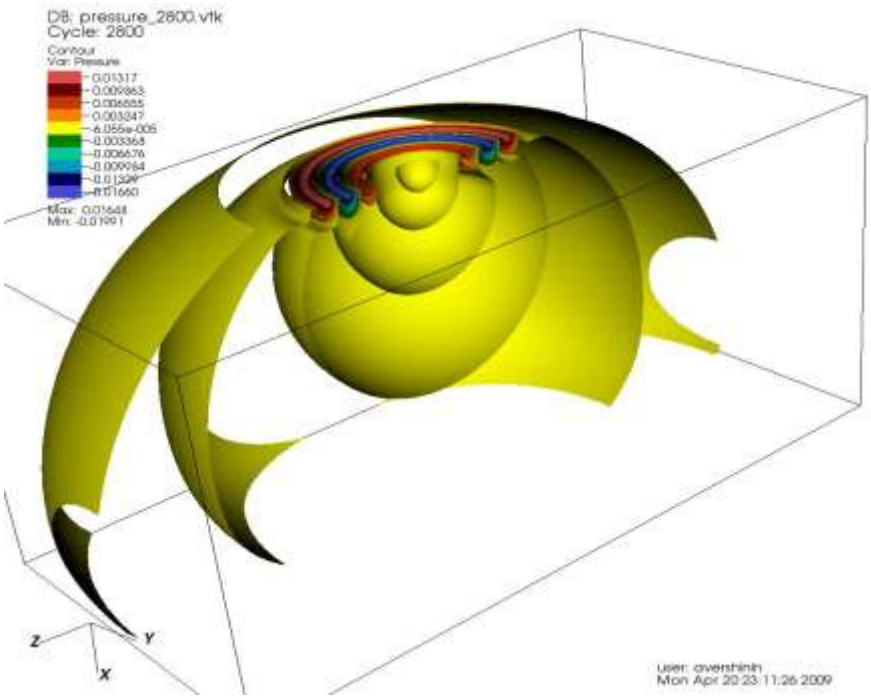


Рисунок 81 Изоповерхности поля давления для трёхмерного моделирования методом СЭ для случая гладко возрастающей с увеличением веритикальной координаты X жесткости среды

2.5D сейсмическое моделирование упругих волн в слоистой среде

Рассмотрим пример использования метода спектральных элементов для моделирования распространения упругих волн в двумерно-слоистой среде. Дискретная модель представлена на Рисунок 82. Размеры модели - 10 километров в длину и 3 километра в глубину. В качестве генератора сейсмических волн использовался 30 Hz источник вида:

$\varphi(t) = A_m \frac{\omega_1^2 e^{-\omega_1 t}}{4}\left(\sin(\omega_1 t)\left(-\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3}\right) - \cos(\omega_1 t)\left(\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2}\right)\right)$ расположенной на верхней (свободной) границе модели. Источник задавался как точечная сила, действующая на тело. Максимальная скорость продольной волны в модели 3190 м/сек, минимальная скорость сдвиговой волны 450 м/сек. Верхний слой модели заполнен жидкостью.

Задача решалась в 2.5мерной постановке, т.к. свойства среды неизменны в третьем (вдоль оси Y) направлении. Ввиду этого производную вдоль оси Y в трехмерных уравнениях упругости можно заменить посредством преобразования Фурье по Y на произведение на волновое число k_y. Таким образом, приведенная ранее система уравнений в частных производных трехмерной нестационарной теории упругости заменяется бесконечным рядом 2.5D уравнений по волновым числам k_y:

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\sigma = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\\
&\sigma = \lambda(E:I)I + 2\mu E\\
&E = \frac{\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla}{2}
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xx}}{\partial x} - ik_y\tilde{\sigma}_{xy} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2\tilde{u}_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xy}}{\partial x} - ik_y\tilde{\sigma}_{yy} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{yz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2\tilde{u}_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\tilde{\sigma}_{xz}}{\partial x} - ik_y\tilde{\sigma}_{yz} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial t^2}\\
&\tilde{\sigma} = \lambda(\tilde{E}:I)I + 2\mu\tilde{E}\\
&\tilde{E}_{xx} = \frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial x};\ \tilde{E}_{yy} = -k_y{}^2\tilde{u}_y;\ \tilde{E}_{zz} = \frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z};\\
&\tilde{E}_{xy} = \frac{\frac{\partial\tilde{u}_y}{\partial x} - ik_y\tilde{u}_x}{2};\ \tilde{E}_{xz} = \frac{\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial z}}{2};\ \tilde{E}_{yz} = \frac{\frac{\partial\tilde{u}_y}{\partial z} - ik_y\tilde{u}_z}{2};
\end{aligned}$$

Здесь знак ~ обозначает Фурье-образ, I – единичный тензор, E – тензор деформаций.

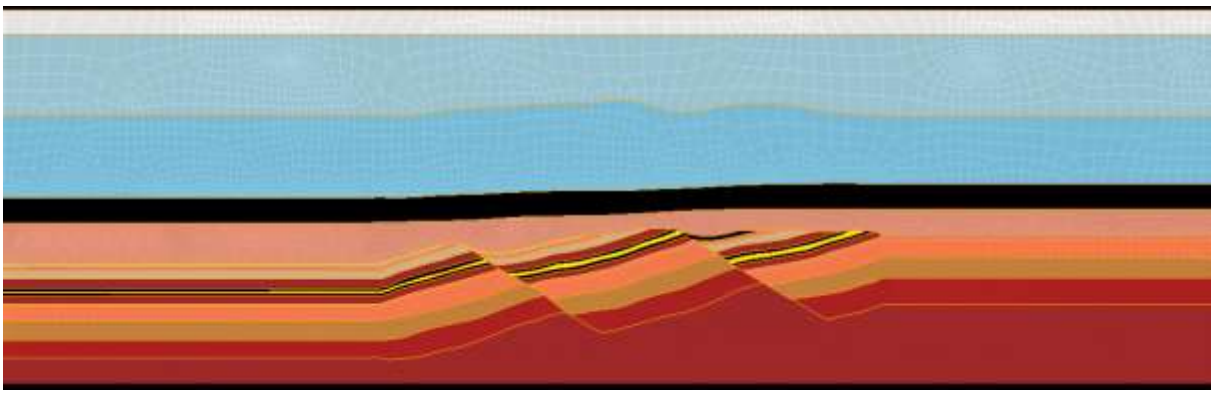


Рисунок 82 Спектральноэлементная сетка для двумерно-слоистой модели (10x3 километров).

Была построена неструктурированная спектральноэлементная сетка (Рисунок 83) со следующими параметрами:

- 95102 спектральных элементов
- 4th порядок аппроксимации по пространству
- Суммарно 857641 узлов сетки, обеспечивая 5 точек на минимальную длину волны

- 150 волновых чисел $k_y \in [0; \frac{2\pi \cdot f0}{V_{\min}}]$ соответствуют размерам модели 3 км в направлении оси Y
- Один шаг интегрирования по времени на MultiGPU системе, состоящей из 3х плат Nvidia Tesla, занял 0.38 секунды. Общее время расчета – 3 часа.

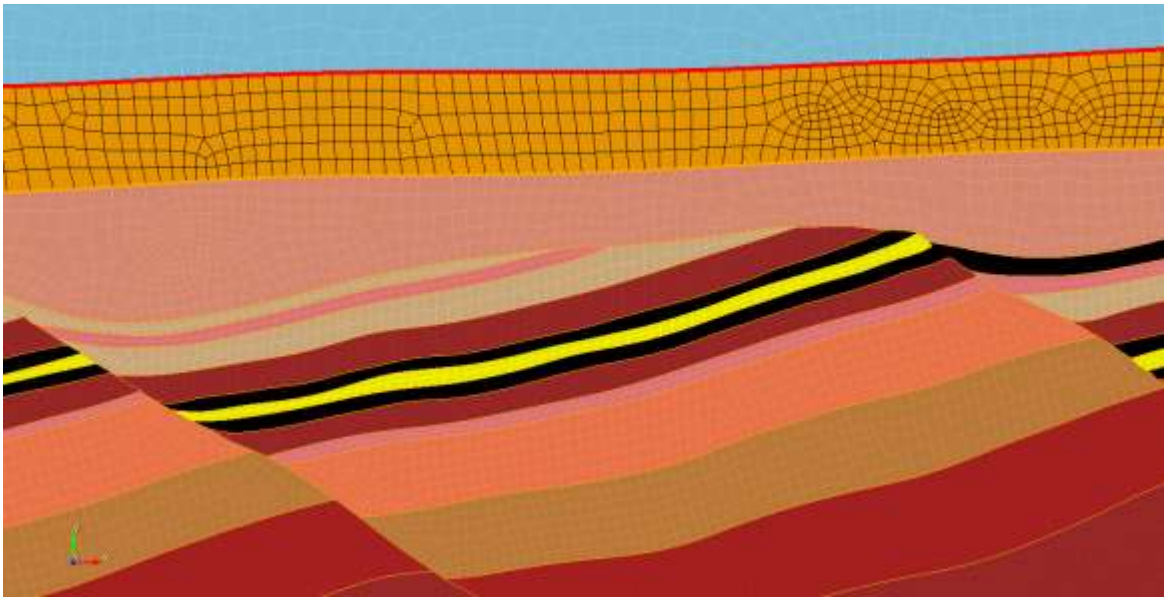


Рисунок 83 Спектральноэлементная сетка для двумерно-слоистой модели вблизи разломов.

Одним из наиболее сложных этапов в решении данной задачи было построение качественной неструктурированной сетки, обеспечивающей точную дискретизацию внутренних границ между подобластями (Рисунок 83), а также:

1. Необходимое количество точек на длину волны
2. Удовлетворяющей условиям численной устойчивости
3. Минимальный уровень искажения элементов относительно эталонного
4. Балансировку между количеством элементов и доступными вычислительными ресурсами.

Некачественная сетка может приводить к численной дисперсии, нефизичным результатам моделирования, плохой (или отсутствию) численной сходимости. Выбор 2.5D постановки частично помог решить указанные проблемы, т.к. построение в трехмерном случае качественной неструктурированной гексаэдральной сетки существенно сложнее алгоритмически, а решение задачи моделирования на ней требует значительно больших вычислительных ресурсов.

Результаты численного моделирования методом спектральных элементов приведены на Рисунок 84. Примеры полученных синтетических сейсмограмм на приемниках

акустического сигнала, расположенных вдоль верхней свободной поверхности, приведены на Рисунок 85.

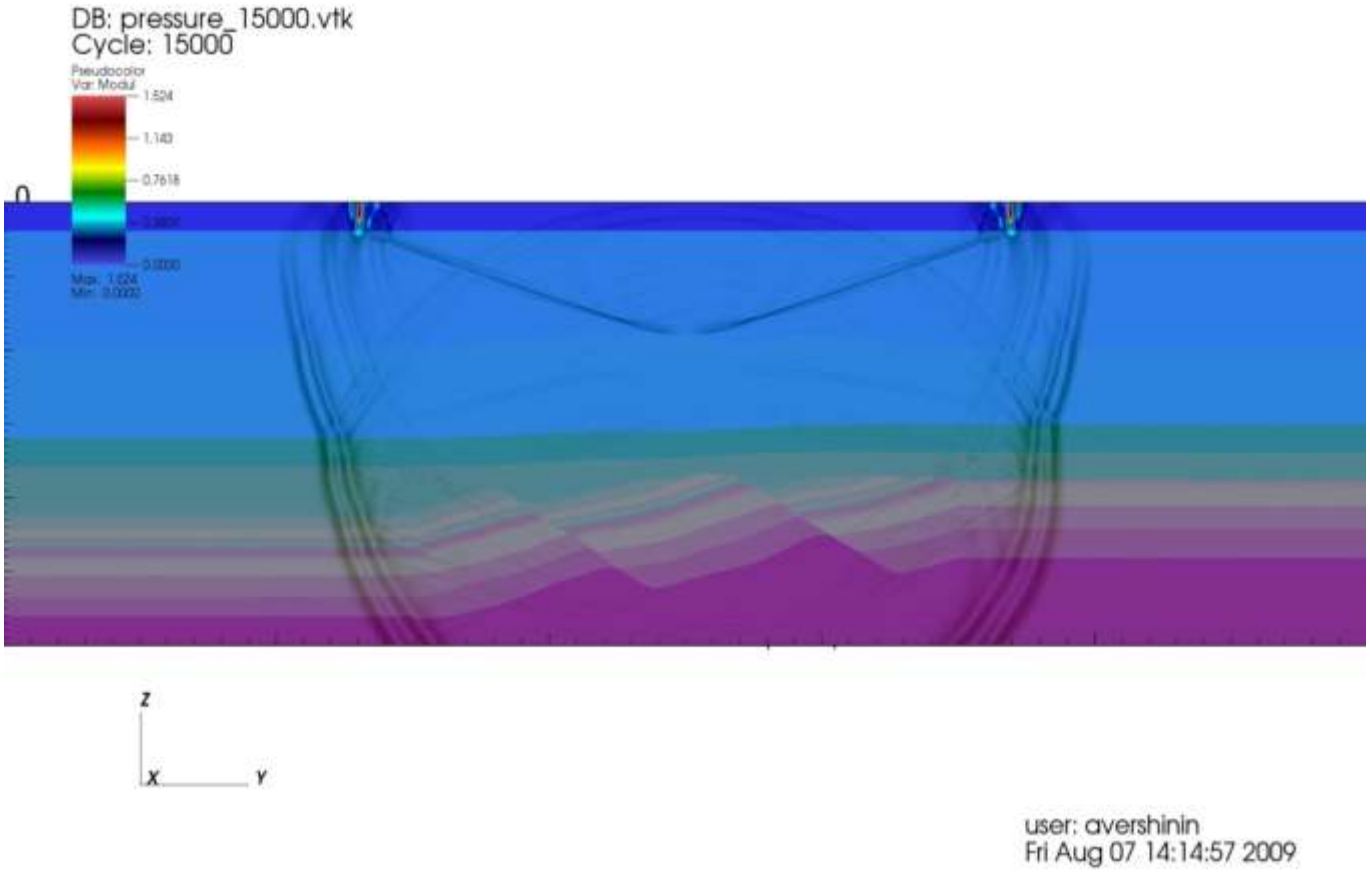


Рисунок 84 Поле перемещений, рассчитанное методом спектральных элементов в 2.5D постановке

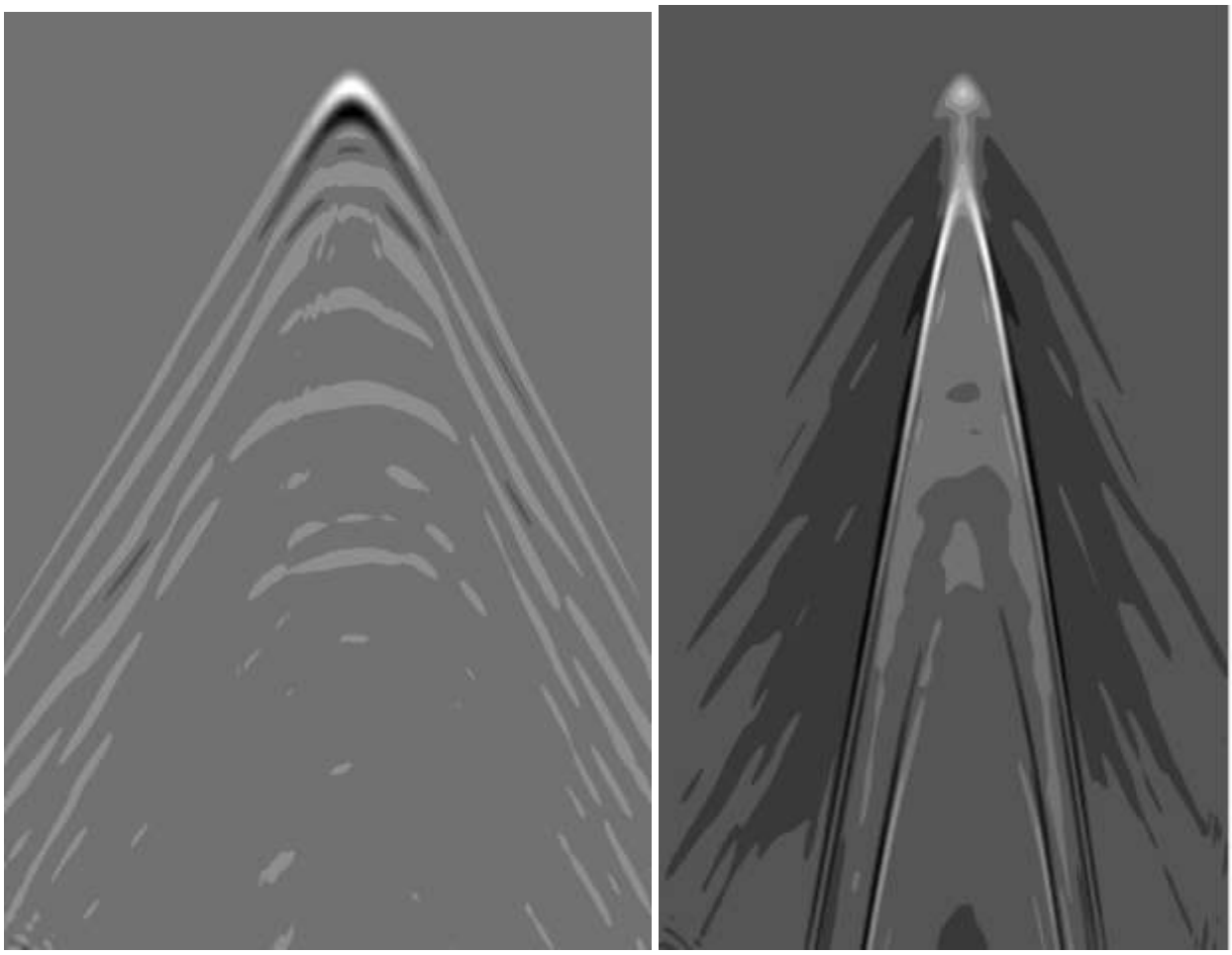


Рисунок 85 Сейсмограммы на приемниках, расположенных вдоль верхней свободной поверхности (слева – давление, справа –компонента вектора перемещений вдоль оси Z). По вертикальной оси отложено время, по горизонтальной – позиции приемников.

Еще одним преимуществом рассмотренной 2.5D постановки является тот факт, что при увеличении размеров расчетной области вдоль оси Y и количества волновых чисел (например, при повышении частоты источника сейсмических волн) возможно проведение расчета на тех же вычислительных ресурсах путем дробления интервала волновых чисел и последовательного расчета для каждого из них с последующим суммированием (обратным преобразованием Фурье). По сути, в данном случае имеем линейную масштабируемость задачи/времени расчета по числу волновых числе. В то время как в случае трехмерной постановки пришлось бы увеличивать размер сетки, что, в свою очередь, потребовало бы дополнительных вычислительных ресурсов. Однако во многих случаях реальных сред необходимо все же рассматривать общий случай трехмерной среды со сложной реологией материалов.

Трёхмерный случай анизотропной вязкоупругой TTI среды

Рассмотрим общий случай трёхмерной вязкоупругой трансверсально анизотропной (TTI) среды [154,233,505,534,573,710]. Поле перемещений **u** в данной среде определяется уравнением

движения $\rho\partial_t^2\mathbf{u}=\nabla\mathbf{T}+\mathbf{f}$. Тензор напряжений $\mathbf{T}$ линейно зависит от тензора деформаций ε по закону Гука, который в упругом анизотропном твёрдом теле может быть записан в форме $\mathbf{T}=\mathbf{c}:\varepsilon.$

В среде с вязкоупругим затуханием, закон Гука требуется модифицировать таким образом, чтобы напряжение определялось полной историей деформирования [89,114]:

$$\mathbf{T}(t)=\int_0^{+\infty}\partial_t\mathbf{c}(t-t'):\varepsilon(t')dt'. \qquad (1)$$

Данная вязкоупругая реология может быть выражена рядом из L стандартных линейных твёрдых тел в форме [522, 768]:

$$c_{ijkl}(t)=c_{ijkl}^R\left[1-\tau\sum_\ell^L e^{-t/\tau^{\sigma\ell}}\right]H(t), \qquad (2)$$

где c_{ijkl}^R обозначает релаксационный модуль (коэффициент релаксации), $\tau^{\sigma\ell}$ - время релаксации, $H(t)$ - функция Хевисайда; τ – безразмерный параметр, введённый Blanchetal [350], который упрощает отпределяющее соотношение по сравнению с параметром, используемым Komatitsch и Tromp [534] и уменьшает вычислительные затраты и память.

Используя вязкоупругий тензор, определяющее соотношение (1) может быть записано в форме $\mathbf{T}=\mathbf{c}^U:\nabla\mathbf{u}-\sum_\ell^L\mathbf{R}^\ell$ где для каждого стандартного линейного твёрдого тела

$$\partial_t\mathbf{R}^\ell \quad \mathbf{R}^\ell \quad \mathbf{R}^\ell \quad \mathbf{R}^\ell. \qquad (3)$$

Компоненты нерелаксационного модуля c_{ijkl}^U выражаются как $c_{ijkl}^U=c_{ijkl}^R(1-L\tau)$, а поправка $\delta\mathbf{c}^\ell$, связанная с каждым индивидуальным стандартным линейным твёрдым телом, определяется как $\delta c_{ijkl}^\ell \quad \tau c_{ijkl}^R.$

Интегрируя уравнение (3) по времени, получаем

$$R_l(t)=-\frac{1}{\tau_{\sigma l}}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_{\sigma l}}}\delta C:\varepsilon(\tau)d\tau$$

$$R_l(t_n)=R_l(t_{n-1})e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{\sigma l}}}-\delta C:\varepsilon(t_n)*(1-e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{\sigma l}}})$$

Подробности получения данной рекуррентной формулы приведены в следующем разделе.

По аналогии с МКЭ для задач упругости, используется эквивалентная слабая форма этих уравнений

$$\int_\Omega \rho \mathbf{w} \cdot \partial_t^2 \mathbf{u}\, d\Omega = -\int_\Omega \nabla \mathbf{w} : \mathbf{T}\, d\Omega \qquad (4)$$

Простейший анизотропный случай, имеющий широкую применимость в геофизике, имеет одно выделенное направление (обычно, но не всегда, оно вертикальное), в то время как упругие свойства вдоль двух других направлений совпадают. Этот случай называется трансверсальной изотропией, или гексагональная симметрия. В этом случае у матрицы C есть только пять независимых компонент:

$$C^y_{pq} = \begin{pmatrix} c^y_{11} & c^y_{12} & c^y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c^y_{12} & c^y_{11} & c^y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c^y_{13} & c^y_{13} & c^y_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^y_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^y_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5(c^y_{11} - c^y_{12}) \end{pmatrix}$$

Здесь тензор C записан в системе координат Y (Рисунок 86), в которой третья ось направлена вдоль выделенной акустической оси TI среды. Чтобы записать тензор C (а также закон Гука) в стандартной декартовой системе координате, связанной с вертикальным направлением, необходимо записать поворот тензора C от Y к X (Рисунок 86): $C^X_{ijkl} = C^Y_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha_i a^\beta_j a^\gamma_k a^\delta_l$, где a – матрица поворота от системы координат Y к X; здесь использовано обозначение Эйлера (суммирование ведётся по повторяющимся индексам).

Как правило, у тензора C после поворота все компоненты становятся ненулевыми, поэтому, исходя из соображений экономии памяти при параллельных вычислениях на графических процессорах, выгоднее хранить компоненты тензора C только в системе координат Y, и поворачивать этот тензор каждый раз, когда необходимо, так как обращение к глобальной графической памяти обычно требует намного больше времени, чем арифметические операции (как будет рассмотрено в четвертой главе).

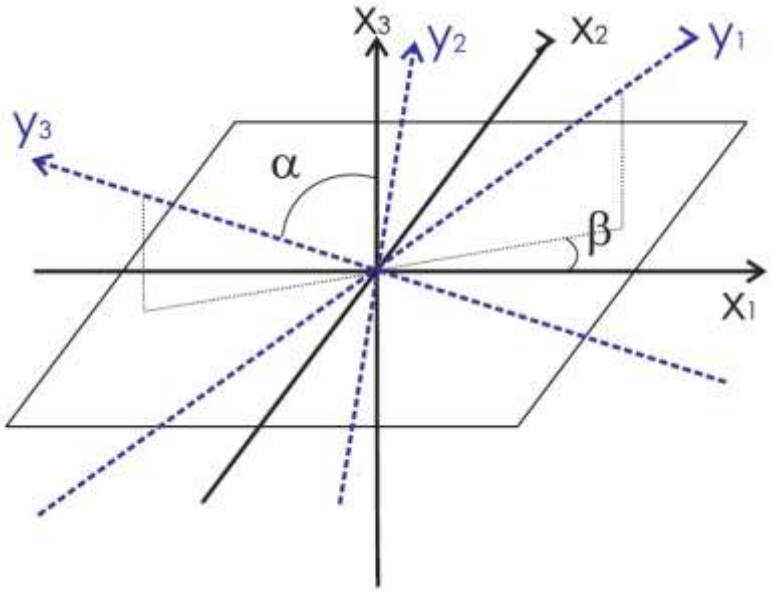


Рисунок 86 Оси анизотропии. Чёрным изображёны базисные вектора системы координат, соответствующие вертикальному направлению, а синим – локальные оси анизотропии среды.

Иногда для описания TTI-анизотропии вместо указанных 5 независимых компонент тензора $\hat{\mathbf{C}}$ используют безразмерные параметры Томсена [93]:

$$\varepsilon = \frac{C_{11}-C_{33}}{2C_{33}}, \delta = \frac{\left(C_{13}+C_{44}\right)^2-\left(C_{33}+C_{44}\right)^2}{2C_{33}\left(C_{33}-C_{44}\right)}, \gamma = \frac{C_{66}-C_{44}}{2C_{44}}$$

которые в связке со скоростями продольных и поперечных волн V_P, V_S позволяют описать упругие свойства среды. Введенный ранее безразмерный параметр τ в случае анизотропной вязкоупругой среды может отличаться для различных вязкоупругих модулей (разные скорости затухания для раличных типов волн) и связан с параметрами добротности следующим соотношением:

$$Q_{ij}^{-1} \approx \sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{ij}\tau_{\sigma l}}{1+\omega^2\tau_{\sigma l}^2}$$

Здесь ω – частота. Таким образом, варьируя времена релаксации и количество стандартных линейных твердых тел в вязкоупругой модели, можно добиться постоянного параметра добротности в заданном частотном диапазоне.

Приведем результаты решения трёхмерной задачи о распространении упругих волн в трансверсально изотропной среде методом спектральных элементов. Свойства материала описываются следующими параметрами:

C11 = 66.6 ГПа, C12 = 19.7 ГПа, C13 = 39.4 ГПа, C33 = 39.9 ГПа, C44 = 10.9 ГПа, ρ = 2590 кг/м^3, соответствующие глинистому сланцу Mesaverde [365]. На Рисунок 87 показано сечение изоповерхностей энергии волн в плоскости, содержащей ось симметрии однородного трансверсально изотропного тела. Трёхмерные поверхности волн имеют азимутальную симметрию. Данная среда соответствует четвёртому классу сред в классификации Payton [365], для которых часть qSV поверхности волны имеет четыре остроугольных треугольника, два из которых центрированы на вертикальной оси, а два других – на горизонтальной. На Рисунок 88 показано волновое поле, полученное в результате численного решения рассмотренной задачи методом спектральных элементов. Отметим хорошее совпадение формы поверхностей волн с приведенными на Рисунок 87. Для сравнения на Рисунок 89 приведено волновое поле в случае анизотропии общего вида, для которой решение может быть получено только численно.

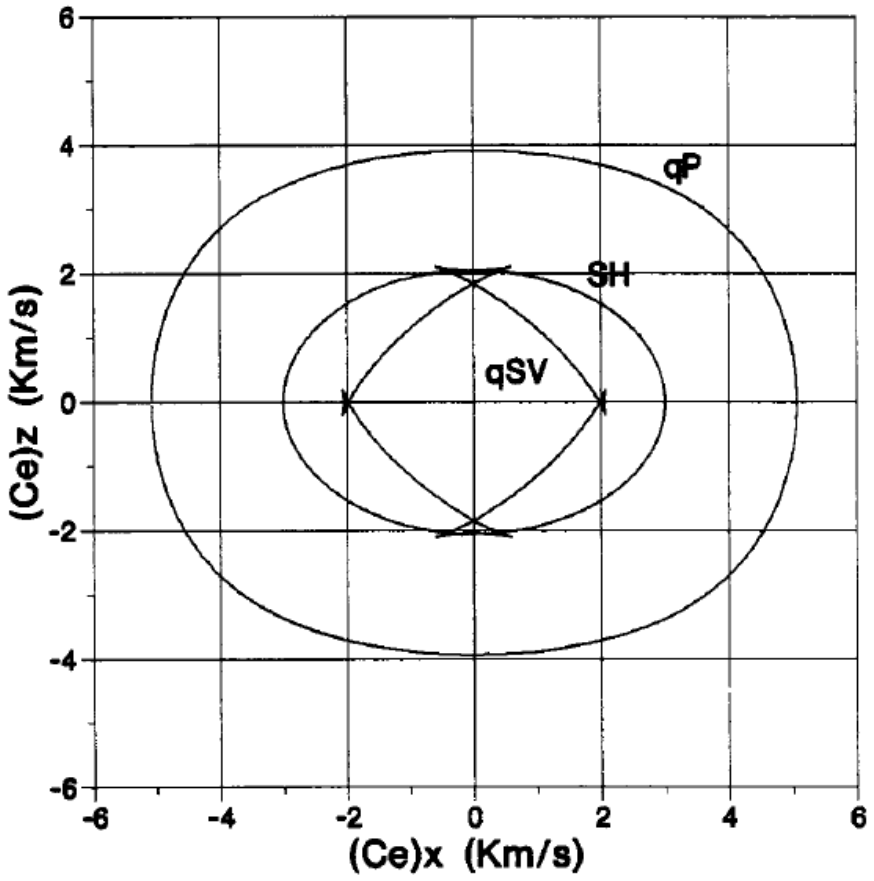


Рисунок 87 Сечение поверхностей уровня для энергии скоростей волн, содержащее ось симметрии TTI-среды. На фронте волны qSV видны точки возврата (перегиба).

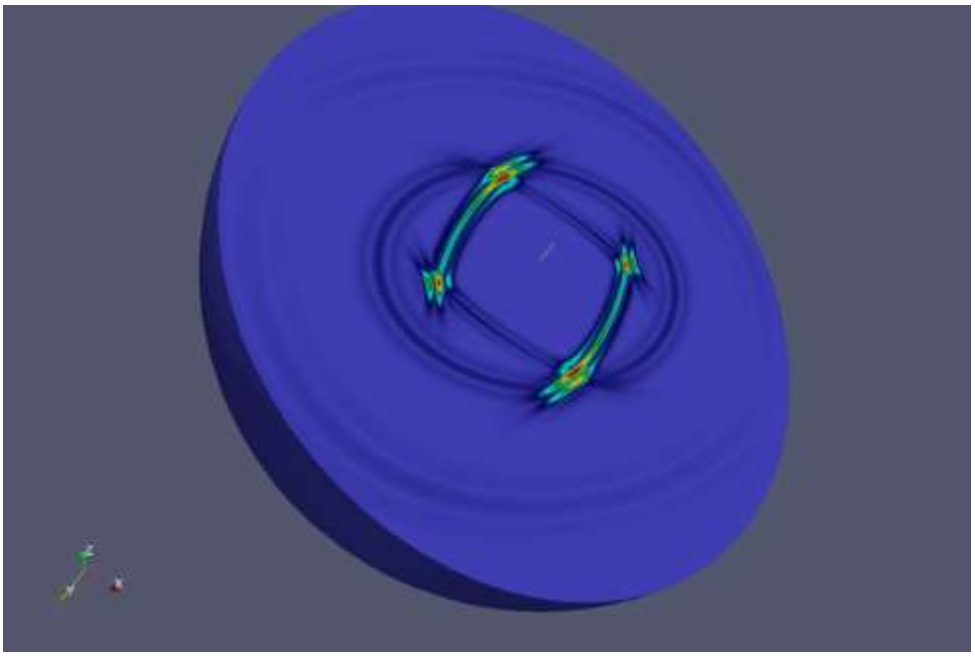


Рисунок 88 Волновое поле, рассчитанное методом спектральных элементов, в трансверсально изотропной среде.

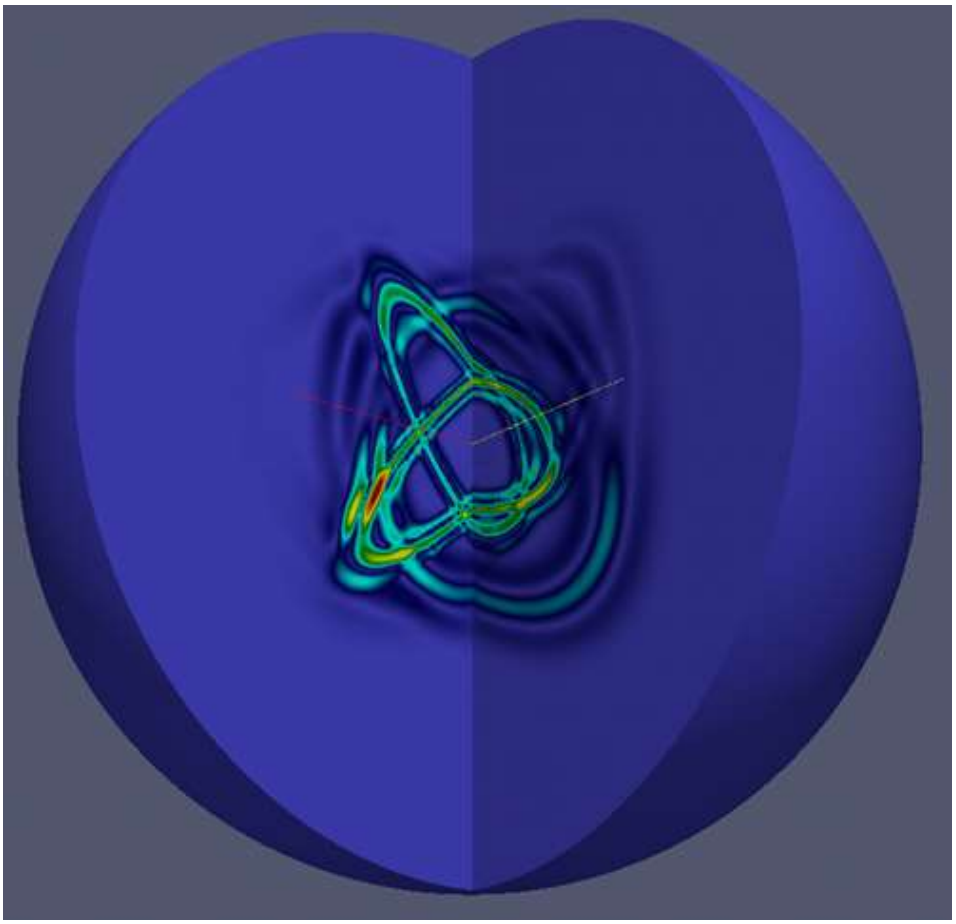


Рисунок 89 Волновое поле в случае анизотропии общего вида

Используя аналитическое решение из Carcione (2007), проведено сравнение аналитического и численного решений и выявлено хорошее совпадение (Рисунок 90).

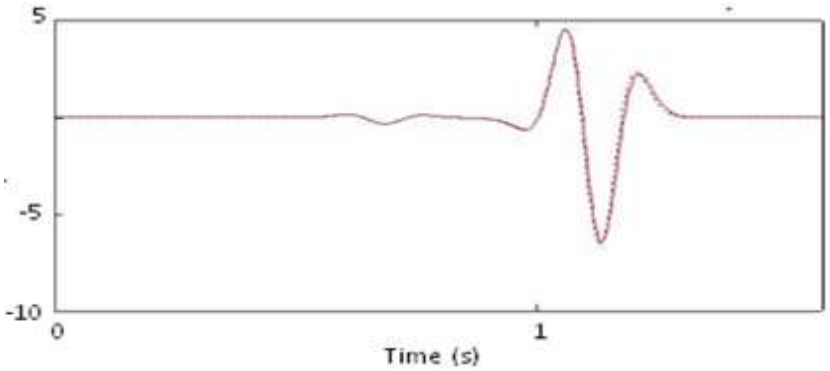
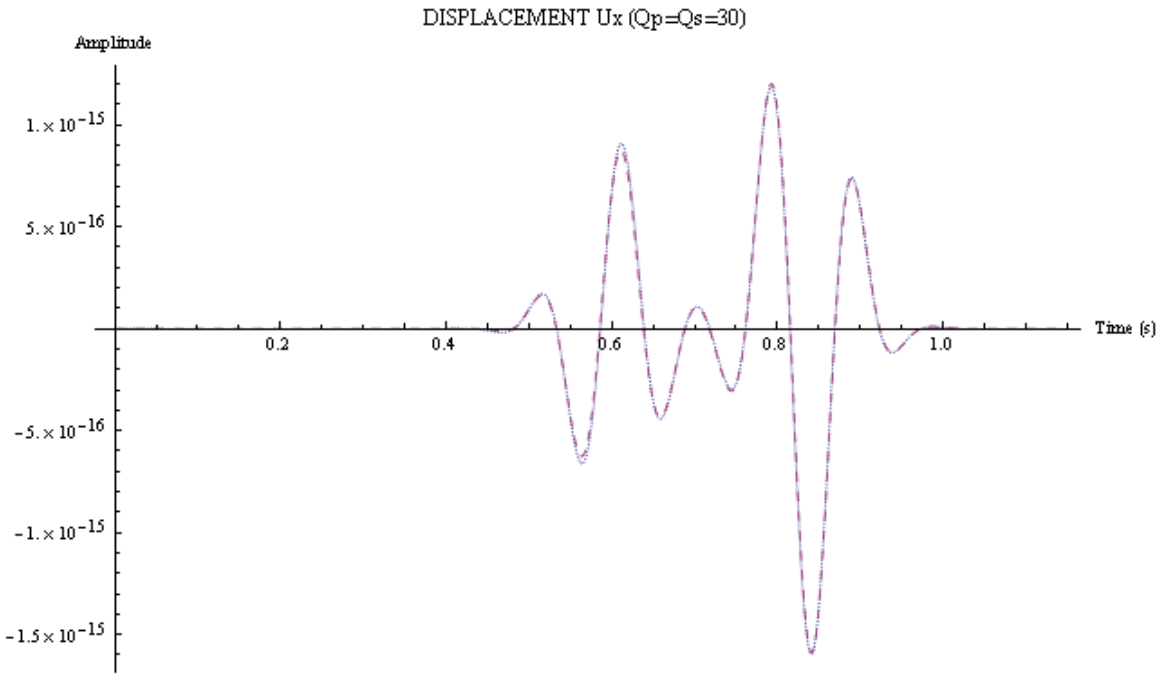


Рисунок 90 Сравнение численного (пунктирная линия) и аналитического (сплошная линия) решений (перемещение вдоль оси симметрии) для трансверсально изотропной упругой среды с точечной силой, направленной вдоль оси симметрии.

В дополнение к приведенному сравнению с аналитическим решением для упругой трансверсально изотропной среды приведем также сравнение с аналитическим решением для вязкоупругой изотропной среды. Для этого аналитическое решение, полученное Carcione [365] для двух- и трёхмерного случая, было обобщено на случай вязкоупругой однородной среды.



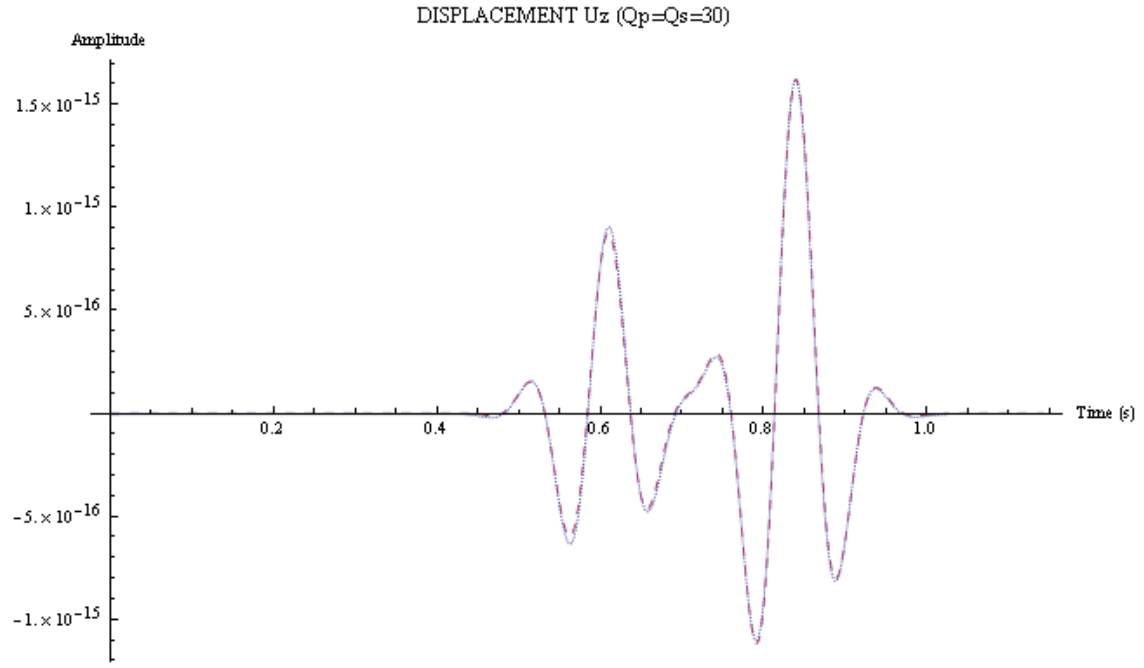


Рисунок 91 Сравнение численного (пунктирная линия) и аналитического (сплошная линия) решений для однородной вязкоупругой изотропной среды для горизонтальной и вертикальной компонент перемещения

В качестве источника волновых колебаний использовалась вертикальная точечная сила с центральной частотой 20 Hz, расположенная в начале отсчета системы координат, приемник сейсмического сигнала располагался в токе с координатами X = 1000 м, Y = 0 и Z = 1000 м. Однородная вязкоупругая изотропная среда задавалась следующими свойствами: *Vp*=3000 м/с, *Vs*=2000 м/с, ρ=2000 кг/м^3, *Qp=Qs=30*. Результаты расчета, демонстрирующие отличное совпадение численного и аналитического решений, приведены на Рисунок 91.

Вязкоупругие материалы. Вычисление интегралов свертки.

Пусть требуется вычислить численно интеграл вида $I(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, где

$f(t)=Ae^{-\alpha t}t^{\gamma-1}, 0<\gamma<1, \alpha>0$ - ядро свертки, используемое в различных моделях вязкоупругих материалов [1, 60, 85, 89, 114, 127, 214, 350, 375, 522, 593].

Заметим, что если ядро имеет вид $f(t)=e^{-\alpha t}$, то легко найти рекуррентную формулу вычисления данного интеграла.

$$I(t_{n+1})=I_{n+1}=\int_0^{t_{n+1}} e^{-\alpha(t_{n+1}-\tau)}g(\tau)d\tau=\int_0^{t_n} e^{-\alpha(t_{n+1}-\tau)}g(\tau)d\tau+\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\alpha(t_{n+1}-\tau)}g(\tau)d\tau=$$

$$= e^{-\alpha(t_{n+1}-t_n)} \int_0^{t_n} e^{-\alpha(t_n-\tau)} g(\tau) d\tau + g(\xi) \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\alpha(t_{n+1}-\tau)} d\tau \text{ ,где } \xi \in [t_n, t_{n+1}].$$

В последнем равенстве использована теорема о среднем. Продолжим получение рекуррентной формулы:

$$I(t_{n+1}) \approx e^{-\alpha\Delta t} I_n + \frac{g(t_{n+1}) + g(t_n)}{2} \frac{(1-e^{-\alpha\Delta t})}{\alpha}$$

Получаем итоговую формулу:

$$I_{n+1} \approx \beta I_n + g(t^*_n) \frac{(1-\beta)}{\alpha} \text{ , где } g(t^*_n) = \frac{g(t_{n+1}) + g(t_n)}{2} \text{ , а } \beta = e^{-\alpha(t_{n+1}-t_n)}.$$

Теперь посмотрим, как изменится формула при линейной комбинации экспоненциальных ядер (ряд Прони): $f(t) = \sum_i a_i e^{-\alpha_i t}$

$$I(t_{n+1}) = I_{n+1} = \int_0^{t_{n+1}} \sum_i a_i e^{-\alpha_i (t_{n+1}-\tau)} g(\tau) d\tau = \sum_i a_i \int_0^{t_{n+1}} e^{-\alpha_i (t_{n+1}-\tau)} g(\tau) d\tau = \sum_i a_i I^i_{n+1} \approx$$

$$\approx \sum_i a_i [\beta_i I^i_n + g(t^*_n) \frac{(1-\beta_i)}{\alpha_i}] \text{ ,где } \beta_i = e^{-\alpha_i (t_{n+1}-t_n)}, \; I^i_n = \int_0^{t_n} e^{-\alpha_i (t_n-\tau)} g(\tau) d\tau$$

Для получения аналогичной формулы в случае слабосингулярного вида $f(t) = Ae^{-\alpha t} t^{\gamma-1}$ необходимо вначале найти его разложение в ряд Прони $f(t) = \sum_i a_i e^{-\alpha_i t}$. Для этого нужно найти линейную комбинацию экспонент, которая приближает функцию $t^{\gamma-1}$,то есть подобрать такие C_i и α_i, что

$$\left| f(t) - \sum_{i=1}^{m} C_i e^{-\alpha_i t} \right| < \varepsilon, \forall t \in [0, T].$$

В работе [347] рассмотрен алгоритм для разложения произвольной убывающей функции в ряд Прони.

Кроме того, заметим, что ядро $K(t)=\frac{A\exp(-\beta t)}{t^{1-\gamma}}$ имеет особенность при $t=0$, а ряд Прони ограничен при $t=0$, поэтому для любых фиксированных C_i, α_i и m верно, что:

$$\left|K(t)-\sum_i C_i e^{-\alpha_i t}\right|\underset{t\to 0}{\to}0$$

Поэтому необходимо провести корректировку рекуррентной формулы для расчета интеграла свертки, полученной выше, «отступив» от точки $t=0$:

$$I_{k+1}=\int_0^{t_k}K(t_{k+1}-\tau)g(\tau)d\tau+\int_{t_k}^{t_{k+1}}K(t_{k+1}-\tau)g(\tau)d\tau\approx$$

$$\approx\int_0^{t_k}K(t_{k+1}-\tau)g(\tau)d\tau+g(t^*)\int_{t_k}^{t_{k+1}}K(t_{k+1}-\tau)d\tau$$

здесь использована теорема о среднем при вычислении второго слагаемого.

Рассмотрим первое слагаемое в полученной формуле. Заметим, что функция $K(t_{k+1}-\tau)$ не имеет особенностей на отрезке $[0,t_k]$, поэтому на данном отрезке можно найти разложение этой функции в ряд Прони. Подставив его в первое слагаемое, получим:

$$\int_0^{t_k}K(t_{k+1}-\tau)g(\tau)d\tau\approx\int_0^{t_k}\sum_{i=1}^{m}C_i e^{-\alpha(t_{k+1}-\tau)}g(\tau)d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(e^{-\alpha_i(t_{k+1}-t_k)}\int_0^{t_k}C_i e^{-\alpha_i(t_k-\tau)}g(\tau)d\tau\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(e^{-\alpha_i(t_{k+1}-t_k)}I_k^i\right)$$

где интегралы I_{k+1}^i вычисляются по полученной ранее рекуррентной формуле.

Интеграл из второго слагаемого можно вычислить аналитически. В случае ядра $K(t)=\frac{A\exp(-\beta t)}{t^{1-\gamma}}$ мы получим:

$$g(t^*)\int_{t_k}^{t_{k+1}}K(t_{k+1}-\tau)d\tau=Ag(t^*)\left[(\beta)^{-\gamma}\left(\Gamma[\gamma]-\Gamma[\gamma,\beta(t_{k+1}-t_k)]\right)\right],$$

Где $\Gamma[\gamma]=\int_0^{+\infty}t^{\gamma-1}e^{-t}dt$ - Гамма-функция Эйлера, а $\Gamma[\gamma,x]=\int_x^{+\infty}t^{\gamma-1}e^{-t}dt$ - это неполная Гамма-функция.

Таким образом, в итоге получаем следующую рекуррентную формулу для вычисления интеграла из определяющих соотношений вязкоупругости:

$$I_{k+1} = \sum_{i=1}^{m}\left(e^{-\alpha_i(t_{k+1}-t_k)}I_k^i\right) + Ag(t^*)\left[(\beta)^{-\gamma}\left(\Gamma[\gamma]-\Gamma[\gamma,\beta(t_{k+1}-t_k)]\right)\right]$$

где $I_k^i = \int_0^{t_n} e^{-\alpha_i(t_k-\tau)}g(\tau)d\tau$ - интегралы, вычисленные на предыдущем шаге по времени.

В случае применения данного подхода при выполнении очередного шага интегрирования по времени необходимо использовать лишь значения, полученные на предыдущем шаге, что избавляет от необходимости накопления всей истории деформирования вязкоупругого тела.

Для рассмотренной ранее обобщенной модели стандартного линейного твердого тела (GSLS) вязкоупругого материала определяющее соотношение выглядит следующим образом:

$$\sigma(t) = K_o I_1(\varepsilon(t))I + 2G_0 e(t) - \sum_{m=1}^{N_\Theta}\int_0^t I_1(\varepsilon(\tau))I\frac{K_m}{\tau_m^\Theta}e^{\frac{\tau-t}{\tau_m^\Theta}}d\tau - \sum_{l=1}^{N_s}\int_0^t e(\tau)\frac{2G_l}{\tau_l^s}e^{\frac{\tau-t}{\tau_l^s}}d\tau$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{I_1(\varepsilon)}{3}I$$

Здесь K_o, G_0 - объёмный и девиаторный модули мгновенной упругости, а K_m, G_l - вязкоупругие модули, каждому из которых соответствует времена релаксации τ_m^Θ или τ_l^s. При этом количество объёмных и девиаторных ядер может быть разное.

При численном моделировании необходимо вычислять в каждый момент времени t_i для каждого ядра интеграл вида $Y(t) = \int_0^t Ae^{\alpha(\tau-t)}g(\tau)d\tau$. Для этого каждый интеграл $Y(t)$, входящий в определение GSLS, вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$Y_{n+1} = \int_0^{t_{n+1}} Ae^{\alpha(\tau-t_{n+1})}g(\tau)d\tau = \int_0^{t_n} Ae^{\alpha(\tau-t_n)}g(\tau)d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} Ae^{\alpha(\tau-t_{n+1})}g(\tau)d\tau = BY_n + g(\xi)\frac{1-\beta}{\alpha}$$

где $Y(t_{n+1}) = Y_{n+1}$, $\beta = e^{-\alpha(t_{n+1}-t_n)}$, а $\xi \in (t_n, t_{n+1})$. Преобразование последнего слагаемого возможно благодаря первой теореме о среднем. Численно значение функции g в точке ξ аппроксимируется выражением

$$g(\xi) = \frac{g(t_n)+g(t_{n+1})}{2}$$

Тогда определяющие соотношения запишутся следующим образом:

$$\sigma_{n+1} = \sigma(t_{n+1}) = K_0 I_1(\varepsilon_{n+1}) I + 2G_0 e_{n+1} - \sum_{m=1}^{N_\Theta} Y_{n+1}^m - \sum_{l=1}^{N_S} J_{n+1}^l$$

где Y^m - тензоры, посчитанные рекуррентно в соответствии с формулой, указанной выше и соответствующие объёмным ядрам. Соответственно, J^l - суть интегралы девиаторных ядер.

$$Y_{n+1}^m = \beta_\Theta^m Y_n^m + \frac{1-\beta_\Theta^m}{\alpha_\Theta^m} \frac{I_1(\varepsilon_{n+1}) I_1(\varepsilon_n)}{2} I \frac{K_m}{\tau_m^\Theta}$$

$$J_{n+1}^m = \beta_S^l J_n^l + \frac{1-\beta_S^l}{\alpha_S^l} \frac{(e_{n+1}+e_n)}{2} \frac{2G_l}{\tau_l^S}$$

Далее соберем вместе слагаемые, содержащие ε_{n+1}, поскольку именно эти слагаемые определяют матрицу жёсткости в текущий момент времени. Все остальные слагаемые зависят от предыдущих моментов времени и переносятся в правую часть линейной системы уравнений.

$$\sigma_{n+1} = (K_0 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\Theta} K_m(1-\beta_\Theta^m)) I_1(\varepsilon_{n+1}) I + 2(G_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_S} G_l(1-\beta_S^l)) e_{n+1} -$$

$$-\sum_{m=1}^{N_\Theta} (\beta_\Theta^m Y_n^m + K_m(1-\beta_\Theta^m)\frac{I_1(\varepsilon_n)}{2} I) - \sum_{l=1}^{N_S} (\beta_S^l J_n^l + 2G_l(1-\beta_S^l)\frac{e_n}{2})$$

В результате получаем аппроксимацию определяющих соотношений следующего вида:

$$\sigma_{n+1} = D^* \varepsilon_{n+1} - b_n$$

где матрица D^* определяется величинами

$$K^* = K_0 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\Theta} K_m(1-\beta_\Theta^m)$$

$$G^* = G_0 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_S} G_l(1-\beta_S^l)$$

а вектор $b_n = \sum_{m=1}^{N_\Theta} (\beta_\Theta^m Y_n^m + K_m(1-\beta_\Theta^m)\frac{I_1(\varepsilon_n)}{2} I) + \sum_{l=1}^{N_S} (\beta_S^l J_n^l + 2G_l(1-\beta_S^l)\frac{e_n}{2})$

зависит лишь от значений деформаций на предыдущем временном шаге.

2.4 Моделирование акустического каротажа изопараметрическим методом спектральных элементов

Акустический каротаж является одним из самых надежных способов определения структуры и механических свойств пород в околоскважинной зоне, посредством измерения и изучения волнового поля, создаваемого источником сейсмоакустических волн, расположенным в скважине. Однако вплоть до настоящего времени отсутствует детальное понимание особенностей процессов распространения акустических волновых полей для реалистичных неоднородных трехмерных сред с анизотропией и поглощением. Поэтому численное моделирование является единственной возможностью изучения волнового поля, возникающего при выполнении акустического каротажа.

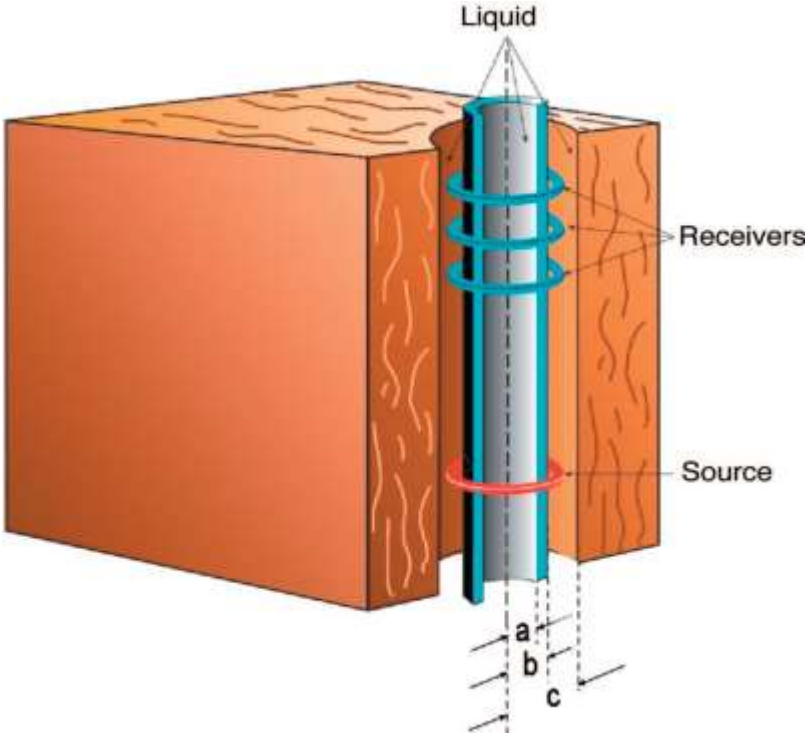
В качестве практического примера использования МСЭ рассмотрим подробно применение изопараметрического метода спектральных элементов для моделирования распространения волновых процессов в трёхмерной анизотропной среде с вязкоупругим затуханием, задаваемым на основе обобщенной модели стандартных линейных твёрдых тел [603]. Благодаря использованию неструктурированной сетки, спектральноэлементный метод позволяет использовать богатый инструментарий для работы с цилиндрическими телами, заполненными жидкостью, окруженной неоднородными упругими телами со сложной геометрией граничных поверхностей. В данном параграфе приведено сравнение результатов численного моделирования акустического каротажа в анизотропных неоднородных телах с аналитическим решением для ряда частных случаев, а также получены новые численные результаты для областей со сложной пространственной геометрией и анизотропией свойств материла.

Механическая модель акустического каротажа

Акустический каротаж — это одна из основных технологий в нефтяной и газовой индустрии, являющаяся незаменимым методом при исследовании нефтяных резервуаров, оценках запасов, освоении скважин и добыче углеводородов. Ввиду того, что акустические свойства породы, такие как скорость распространения упругих волн и поглощение, тесно связаны с типом самой породы, то изучение этих свойств может дать полезную информацию для оценки свойств породы [349, 692, 703].

В настоящий момент наблюдается стремительное развитие в методах интерпретации и численного анализа в задачах акустического каротажа. Это
развитие - результат многолетних исследований и эволюции в области компьютерных технологий. Различные методы анализа и численного моделирования реализованы на

современных вычислительных платформах [538, 545, 552, 553, 603, 671]. Это позволяет эффективно обрабатывать всю информацию при сейсморазведке даже в полевых условиях.



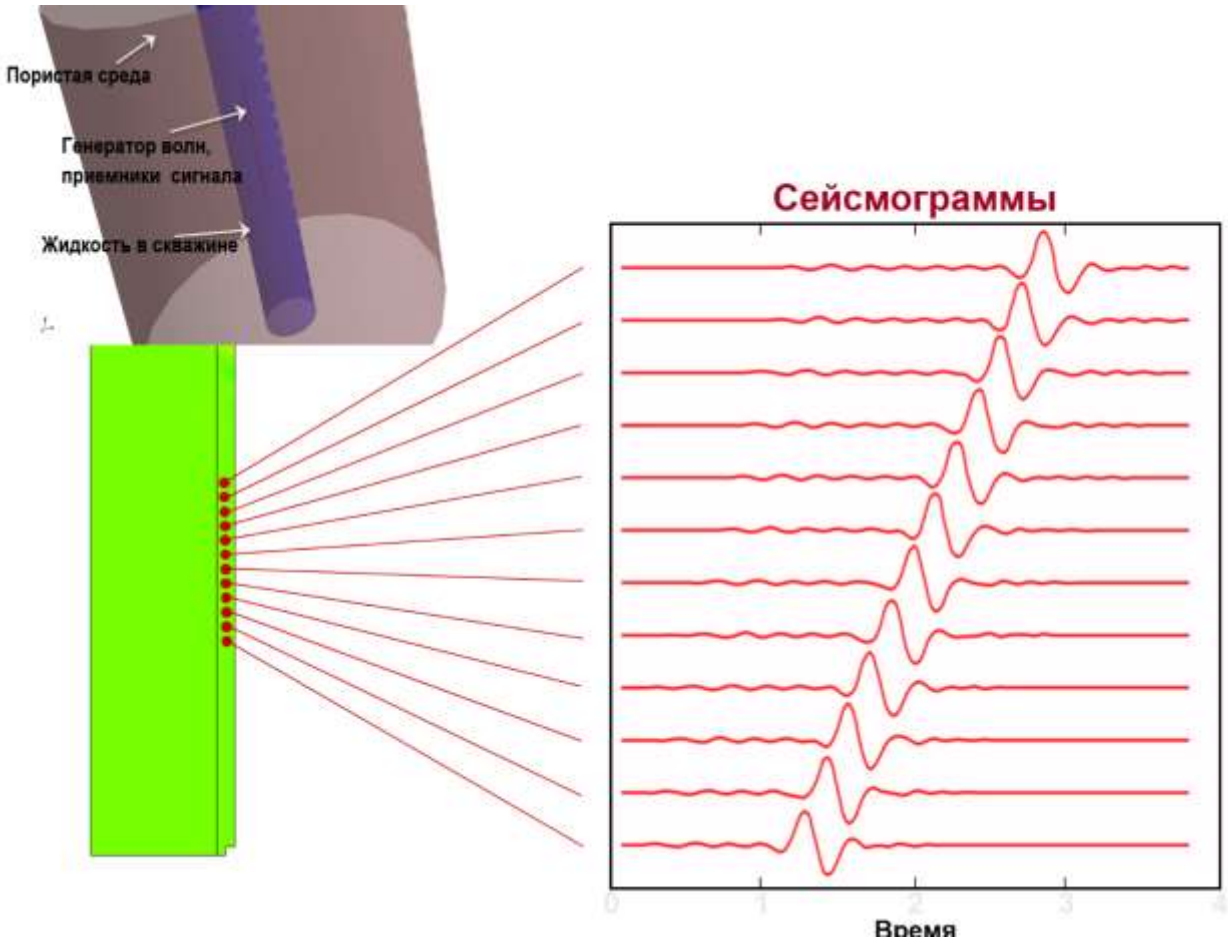


Рисунок 92 Схема акустического каротожа.

Существует множество работ (например, [310, 373, 427, 428, 519, 608, 658, 692, 762]), посвященных моделированию прохождения акустических волн в скважине сквозь различные типы пород, такие как упругие, пористые, неоднородные, анизотропные. Сложность природы волн в скважинах заключается в эффектах, вызываемыми обсадной колонной, проницаемостью и анизотропией породы.

В акустическом каротаже (Рисунок 92) прибор опущен в скважину, и акустическая или звуковая волна генерируется источником, находящемся в приборе. Волна двигается по скважине и взаимодействует с породой, затем фиксируется приемниками (ресиверами), расположенными на том же приборе. Измерение происходит непрерывно, по мере того, как прибор опускается или поднимается внутри скважины при помощи провода, который питает прибор и передает информацию управляющей системе на поверхности. Обработка полученных прибором данных дает информацию, позволяющую судить об акустических свойствах породы вокруг скважины.

Самые первые акустические приборы имели только два ресивера. Прибор измерял разницу Δt во времени прибытия акустической волны, сгенерированной источником T и

зафиксированной двумя ресиверами R_1 и R_2. Разница Δt, разделенная на расстояние между ресиверами $\Delta R = R_2 - R_1$, дает медленность (величину, обратную скорости) первого прибытия акустической волны, движущейся по скважине. Эта величина называется медленностью P-волны или волны сжатия (продольной волны) в породе. Современные приборы имеют гораздо больше ресиверов и имеют более сложную конструкцию. Преимуществом использования набора ресиверов является то, что различные волновые моды фиксируются различными ресиверами в различные моменты времени [703].

Традиционные акустические приборы используют источники, которые создают импульс давления в скважине. В акустическом каротаже используется два вида источников: монопольный и дипольный. В случае монопольного источника импульс симметричен относительно оси скважины. Волны сжатия и сдвига двигаются как головные, отраженные от поверхности скважины. В случае дипольного источника импульс давления осуществляется в некотором выбранном направлении. Также существуют квадрупольные источники.

Кроме того, большинство реальных скважин с окружающей их средой имеют сложную слоистую структуру, упругие свойства которой меняются от слоя к слою. Поэтому для того, чтобы понять всю физику и процессы, протекающие вокруг скважины, необходимо использовать полную трехмерную постановку задачи моделирования распространения упругих волн в сложнопостроенных средах. Однако, в этом случае мы сталкиваемся с вычислительными проблемами, обусловленными размерами трехмерной дискретной модели, подготовленной для численного анализа (десятки и сотни миллионов узлов сетки). Это связано с тем, что попытка как можно точнее описать все неоднородности реальной модели приводит к большому числу элементов в расчетной сетке. В этом случае методы, основанные на использовании неструктурированных сеток, имеют преимущества по сравнению с подходами, использующими структурированные сетки. Кроме того, размеры требуемой сетки определяются частотой излучателя, а именно минимально допустимым количеством точек на длину волны. В ряде случаев (например, для корректного моделирования поверхностных волн с дисперсией по частоте) это число может достигать 100-200 в каждом из направлений (1 млн. в трехмерном случае). Использование спектральных элементов высоких (8-10) порядков, как увидим позднее, позволяет задавать всего 3-4 узла на длину волны.

Поскольку мы рассматриваем скважинную акустику, то нам необходимо максимально точно выполнять дискретизацию границы между скважиной и окружающей ее средой. На границе раздела сред накладываются различные условия непрерывности между давлением жидкости и напряжениями в пористой породе, а также условия непрерывности нормальных перемещений жидкой и твердой фаз. Использование неструктурированных сеток и метода

спектральных элементов позволяет явным образом задать границу и граничные условия на ней между скважинной жидкостью и окружающей упругой (или вязкоупругой) средой [535].

Математическая модель акустического каротажа

Распространение упругих волн в пористой породе, насыщенной жидкостью, вокруг скважины описывается системой уравнений Био [349]. Многие работы посвящены уравнениям Био в частотной области [308, 460, 504, 678], в то время как в ряде других используется запись уравнений во временной области [780]. При этом уравнения зачастую приводятся с использованием отличающихся символов, используемых для обозначения параметров и неизвестных пороупругой среды Био. Обозначения, используемые в данной работе, являются сочетанием формулировок, используемых Прайдом и Джонсоном.

Приведем далее основные параметры и неизвестные величины пористой среды, насыщенной жидкостью:

u – перемещения в твердом скелете,

U – перемещения в жидкости,

Kb, Ks, Kf – модули объемного сжатия сухого скелета, упругого материала скелета и жидкости,

N – модуль сдвига,

φ - пористость,

ρ_s, ρ_f - плотности упругого материала и жидкости,

η - вязкость жидкости,

α - коэффициент извилистости поровых каналов,

k - проницаемость.

Осредненная плотность ρ рассчитывается как $\rho = \rho_s(1-\varphi) + \rho_f\varphi$.

Уравнения динамики для пороупругой среды, насыщенной жидкостью:

$$\nabla \cdot \tau_B = \rho\ddot{u} + \rho_f \ddot{w}$$

$$-\nabla p_f = \rho_f \ddot{u} + \frac{\alpha\rho_f}{\phi}\ddot{w} + F_{fr}$$

Выражения для тензора напряжений в породе и давления в жидкости:

$$\tau_B = (P - 2N + 2Q + R)\nabla \cdot uI + \frac{Q+R}{\phi}\nabla \cdot wI + N(\nabla u + u\nabla)$$

$$-p_f = \frac{Q+R}{\phi}\nabla \cdot uI + \frac{R}{\phi^2}\nabla \cdot wI$$

$$F_{fr} = \frac{\eta}{k_0}\int_0^t \frac{\exp(-\frac{2}{M_b}\omega_b(t-\tau))}{\sqrt{\pi\frac{2}{M_b}\omega_b(t-\tau)}}(\partial_\tau v + \frac{2\omega_b}{M_b}v)d\tau$$

$F_{fr} - сила\ межфазного\ \ трения,$

$\omega_b = \frac{\phi\eta}{\alpha\rho_f k} - частота\ Био,$

$v = \dot{w},\ w = \phi(U-u)$

$M_b - геометрический\ параметр\ порового\ \ пространства \approx 1$

Для описания распространения акустических волн внутри скважины используется волновое уравнение:

$$K_f \Delta\Phi = \rho_f \frac{d^2}{dt^2}\Phi,\ \Phi - потенциал\ \ вектора\ \ перемещений: U = \nabla\Phi$$

Интерфейс между скважинной жидкостью и пористой породой можно моделировать различными способами. Во-первых, поры внутри породы можно считать открытыми для жидкости в скважине. Во-вторых, поры можно рассматривать герметичными, так что жидкость в скважине не находится в непосредственном контакте с жидкой средой в порах. В-третьих, глинистую прослойку, присутствующую на границе между жидкостью внутри скважины и пористой породой, можно моделировать с помощью упругой мембраны [607]. Любой из этих видов интерфейсов подразумевает различные граничные условия непрерывности между давлениями жидкости (как скважинной, так и поровой) и напряжением в пористой породе, а также граничные условия непрерывности смещений как жидких фаз, так и твердой фазы. Приведем ниже запись граничных условий на границе между скважинной жидкостью и пористой средой вокруг скважины для общего случая упругой мембраны (вариант открытых пор получаем в случае модуля упругости мембраны Wmc = 0, закрытых – Wmc=∞):

$$\rho_f \frac{d^2}{dt^2}\Phi\vec{n} = \tau_B \cdot \vec{n}$$

$$\frac{d}{d\vec{n}}\Phi = (u + w)\cdot\vec{n}$$

$$-\rho_f \frac{d^2}{dt^2}\Phi\vec{n} - p_f \cdot \vec{n} = W_{mc}(w\cdot\vec{n})\vec{n}$$

На внешней (искусственной) границе расчетной области необходимо также задать локальные неотражающие граничные условия (нелокальные, как и прежде, моделируются введением демпингового слоя вдоль внешней границы). Для уравнений Био данные условия запишутся следующим образом (обобщение случая упругой среды, рассмотренной ранее):

$$-\tau_B \cdot \vec{n} = \rho c_p \frac{\partial\overrightarrow{u_n}}{\partial t} + \rho c_s \frac{\partial\overrightarrow{u_t}}{\partial t} + \frac{\alpha Q}{c_p}\frac{\partial\overrightarrow{w_n}}{\partial t}$$

$$p_f \vec{n} = \frac{\alpha Q}{c_p}\frac{\partial\overrightarrow{u_n}}{\partial t} + \frac{Q}{c_p}\frac{\partial\overrightarrow{w_n}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{u_n} = (\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{u};\quad \overrightarrow{w_n} = (\vec{w}\cdot\vec{n})\vec{w};$$

$$\overrightarrow{u_t} = \vec{u} - \overrightarrow{u_n}$$

$$\alpha = 1 - \chi;\quad Q = \frac{1}{\frac{\varphi}{K_f} + \frac{1-\varphi-\chi}{K_s}}$$

C_p и C_s – как и ранее, скорости продольной и поперечной волн соответственно.

Для численного решения приведенной системы уравнений, описывающих процессы акустического каротажа, использовался изопараметрический метод спектральных элементов, позволяющий осуществлять высокоточную дискретизацию как криволинейной геометрии скважины, так и волн, распространяющихся вблизи нее, с минимальными требованиями по числу точек дискретизации. Для применения данного метода выпишем вариационную постановку системы уравнений в частных производных:

$\forall N \in H^1$ (*пространство обобщенных функций*):

$$\iiint_V (\rho \quad \quad = \iiint_V \nabla \cdot \tau_B N dV$$

$$\iiint_V (\rho_f \quad \quad dV = -\iiint_V \nabla p_f N dV$$

$$\iiint_V \rho_f \quad \iiint_V \nabla \cdot (K_f \nabla \Phi) N dV$$

Принимая во внимание приведенные выше граничные условия и применяя формулу Грина:

$\forall N \in \Omega$

$$\iiint_V (\rho \quad \quad = -\iiint_V \tau_B \nabla N dV + \iint_{S_I} N \rho_f \quad \text{...ние силы}$$

$$\iiint_V (\rho_f \quad \quad dV = \iiint_V p_f \nabla N dV + \iint_{S_I} N(\rho_f \quad v_n) \quad \text{...ние силы}$$

$$\iiint_V \rho_f \quad -\iiint_V K_f \nabla \Phi \nabla N dV + \iint_{S_I} N K_f (u_n + w_n) dS + \text{внешние силы}$$

Рассмотрим далее алгоритм расчета интеграла свертки, возникающего при записи силы межфазного трения:

$$F_{fr} = \frac{\eta}{k_0} \int_0^t \frac{\exp(-\frac{2}{M_b}\omega_b(t-\tau))}{\sqrt{\pi \frac{2}{M_b}\omega_b(t-\tau)}} (\partial_\tau v + \frac{2\omega_b}{M_b} v) d\tau$$

Применение классических квадратурных формул для его численного интегрирования потребует хранения полей скоростей ***v*** на всех предыдущих шагах по времени, что, в свою очередь, требует огромных вычислительных ресурсов и, в первую очередь, большого объема доступной оперативной памяти. Поэтому необходимо использовать эффективный итерационный метод вычисления сверточных интегралов вида $\int_0^t q(t-\tau) \cdot G(v(\tau), \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau)) d\tau$, где ядро свертки *q(t)* задано аналитически, функция G(t) известна только в дискретные шаги по времени в рамках выбранной схемы интегрирования по времени. Например, в случае уравнений Био имеем $q(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. В работе [365] показано, что однородную пористую среду можно моделировать вязкоупругой средой (на основе стандартной линейной модели твердого тела,) со специальным выбором соответствующих показателей добротности Q. Исходя из этого, представим ядро

свертки *q(t)* аппроксимацией рядом Прони $q(t) \approx \tilde{}$ $_m e^{-\omega_m t}$ и найдем коэффициенты

разложения, требуя минимум $\varepsilon_c = \sup_{t \ge t_0} | q(t) - \tilde{}$, например, используя метод Прони или

Паде аппроксимацию [522].

Тогда в случае ядра $q(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, сингулярного при *t=0*, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} \approx \sum_m G_m e^{-\Omega_m t}, \xi \ge 1$$

$$c_0 \frac{e^{-\omega_d t}}{\sqrt{\pi \omega_d t}} = c_0 \frac{e^{-\omega_d t}}{\sqrt{\pi \omega_d \tau}} \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\tau}}} \approx c_0 \frac{e^{-\omega_d t}}{\sqrt{\pi \omega_d \tau}} \sum_m G_m e^{-\Omega_m \frac{t}{\tau}} = \sum_m \frac{c_0 G_m}{\sqrt{\pi \omega_d \tau}} e^{-(\omega_d + \frac{\Omega_m}{\tau})t}, t \ge \tau$$

Примеры разложений для различного количества членов ряда Прони приведены на Рисунок 93.

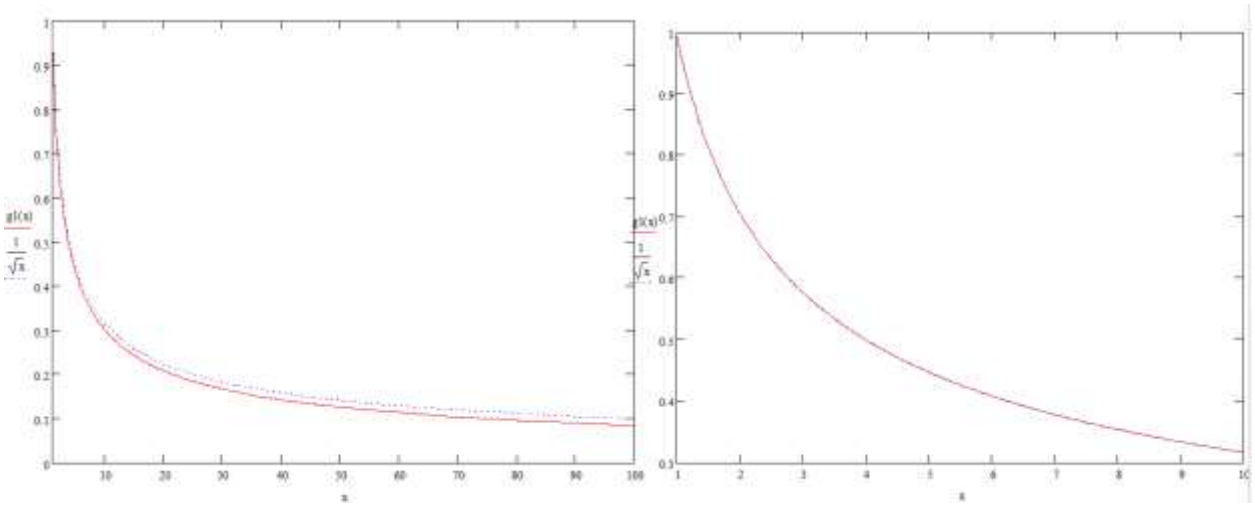


Рисунок 93 Разложение функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (красным) в ряд Прони (синим) из 10 членов разложения (слева) и 14 членов разложения (справа).

Рассмотрим теперь, как упростится расчет интеграла свертки в случае ядер, представимых рядом Прони. Для случая $q(t) = e^{-\omega t}$ имеем:

$$I(t) = \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} \cdot g(\tau) d\tau$$

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I + g(t)$$

$$I(t_{n+1}) \approx I(t_n) e^{-\Delta t \cdot \omega} + \frac{g(t_n) + g(t_{n+1})}{2\omega}(1 - e^{-\Delta t \cdot \omega}), \Delta t = t_{n+1} - t_n$$

Соответственно в случае $q(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot e^{-\omega_i t}$ существует рекуррентная формула для вычисления интеграла свертки $\int_0^t q(t-\tau) \cdot G(v(\tau), \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau)) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i I_i(t)$

Как было замечено, ядро $q(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ имеет особенность при *t=0*. Для ее учета используется модифицированный рекуррентный алгоритм вычисления интеграла свертки, рассмотренный ранее в параграфе 2.3:

$$\int_0^{t_{n+1}} q(t_{n+1} - \tau) \cdot G(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i I_i(t_n) + \frac{G(t_n) + G(t_{n+1})}{2} \cdot \left[E_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\omega_i} (e^{-\omega_i \cdot \Delta t} - 1) \right],$$

$$E_0 = \int_0^{\Delta t} q(\tau) d\tau$$

В заключение продемонстрируем на примере осесимметричной задачи об акустическом каротаже в скважине, окруженной изотропной однородной пористой средой, что учет интеграла свертки является критичным в приведенных уравнениях Био и вносит существенный вклад в итоговое решение. На Рисунок 94 приведено сравнение аналитического [671] и численного решений для случая высокочастотного излучателя в скважине.

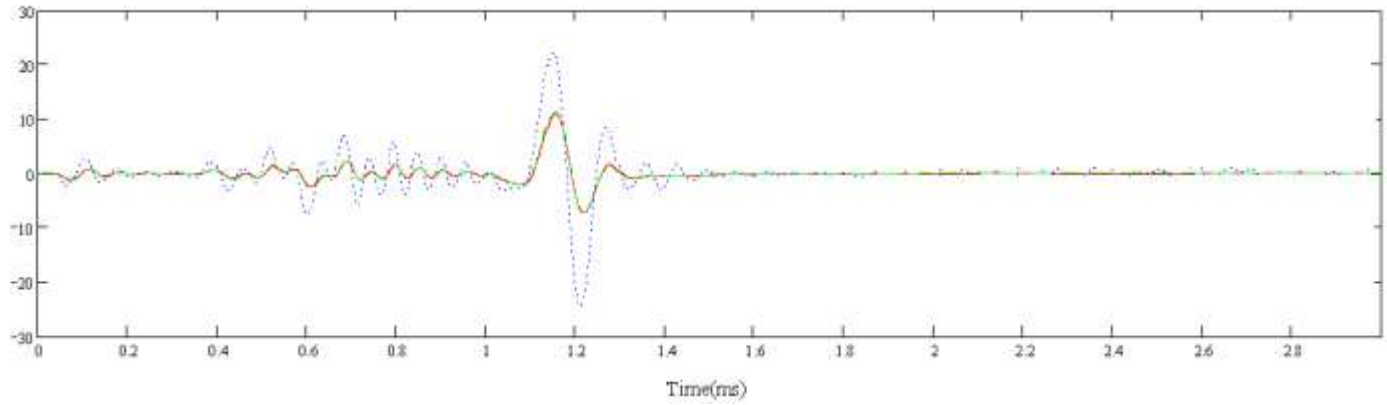


Рисунок 94 Сравнение численного и аналитического решений в задаче об акустическом каротаже. Красный – общий случай уравнений Био (интеграл свертки). Синий – низкочастотное приближение (замена интеграла свертки рациональной функцией). Зеленый – аналитическое решение.

Отметим хорошее совпадение численного решения с аналитическим при точном расчете интеграла свертки в выражении для силы межфазного трения, в то же время низкочастотное приближение данного выражения приводит к значительной погрешности в решении.

Построение неструктурированных сеток для численного моделирования задач акустического каротажа

Рассмотрим геометрию задачи скважинного акустического каротажа. На Рисунок 92 ранее была представлена типичная схема задачи. Имеется скважина, пробуренная в породе и имеющая цилиндрическую форму. В скважину опущен прибор, на котором находится источник и семейство приемников (ресиверов). Как правило, прибор имеет сложную структуру, но в дальнейшем при расчетах он рассматривался в виде полого цилиндра. Ввиду того, что при численном моделировании рассматриваются модели конечных размеров, внешнюю границу породы ограничим также цилиндром. Радиус внешнего цилиндра, как правило, составляет 2-3 максимальных длины волны. Под максимальной длиной волны понимается следующая величина:

$$\lambda_{\max} = \frac{\max(V_P, V_S)}{f_{\min}}$$

где V_P, V_S - скорости продольной и поперечной вол в породе, $f_{\min}$ - минимальная частота исследуемого диапазона частот источника. Все цилиндры имеют одинаковую высоту. Таким образом, получаем следующее формальное описание геометрии задачи. Пусть N - число цилиндров, $C_i = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \le R_i^2, z_{\min} \le z \le z_{\max}\}, i = \overline{1, N}$ - семейство

вложенных цилиндров. R_i - радиусы цилиндров, $z_{\min}, z_{\max}$ - координаты по оси z нижней и верхней границ цилиндров. Зададим подпространства из R^3, соответствующие различным материалам в задаче (жидкость в скважине, материал прибора, порода) - домены:

$$D_1 = C_1, i = 1$$
$$D_i = \left[C_i \setminus C_{i-1}\right], i > 1$$

где квадратные скобки обозначают операцию замыкания. По построению, домены - попарно непересекающиеся подпространства из R^3. При этом каждый домен может касаться соседних доменов. Очевидно, что вся расчетная область Ω может быть представлена в виде:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} C_i = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$$

Для применения метода спектральных элементов необходимо построить конформную неструктурированную сетку из гексаэдральных элементов во всей расчетной области Ω. Как было рассмотрено в параграфе 2.2, построение качественных неструктурированных гексаэдральных сеток в 3D в общем случае является сложной задаче. Ввиду того, что в каждом домене могут быть заданы свои свойства материала, на размеры элемента (шаг сетки) в каждом домене накладываются упомянутые выше ограничения по числу точек на длину волны:

$$h \le \frac{1}{EPW} \frac{V_P}{f_{\max}}$$

где $f_{\max}$ - максимальная частота исследуемого диапазона частот источника, EPW – требуемое число элементов на длину волны, elements per wavelength (в зависимости от порядка численной схемы, например, для 8-го порядка EPW =1, для 2-го EPW =10). Заметим, что значение V_P может быть разным для каждого домена.

Одним из условий к сетке, диктуемых численным методом, является условие конформности. Рассмотрим границу между двумя соседними доменами. Данная граница, по построению, принадлежит одновременно двум доменам. Следовательно, для того, чтобы учесть эту границу при построении сетки, узлы, одновременно принадлежащие элементам различных доменов, должны лежать на этой границе. Таким образом, на длины ребер, лежащих на этой границе, накладываются уже два условия, ввиду того, что каждое граничное ребро принадлежит сразу двум доменам, каждое из которых соответствует своему материалу. Максимально допустимая длина ребра здесь уже определяется как минимальное значение среди двух соседних доменов:

$$h_{boundary} \le \frac{\min(V_{P1}, V_{P2})}{f_{\max}}$$

Однако, шаги сетки от домена к домену могут различаться в произвольное число раз, определяемое лишь свойствами материала. Один из вариантов решения данной проблемы - вычислить наименьший шаг сетки по всем доменам и построить сетку с этим шагом. При этом мы столкнемся с тем фактом, что общее число элементов окажется велико $(N \sim \frac{1}{h^3})$, а размеры элементов могут быть излишне малы в тех доменах, где такая высокая точность расчетов не требуется. Поэтому при построении сетки необходимо максимизировать размеры элементов в каждом домене, не выходя за пределы допустимого шага сетки. Кроме того, необходимо обеспечить конформность сетки на границе (как и во всей расчетной области).

Рассмотрим основные этапы построения сеток для геометрий цилиндрического типа, описанных выше. Кратко, можно выделить два основных этапа построения сетки:

1) Построение 2D-сетки: построение четырехугольной сетки на плоскости, а именно в круге и окружающих его кольцах, соответствующих различным доменам, и, соответственно, различным материалам (Рисунок 95)

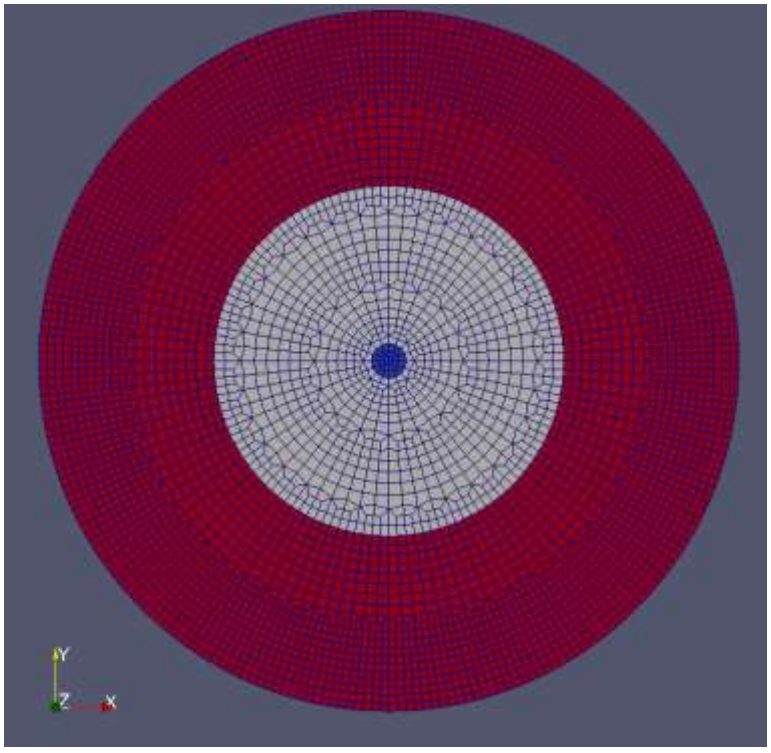


Рисунок 95 Пример 2D-сетки для набора вложенных цилиндров в плоскости, перпендикулярной оси симметрии

2) Построение 3D сетки из гексаэдров на основе построенной 2D-сетки.

Прежде чем подробно описывать каждый этап построения сетки, напомним рассмотренные ранее требования к генерируемой сетке:

1. Конформность.
2. Ограничение на шаг сетки: $h_i \le h_{\max}^i, i = 1,..N$.
3. Максимизация длины самого короткого ребра ввиду условия Куранта.
4. Минимизация соотношения между ребрами элементов.
5. Минимизация коэффициент скошенности.
6. Сокращение общего числа элементов.
7. Приемлемая степень дискретизации границ между доменами.

Заметим, что требования 1 и 2 являются обязательными и диктуются численной схемой МСЭ. Остальные требования желательно выполнить для увеличения точности численного решения, уменьшения времени расчета, снижения численной дисперсии/ошибок округления и т.д. Заметим, что в ряде случаев требования могут оказаться взаимнопротиворечивыми, например, выполнение требований 3 и 6 влечет невыполнение требования 7 и наоборот. Поэтому одновременное выполнение всех требований не представляется возможным в общем случае, и необходимо выбрать некоторый оптимальный баланс между ними.

Входными параметрами для алгоритма построения сеток являются:

- Радиусы цилиндров R_i
- Координаты нижней и верхней граней цилиндров: $z_{\min}, z_{\max}$
- Параметры материалов для каждого домена: (ρ, V_P, V_S) - параметры, задающие упругие свойства материала; параметры анизотропии (параметры Томсена): $\varepsilon, \gamma, \delta$; направления осей анизотропии: α, β (параграф 2.3).
- $f_{\max}$ - максимальная частота исследуемого диапазона частот источника для определения максимально допустимого размера элемента $h_{\max}^i$ в каждом домене.

Как правило, диаметр скважины превосходит максимально допустимый шаг сетки, которой требуется в ней построить. Для того, чтобы осуществить точную дискретизацию границы скважины, используются изопараметрические спектральные элементы высокого порядка (Рисунок 56). Вдали от скважины, как правило, элементы сетки достигают своего максимального размера. Для того, чтобы от элементов небольшого размера конформным образом разгрубиться к элементам более высокого размера и удовлетворить критериям качества сетки, применяют различные схемы измельчения/укрупнения элементов. В основе

рассматриваемого алгоритма генерации сеток лежит схема измельчения элементов (Рисунок 96).

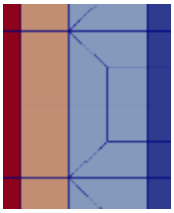


Рисунок 96 Схема измельчения элементов сетки

Рассмотрим первый этап построения сетки - построение 2D сетки. Требуется построить сетку в круге (1й домен), затем построить сетку в окружающих его кольцах. Для начала, необходимо определить, сколько узлов сетки находится на каждой границе между доменами, в двумерном случае являющимися окружностями. Ввиду используемой схемы измельчения, отношение числа узлов на одной границе к числу узлов сетки на любой другой границе есть степень числа 2.

Рассмотрим некоторую окружность, представляющую собой границу между доменами на плоскости. Узлы, лежащие на данной окружности, принадлежат элементами разных доменов, поэтому длины граничных ребер, т.е. ребер, концы которых принадлежат данной окружности, ограничены сверху шагом сетки в одном домене и шагом сетки в соседнем по данной границе домене. Поскольку узлы расставляются вдоль окружности равномерно, можно вычислить минимально допустимое число узлов формулой:

$$N_{boundary} = \left[\frac{2\pi R}{h} \right] + 1$$

Данная формула показывает минимальное число углов в правильном $N_{boundary}$- угольнике при условии, что длина каждого ребра не превосходит h и радиус описанной окружности равен R. Для некоторого заданного числа кратности M значение $N_{boundary}$ определяется по следующей формуле:

$$N_{boundary} = M \cdot 2^k$$

$$k = \arg\min_{k \in N} \left\{ M \cdot 2^k \mid M \cdot 2^k > \left[\frac{2\pi R}{h} \right] + 1 \right\}$$

Таким образом, мы описали процедуру построения так называемой 1D-сетки.

Рассмотрим процедуру построения 2D-сетки. Для начала опишем построение сетки в самом внутреннем домене - круге. В центре круга помещается квадрат, длина диагонали которого меньше диаметра круга, внутри квадрата строится равномерная структурированная сетка, затем

каждый узел на границе квадрата соединяется с ближайшим узлом, лежащим на окружности. Ввиду того, что сетка внутри квадрата равномерная, число узлов, лежащих на границе квадрата, должно быть кратно 4, что и объясняет ограниченность выбора числа *M*. После завершения построения сетки для улучшения ее качества применяется алгоритм сглаживания по Лапласу:

$$\mathbf{x}_i^{new} = \frac{1}{|N(i)|}\sum_{k\in N(i)}\mathbf{x}_k^{old},$$

где координаты каждого узла сетки, кроме лежащих на границе, заменяются средним арифметическим координат всех $|N(i)|$ соседних узлов.

Следующий этап - построение сетки в каждом кольцевом домене. Здесь строится квазиструктурированная сетка таким образом, что в ней можно выделить блоки, в каждом из которых сетка является структурированной. Начиная от внутренней границы, сетка строится послойно, каждый слой представляет собой замкнутый кольцевой набор из элементов в виде равносторонних трапеций. С ростом удаленности от центра размеры элементов растут и могут достичь своего максимального размера, затем применяется схема измельчения, чтобы измельчить элементы, и ситуация повторяется до тех пор, пока не дойдем внешней границы кольца. Заметим, что, зная число узлов на внешней и внутренней границах, можно определить, сколько раз необходимо применять вышеупомянутую схему измельчения.

Рассмотрим процедуру построения 3D-сетки. Все элементы сетки можно сгруппировать в замкнутые кольцевые слои. Среди них можно выделить простые слои, т.е. слои элементов, в которых каждый элемент представляет собой равностороннюю трапецию, а также измельчительные слои, где применяется схема измельчения. Пример группировки элементов по слоям приведен на Рисунок 97.

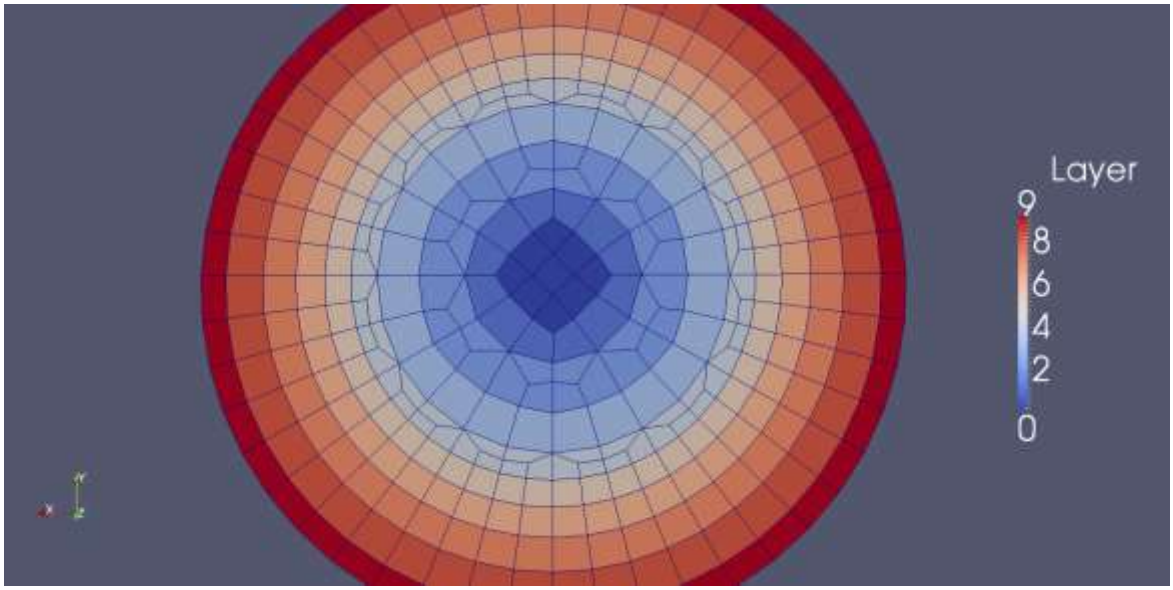


Рисунок 97 Группировка элементов по слоям сетки

Далее среди всех элементов 2D-сетки ищется самое длинное ребро, по которому вычисляется максимальный размер элементов объемной сетки по оси Z по формуле:

$$h_z^{\max} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{n_z}$$

$$n_z = \left[\frac{z_{\max} - z_{\min}}{l_{\max}} \right] + 1$$

Затем для каждого слоя вычисляется коэффициент измельчения, который показывает, во сколько раз высота элемента по оси *z* в этом слое отличается от $h_z^{\max}$. Для сшивки объемных элементов между различными слоями используется та же схема измельчения. Это накладывает ограничения на коэффициент измельчения - он может быть равен только неотрицательной степени числа 2. Заметим, что измельчение элементов может происходить только под простыми слоями. На Рисунок 98 приведен срез трехмерной сетки. В этой сетке можно выделить 15 слоев. Распределение коэффициентов измельчения от самого удаленного слоя к самому внутреннему следующее: 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, 32, 32, 32, 32. Заметим, что распределение коэффициентов измельчения от слоя к слою может быть немонотонным.

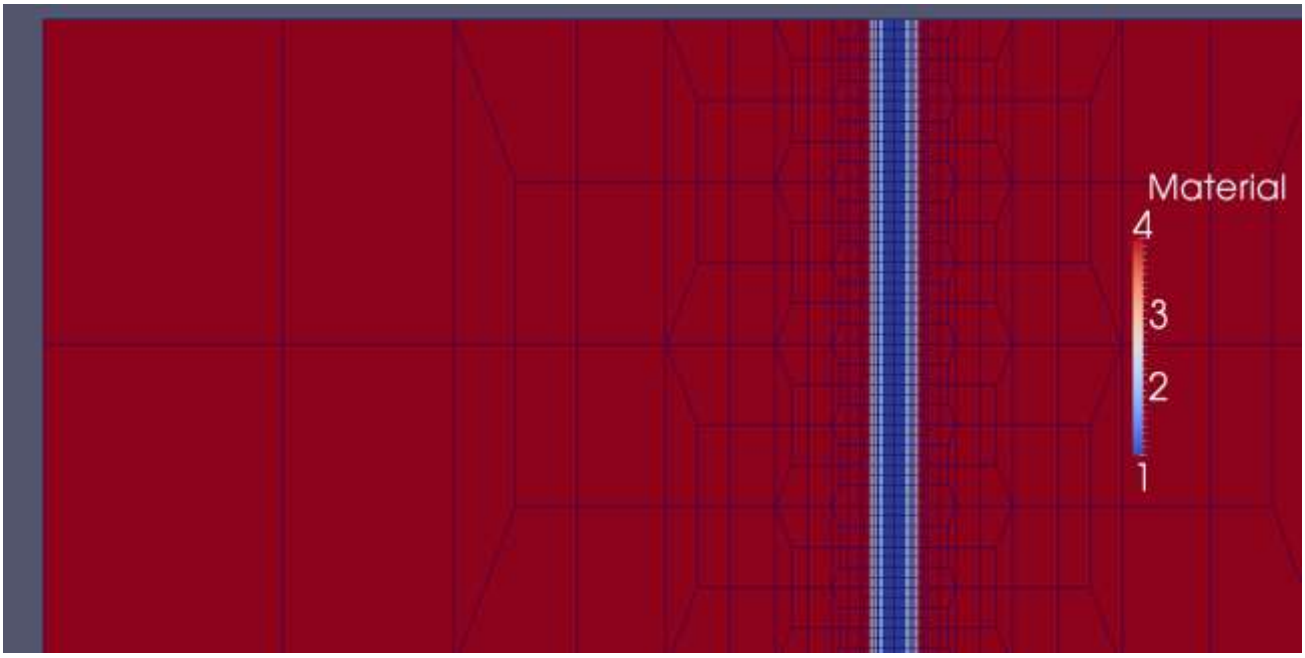


Рисунок 98 Вертикальный срез трехмерной сетки с разгрублением размеров элементов

Таким образом, мы полностью описали специализированный метод построения неструктурированных гексаэдральных сеток на геометрических моделях цилиндрического типа, используемых при моделировании акустического каротажа. В качестве примера, рассмотрим сетку, полученную данным методом на модели, приведенной в параграфе 2.2 (Таблица 1), и

сравним качество полученной сетки (Рисунок 99) с сетками, построенными обсуждавшимися ранее способами.

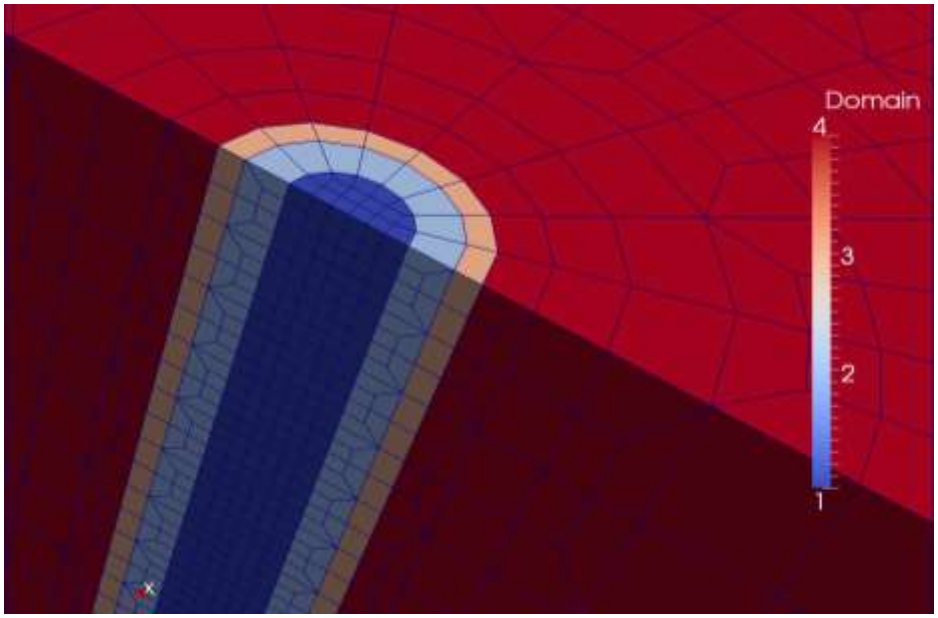


Рисунок 99 Неструктурированная гексаэдральная сетка для цилиндрической геометрии

	Cubit	Hexotic	T-Hex	Custom
Соотношение сторон	5.714688	4.096975	13.41976	2.832115
Коэффициент скошенности	0.815385	0.809425	0.97394	0.662675
Число элементов	947 592	1 273 824	1 400 024	520 704
Минимальное ребро	0.005425	0.00158	0.000896	0.0049

Таблица 3. Статистика по качеству сетки, построенной специализированным методом.

Из приведенной таблицы видно, что сетка, полученная описанным выше методом, оказалась лучше и качеством, и количеством элементов, доказывая тем самым превосходство узкоспециализированного метода генерации сеток для задач акустического каротожа над универсальными подходами к построению гексаэдральных неструктурированных сеток.

Результаты расчетов. Сравнение с аналитическими решениями.

При распространении объемных волн от источника в скважине возбуждаются также поверхностные волны на границе между скважиной и породой. Эти волны называются волнами Стоунли. Анализ волн Стоунли является одним из основных способов оценки породы вокруг скважины. Волна Стоунли чувствительна к таким свойствам породы, как жесткость, проницаемость, анизотропия. Таким образом, изменение этих свойств может привести к

изменениям параметров волны Стоунли. Одной из характеристик, описывающих свойства волн Стоунли, и, следовательно, окружающей скважину породы, является ее дисперсионная кривая, которая суть множество точек в плоскости (ω,k), удовлетворяющих дисперсионному соотношению:

$$D(\omega,k)=0$$

где k - волновое число, ω - частота. Зачастую, дисперсионную кривую строят в координатах (s,ν), где $s=\frac{1}{\upsilon}$ - величина, обратная скорости, под названием медленность, ν - частота.

В данном параграфе представлены дисперсионные кривые волны Стоунли для различных моделей, рассчитанных изопараметрическим методом спектральных элементов на различных сетках, отличающихся друг от друга порядком элементов. Произведено их сравнение с дисперсионными кривыми, посчитанными аналитическими методами. Информацию об аналитических методах расчетов дисперсионных кривых можно найти в [93, 373, 428, 761].

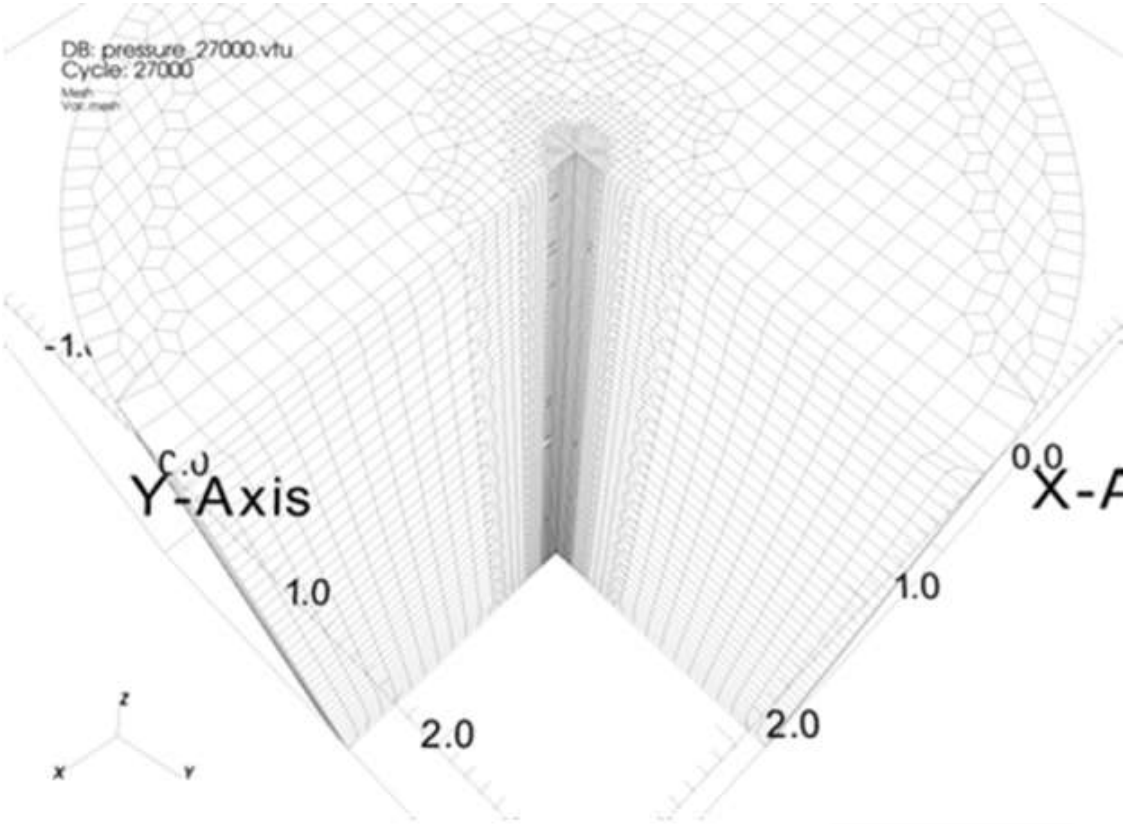


Рисунок 100 Гексаэдральная сетка для заполненной жидкостью скважины в VTI среде. Сетка мелкая в самой скважине и её окрестности. При удалении от скважины сетка разгрубляется.

Для начала рассмотрим простейшую модель заполненной жидкостью скважины и построим для нее с помощью описанного в предыдущем разделе метода построения

цилиндрических сеток (CMG) несколько сеток (Рисунок 100), отличающихся друг от друга порядком элементов, а также степенью дискретизации границы скважины. Также для данной модели построим сетку ранее рассмотренным генератором Cubit(tm). Параметры модели приведены в таблице 1.

id, материал	R	ρ, V_P, V_S
вода	0.1м	$\rho = 1000 кг/м^3, V_P = 1500 м/с, V_S = 0 м/с$
Горная порода $\varepsilon = 0.285714$ $\gamma = 0.145833$ $\delta = 0.1346939$	4м	$\rho = 2200 кг/м^3, V_P = 2522 м/с,$ $V_S = 1044 м/с$

Таблица 1. Параметры модели акустического каротажа.

На полученных сетках проведем расчеты со следующими параметрами задачи (таблица 2):

Длительность задачи	0.006 с
Высота модели	6 м
Типы источников	Монопольный, дипольный
Минимальная частота	2 000 Гц
Центральная частота	5 000 Гц
Число Куранта	0.4

Таблица 2. Параметры задачи.

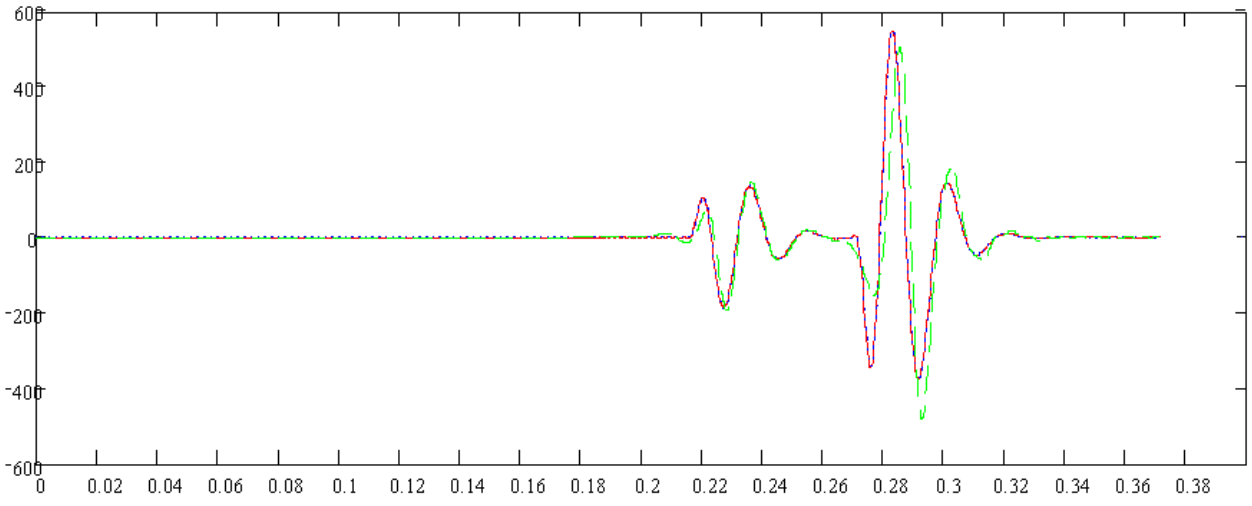


Рисунок 101 Сравнение аналитического решения и результатов моделирования МСЭ. Представлены графики зависимости давления от времени в точке пространства, расположенной внутри пористой среды. Красным цветом выделен МСЭ с 6ым порядком аппроксимации по пространству, голубым – точное решение, зелёным – МСЭ со 2ым порядком аппроксимации по пространству.

На Рисунок 101 представлены графики зависимости давления от времени в точке пространства, расположенной внутри пористой среды. Красным цветом изображены результаты, посчитанные МСЭ с 6ым порядком аппроксимации по пространству, голубым – аналитическое решение, зелёным – МСЭ со 2ым порядком аппроксимации по пространству. При возрастании порядка аппроксимации по пространству до 6-ого в МСЭ, численное решение точно приближается к аналитическому, при этом время расчёта растёт почти линейно по отношению к порядку, что отчётливо видно на Рисунок 102. Из представленных результатов можно сделать вывод, что одно из главных преимуществ МСЭ – высокая точность в дискретизации по пространству – позволяет качественно моделировать высокочастотные сигналы с волнами сложной формы при относительно малом числе узлов сетки на длину волны.

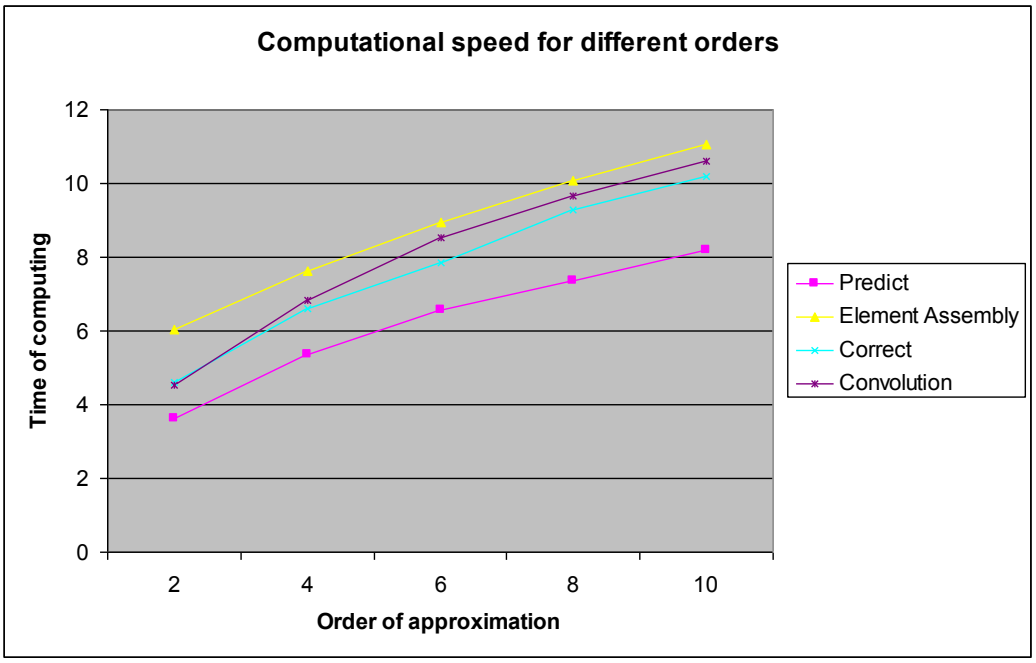


Рисунок 102 Скорость вычислений для разных частей программы и разных порядков аппроксимации. Наблюдается почти линейный рост времени расчётов в зависимости от порядка аппроксимации, в то время как точность растёт экспоненциально ввиду спектральной сходимости МСЭ.

На Рисунок 103 приведены сейсмограммы полученного решения, на которых можно выделить времена прихода на приемники акустического сигнала всех трех типов волн: продольная, поперечная, Стоунли.

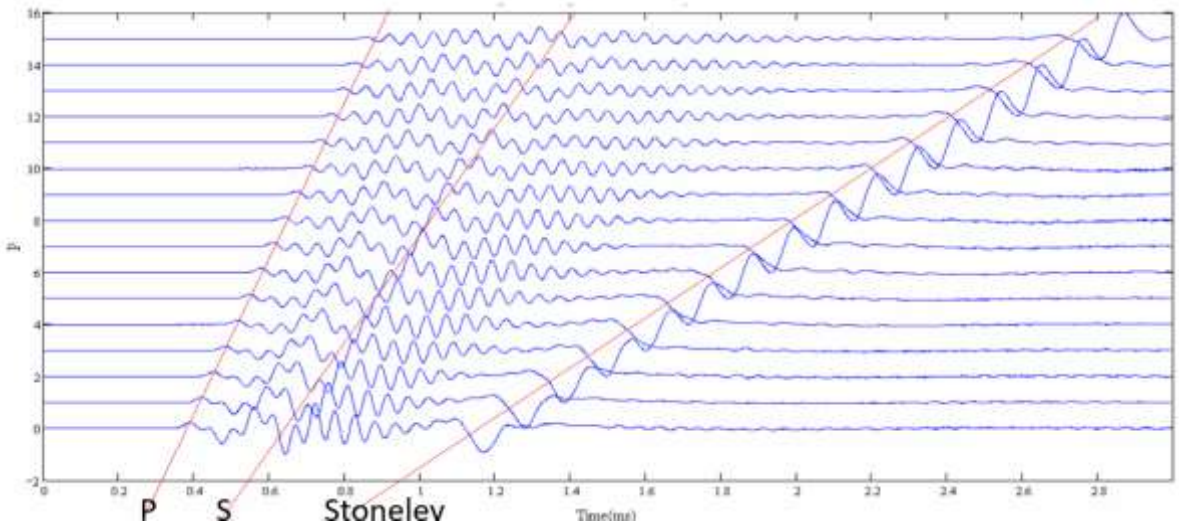


Рисунок 103 Сейсмограммы для задачи об акустическом каротаже

Для случая дипольного источника на Рисунок 104 приведено сравнение численных и аналитических дисперсионных кривых.

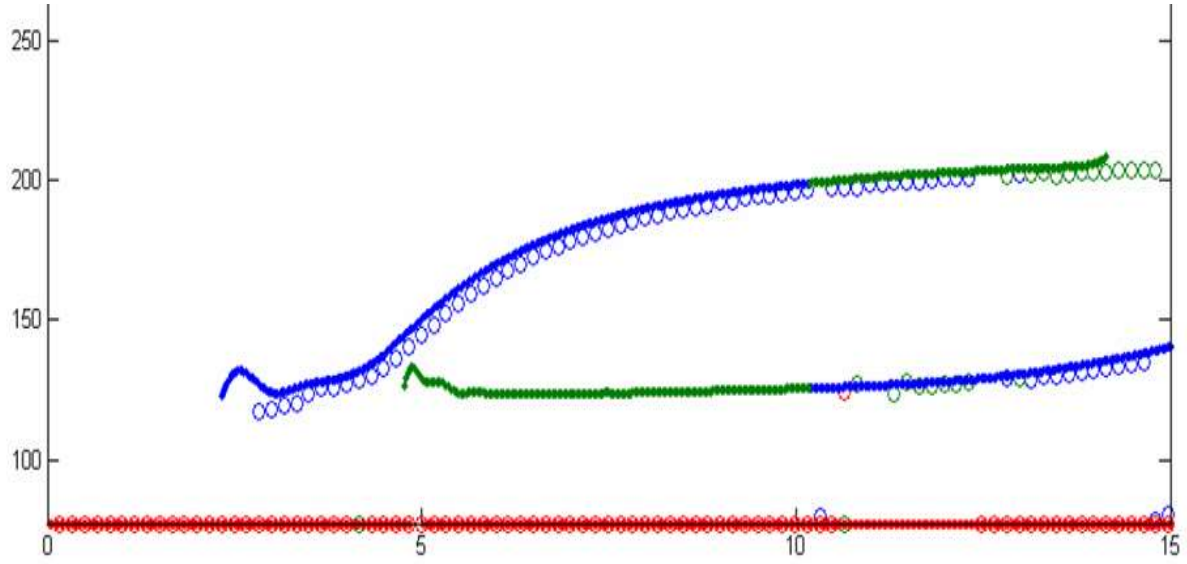


Рисунок 104 Дисперсионные кривые - зависимости медленности (обратная величина к скорости) от частоты. Сплошная линия – численный расчет (МСЭ). Кружки – аналитическое решение.

Расхождение между численным и аналитическим решениями на низких частотах связано с малым радиусом всей области, что приводит к ошибкам моделирования для мод с большими длинами волн. Однако следует отметить, что спектральная точность метода позволила обеспечить хорошее совпадение на высоких частотах излучателя, которые в случае, например, метода конечных элементов требуют очень малого размера элемента и большого количества точек на длину волны.

Представляет интерес также проанализировать зависимость получаемого решения от жесткости упругой мембраны на границе между скважиной и пористой средой вокруг нее. На Рисунок 105 приведены сейсмограммы давления для различных типов граничных условий.

При наличии анизотропии свойств материала породы вокруг скважины аналитическое решение может быть получено только в случае трансверсальной изотропии с осью симметрии, параллельной (VTI) оси скважины [373, 427, 428, 761]. Для численного расчета в рамках модельной задачи упругие свойства брались со следующими анизотропными (VTI) характеристиками: [C11, C12, C13, C33, C44] = [66.72, 19.46, 39.41, 39.96, 10.94] ГПа, ρ = 2590 кг/м3. Радиус скважины 0.1016 м. В качестве источника сейсмических волн бралось дипольное кольцо радиуса 0.05 м, сглаженное функцией Гаусса по пространству.

Полученные дисперсионные кривые для численного и аналитического решений приведены на Рисунок 106.

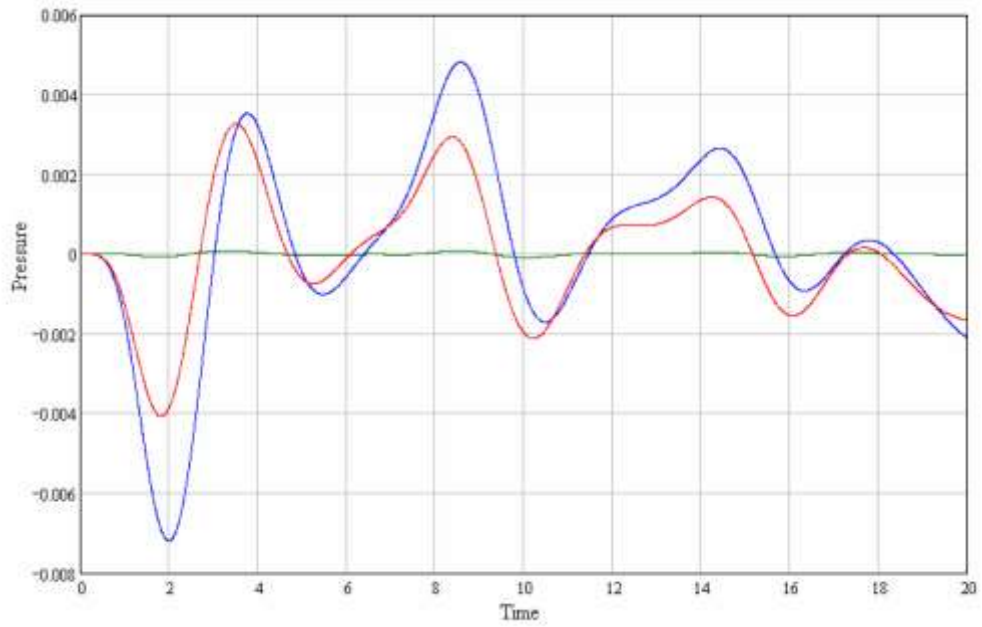


Рисунок 105 Эффект упругой оболочки на границе жидкость-пористая порода. Синий – открытые поры. Красный – упругая мембрана на границе жидкость-порода. Зеленый – закрытые поры.

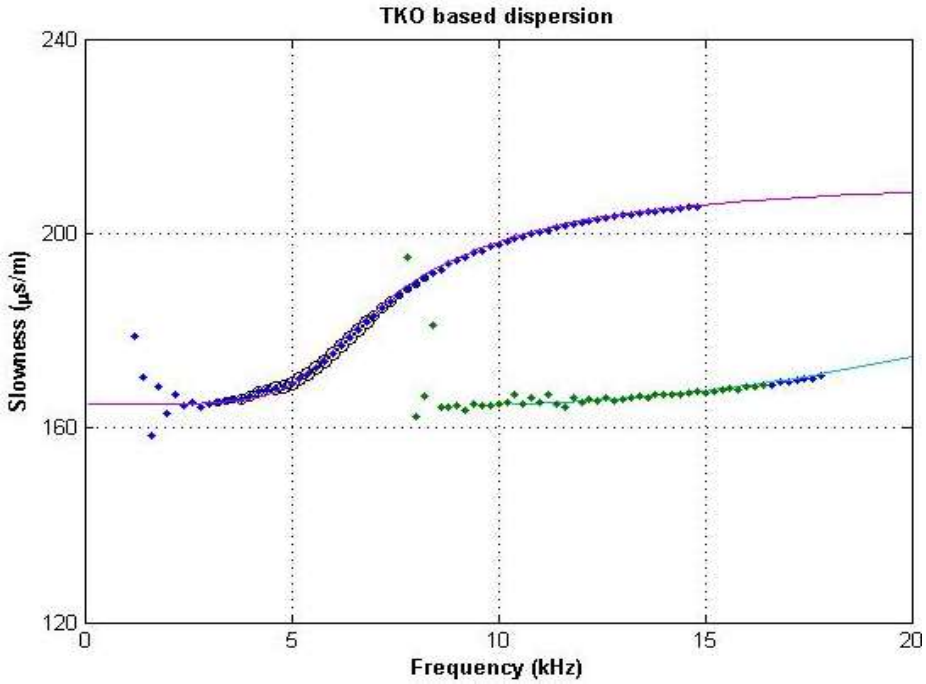


Рисунок 106 Сравнение численного и аналитического решений в случае VTI анизотропии. Точки – численное решение, сплошные линии – аналитическое решение. Синяя/сиреневая кривая – дипольная cuspidal мода, зелёный/бирюзовый – вторая дипольная мода.

В случае наклонной оси TTI-анизотропии по отношению к оси скважины (Рисунок 107) можно использовать приближенно аналитическое решение, полученное в [348].

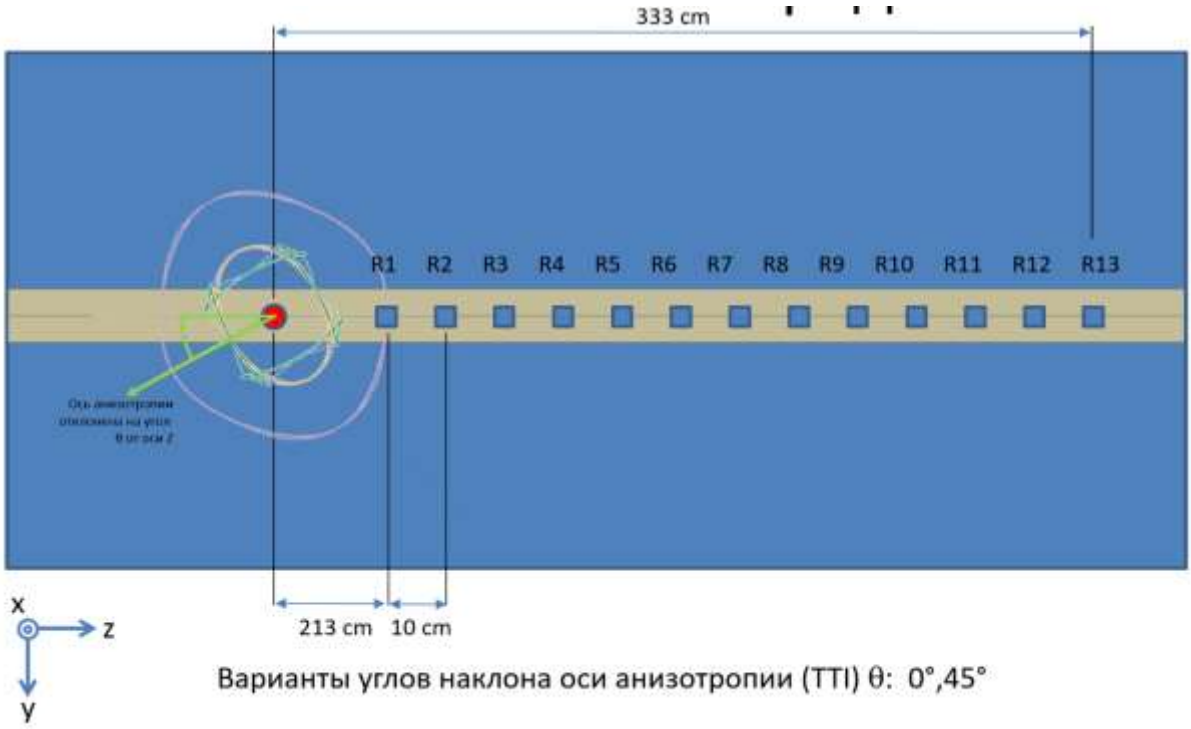


Рисунок 107 Моделирование квадрупольного источника в TTI-среде

Пример сравнения аналитического и численного решений для квадрупольного источника приведен на Рисунок 108.

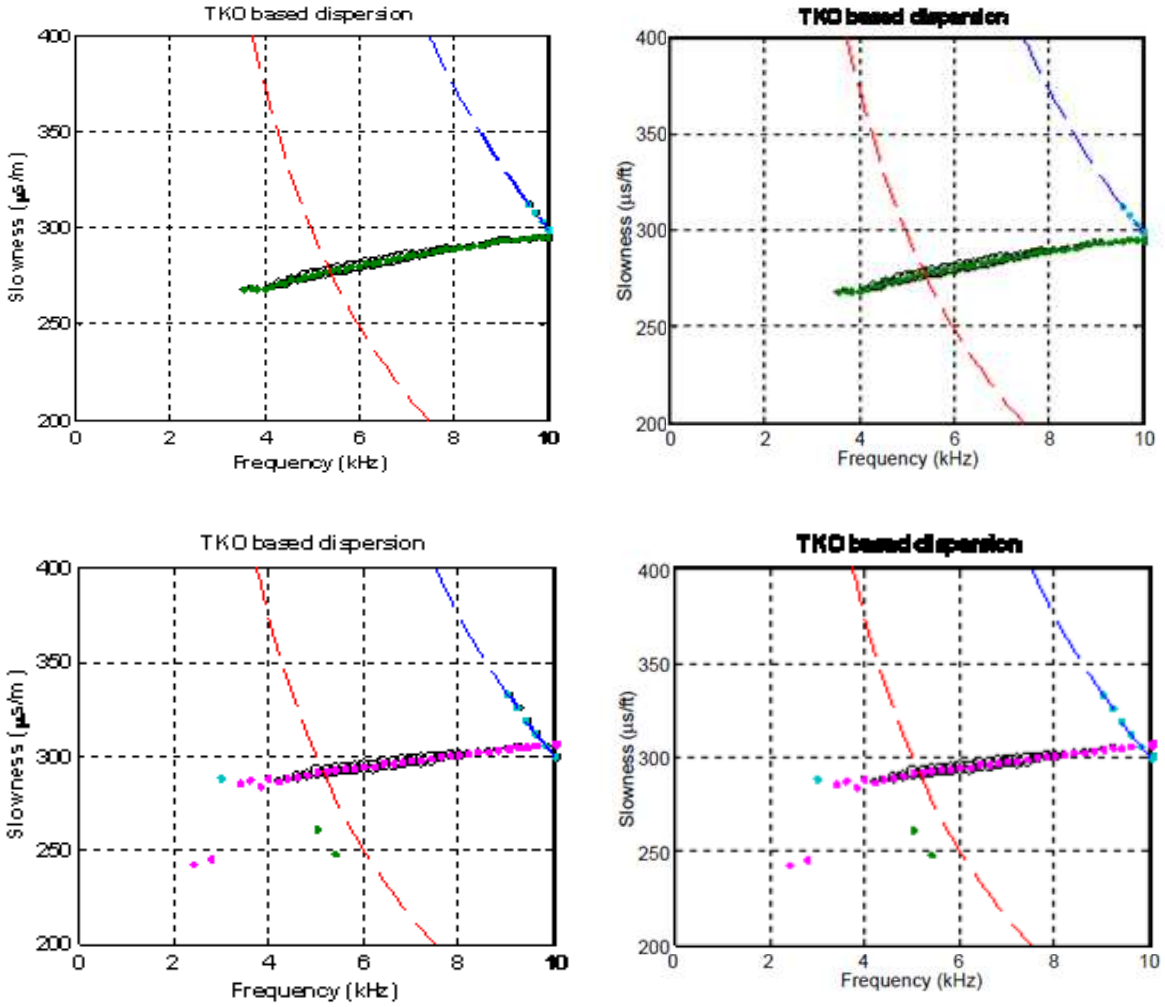


Рисунок 108 Сравнение численного и приближенно аналитического решений для различных углов наклона оси TTI-анизотропии. Сверху: результаты для угла анизотропии 0 для МСЭ (слева) и наложены на приближенно аналитическое решение (справа). Снизу: результаты для угла анизотропии 45 для МСЭ (слева) и наложены на приближенно аналитическое решение (справа)

Как правило, в реальных полевых условиях бывает сложно поместить прибор ровно посередине скважины. Рассмотрим следующую модификацию модели скважины с прибором - модель скважины со смещенным прибором. В этой модели самый внутренний цилиндр сдвигается на расстояние $\varepsilon = R_2 - R_1 - d, d > 0$, которое называется эксцентриситетом. Эта модель имеет важное значение ввиду сложности построения дисперсионных кривых, особенно для случаев с анизотропной породой. В качестве ε рассмотрим $\varepsilon = 0.1 - 0.05 - 0.01 = 0.04 м$. Для данной модели построим три сетки: одна при помощи Cubit, две других при помощи CMG (M=20, 1й и 2й порядки). Статистика по сеткам и произведенным расчетам приведена в таблице ниже.

Генератор	Edge ratio	Skew	Число элементов	GLL-точки	dt,c	Порядок аппрокс.	Время расчета
CMG	4.94	0.81	127368	43957880	8.01e-08	8	15ч5м
CMG	-	-	127368	43957880	7.17e-08	8	17ч4м
Cubit	8.44	0.36	445334	56046501	2.63e-07	6	4ч15м

Таблица 3. Статистика по сеткам для скважины со смещенным прибором.

Как видно из таблицы, сетка построенная генератором Cubit(tm) имеет гораздо больше элементов. Поэтому расчет удалось запустить лишь на 6м порядке аппроксимации ввиду ограниченности вычислительных ресурсов, а не на 8м, как на сетках, построенных в CMG. Если бы расчет удалось запустить, можно было бы ожидать шаг интегрирования по времени, равный приближенно $dt = \frac{2.63 \cdot 10^{-7}}{2^{8-6}} = 6.57 \cdot 10^{-8} c$, что меньше соответствующих значений для сеток, построенных в CMG.

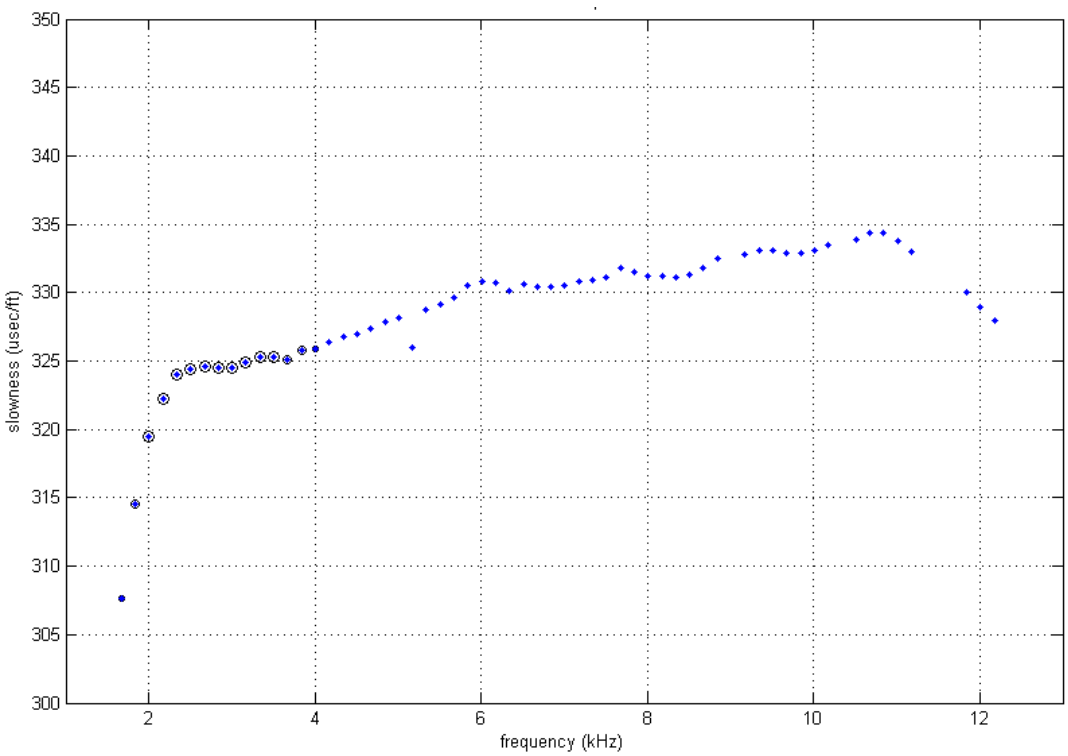


Рисунок 109 Дисперсионная кривая для скважины со смещенным прибором

Как видно из Рисунок 109, дисперсионная кривая имеет иной характер по отношению к кривым, приведенным ранее, ввиду наличия эксцентриситета прибора.

В качестве еще одного примера, демонстрирующего преимущества разработанного генератора сеток и применения изопараметрического метода спектральных элементов, рассмотрим модель скважины с полой трубой внутри нее. Трубу изнутри и снаружи окружает жидкость. Параметры модели приведены в таблицах ниже.

id, материал	R	ρ, V_P, V_S
вода	0.031248 м	$\rho = 1000 кг/м^3, V_P = 1693 м/с, V_S = 0 м/с$
сталь	0.061728 м	$\rho = 7830 кг/м^3, V_P = 5650 м/с,$ $V_S = 3170 м/с$
вода	0.072904 м	$\rho = 1000 кг/м^3, V_P = 1693 м/с, V_S = 0 м/с$
изотропная порода	2.5 м	$\rho = 2700 кг/м^3, V_P = 6773 м/с,$ $V_S = 3586 м/с$

Длительность задачи	0.008 с
Высота модели	7.62 м
Тип источника	Тороидальный, квадрупольный
Центральная частота источника	5225 Гц
Максимальная частота источника	10 000 Гц
Радиус тороидального иточника	0.065792 м
Число Куранта	0.4

Таблица 4. Параметры модели скважины с полой трубой внутри нее.

Статистика по сеткам и расчетам приведена в таблице ниже.

Генератор	Edge Ratio	Skew	Число элементов	GLL-точки	dt, с	Порядок аппрокс.	Время Расчета
CMG	3.38	0.82	33 408	11513986	4.33e-08	8	13ч
Cubit	13.22	0.44	212 459	73211720	3.28e-08	8	80ч

Таблица 5. Статистика по сеткам для скважины с полой трубой.

Из таблицы 14 легко заметить разницу в числе элементов сеток (в 6 раз), построенных при помощи CMG и при помощи Cubit(tm). Эта разница, наряду с меньшим шагом интегрирования по времени, отразилась на суммарном времени расчета на сетке, построенной генератором

Cubit - 80ч против 13ч на CMG. Заметим также неудовлетворительное значение параметра соотношения сторон в случае сетки, построенной генератором Cubit, оно равно 13.22. Как и в предыдущих моделях, рассмотрим рассчитанные методом спектральных элементов дисперсионные кривые и сравним их с дисперсионными кривыми, посчитанными полуаналитически. Результаты, приведенные на Рисунок 110 и полученные методом спектральных элементов, хорошо согласуются с результатами, полученными полуаналитическим методом. Увеличение порядка криволинейной сетки позволяет дополнительно улучшить результат в области низких частот. На Рисунок 111 точки полученной численно дисперсионной кривой почти полностью ложатся на дисперсионную кривую, посчитанную полуаналитически. Этот факт снова подтверждает преимущество использования криволинейных изопараметрических сеток. Как и ранее, также на приведенных рисунках можно видеть точки, принадлежащие дисперсионной кривой второй дипольной моды.

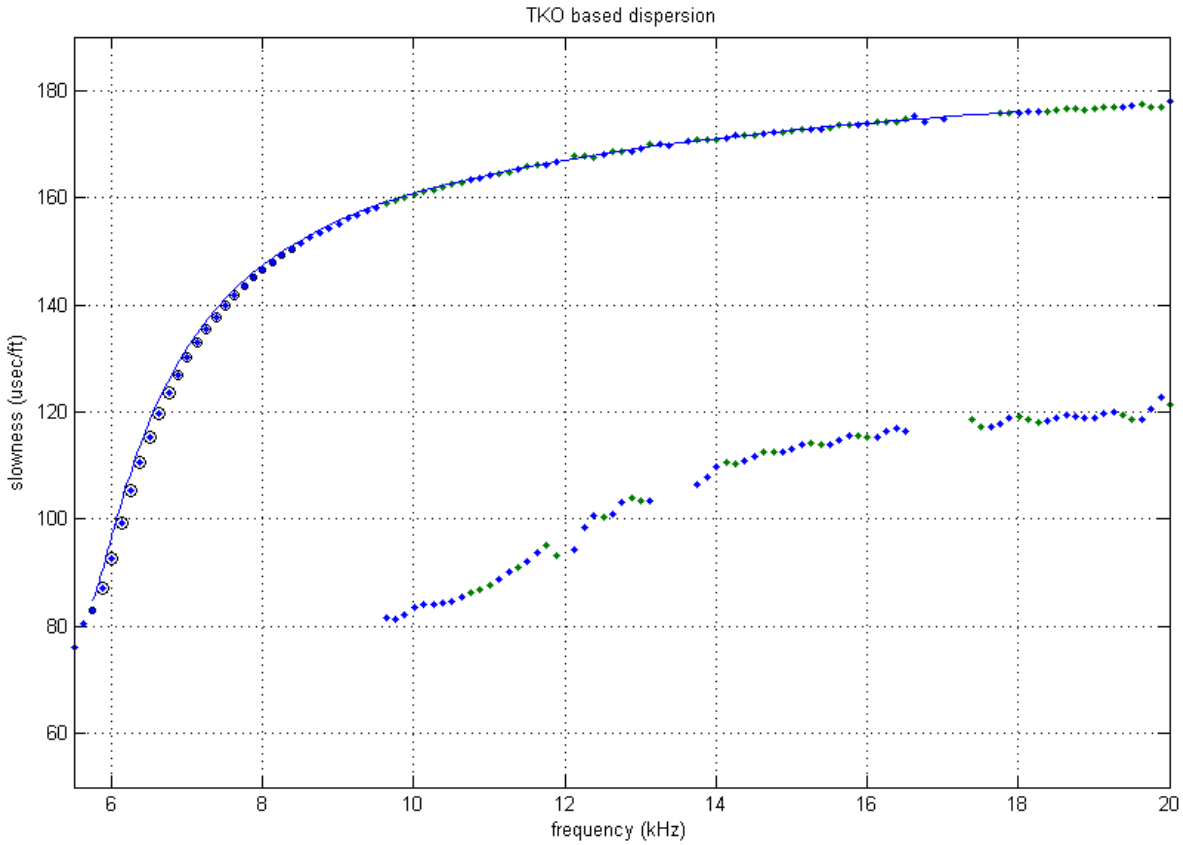


Рисунок 110 Дисперсионная кривая для случая спектральноэлементной сетки с плоскими гранями

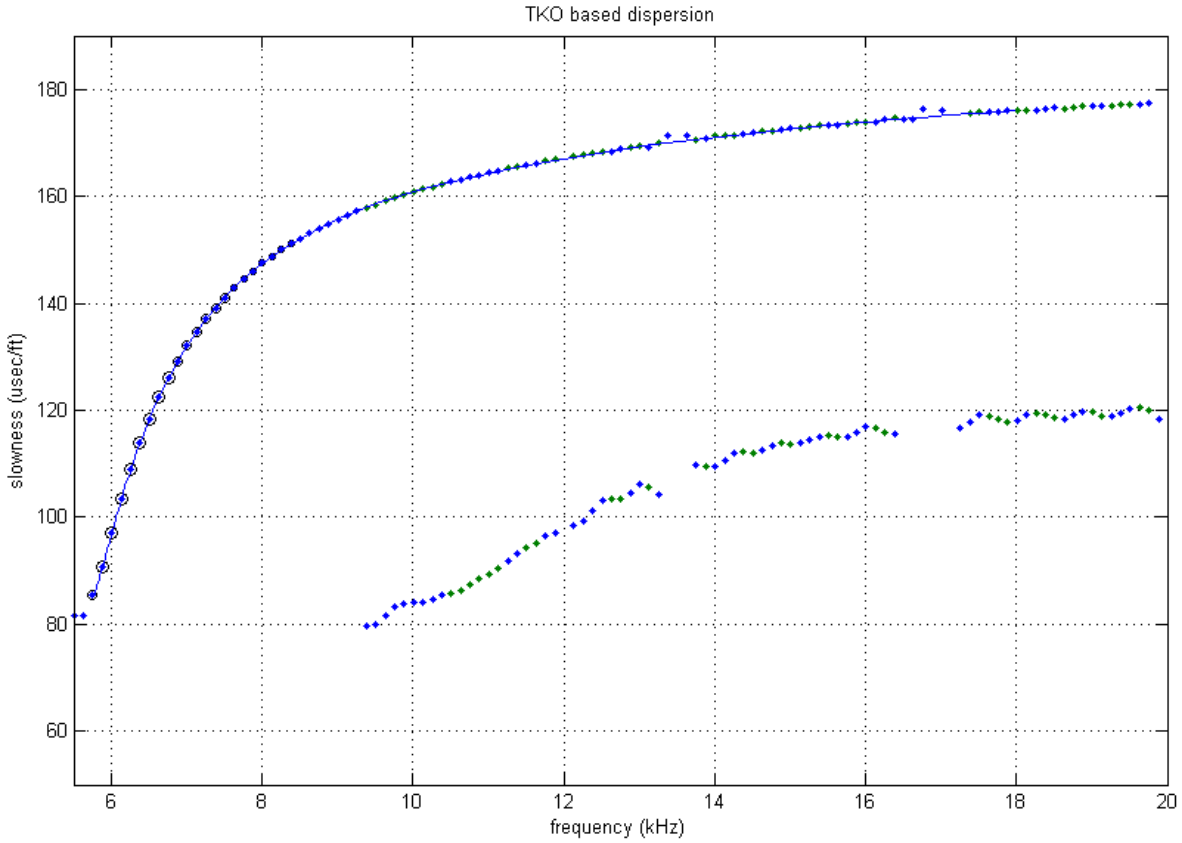


Рисунок 111 Дисперсионная кривая для случая спектральноэлементной сетки с криволинейными гранями

Большинство задач акустического каротажа для анизотропных сред, включая трансверсальную анизотропию с горизонтальной осью симметрии (HTI), требуют использования численного моделирования, т.к. аналитического решения для такого рода задач нет. Для сложных моделей, включая скважины с устройствами акустических возмущений, наклонными слоями, пересекающими скважину, построение гексаэдральной неструктурированной сетки является сложной задачей. В этих случаях применяется альтернативный метод, использующий трёхмерные неструктурированные тетраэдальные сетки, в которых каждый тетраэдр разбивается на четыре гексаэдра [375]. Чтобы продемонстрировать сложность волнового поля для HTI среды, была решена задача (Рисунок 112) со следующими анизотропными свойствами среды: $Vp0$ = 3678 м/с, $Vs0$ = 1552 м/с, ρ = 2520 кг/м^3, ε = 0.13, δ = -0.17, и γ = 0.61(параметры Томсена). Скважина диаметром 21см заполнена жидкостью со следующими акустическими свойствами: Vp = 1108 м/с и ρ = 1713 кг/м^3. Источником является массовая дипольная сила с центральной частотой колебаний 1 кГц.

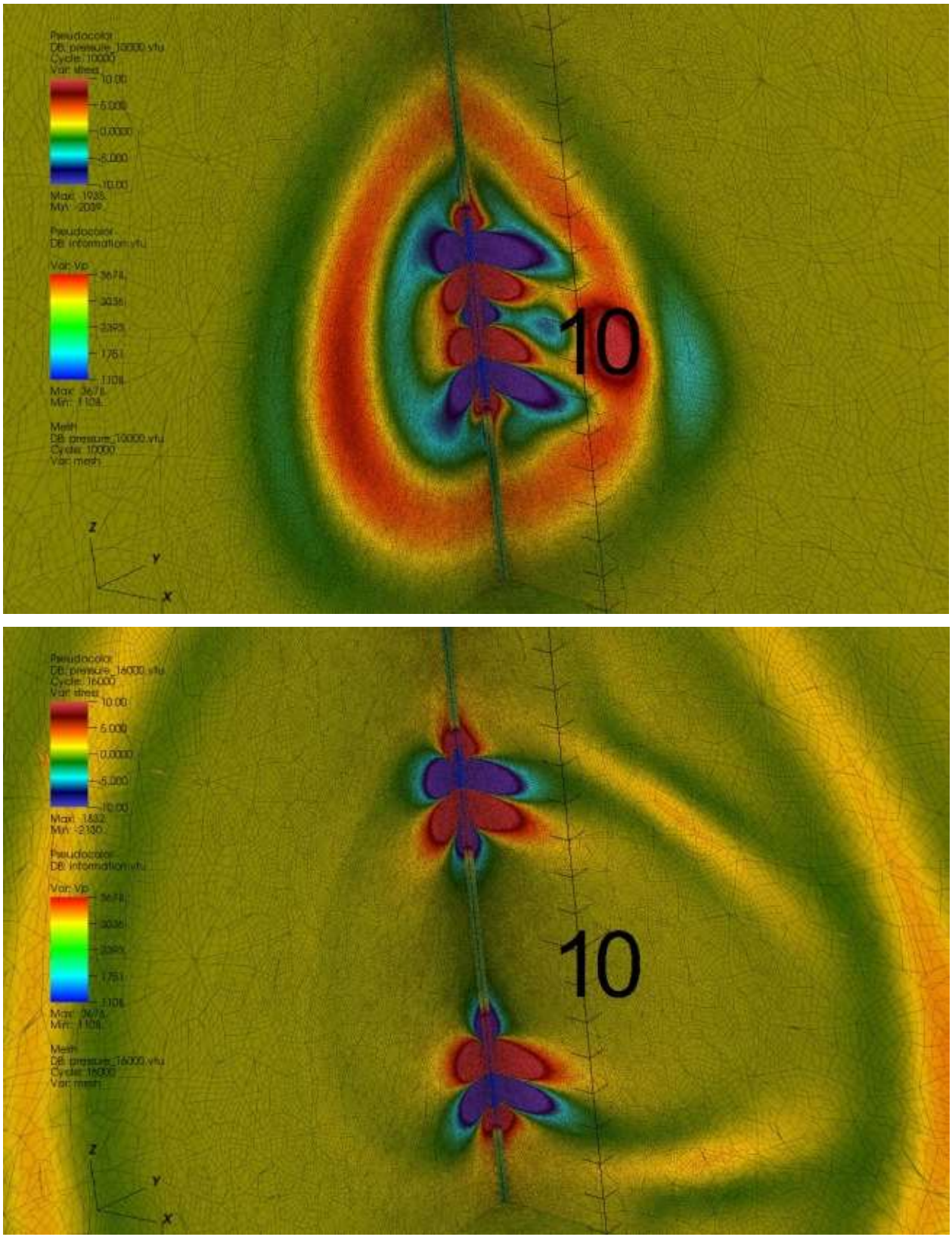


Рисунок 112 Поле давления для дипольного источника в различные моменты времени. Неструктурированная гексаэдральная сетка, использованная для расчета, основана на тетраэдральных элементах, где каждый тетраэдр разбивался на 4 гексаэдра (THex-метод).

Поле волнового давления в HTI формулировке демонстрирует азимутальную асимметрию. Отметим, что анизотропия волновых полей может быть наведенной начальным полем статических деформаций (в общем случае конечных, например, при значительных глубинах залегания и(ли) сложной геометрии скважины – Глава 3), вызванных статической концентрацией напряжений вблизи скважины. В этом случае необходимо использовать математические модели наложения динамических деформаций, возбуждаемых источником акустического сигнала, на поле статических деформаций, вызванных начальным преднапряжением. Используя результаты Главы 1, на Рисунок 113 в различные моменты времени приведено волновое поле от точечного источника с эллиптичностью волнового фронта, обусловленной наведенной анизотропией ввиду начального преднапряжения вдоль оси цилиндра.

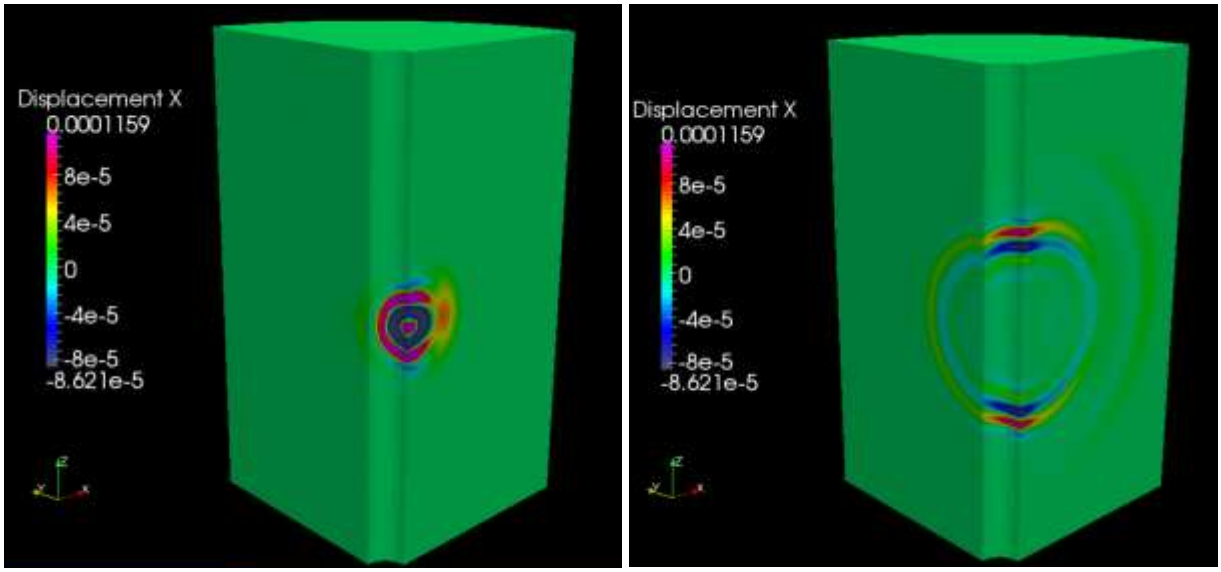


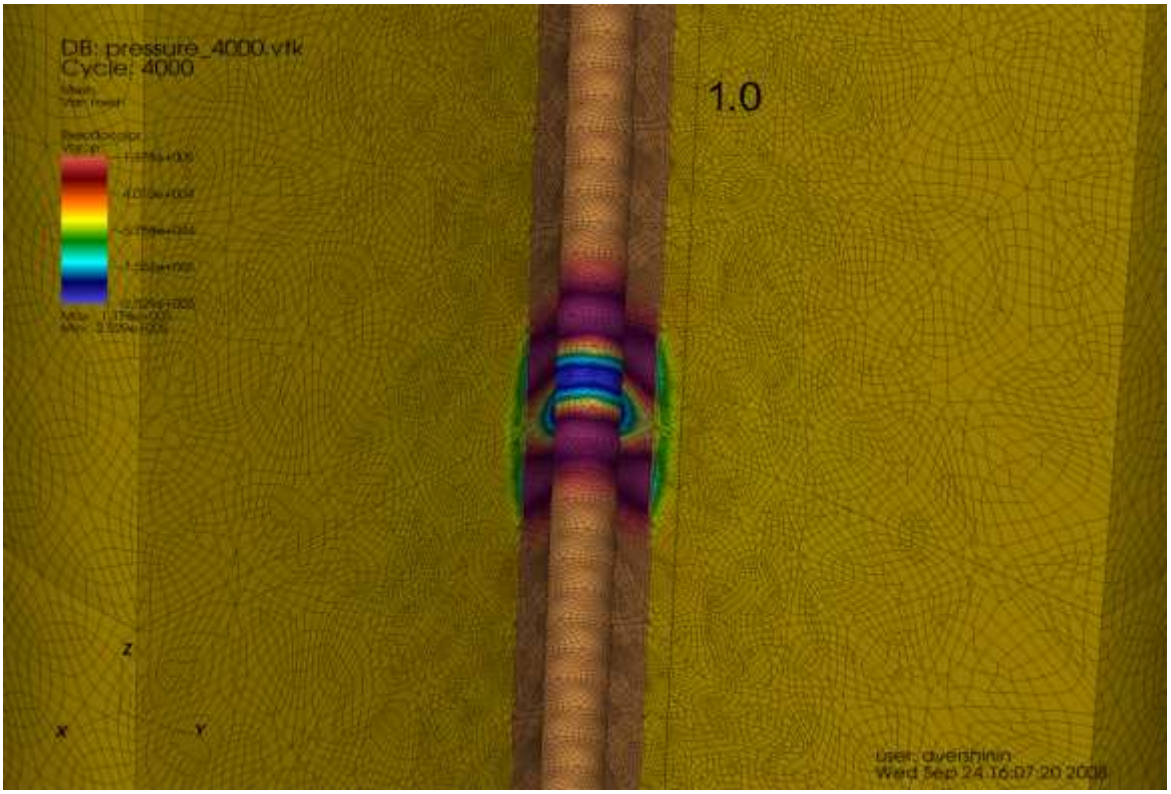
Рисунок 113 Волновое поле перемещений в различные моменты времени. Эллиптичность волновых фронтов обусловлена наведенной анизотропией начального преднапряжения вдоль оси цилиндра.

Такой подход позволяет численно решать задачи распространения трехмерных упругих волн в нелинейно-упругом нагруженном массиве с начальными, вообще говоря, конечными деформациями. Этот подход развивает модели, предложенные В.А. Левиным и Е.М. Морозовым [149].

Наконец, полноволновое трехмерное численное моделирование акустического каротажа позволяет учитывать более сложные и реалистичные случаи, в которых скважину пересекают наклонные слои. В этом случае неструктурированная гексаэдральная сетка должна учитывать поверхности раздела пластов, а также скачки в свойствах материала, возникающие при наличии каротажных устройств в скважине, как показано на Рисунок 114. Универсальность и

адаптивность изопараметрического метода спектральных элементов позволяет получать качественную волновую картину даже в данных комплексных примерах.





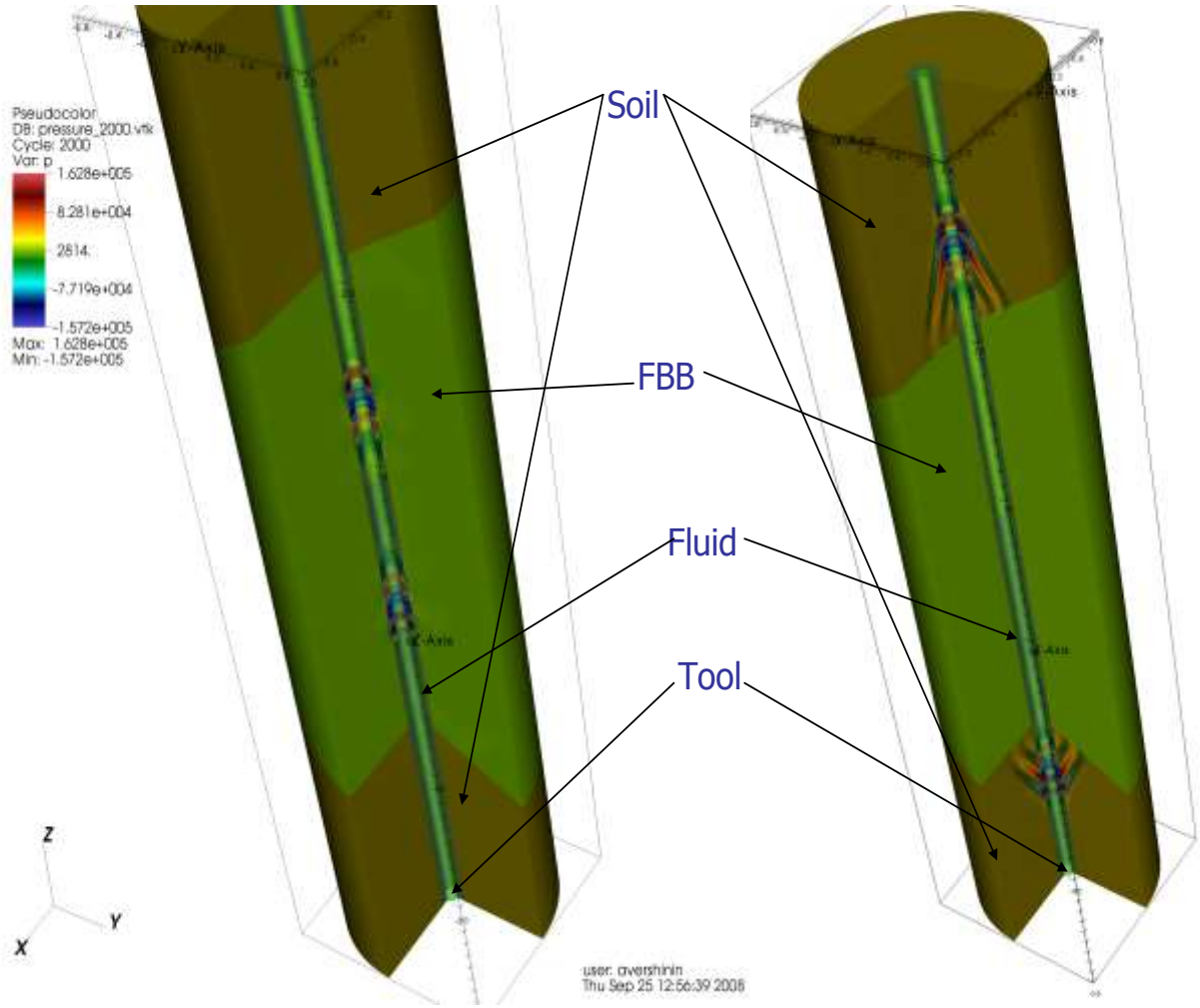


Рисунок 114 Численное моделирование акустического каротажа в скважине с прибором, рассеченной наклонными анизотропными слоями (нижний рисунок). Неструктурированная гексаэдральная сетка (верхний рисунок) строится с учетом геометрии прибора (средний рисунок), заполненной жидкостью скважины и скачков в упругих свойствах

2.5 Методология тестирования программных комплексов для численного моделирования распространения волновых процессов в неоднородных средах

Создание и разработка новых программных комплексов для численного моделирования распространения волновых процессов с целью решения сложных проблем с точки зрения физики (анизотропия, вязкоупругость, пористость, неоднородность среды, разрушение среды и т.п.) и/или геометрии (слоистые среды, включения, диапиры и т.п.) требуют решения множества тестовых задач для проверки адекватности результатов. В процесс тестирования должны входить как проверка численного решения на имеющемся наборе верификационных данных, так и анализ самих кодов программ. Придерживаясь общепринятой классификации (описанной, например, в NAFEMS Verification and Validation

https://www.nafems.org/publications/resource_center/wt01/) можно выделить важную составляющую этого процесса: верификация модельных программ. Эта проверка показывает, насколько аккуратно код программы воспроизводит заложенный в нее функционал с учетом особенностей реализации на конкретной платформе.

Основной подход при проведении такого рода тестирования основан на использовании тестовых решений для проверки и оценки представления кода. На первой стадии можно использовать аналитические решения, взятые из учебных пособий. Однако, тестовые задачи со сложной физикой/геометрией, представляющие большой интерес, не имеют аналитического решения. Подготовка таких тестовых примеров, или опорных точек тестирования, является отдельной задачей. В действительности, необходимо предоставить численное решение, подобное аналитическому: доказанное, точное, известное в различных точках времени и пространства и т.д.

Существует множество способов анализа качества решения, основанных на так называемой внутренней согласованности вычисленных волновых полей. Например:

- Давление в зависимости от скоростей частиц в упругой среде
- Зависимость амплитуды от расстояния
- Точное моделирование вступлений прямых волн и(ли) моделирование поверхностных волн
- Метод трассировки лучей помогает с интерпретацией и тестированием отдельных случаев в волновых полях

Очевидно, что результаты проверки сильно зависят от

- особенностей диапазона частот (и в целом, от типа источника) для этих тестов
- физического времени задачи (длительность распространения волновых процессов)
- разделения волнового поля (на восходящее/нисходящее, PP/PS режимы и т.д.)
- других последовательностей обработки данных

Обычно проверка выполняется путём совершения последовательности действий на программно сгенерированных (синтетических) данных и наглядного (качественного) анализа результатов. Заметим, что результаты такого анализа зависят как от прямого моделирования (синтетических данных), так и от последовательности применяемых операций. Поэтому имеет смысл рассматривать процедуру проверки и верификации качества сгенерированных данных как можно более независимо от последовательности применяемых операций. Очевидно, что необходимым условием формирования высококачественных синтетических данных является хорошо выверенный программный код, используемый для их генерации.

Для данных аналитических задач постановка, порядок аппроксимации ошибки и другие функциональные и специальные параметры разработанного алгоритма, верификация соответствующего кода относятся к задаче, которая может быть решена с помощью численного анализа. В частности, характерное множество опорных тестовых задач для моделирования на реалистичных вычислительных ресурсах – так называемых эталонных тестовых задачах (benchmark problems) – может быть ключом к решению задачи верификации данных. Отметим, что эталонные задачи также необходимы для оценки эффективности кода, которая измеряется объёмом вычислительных ресурсов, требуемых для достижения данной точности решения.

Перечислим некоторые эффективные способы тестирования. Это использование:

1. аналитических решений физических задач, например, плоские/цилиндрические/сферические волны в однородной среде, задача Лэмба и т.д.
2. искусственных аналитических решений. В этом случае выбирается некоторая функция U(t,x), затем аналитически вычисляется правая часть f(t,x):=LU (L - дифференциальный оператор) для заданных уравнений в частных производных и находится численное решение LhUh=f (Lh – дискретный оператор, соответствующий исходному дифференциальному) для оценки нормы разности численного и аналитического решений ||Uh-U||.
3. разделения исходной задачи на задачу «без границ» (для тестирования ошибки дискретизации строго внутри области вычислений) и задачу «с границами» (для оценки ошибки на границе)
4. свойства сеточной сходимости для достаточно гладких сред. Или “h-p” сходимости для конечно-элементных методов, и т.д.
5. эталонных опорных задач
6. частных случаев программного кода, предназначенных для решения трёхмерных задач, для интенсивного тестирования плоских задач. Эти случаи сгенерированы простым удвоением данных вдоль одного направления вычислительного куба, обусловленного трансляционной инвариантностью решения, для формирования данных двумерных или 2.5мерных задач моделирования.

Рассмотрим подробнее цели и задачи, стоящие при верификации и тестировании программного комплекса компьютерного моделирования:

I. Фундаментальное исследование

- понимание роли глобальной (интегральной) и локальной меры погрешности для программ оценивания

- понимание связи между точностью вычисления (количественно по отношению к норме ошибки), затратами на вычисления и физическими требованиями к точности получаемого решения
- определение как математических, так и физических критериев для количественных мер оценки точности вычислений
- описание процедуры проверки корректности и сравнения программных кодов

II. Прикладное исследование

- подбор характерного множества эталонных задач тестирования
- проверка программных кодов
- разработка эталонных задач и методологии тестирования
- классификация множества кодов для потенциальных пользователей
- оценка ошибки для массива данных, которые были предварительно посчитаны и использовались в тестировании
- получение новых синтетических данных с заданной точностью

Главным образом, существует два метода верификации:

- сравнение с аналитическими решениями (на практике это означает однородность среды или идеально симметричное полупространство решений);
- оценка погрешности (h-p - сходимость);

Обычно, для проверки корректности полученных численных результатов используется сравнение нескольких программных комплексов. Решения находятся на 2-3 программных пакетах на одной и той же модели, а затем полученные решения сравниваются друг с другом. Но использование одной модели для различных программ – это отдельная специальная задача (множество решений, базирующихся на разных принципах, могут не совпадать). Данный подход зачастую выдаёт множество различий между решениями. В частном случае, рассмотренном в данном параграфе, находится множество решений с использованием метода спектральных элементов, а затем проверяется численная сходимость путем варьирования порядка спектральных элементов.

Резюмируя вышесказанное, отметим, что программный код для тестирования на эталонных тестовых задачах должен:

- основываться на хорошо апробированных подходах;
- поддаваться проверке на точность;
- быть достаточно быстрым для расчета полномасштабных моделей.

Программный комплекс на основе МСЭ удовлетворяет этим условиям и имеет ряд преимуществ:

- хорошую согласованность задачи на полиномах высоких порядков;
- диагональную матрицу масс, поэтому схема интеграции по времени на каждом шаге требует инвертирования диагональной матрицы, что значительно ускоряет вычисления;
- легко варьируемую степень аппроксимации по пространству;
- h/p-адаптивность;
- использование интерполяции N-ого порядка, GLL квадратура является точной для полиномов порядка 2N-1;
- автоматическую кластеризацию узлов около границы;
- высокую скорость вычислений для неструктурированных конформных гексаэдральных сеток благодаря свойствам тензоризации GLL;
- отличные аппроксимационные свойства на нескольких элементах даже при использовании низких порядков аппроксимации – от N = 5 до N = 9.

Рассмотрим в качестве примера решение задачи о моделировании распространения упругих волн в одномерно-слоистой среде методом спектральных элементов. Множество тестовых задач в этом случае базируется на одномерной слоистой среде с постоянными и линейными зависимостями функций {Vp, Vs, rho} от глубины в слоях. Модели могут быть описаны следующим образом:

1) Разрывная модель с граничными условиями неотражения волн для всех (внешних) границ. Эта модель используется для тестирования точности дискретного решения с имитацией открытых границ.

2) Разрывная расширенная модель. Эта модель используется для тестирования точности дискретного решения, включая имитацию открытых границ.

3) Сглаженная модель с граничными условиями неотражения. Эта модель включена в рассмотрение, т.к. модельные программы, основанные на методе сквозного счета, разрабатываются в предположении о том, что параметры среды гладкие.

Тестовая расчетная область имеет размеры 10 км в длину и 3 км в глубину. Верхний слой моделируется как идеальная жидкость с граничными условиями на свободной поверхности. Физическое время задачи – 5 сек (для внешних областей – 2 секунды).

Распространение волн описывается изотропными упругими уравнениями:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

Где **u** – вектор перемещений, **I** – единичный тензор, λ и μ – параметры Ламе, ρ – плотность, $\boldsymbol{f}$ – внешняя сила. Эти уравнения записаны в плоских декартовых координатах *(x,z)*.

Задавался 40-герцовый источник, расположенный в середине верхней свободной поверхности модели (x = 5 км, z = 50 м). Источник представляет собой массовую силу ***f***:

$$f(t,x,z) = f_1(t) f_2(x,z)$$

$$f_1(t) = \frac{w_1^2}{4}\exp(-w_1 t)(\sin(w_0 t)(-\frac{t^2}{w_1} + \frac{t}{w_1^2} + \frac{1}{w_1^3}) - \cos(w_0 t)\sqrt{3}(\frac{t^2}{w_1} + \frac{t}{w_1^2}))$$

$$w_1 = \frac{w_0}{\sqrt{3}}, \quad w_0 = 2\pi f_0, \quad f_0 = 40Hz$$

$$f_2(x,z) = e^{-((x-x_f)^2+(z-z_f)^2)/r_f^2}, \quad r_f = 26$$

Графики функций $f_1(t), \quad f_2(x,z)$ приведены на Рисунок 115 и Рисунок 116.

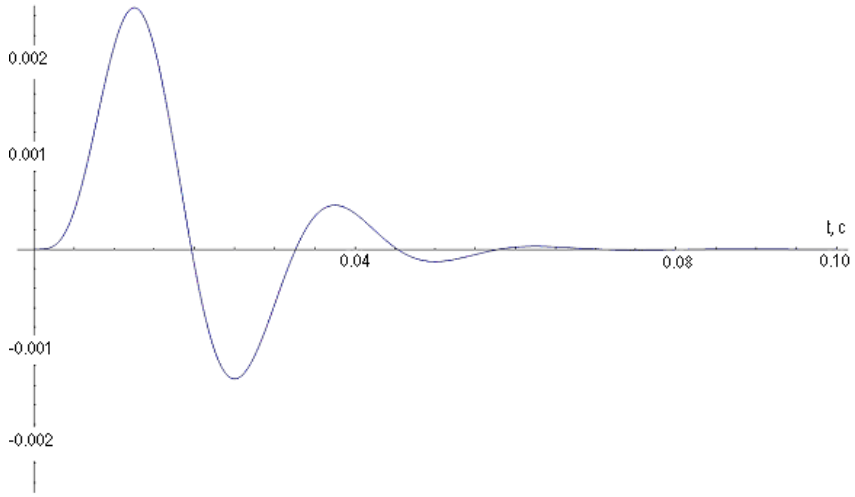


Рисунок 115 График *$f_1(t)$*

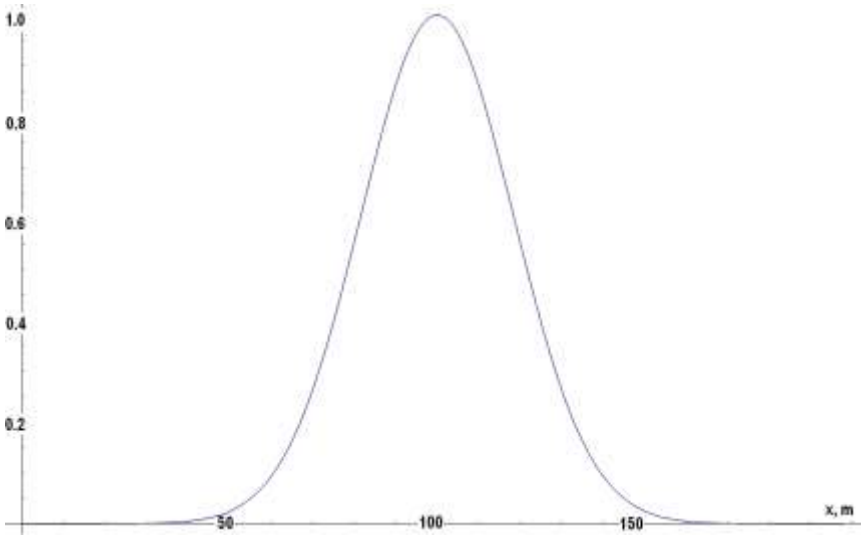


Рисунок 116 График $f_2(x,0), \; x_f = 99, \quad z_f = 0$

Далее для всех тестовых задач координаты центральной точки $x_f = 99,\ \ z_f = 4999.5$.

Для данной модели была построена четырёхугольная неструктурированная сетка со следующими параметрами: общее число узлов 7049356 (для случая 16-го порядка аппроксимации по пространству).

Ниже представлены результаты двумерного моделирования методом спектральных элементов для одномерно слоистой задачи в различных конфигурациях.

Разрывная модель

Рассматривается изотропная девятитислойная среда, включающая верхний водный слой. Рассчитывается прямоугольная область размером $10000 \times 3000\ м^2$. Параметры среды представлены на Рисунок 117 и Рисунок 118.

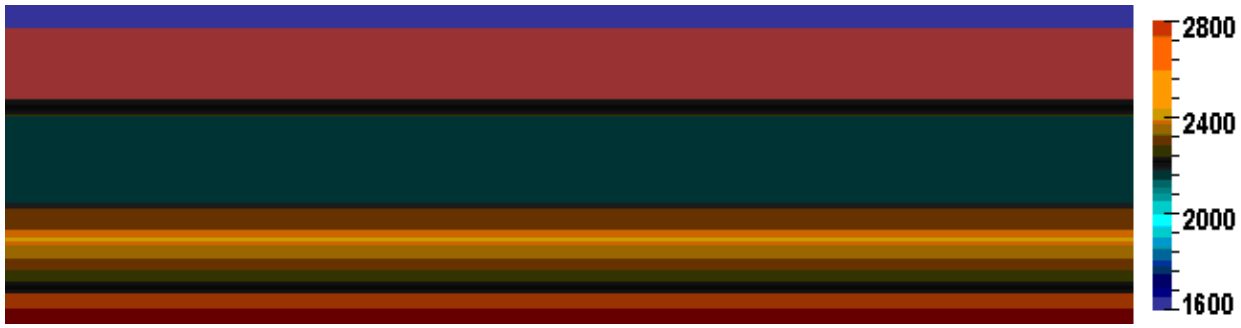


Рисунок 117 Геометрия одномерной слоистой среды, диаграмма продольной скорости

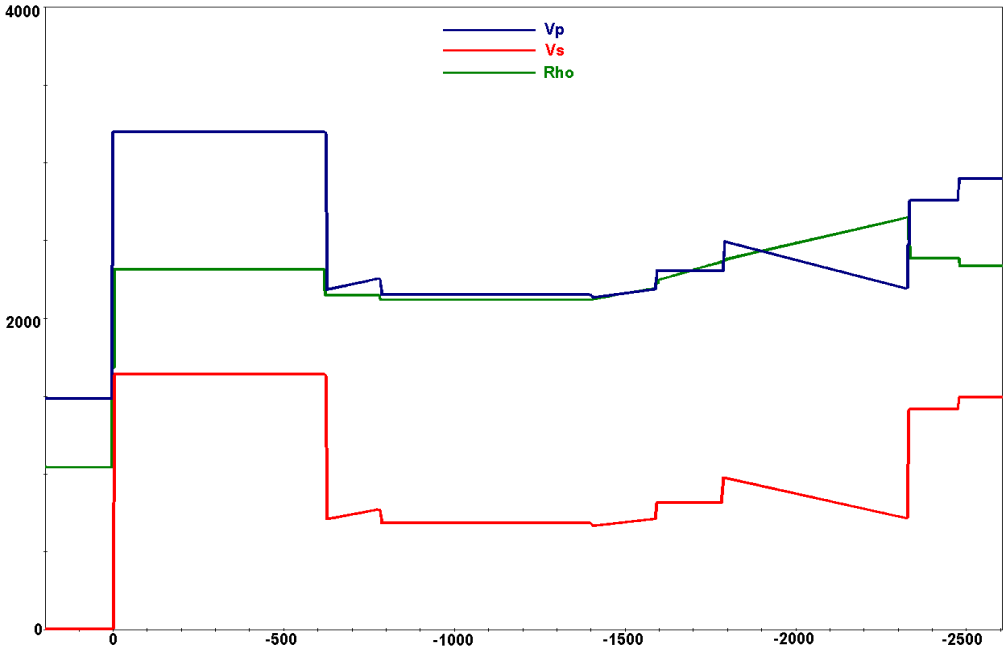


Рисунок 118 Зависимость плотности (зеленым), скоростей продольных (синим) и поперечных (красным) волн от глубины

Параметры слоев приведены в Таблице 1.

Толщина слоя (м)	Координаты (м)	Плотность (кг/м3)	Vp (м/сек)	Vs (м/сек)
198	0 < z < 198	1040	1480	0.0
625	-625 < z < 0	2320	3192	1636.99
160	-785 < z < -625	2150	-0.48*z + 1876.5	-0.42*z + 445.26
620	-1405 < z < -785	2120	2150	681.034485
190	-1595 < z < -1405	-0.36*z + 1623.37	-0.29*z + 1719.79	-0.25*z + 310.29
195	-1790 < z < -1595	-0.64*z + 1220.30	2304	813.79
545	-2335 < z < -1790	-0.50*z + 1485.46	0.57*z + 3517.73	0.49*z + 1860.36
145	-2480 < z < -2335	2381	2755	1412.99
130	-2610 < z < -2480	2330	2900	1487

Таблица 1. Упругие параметры и координаты слоёв

Физическое время задачи - 5 секунд.

Расширенная разрывная модель

В этой модели верхний слой воды расширен до координаты $z = 3198\,м$, нижний слой – до координаты $z = -5610\,м$. Также левая и правая границы сдвинуты на 800 м и имеют координаты $x = -800\,м$ и $x = 10799\,м$ соответственно. Размер расширенной области $11599 \times 8308\,м^2$ (Рисунок 119). Физическое время задачи - 2 секунды.

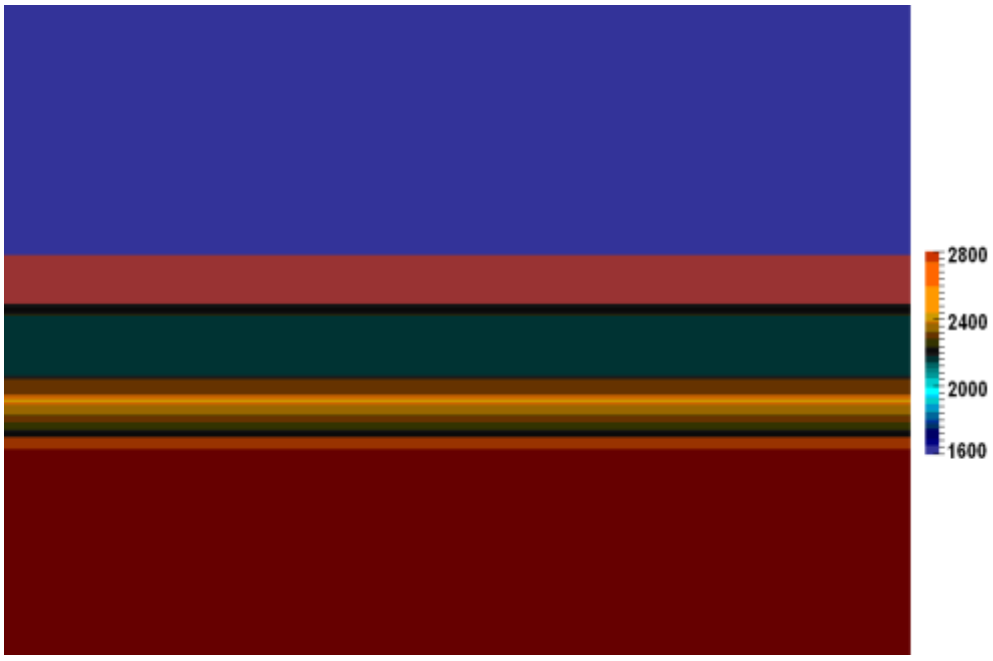


Рисунок 119 Геометрия расширенной разрывной модели, диаграмма продольной скорости.

Сглаженная модель

В данной модели используются сглаженные параметры среды из модели 1. Процедура сглаживания выполняется в несколько этапов.

1) параметры модели 1 привязываются к сетке (ih, jh), с шагом $h = 5м$. Например,

$$f(i,j) = \rho(ih, jh)$$

2) вводится сглаживающее ядро – гауссиан $G(k)$:

$$G(k) = G_0 \exp\left(-(kh)^2 / d^2\right), \quad d = 20м$$

Где $G_0 = 1 / \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-(kh)^2 / d^2\right)$ – константа нормировки;

3) для каждого фиксированного индекса *i* одномерная дискретная функция сворачивается с гауссианом

$$f_1(i,j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(i,j')G(j-j')$$

4) далее такая же свёртка производится по индексу *i* для каждого *j*:

$$f_2(i,j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i',j)G(i-i')$$

Полученная функция $f_2(i,j)$ является сглаженной;

5) восстанавливается гладкая непрерывная функция $F(x,z)$ с помощью локальных кусочно-кубических сплайнов Акима [291]:

$$F(x,z) := S\{F_1(i)\}(x)$$

$$F_1(i) := S\{f_2(i,j)\}(z), \quad i = [x/h]-1,...,[x/h]+2$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$S\{F(i)\}(x)$ – непрерывно дифференцируемый сплайн Акима на интервале $[ih-h, ih]$ (где $x \in [ih-h, ih]$) для дискретной функции $F(i)$, заданной в четырёх точках $ih-2h,...,ih+h$;

$[a]$ – это целая часть a.

Для скоростей Vp и Vs сглаживаются обратные величины.

Сглаженные параметры упругой среды задавались далее внутри прямоугольной области $9999 \times 2808 м^2$, показанной на Рисунок 120. На Рисунок 121 показано сравнение первоначальной и сглаженной функции Vp.

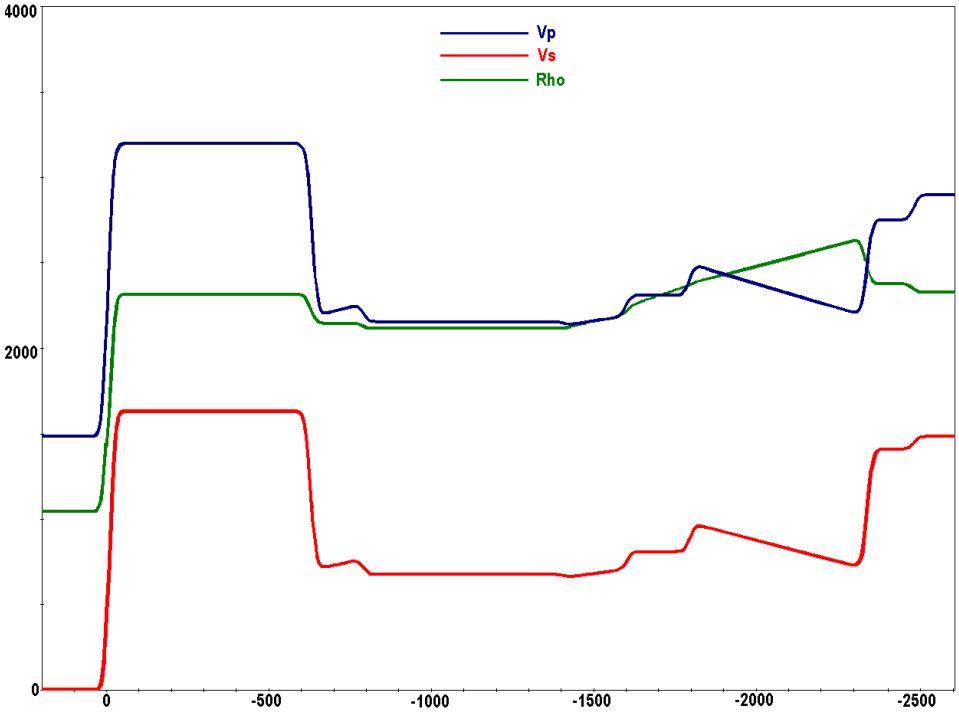


Рисунок 120 Зависимость плотности (зеленым), скоростей продольных (синим) и поперечных (красным) волн от глубины для сглаженной модели

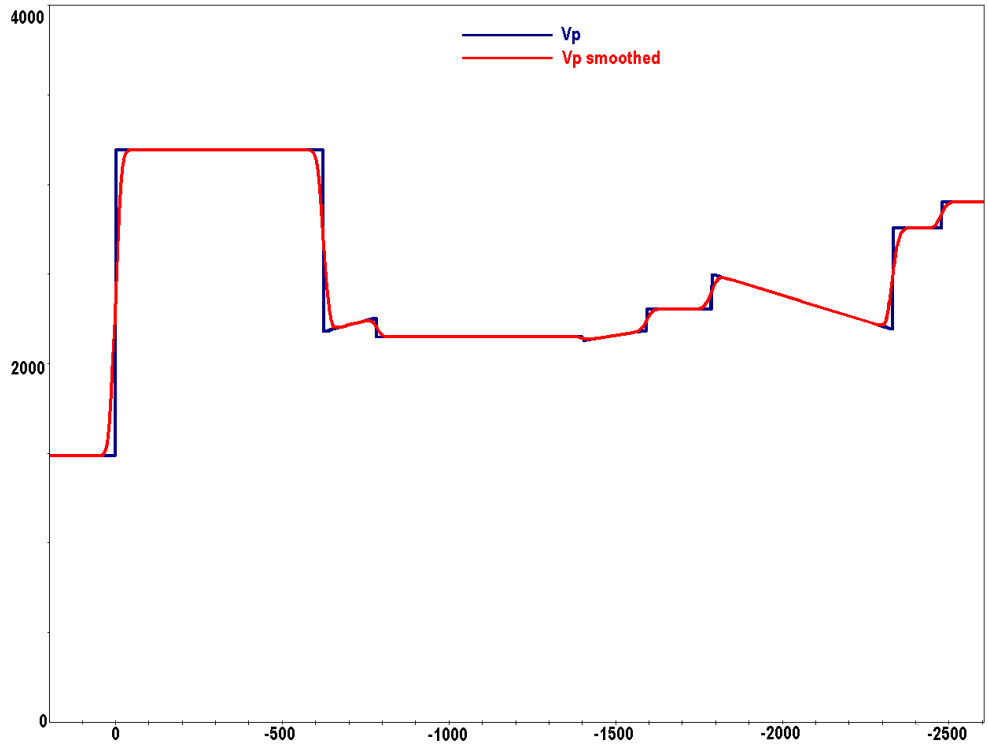


Рисунок 121 Первоначальная (синяя) и сглаженная (красная) зависимость продольной скорости от глубины

Физическое время задачи - 5 секунд.

Программа тестирования.

Рассмотренные выше тестовые модели направлены на проверку численной сходимости программы на основе МСЭ. При этом последовательность выполнения программы тестирования следующая:

1. *вычисление множества решений с разными порядками аппроксимации и разными сетками;*
   Рассчитываются рассмотренные выше модели с разными порядками аппроксимации для достижения сходимости. Вычисления производятся на нескольких сетках. Основная сетка измельчается до момента достижения сеточной сходимости. Эта самая трудозатратная часть по времени вычислений.
2. *сравнение полученных решений;*
   Выбирается эталонное решение (с наивысшим порядком аппроксимации и мелкой сеткой). Далее с этим решением сравниваются другие, т.е. оценивается ошибка по норме $C\ \|\ \|_C$.
   Таким образом, можно получить значения параметров численной схемы, которые приводят к hp-сходимости МСЭ на приведенных моделях.
3. *сбор информации о моделях;*
   Подготавливаются каталоги для каждой модели, содержащие:
   - описание модели;
   - директорию с входными файлами;
   - директорию с выходными файлами:
     i. файлы сейсмограмм;
     ii. файлы с волновыми полями;
     iii. скриншоты волновых полей в различные моменты времени;
4. *анализ результатов.*

Тестовые задачи для разрывных моделей:

1) Сеточная сходимость.

Используется равномерная четырехугольная сетка в каждом слое с общим количеством 334 x 95 элементов. Размер элемента приблизительно 30x30 м. Границы слоёв принадлежат линиям сетки. Вычисления проведены для 4-го порядка аппроксимации и трёх вариантов сетки (для исходной сетки, а также уменьшенной в два и четыре раза).

2) Полиномиальная сходимость.

Вычисления проведены для 16-го, 12-го и 8-го порядков аппроксимации на сетке, состоящей из элементов размером 30x30 м.

3) Двойная и одинарная точность

Вычисления проведены для 8-го порядка аппроксимации на сетке, состоящей из элементов размером 30х30 м, в режиме одинарной и двойной точности при выполнении математических операций над числами с плавающей запятой.

Тестовые задачи для разрывной расширенной модели

1) Сеточная сходимость

Используется равномерная четырехугольная сетка в каждом слое с общим количеством 387 х 277 элементов. Размер элемента приблизительно 30х30 м.

Вычисления проведены для 12-го и 6-го порядков аппроксимации и двух вариантов сетки (для исходной сетки, а также уменьшенной в два раза).

2) Полиномиальная сходимость

Вычисления проведены для 12-го и 8-го порядков аппроксимации на сетке, состоящей из элементов размером 30х30 м.

Тестовые задачи для сглаженной модели

1) Сеточная сходимость

Используется равномерная четырехугольная сетка в каждом слое с общим количеством 387 х 277 элементов. Размер элемента приблизительно 30х30 м.

Вычисления проведены для 16-го и 8-го порядков аппроксимации и двух вариантов сетки (для исходной сетки, а также уменьшенной в два раза).

2) Полиномиальная сходимость

Вычисления проведены для 12-го и 8-го порядков аппроксимации на сетке, состоящей из элементов размером 30х30 м.

Вычисления для сети приёмников

Вычисления проведены для 16-го порядка аппроксимации на сетке, состоящей из элементов размером 30х30 м для случая разрывной модели и 12-го порядка в случае расширенной модели.

Параметры приёмников:

По 10 приёмников в каждом слое, всего 90 приёмников.

Координаты по горизонтали: первый приемник расположен в точке x=1200 м, далее каждые 850 м.

Координаты повертикали: 100 м, -300 м, -700 м, -1000 м, -1500 м, -1700 м, -2000 м, -2400 м, -2550 м, -2700 м.

Результаты

Максимальная относительная ошибка рассчитана по всем приёмникам в норме $\| \|_C$.

Для разрывной модели:

Файл сетки	Порядок полинома	Максимальная ошибка по всем приёмникам	Число степеней свободы
“Mesh30x0.5.k”	4-ый	68.5%	2258870
“Mesh30x0.5.k”	8-ой	0.038%	12282342
“Mesh30x0.5.k” (SP)	8-ой	0.049%	12282342
“Mesh30x0.25.k”	4-ый	7.72%	9025226
“Mesh30x0.25.k”	5-ый	0.184%	16040290
“Mesh30.k”	4-ый	165%	566000
“Mesh30.k”	8-ой	6.38%	3073576
“Mesh30.k”	12-ый	0.037%	7584480
“Mesh30.k”	16-ый	Эталон	14098712

Для разрывной расширенной модели:

Файл сетки	Порядок полинома	Максимальная ошибка по всем приёмникам	Число степеней свободы
“Mesh30Extendedx0.5.k”	6-ой	0.275%	21530502
“MeshExtended30.k”	8-ой	4.39%	10552740
“MeshExtended30.k”	7-ой	18.1%	7754174
“MeshExtended30.k”	9-ый	0.296%	13781650
“MeshExtended30.k”	12-ый	Эталон	26050444

Для сглаженной модели:

Файл сетки	Порядок полинома	Максимальная ошибка по всем приёмникам	Число степеней свободы
“Mesh30x0.5.k”	8-ой	0.39%	12282342
“Mesh30.k”	12-ый	0.314%	7584480
“Mesh30.k”	16-ый	Эталон	14098712

Выводы. Представленные результаты расчетов позволяют сделать заключение об успешном тестировании сеточной и полиномиальной сходимостей. В данном случае первая модель позволила уточнить список необходимых тестовых задач для следующих примеров. Очевидно, что некоторые варианты расчетов дают слишком большие погрешности, но благодаря этому становятся известными условия и ограничения при проведении численных расчетов. Итоговые значения волновых полей получены с ошибкой менее 1% для всех моделей, на которых

проверялась h/p-сходимость. Более того, большие ошибки для некоторых промежуточных вычислений не дают какого-либо визуального различия на волновых полях. Они влияют только на абсолютные значения.

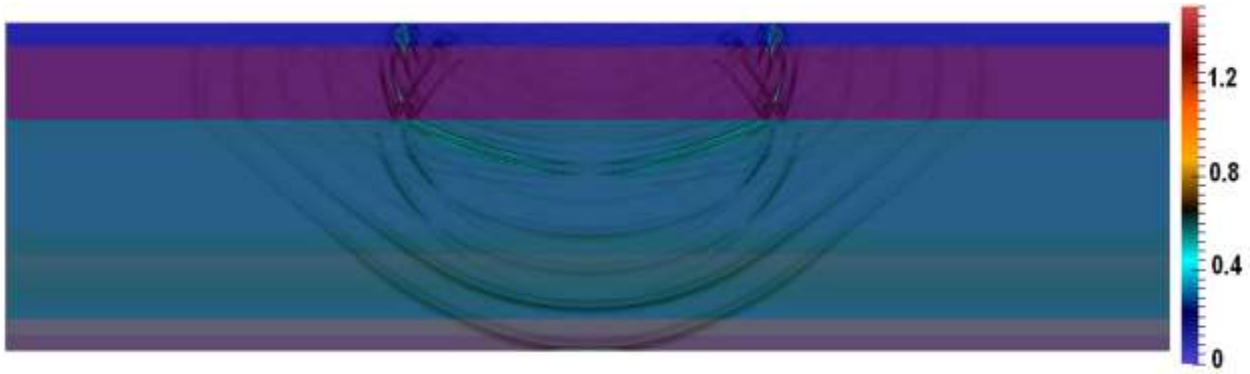


Рисунок 122 Виды сейсмических волн: продольные (P) волны и поперечные (S) волны (прямые, отражённые и проходящие), волны Рэлея, распространяющиеся по границам раздела слоев, головные волны.

2.6 Заключение

В рамках данной главы разработан алгоритм дискретизации краевых задач нестационарной теории упругости в областях со сложными криволинейными граничными поверхностями на основе изопараметрического метода спектральных элементов и построения оптимальных спектральноэлементных сеток для данных областей. На ряде модельных задач была продемонстрирована точность и гибкость в использовании метода на неструктурированных гексаэдральных сетках в сравнении с аналитическими решениями. В реальных задачах сейсмического анализа и акустического каротажа среда является механически анизотропной, вязко- и(ли) пороупругой. Были рассмотрены случаи моделирования распространения волновых процессов в средах с наклонной трансверсальной изотропией (TTI), пористых средах, насыщенных жидкостью (модель Био), а также вязкоупругих средах, описываемых моделью обобщенного стандартного линейного твердого тела. Получено решение задачи о полноволновом моделировании в неоднородной преднапряженной среде с наведенной анизотропией, вызванной концентрацией напряжений вблизи полостей и включений в твердом теле. Разработана математическая модель процесса акустического каротажа на основе системы трехмерных неоднородных уравнений Био с переменными коэффициентами и комбинированных неотражающих граничных условий, препятствующих отражению волн от границ расчетной области. Предложена методология тестирования программных комплексов на основе МСЭ для моделирования распространения волновых процессов в неоднородных средах.

Рассмотрены следующие отличительные особенности изопараметрического метода спектральных элементов в сравнении с методом конечных элементов (МКЭ):

- использование интерполяционных полиномов Лагранжа, построенных по узлам интегрирования квадратуры Гаусса-Лежандра-Лобатто, в качестве базисных функций;
- выбор квадратуры Гаусса-Лежандра-Лобатто (ГЛЛ) и интерполяционных многочленов на основе ее узлов приводит к диагональной матрице масс и, как следствие, полностью явной схеме интегрирования по времени без необходимости обращения матрицы на каждом шаге интегрирования по времени, что значительно увеличивает скорость вычислений;
- легко варьируемый порядок аппроксимации по пространству;
- спектральная сходимость на гладких решениях вычислительной схемы с минимальными численной дисперсией и диффузией: $\|u - u_h\| \leq Ch^N e^{-N}$ в H^1-норме, где h – характерный размер сеточного элемента, N – порядок элемента, C – константа, не зависящая от h и N;
- повышенная скорость вычислений на неструктурированных четырехугольных (в двумерном случае) и гексаэдральных (в трехмерном случае) сетках ввиду свойства тензоризации базисных функций метода спектральных элементов при использовании ГЛЛ-квадратур;
- автоматическое уплотнение узлов вблизи границы элемента;
- использование неструктурированных сеток из крупных изопараметрических элементов высокого порядка для дискретизации решения в трехмерных областях со сложной криволинейной геометрией;
- для сложных пространственных областей, для которых затруднительно прямое построение конформных гексаэдральных сеток, возможно их получение из тетраэдральных сеток;
- ввиду отличных дисперсионных свойств спектральных элементов, в задачах волновой динамики требуется значительно меньше (чем в МКЭ) точек на длину волны. Необходимые аппроксимационные свойства схемы достигаются уже на нескольких элементах, даже когда используются «скромные» порядки аппроксимации - от 5 до 9;
- скорость вычислений при использовании МСЭ может быть существенно повышена за счет эффективного распараллеливания на массивно-параллельных системах (Глава 4).

Делая вывод из приведенного сравнения и рассмотренных в настоящей главе задач, можно отметить, что МСЭ значительно превосходит МКЭ в плане точности и эффективности при решении задач о распространении волновых процессов в сложнопостроенных телах за счет полностью явной схемы по времени и использования высокого порядка аппроксимации по пространственным координатам, который может легко варьироваться как внутри программного кода, так и задаваться извне, например, при проведении исследований на сеточную (численную)

сходимость (параграф 2.5) и(ли) верификации/валидации результатов численных расчетов [810, 811, 812, 813].

Выводы:

1. Для численной дискретизации краевых задач теории многократного наложения больших деформаций в областях с криволинейными граничными поверхностями был предложен изопараметрический метод спектральных элементов.
2. Разработанные алгоритмы и специализированный комплекс программ на его основе были применены для моделирования распространения сейсмических волн в трехмерных неоднородных анизотропных (с возможным наличием анизотропной вязкоупругости) геофизических пластах, в том числе пористых и содержащих системы трещин и трещиноватостей, в которых наблюдаются значительные локальные концентрации напряжений и конечные деформации.
3. Проведенные сравнения с аналитическими и численно-аналитическими результатами решения тестовых задач, а также анализ на численную (сеточную) сходимость продемонстрировали корректность и вычислительную эффективность разработанных алгоритмов.

Глава 3. Модели и алгоритмы решения задач геомеханики

3.1 Введение

На каждом этапе жизни месторождения – бурение новой скважины, депрессия на пласт на этапе разработки, интенсификация добычи с помощью проведения процедуры ГРП, геомеханика решает прикладные задачи, результаты которых позволяют сформировать рекомендации по оптимальному проведению технологических процессов с целью снижения затрат и интенсификации добычи. Качественная оценка геолого-геомеханической ситуации: распределение и ориентация напряжений в породе, учет неоднородности механических свойств породы на различных масштабах, а также геометрических неоднородностей таких, как разломы и угол напластований, учет динамики жидкости в порах и трещинах, пронизывающих горную породу - эти данные формируют информационную базу для прогноза поведения породы под нагрузкой.

Требование проводить мультидисциплинарный подход к решению задач геомеханики определяется многообразием факторов, влияющих на конечный результат [316, 324, 699]. Широкий охват направлений применимости решений, создаваемых специалистами-геомеханиками, позволяет затрагивать процессы на каждом этапе жизни месторождения: бурение новой скважины (подбор веса бурового раствора, корректировка траектории, прогноз пескопроявления и пр.), создание депрессии на пласт в процессе разработки, проведение процедуры гидроразрыва пласта с целью интенсификации добычи. Прогноз реакции породы на механическое воздействие и своевременная корректировка технологических параметров позволяют экономить значительные средства, предотвращая аварии и времена простоя.

С физико-математической точки зрения, резервуарная геомеханика представляет собой дисциплину, изучающую процессы в многофазных многокомпонентных средах, в которой и горная порода, и насыщающее ее вещество представлены одной или несколькими фазами, чьи агрегатные состояния могут изменяться в процессе разработки. Изначально, все фазы находятся, как правило, в состоянии механического и термодинамического равновесия, нарушающегося в момент бурения первой разведывательной скважины. В зависимости от термобарических условий, свойств насыщенной и насыщающей сред и применяемых технологий добычи, в процессе разработки формируются новые локальные состояния равновесия, переходы к которым являются, вообще говоря, неравновесными и необратимыми процессами. Пространственные масштабы этих процессов варьируются в диапазоне керн-скважина-резервуар. В данной главе рассматривается разработка алгоритмов численного

решения с использованием системы инженерного анализа CAE Fidesys задач геомеханического моделирования на каждом из данных масштабов.

В параграфе 3.2 рассматривается обобщение модели, предложенной в [313] для расчета эффективных свойств элемента горной породы (ячейки периодичности) из упругого материала, рассеченного группами плоскопараллельных трещин. В первоначальном варианте полуаналитической модели каждая из трещин заменяется упругими связями с различающимися жесткостями в нормальном и тангенциальном направлениях [315]. При этом в определяющем соотношении трещины, задаваемом связями между компонентами вектора перемещений и вектора усилий (напряжения на площадке, параллельной трещине) в нормальном и тангенциальном направлениях, пренебрегаются эффекты дилатансии и сдвиговых деформаций в результате действия нормальных напряжений. Далее в соответствии с концепцией эквивалентной среды для связанных горных пород, предложенной в [484], эффективные модули податливости трещин рассчитываются на основе расстояния между трещинами и жесткостями упругих связей. Для расчета полного эффективного тензора упругости трещиноватой среды вводится допущение малости деформаций, в соответствии с которым полные деформации равны сумме деформаций скелета и трещин. В рамках настоящей работы, за счет построения трехмерной численной модели ячейки периодичности, удалось снять оба ограничения исходной аналитической модели: диагональная связь между смещениями и усилиями в трещине и малые деформации. Данное обобщение стало возможным путем моделирования трещины тонким слоем из упругого материала с соответствующими исходным нормальным и тангенциальным жесткостям модулем Юнга и модулем сдвига (исходный вариант получается обнулением коэффициента Пуассона) и учетом геометрической нелинейности в связи между деформациями трещины и смещениями ее берегов. На основе обобщенной численной модели построена конечноэлементная модель в CAE Fidesys, позволяющая варьировать параметры системы трещин: количество, шаг, толщина, жесткости и т.д. Приводятся результаты осреднения для ячейки периодичности, рассеченной тремя группами плоскопараллельных трещин - первые две группы трещин ортогональны третьей группе и пересекаются под заданным углом. Обсуждаются результаты численных исследований на сеточную сходимость, влияние размеров ячейки периодичности и толщины трещины на результаты осреднения. Демонстрируется близость аналитического и численного решений для упрощенной модели и разница между ними в случае обобщенной модели, приводящей, в ряде случаев, к изменению эффективного модуля Юнга до 30%.

Во параграфе 3.3 рассмотрено математическое моделирование ряда физических процессов околоскважинной зоны при помощи системы прочностного анализа CAE Fidesys.

Математическая модель включает в себя систему уравнений, описывающих динамическое изменение напряженно-деформированного состояния пороупругой среды, насыщенной жидкостью. Для моделирования процесса упругопластического течения использовались соотношения Друкера–Прагера [243, 244], в рамках которых упругое состояние горной породы сохраняется до момента достижения напряжениями предельной поверхности в виде конуса в главных осях напряжений, позволяющей учитывать различный характер деформирования материала при растяжении и сжатии (как правило, в горных породах предел текучести при одноосном растяжении значительно ниже аналогичного значения при сжатии). При дальнейшем росте нагрузки начинается процесс неупругого, пластического деформирования и разрушения. Данный подход позволяет учитывать процесс формирования пластической зоны, связанный с появлением остаточных деформаций. Эффект развития пластической области является причиной неравномерного и, в реальных условиях, нелинейного распределения механических и фильтрационно-емкостных свойств породы. Физические процессы, следующие из данного эффекта, в свою очередь оказывает влияние на продуктивность скважины. Положение предельной поверхности Друкера-Прагера учитывает такие механические параметры материала среды, как угол внутреннего трения, когезию, интенсивность касательных напряжений и среднее нормальное напряжение. Для численного решения данной задачи в CAE Fidesys реализован подход, основанный на методе спектральных элементов и использующий один из наиболее эффективных численных методов решения краевых задач – метод Галеркина. Одним из этапов построения дискретной модели является этап разбиения области на спектральные элементы. Подобный подход позволяет учитывать неоднородности и разрывы в рассматриваемой области, а также более корректно описывать зоны с быстро меняющимися параметрами среды.

В параграфе 3.4 рассматривается алгоритм итерационного сопряжения для решения связанной задачи гидрогеомеханического моделирования фильтрации жидкости в деформируемой трещиноватой породе, позволяющий учитывать взаимное влияние процессов фильтрации и деформирования горных пород на динамические параметры среды: пористость, проницаемость, жесткость породы и раскрытие трещин. В отличие от классических моделей двойной пористости деформируемых формаций при итерационном сопряжении нет необходимости выписывать явно уравнение для пористости. Процедура построения модели основана на концепции эквивалентной среды, ведущей себя под нормальной и сдвиговой нагрузкой эквивалентно исходной среде, состоящей из поровой системы матрицы и микротрещин. Фактически рассматривается подход к построению геомеханической модели двойной пористости, свободной от проблемы совместного деформирования фаз и позволяющей

моделировать напряженно-деформированное состояние трещиновато-пористой среды с помощью подходов классической механики твердого тела. Моделирование и расчет параметров напряжённого-деформированного состояния в рамках данной модели осуществляется в два этапа (масштаба). На первом этапе находятся эффективные упругие модули для каждой подобласти с отличающимися параметрами трещин и пор на основе алгоритма, описанного в параграфе 3.2. Далее на основе найденных эффективных механических параметров в подобластях решается задача о нахождении напряжённого-деформированного состояния во всей области. После чего на основе рассчитанных локальных напряжений решается задача о деформировании трещин в каждой из подобластей для определения величин их раскрытий (апертур), соответствующих текущему локальному напряжённому-деформированному состоянию в окрестности трещины. Наконец, рассчитанные апертуры используются при вычислении пористости и проницаемости трещиноватой среды, которые передаются в гидродинамический симулятор на основе модели двойной пористости, который определяет поле давлений во всей модели. Затем на основе рассчитанных давлений в матрице и трещиноватой среде определяется среднее давление в эффективном континууме и повторяется расчет напряжённого-деформированного состояния и параметров геомеханической модели. Для численного решения задачи о распределении геомеханических напряжений и деформаций в горной породе использовались решатели в составе пакета CAE Fidesys. Полученные результаты позволяют сделать вывод о важности учета геомеханических эффектов деформирования трещиноватых горных пород, насыщенных жидкостью, при моделировании пластовых процессов.

3.2 Обобщение геомеханической модели для пористых трещиноватых резервуаров

Эффективный (осредненный) материал – это однородный материал, удовлетворяющий следующему условию: если этим материалом заполнить представительный объем (площадь) (Рисунок 123), включая поры, тогда средние напряжения по области исходного и эффективного материалов будут равны при одинаковых перемещениях граней [137, 144, 279]. Данная задача основывается на соотношениях механики деформируемого твёрдого тела. Возможны и другие способы построения эффективных определяющих соотношений. Например, можно исходить из предположения о равенстве упругой энергии, заключенной внутри представительной области, для исходного и осредненного материалов либо при граничных нагрузках, либо при одинаковых перемещениях границы представительной области, если задать эти перемещения как линейные функции координат. Такой подход рассмотрен для малых деформаций, например, в

[115], и может быть обобщен на случай конечных деформаций для пористых материалов с упругой матрицей. Однако для неупругих материалов этот подход неприменим.

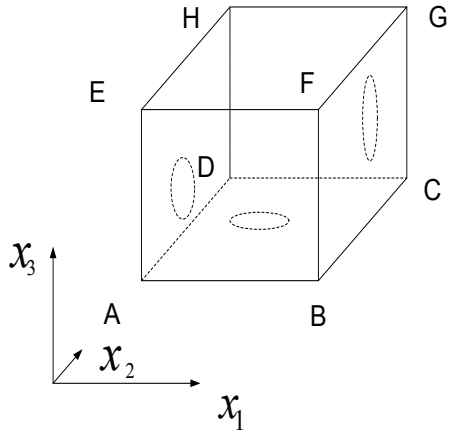


Рисунок 123. Представительная область с порами.

Осреднение механических свойств неоднородных материалов вызывает интерес с середины прошлого века. Теоретические принципы такого осреднения описаны в [466] – в частности, подробно разъясняется понятие представительного объёма. В работах того времени изучались эффективные свойства материалов в линейном виде, пригодные для описания поведения при малых деформациях.

Для материалов с относительно небольшим объёмным содержанием наполнителя в матрице действует двусторонняя оценка Хашина-Штрикмана [464, 465], дающая минимальные и максимальные значения для модуля объёмного сжатия и модуля сдвига материала (при известной концентрации наполнителя и модулях наполнителя и матрицы). Метод Мори-Танака [627] представляет собой применение условий Хашина-Штрикмана к дисперсно армированному материалу с непрерывной матрицей, в котором частицы наполнителя упорядочены и имеют сферическую форму. В книге [115] приводятся аналитические формулы для оценки эффективных упругих характеристик дисперсно армированных материалов, а также рассматриваются пластические и вязкоупругие эффекты и эффективные термические свойства. В книге [213] описываются методы осреднения не только упругих материалов, но и пластических, и вязкоупругих, а также техника осреднения в динамических задачах.

В наше время является более актуальной проблема оценки эффективных механических свойств неоднородных материалов с учетом нелинейных эффектов. В работе [273] изучаются упругие и пластические свойства материала, содержащего распределённые микродефекты с различной ориентацией в пространстве. В статьях [745, 746] оцениваются эффективные упругие свойства твёрдых тел, содержащих полости разной формы и разной ориентации в пространстве. В [715, 716, 717] для построения эффективных вязкоупругих определяющих соотношений материала с периодической структурой используется метод конечных элементов, с помощью

которого решается двумерная задача теории упругости для представительного объёма, после чего результаты усредняются. В статьях [673, 674, 675, 676] описывается применение вариационного принципа для оценки эффективных характеристик многокомпонентных материалов в виде плотности энергии деформации. В [732] приводится метод оценки эффективных характеристик материалов в нелинейном виде, берущий за основу принцип Хашина-Штрикмана [464, 465, 466]. В работе [284] описывается метод построения нелинейных термовязкоупругих эффективных определяющих соотношений для материалов периодической структуры. В [476] описано применение методов теории вероятностей для оценки эффективных механических характеристик материалов нерегулярной структуры. В [511] приводится метод, пригодный для оценки как упругих свойств, так и тепло- и электропроводности дисперсно армированных материалов (в статье сравнивается влияние различных параметров включений на эффективные упругие свойства и эффективную тепло- и электропроводность). В работе [436] осреднение упругих свойств неоднородного материала проводится при непериодических граничных условиях с учётом геометрической нелинейности, практическая реализация осуществляется с помощью метода конечных элементов (в двумерном случае). В [433] данный подход распространяется на многомасштабный случай. В статье [621] приводится сравнение различных методов для осреднения свойств как линейных вязкоупругих, так и нелинейных вязкопластических материалов.

В рамках гипотез механики деформируемого твёрдого тела оценкой эффективных характеристик пористых материалов занимались Вавакин [45], Седов [232], Трусделл [255]. Вопросами оценки эффективных характеристик материалов при конечных деформациях занимались Левин [137, 144, 145], Шермергор [273], Победря [213, 214, 215], Гамлицкий [62].

Для нахождения упругих свойств эффективного материала в исходном материале выделяется некоторый представительный объем (в двумерном случае — площадь), по механическому поведению которого при нагружении можно судить о свойствах материала в целом [751]. Для этого объема (площади) решается статическая задача теории упругости при заданных перемещениях на его границе. Затем напряжения усредняются по представительному объёму (площади) и эффективные определяющие соотношения строятся как зависимость между средними деформациями и напряжениями. Данная методика основана на предположении о равенстве средних напряжений по области для эффективного и исходного материалов при одинаковых перемещениях граней. Для численного решения задачи о нахождении эффективных упругих свойств используется метод конечных элементов.

Математическая постановка и алгоритм решения

Обозначения и основные соотношения приводятся в соответствии с их изложением в работах [579, 587, 594]. Рассмотрим представительный объём с порами в узлах сетки *NxNxN* (Рисунок 124). Форма пор задана в недеформированной конфигурации. Считаем, что полости не пересекаются и не касаются границы области. Рассмотрим один из способов построения эффективных определяющих соотношений для пористого упругого материала с использованием приведённых определений.

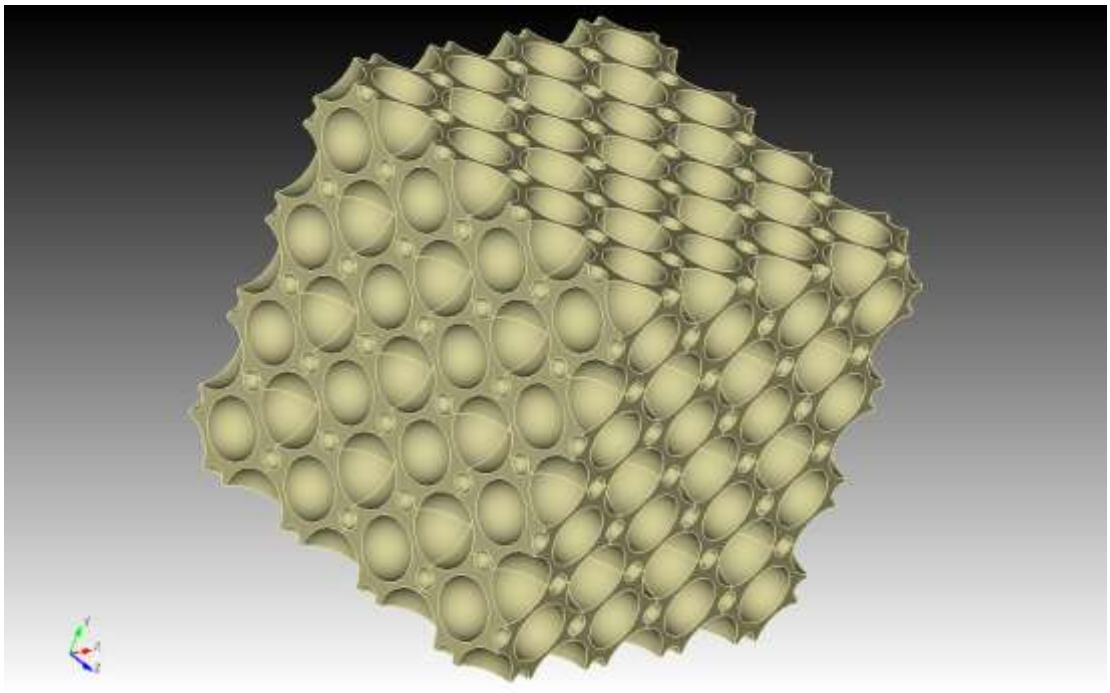


Рисунок 124. Представительный объем с порами различных размеров.

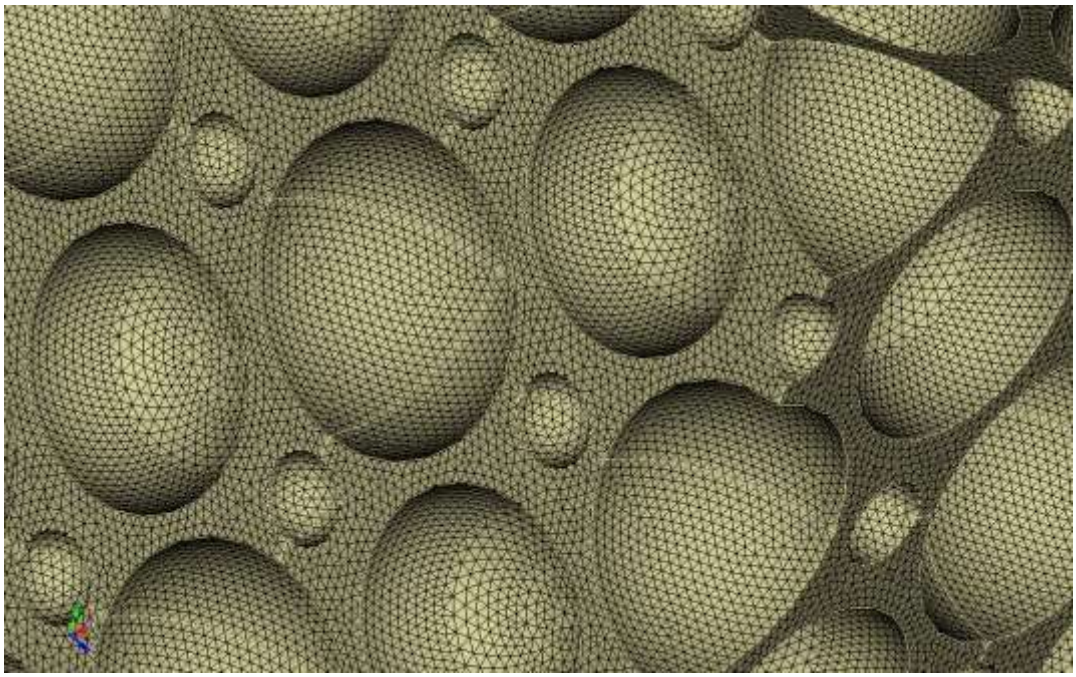


Рисунок 125. Конечноэлементная сетка по границам пор.

Для представительного объёма V_0, выделенного в начальном состоянии (до деформации) решаем с использованием метода конечных элементов (Рисунок 125) определённое количество последовательностей краевых задач теории упругости [138, 157, 232] в начальном ($\overset{0}{\nabla}\cdot\Re=0$) или конечном ($\nabla\cdot\sigma=0$) состояниях (Глава 1) с непериодическими граничными условиями в виде жёстко заданного вектора перемещений каждой точки границы $u\Big|_{\Gamma_0}=r\cdot(\Psi^e-I)$, где r – радиус-вектор, I – единичный тензор, либо с периодическими граничными условиями в виде связей на перемещения противоположных друг другу точек – т.е. точек противоположных друг другу граней представительного объёма, проекции которых на эти грани совпадают

$$u_i^1-u_i^{-1}=-2A(\psi_{1i}-\delta_{1i})$$
$$u_i^2-u_i^{-2}=-2B(\psi_{2i}-\delta_{2i})$$
$$u_i^3-u_i^{-3}=-2C(\psi_{3i}-\delta_{3i})$$

Здесь ψ_{ij} – компоненты эффективного аффинора деформаций Ψ^e. В периодических условиях:

1) пара (1; -1) – противоположные друг другу точки на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси X;
2) пара (2; -2) – противоположные друг другу точки на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси Y;
3) пара (3; -3) – противоположные друг другу точки на гранях представительного объёма, перпендикулярных оси Z.

Эффективный аффинор деформаций на представительном объёме Ψ^e однозначно задаёт граничные условия как в непериодическом, так и в периодическом случае. Таким образом, чтобы задать, как именно будет деформироваться представительный объём (ячейка периодичности), необходимо задать эффективный аффинор деформаций Ψ^e. Но на практике удобнее задавать не аффинор деформаций, а эффективный тензор деформаций Грина $\overset{(0)}{E^e}$, а по нему уже вычислять аффинор, пользуясь соотношением $\overset{(0)}{E^e}=\frac{1}{2}(\Psi^e\cdot\Psi^{e*}-I)$. Поскольку аффинор деформаций – несимметричный тензор второго ранга, определить его однозначно из симметричного тензора Грина в общем случае невозможно. Поэтому он задается верхнетреугольным – тогда шесть его компонент однозначно определяются по шести независимым компонентам тензора Грина. Тогда приведенная формула расписывается покомпонентно в виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ 0 & \psi_{22} & \psi_{23} \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ \psi_{12} & \psi_{22} & 0 \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

В случае малых деформаций компоненты аффинора деформаций записываются в явном виде:

$$\psi_{11} = 1 + \varepsilon_{11}$$
$$\psi_{22} = 1 + \varepsilon_{22}$$
$$\psi_{33} = 1 + \varepsilon_{33}$$
$$\psi_{12} = 2\varepsilon_{12}$$
$$\psi_{13} = 2\varepsilon_{13}$$
$$\psi_{23} = 2\varepsilon_{23}$$

Таким образом, каждая последовательность решаемых задач соответствует определённому виду тензора деформаций Грина $\overset{0}{E}^e$ эффективного материала (и определённому виду аффинора деформаций ψ^e в граничных условиях). В свою очередь, разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации.

Механические свойства материала матрицы описываются законом Гука или определяющими соотношениями Мурнагана [630]:

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda(\overset{0}{E} : I) + 2G\overset{0}{E} + 3C_3(\overset{0}{E} : I)^2 I + C_4(\overset{0}{E}^2 : I)I + 2C_4(\overset{0}{E} : I)\overset{0}{E} + 3C_5\overset{0}{E}^2$$

Каждая последовательность решаемых задач соответствует определённому виду тензора деформаций $\overset{0}{E}^e$ эффективного материала (и определённому виду аффинора ψ^e в граничных условиях - Рисунок 126).

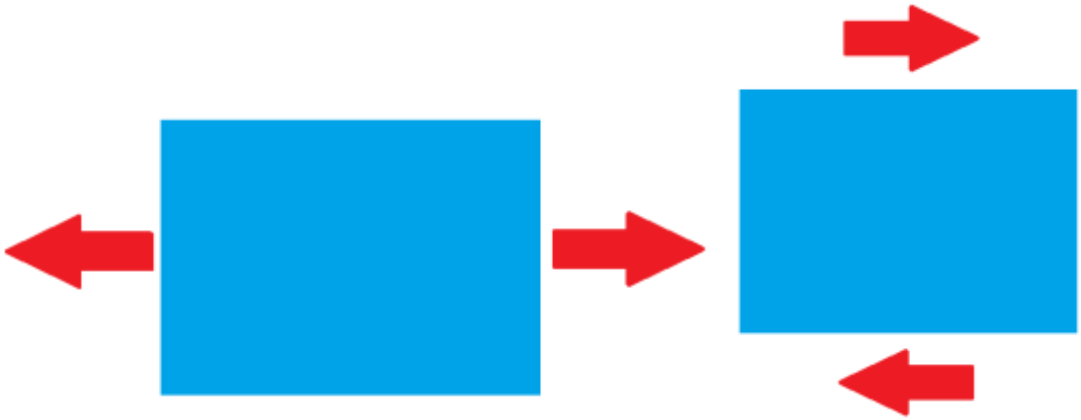


Рисунок 126 Виды граничных условий на ячейке периодичности: растяжения и сдвиги

В свою очередь, разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации. Могут быть решены следующие последовательности краевых задач [127, 138]:

1) $\overset{0}{E}_{11} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси X;

2) $\overset{0}{E}_{22} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси Y;

3) $\overset{0}{E}_{33} = q$ – растяжение или сжатие вдоль оси Z;

4) $\overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$ – сдвиг в плоскости XY;

5) $\overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$ – сдвиг в плоскости XZ;

6) $\overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$ – сдвиг в плоскости YZ;

7) $\overset{0}{E}_{11} = \overset{0}{E}_{22} = q$ – композиция растяжений или сжатий вдоль двух осей: X и Y;

8) $\overset{0}{E}_{11} = \overset{0}{E}_{33} = q$ – композиция растяжений или сжатий вдоль двух осей: X и Z;

9) $\overset{0}{E}_{11} = \overset{0}{E}_{22} = \overset{0}{E}_{33} = q$ – всестороннее растяжение или сжатие;

10) $\overset{0}{E}_{11} = q, \overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси X и сдвига в плоскости XY;

11) $\overset{0}{E}_{22} = q, \overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси Y и сдвига в плоскости XY;

12) $\overset{0}{E}_{33} = q, \overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси Z и сдвига в плоскости XY;

13) $\overset{0}{E}_{11} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси X и сдвига в плоскости XZ;

14) $\overset{0}{E}_{22} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси Y и сдвига в плоскости XZ;

15) $\overset{0}{E}_{33} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси Z и сдвига в плоскости XZ;

16) $\overset{0}{E}_{11} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси X и сдвига в плоскости YZ;

17) $\overset{0}{E}_{22} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси Y и сдвига в плоскости YZ;

18) $\overset{0}{E}_{33} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$ – композиция растяжения или сжатия вдоль оси *Z* и сдвига в плоскости *YZ*;

19) $\overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q, \overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q$ – композиция сдвигов в плоскостях *XY* и *XZ*;

20) $\overset{0}{E}_{12} = \overset{0}{E}_{21} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$ – композиция сдвигов в плоскостях *XY* и *YZ*;

21) $\overset{0}{E}_{13} = \overset{0}{E}_{31} = q, \overset{0}{E}_{23} = \overset{0}{E}_{32} = q$ – композиция сдвигов в плоскостях *XZ* и *YZ*;

где q – величина деформации.

Решая каждую из задач каждой последовательности, находим поле тензора напряжений σ. Зная его, вычисляем тензор напряжений σ^e эффективного материала с помощью осреднения по объёму [145]:

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma} N \cdot \sigma R d\Gamma$$

Данная формула получается осреднением по области тензора напряжений и применением формулы Гаусса-Остроградского.

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_{V} \sigma dV$$

Подставляем вместо σ следующее выражение:

$$\nabla \cdot (\sigma R) = (\nabla \cdot \sigma) R + \sigma \cdot (\nabla R)^* = (\nabla \cdot \sigma) R + I \cdot \sigma = \sigma$$

Получаем:

$$\frac{1}{V} \int_{V} \sigma dV = \frac{1}{V} \int_{V} \nabla \cdot (\sigma R) dV$$

Далее пользуемся формулой Гаусса-Остроградского и получаем конечную формулу:

$$\frac{1}{V} \int_{V} \nabla \cdot (\sigma R) dV = \text{формула Гаусса} - \text{Остроградского} = \frac{1}{V} \oint_{\Gamma} N \cdot \sigma R d\Gamma$$

Затем для каждой последовательности (т.е. для каждого типа нагружения) задач строятся зависимости компонент тензора напряжений $\overset{0}{\Sigma}{}^e$ от параметра q. Далее эти зависимости аппроксимируются выражениями вида [144]:

$$\overset{0}{\Sigma}{}^e_{mn} = \alpha^{(0)}_{mn} q + \alpha^{(1)}_{mn} q^2$$

Коэффициенты $\alpha_{mn}^{(0)}$, $\alpha_{mn}^{(1)}$ для каждой компоненты тензора $\overset{0}{\Sigma}{}^{e}$ (т.е. для каждой пары значений m и n) могут быть определены по отдельности с использованием, например, метода наименьших квадратов. Таким образом, задача нахождения коэффициентов $\alpha_{mn}^{(0)}$, $\alpha_{mn}^{(1)}$ распадается на множество элементарных задач о нахождении наилучшего среднеквадратичного приближения таблично заданной функции многочленом второй степени [587, 594].

После чего, эффективные определяющие соотношения строятся в виде зависимости между эффективными тензором деформаций $\overset{0}{E}{}^{e}$ и тензором напряжений $\overset{0}{\Sigma}{}^{e}$.

$$\overset{0}{\Sigma}{}^{e}_{mn} = \overset{(0)}{C}_{mnij}\overset{0}{E}{}^{e}_{ij} + \overset{(1)}{C}_{mnijkl}\overset{0}{E}{}^{e}_{ij}\overset{0}{E}{}^{e}_{kl}$$

Коэффициенты $\overset{(0)}{C}_{mnij}$, $\overset{(1)}{C}_{mnijkl}$ в данном разложении определяются через коэффициенты $\alpha_{mn}^{(0)}$, $\alpha_{mn}^{(1)}$ [582, 751].

Размеры представительной области, для которой проводится осреднение, в соответствии с ее определением должны быть значительно больше размеров пор. Если коэффициент пористости (объемная доля пор) не мал, то количество пор в этой области может быть достаточно большим, а эффекты взаимодействия между ними - существенными. Решить краевую задачу нелинейной упругости для области, содержащей большое количество близко расположенных пор, с учетом взаимодействия между порами затруднительно. Поэтому при расчетах осреднение по представительной области для различных вариантов расположения пор заменяется осреднением по представительному ансамблю их реализаций. Размер области, по которой проводится осреднение, выбирается таким, чтобы в этой области содержалось сравнительно небольшое количество пор, и рассматривается множество (ансамбль) таких областей одинакового размера, в которых поры расположены по-разному. Для каждой из этих областей решается краевая задача нелинейной упругости, проводится осреднение по описанной выше методике и определяются коэффициенты $\overset{(0)}{C}_{mnij}$, $\overset{(1)}{C}_{mnijkl}$. Затем находятся осредненные по ансамблю коэффициенты [579].

Если поры ориентированы случайным образом, то количество вариантов, которое необходимо рассмотреть при осреднении по ансамблю, значительно возрастает даже при небольших *N*, и в результате данная схема оказывается неэффективной. Если же все поры ориентированы одинаково, то количество всевозможных вариантов их расположения при использовании этой схемы будет тем же, что и для круговых пор. Рассмотрение одинаково ориентированных пор имеет смысл, например, при моделировании субмикротрещин, возникающих в пористом материале после предварительного одноосного нагружения. В этом

случае поры, как правило, вытянуты в момент образования в направлении, перпендикулярном к направлению нагрузки, и их можно моделировать эллиптическими полостями одинакового размера с заданным соотношением осей, которое можно рассматривать как константу материала. Преимуществом рассмотренной схемы осреднения является то, что она позволяет вычислить эффективные модули при различных пористостях и трещиноватостях, не решая заново краевые задачи, а меняя только вероятность распределения. Отметим, что при учете влияния трещин необходимо также учитывать их ориентацию [510, 513].

Перейдем теперь к построению эффективных определяющих соотношений для пористых материалов, в которых деформирование пор происходит после предварительного нагружения, например, давлением насыщающей поры жидкости. Такие соотношения представляют интерес при моделировании постепенного разрушения материалов, в которых при нагружении происходит образование микродефектов (субмикротрещин) [137]. Возможны различные подходы к этому вопросу [356, 476, 617, 745, 746, 776]. В настоящей работе, следуя моделям, изложенным в [140, 149], накопление повреждений рассматривается как дискретный процесс, каждый этап которого связан с приложением нагрузки к телу. Экспериментальным обоснованием такого подхода является тот факт, что после приложения нагрузки концентрация субмикротрещин в материале сначала возрастает в течение некоторого времени, а затем стабилизируется на некотором уровне, который определяется величиной приложенной нагрузки.

Рассмотрение процесса накопления повреждений как дискретного позволяет применить к его исследованию теорию многократного наложения больших упругих деформаций [127, 576]. Рассмотрим две схемы построения эффективных определяющих соотношений для пористых предварительно нагруженных материалов.

1. Сплошное (не имеющее дефектов) тело подвергается предварительному нагружению. В теле возникают начальные деформации, и оно переходит в промежуточное состояние. В этом состоянии в теле раскрываются поры, статистически равномерно распределенные по его объему. Вследствие образования пор в теле возникают дополнительные деформации, накладывающиеся на начальные. При этом средние напряжения в теле не меняются. Дополнительные внешние нагрузки к телу не прикладываются. Эффективные определяющие соотношения строятся как зависимость между средними полными деформациями и средними напряжениями, вызванными предварительным нагружением.

2. Сплошное тело подвергается предварительному нагружению, в нем возникают начальные деформации, после чего происходит раскрытие пор. Затем к телу прикладываются дополнительные внешние нагрузки. Вследствие образования пор и дополнительного

нагружения в теле возникают дополнительные деформации, которые накладываются на начальные. Эффективные определяющие соотношения строятся как зависимость между средними дополнительными деформациями и средними дополнительными напряжениями либо как зависимость между средними полными деформациями и средними полными напряжениями и будут параметрически зависеть от начальных напряжений (или от начальных деформаций). Эта схема может быть использована для моделирования частичной разгрузки пористых материалов, в которых поры образовались после предварительного нагружения.

Все численные эксперименты в данном параграфе проводились с использованием инструментария системы компьютерного моделирования CAE Fidesys (подробно рассмотренной в пятой главе). На рисунках ниже приведены зависимости эффективных модулей от коэффициента пористости.

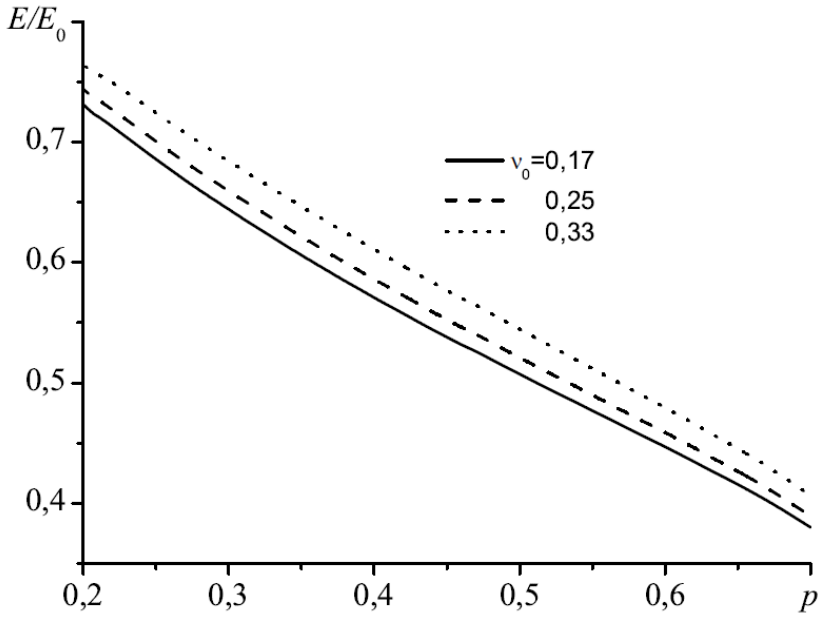


Рисунок 127 Зависимость эффективного модуля Юнга от пористости

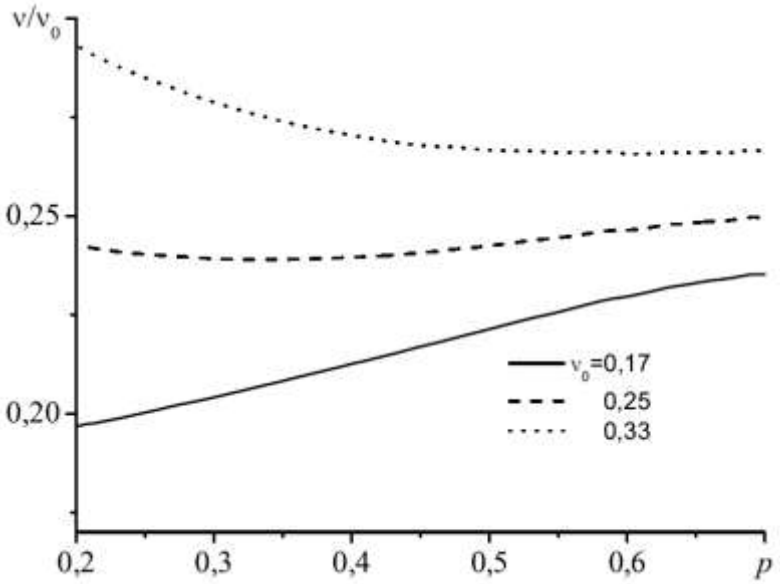


Рисунок 128 Зависимость эффективного коэффициента Пуассона от пористости

Приведем также графики зависимостей эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона от пористости для случая, когда вокруг пор имеется оболочка толщиной 1/40 радиуса поры с другими по отношению к матрице свойствами. Коэффициент Пуассона матрицы и оболочки равен 0.17.

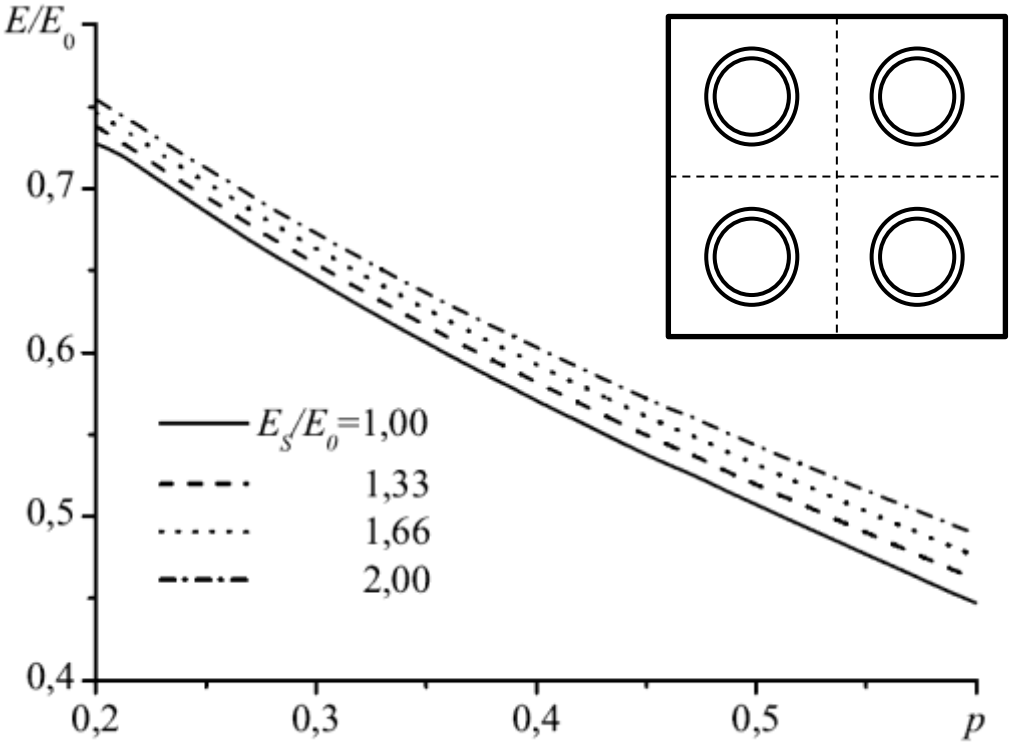


Рисунок 129 Зависимость эффективного модуля Юнга от пористости для случая пор с оболочками

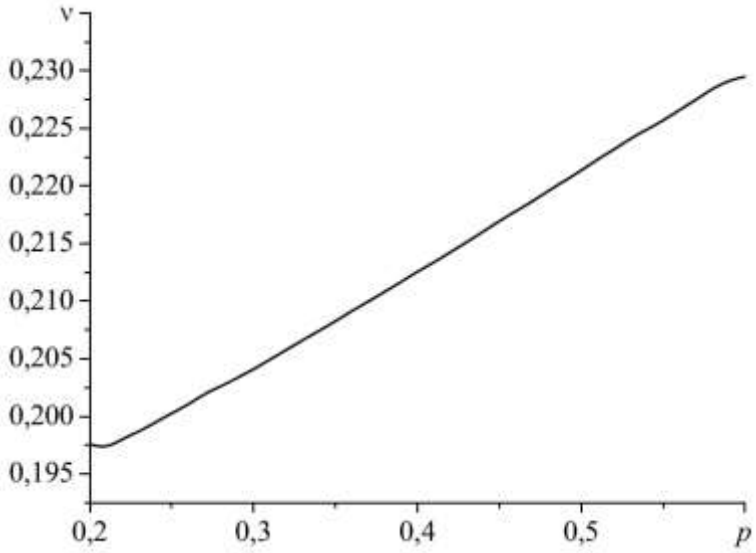


Рисунок 130 Зависимость эффективного коэффициента Пуассона от пористости для $\frac{E_s}{E_0} = 2$

С вычислительной точки зрения, представляет интерес вопрос о том, как зависят результаты расчёта от параметров схемы осреднения по ансамблю [144, 145]: от числа N, отношения R/h и максимального количества пор в представительной области, для которого при расчётах учитывалось взаимовлияние пор. Для того чтобы это определить, была проведена серия расчётов с различными значениями этих параметров. Как видно из следующего графика отношение R/h незначительно влияет на упругие модули.

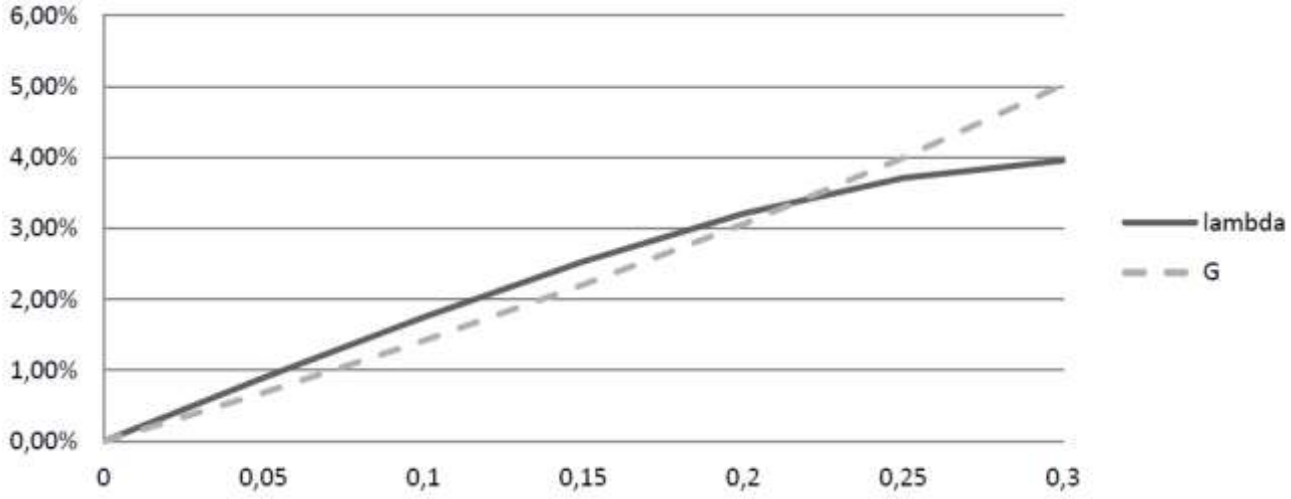


Рисунок 131 Разница между упругими модулями, вычисленными при разных параметрах R/h

Модель ячейки периодичности трещиноватой среды

В статье [313] рассматривается элемент горной породы (ячейка периодичности) из изотропного упругого материала, рассеченный тремя группами плоскопараллельных трещин (Рисунок 132).

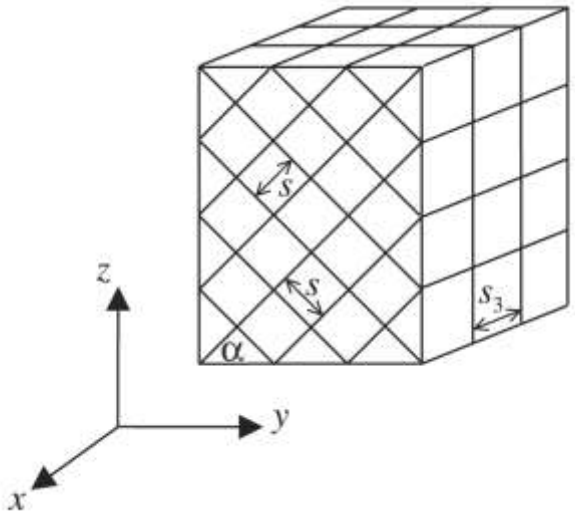


Рисунок 132 Элемент горной породы, пронизанный плоскими трещинами

Первые две группы трещин ортогональны третьей группе и пересекаются под углом 2α. Расстояние между трещинами в каждой из первых двух групп равно S, в третьей группе – S_3. Жесткость каждой из трещин равна k_n в нормальном направлении и k_s в тангенциальном в соответствии с методикой моделирования трещин на основе упругих связей [312, 314]. В этом случае связь между компонентами вектора перемещений и вектора усилий (напряжения на площадке, параллельной трещине) в нормальном и тангенциальном направлениях запишется следующим образом, пренебрегая эффектами дилатансии и сдвиговых деформаций в результате действия нормальных напряжений:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\delta_N \\ \Delta\delta_S \\ \Delta\delta_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\tau_N \\ \Delta\tau_S \\ \Delta\tau_T \end{Bmatrix}$$

Здесь Δδ – перемещения в одной из вершин упругой связи, моделирующей раскрытие плоскопараллельной трещины под нагрузкой, а Δτ – нормальные напряжения в этом же узле. Учет нелинейной зависимости жесткости трещины от ее раскрытия под действием нормальных напряжений, распределенных по берегам трещины, осуществляется с использованием формулы [315]: $k_n = \frac{k_{ni}}{(1-\frac{\Delta v}{\Delta v_{max}})^2}$, где k_n- текущая жесткость трещины, k_{ni} - начальная жесткость трещины, Δv - текущее изменение раскрытия трещины под действием внешних нагрузок, Δv_{max} - максимальное раскрытие трещины.

Текущее изменение раскрытия трещины определяется на основе нормальных напряжений, распределенных по ее берегам [315]:

$\sigma_n = \frac{\Delta v}{a - b\Delta v}$, где $\Delta v_{max} = \frac{a}{b}$, $k_{ni} = \frac{1}{a}$.

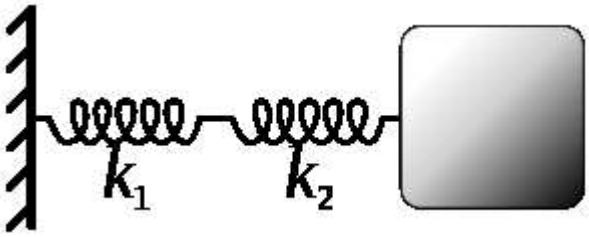
При этом нормальные напряжения на берегах трещины находятся из решения задачи о деформировании описанной выше ячейки периодичности под действием внешних нагрузок, полученных с макроуровня (из решения геомеханической задачи об определении напряженно-деформированного состояния на масштабе месторождения или его части – параграфы 3.2 и 3.3). Далее в соответствии с концепцией эквивалентной среды для связанных горных пород, предложенной в [484], эффективные модули податливости трещин запишутся следующим образом:

$$\mathbf{C}^{J}_{ijkl} = \sum_{f=1}^{M} \mathbf{n}^{f}_{i} \mathbf{L}^{f}_{jJ} \mathbf{D}^{f}_{JL} \mathbf{L}^{f}_{Ll} \mathbf{n}^{f}_{k} \frac{1}{S^{f}}$$

Здесь, как и прежде, S-расстояние между трещинами, D – жесткости упругих связей, L – матрица поворота из локальной системы координат, связанной с трещиной, в глобальную, n-вектор нормали к трещине, суммирование ведется по группам трещин. Важно учитывать, что в данном случае приводится формула для вычисления именно модулей податливости, связывающих деформации с напряжениями в трещине:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{J}_{ij} = \mathbf{C}^{J}_{ijkl} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{kl}$$

а не наоборот, как в классическом законе Гука, т.к. в рамках рассматриваемой механической модели деформирования трещиноватой горной породы полные деформации равны сумме деформаций скелета и трещин (в общем случае, данная гипотеза, вообще говоря, неверна [127, 145]). Можно заметить, что в случае плоскопараллельных трещин и элементов горных пород между ними при одноосном нагружении, ортогональном плоскости трещин, полные деформации среды (удлинения вдоль оси нагружения) равны сумме деформаций (удлинений) каждой из трещин и горных пород, а напряжения равны во всех точках среды. В этом смысле такой вид нагружения может быть описан системой последовательно соединенных пружин.



При последовательном соединении n пружин с жёсткостями, равными $k_1, k_2, k_3, ..., k_n,$ общая жёсткость определяется из уравнения:

$$1/k = (1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3 + ... + 1/k_n).$$

Что является частным случаем формулы для эффективных модулей упругости из [313] для описанного случая одноосного растяжения системы плоскопараллельных трещин и элементов горных пород: коэффициент жесткости трещины равен жесткости упругой связи, ее моделирующей, жесткость горной породы рассчитывается по формуле $k=E/L$, где L-характерная длина элемента горной породы (данная формула будет использована при численном расчете модуля Юнга трещины).

Для нахождения эффективных модулей податливости эквивалентной среды, зависящей как от свойств горных пород, так и трещин между ними, нужно прибавить найденные эффективные модули податливости трещин (упругих связей) к упругим модулям горных пород. В результате получим эффективный ортотропный (в общем случае) материал:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & & & \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & & & \\ -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & & \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & \\ & & & & & \frac{1}{G_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

В частности, для рассмотренного выше примера с тремя группами трещин эффективные модули упругих связей запишутся следующим образом [313]:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{k_{n3} S_3}$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{2\sin^2\alpha(k_n\cos^2\alpha + k_s\sin^2\alpha)}{k_s k_n S}$$

$$\frac{1}{E_z} = \frac{2\cos^2\alpha(k_n\sin^2\alpha + k_s\cos^2\alpha)}{k_s k_n S}$$

$$-\frac{\nu_{yz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{k_n - k_s}{2k_n k_s S}\sin^2(2\alpha)$$

$$-\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} = 0$$

$$-\frac{\nu_{zx}}{E_z} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} = 0$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{S_3 k_{s3}} + \frac{2\sin^2\alpha}{Sk_s}$$

$$\frac{1}{G_{yz}} = \frac{2[\sin^2(2\alpha)k_s + \cos^2(2\alpha)k_n]}{Sk_n k_s}$$

$$\frac{1}{G_{zx}} = \frac{1}{S_3 k_{s3}} + \frac{2\cos^2\alpha}{Sk_s}$$

Для расчёта эффективных свойств трещиноватых горных пород построим конечноэлементную модель ячейки периодичности в виде представительного объёма трещиноватого материала в форме прямоугольного параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям. Упругие связи между берегами трещины будем моделировать стандартными объемными конечными элементами. В этом случае необходимо задать три параметра для элемента внутри трещины: модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщину трещины. Будем задавать модуль Юнга трещины равным жесткости упругой связи kn, помноженной на толщину трещины, в соответствии с рассмотренной ранее аналогией с пружинами. Для верификации данного подхода и выбора остальных двух параметров проведем серию численных расчетов эффективных модулей для одномерной модели, представленной на Рисунок 133.

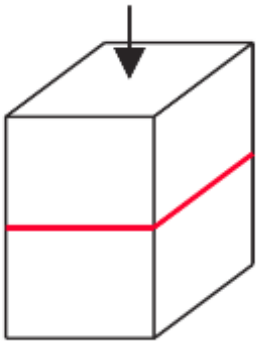


Рисунок 133 Одномерная модель с плоской трещиной

В соответствии с [313] эффективный модуль податливости такой среды рассчитывается по формуле

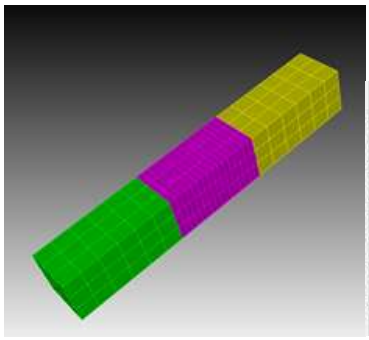
$$\delta_z = \sigma_{zz}\left(\frac{1}{Sk_n} + \frac{1}{E}\right)H$$

Здесь *H*-высота представительного объема, *S*-расстояние между трещинами, *kn*-жесткость упругой связи, моделирующей наличие плоской трещины в среде, *E*-модуль Юнга горной породы. Данная формула является частным случаем приведенного ранее выражения для вычисления эффективных модулей податливости ячейки периодичности, ослабленной группами плоскопараллельных трещин, т.к. в данном случае мы имеем только одну группу

трещин, ортогональных вертикальной оси. Для численных расчетов возьмем E=100 ГПа, коэффициент Пуассона горной породы = 0.3, kn=20 ГПа/м, S=H=1/3.

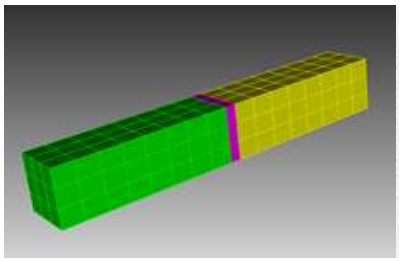
Проведем серию тестов для различных значений коэффициента Пуассона трещины и ее толщины. Ниже на рисунках слева изображена конечноэлементная модель ячейки периодичности, а в таблицах справа приведены рассчитанные для нее эффективные свойства.

1) Коэффициент Пуассона = 0, толщина = 0.1:



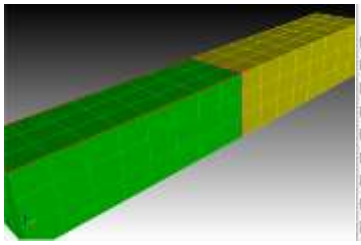
Имя	Значение
Модуль Юнга X	7,05981e+10
Модуль Юнга Y	6,36994e+09
Модуль Юнга Z	7,05961e+10
Модуль сдвига XY	3,14268e+09
Модуль сдвига XZ	2,72231e+10
Модуль сдвига YZ	3,14268e+09
Главный коэффи...	0,210126
Главный коэффи...	0,297681
Главный коэффи...	0,0190269

2) Коэффициент Пуассона = 0, толщина = 0.01:



Имя	Значение
Модуль Юнга X	9,69301e+10
Модуль Юнга Y	6,26185e+09
Модуль Юнга Z	9,69263e+10
Модуль сдвига XY	3,07484e+09
Модуль сдвига XZ	3,73107e+10
Модуль сдвига YZ	3,07484e+09
Главный коэффи...	0,290211
Главный коэффи...	0,299996
Главный коэффи...	0,0188157

3) Коэффициент Пуассона = 0, толщина = 0.001:



Имя	Значение
Модуль Юнга X	9,96213e+10
Модуль Юнга Y	6,25129e+09
Модуль Юнга Z	9,96173e+10
Модуль сдвига XY	3,06822e+09
Модуль сдвига XZ	3,83462e+10
Модуль сдвига YZ	3,06822e+09
Главный коэффи...	0,298281
Главный коэффи...	0,300014
Главный коэффи...	0,0187848

Как легко заметить, с уменьшением толщины трещины наблюдается численная сходимость к точному решению, а именно

$$Ey\_eff := \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{kn \cdot S}}$$

$$Ey\_eff = 6.25 \cdot 10^{9}$$

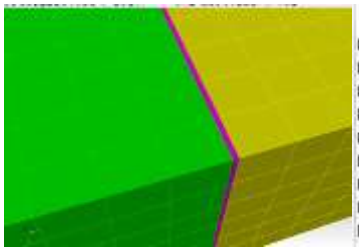
При этом в направлении осей X и Z эффективные модули Юнга близки к значению модуля Юнга горной породы (100 Гпа), что также полностью согласуется с теорией – плоская трещина не оказывает влияния на эффективные жесткости в тангенциальном направлении.

Посмотрим теперь, что произойдет, если задать в трещине ненулевой коэффициент Пуассона. Коэффициент Пуассона = 0.3, толщина = 0.001:

Имя	Значение
Модуль Юнга X	9,96198e+10
Модуль Юнга Y	8,23614e+09
Модуль Юнга Z	9,96198e+10
Модуль сдвига XY	2,4043e+09
Модуль сдвига XZ	3,83462e+10
Модуль сдвига YZ	2,4043e+09
Главный коэффи...	0,3
Главный коэффи...	0,300001
Главный коэффи...	0,0248028

Как видно, учет эффекта сдвиговых деформаций, вызванных нормальной нагрузкой, в трещине приводит к увеличению эффективного модуля Юнга почти на 30%. Напомним, что в рамках модели упругих связей, выбранной в [313] данный эффект не учитывается. В дальнейшем, в целях сопоставления численной и аналитической моделей, будем считать коэффициент Пуассона трещины нулевым.

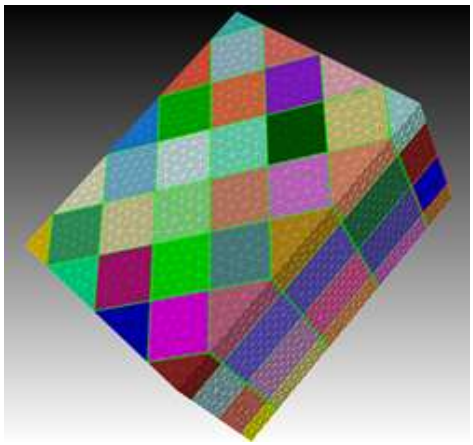
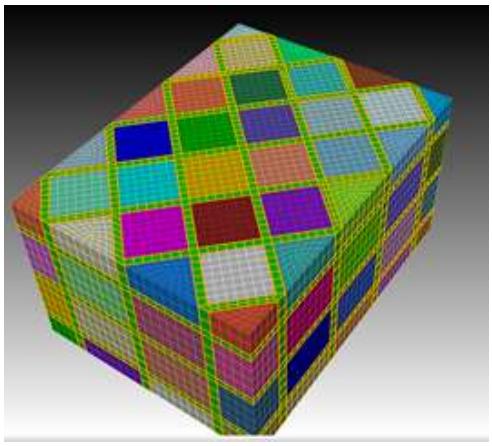
В заключении приведем результаты расчета на конечноэлементной сетке с шагом, в два раза уменьшенным по каждому из направлений – задающим 2 гексаэдральных элемента второго порядка по толщине трещины:



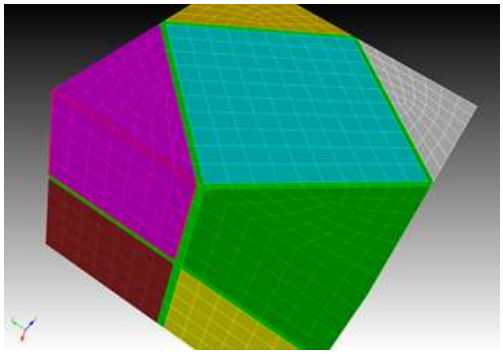
Имя	Значение
Модуль Юнга X	9,96198e+10
Модуль Юнга Y	8,23614e+09
Модуль Юнга Z	9,96198e+10
Модуль сдвига XY	2,4043e+09
Модуль сдвига XZ	3,83462e+10
Модуль сдвига YZ	2,40429e+09
Главный коэффи...	0,3
Главный коэффи...	0,300001
Главный коэффи...	0,0248027

Как видно, результаты расчета практически не отличаются от предыдущего, что позволяет в дальнейшем задавать один конечный элемент второго порядка по толщине трещины.

Перейдем теперь непосредственно к построению в CAE Fidesys вариантов конечноэлементных моделей ячейки периодичности трещиноватого материала, описанной в предыдущем параграфе, для различных типов конечных элементов и размеров ячейки периодичности:

Два приведенных выше варианта построения конечноэлементной модели в точности воспроизводят геометрию ячейки периодичности, однако, как несложно заметить, размер ячейки периодичности можно сократить:



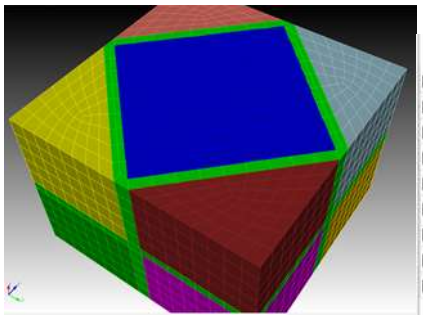
Будем использовать данную упрощенную модель ячейки периодичности в дальнейших расчетах. Для начала убедимся в прохождении простейшего теста для однородной изотропной модели на построенной ячейке:

Имя	Значение
Модуль Юнга X	9,99996e+10
Модуль Юнга Y	9,99996e+10
Модуль Юнга Z	9,99996e+10
Модуль сдвига XY	3,84615e+10
Модуль сдвига XZ	3,84615e+10
Модуль сдвига YZ	3,84615e+10
Главный коэффи...	0,300001
Главный коэффи...	0,300001
Главный коэффи...	0,300001

Как видно, рассчитанные эффективные модули, как и ожидалось, соответствуют однородному изотропному материалу.

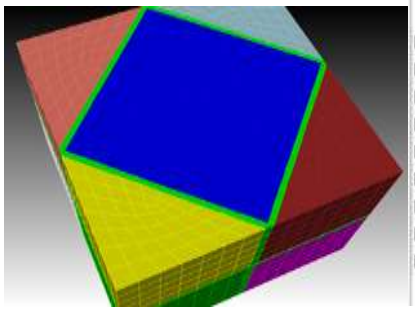
Проведем теперь серию расчетов для различных параметров трещин.

1) Угол между трещинами 90 градусов, толщина трещины = 0.02:



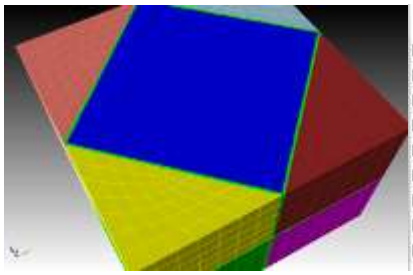
Имя	Значение
Модуль Юнга X	5,98865e+09
Модуль Юнга Y	4,33385e+09
Модуль Юнга Z	4,3259e+09
Модуль сдвига XY	1,66722e+09
Модуль сдвига XZ	1,66584e+09
Модуль сдвига YZ	3,01965e+09
Главный коэффи...	0,0220751
Главный коэффи...	0,0221517
Главный коэффи...	0,302681

2) Угол между трещинами 90 градусов, толщина трещины = 0.01:



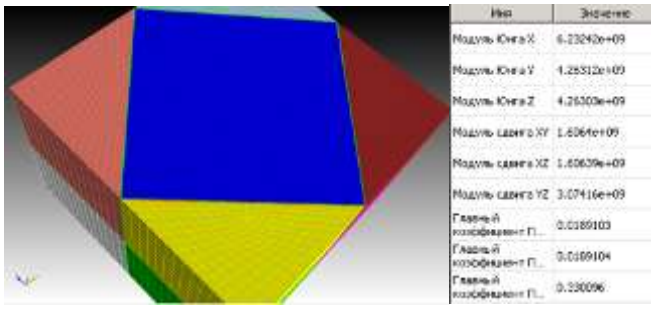
Имя	Значение
Модуль Юнга X	6,12952e+09
Модуль Юнга Y	4,30937e+09
Модуль Юнга Z	4,30941e+09
Модуль сдвига XY	1,64638e+09
Модуль сдвига XZ	1,64638e+09
Модуль сдвига YZ	3,06524e+09
Главный коэффи...	0,020156
Главный коэффи...	0,0201557
Главный коэффи...	0,317809

3) Угол между трещинами 90 градусов, толщина трещины = 0.005:



Имя	Значение
Модуль Юнга X	6,20135e+09
Модуль Юнга Y	4,2847e+09
Модуль Юнга Z	4,28299e+09
Модуль сдвига XY	1,62406e+09
Модуль сдвига XZ	1,62354e+09
Модуль сдвига YZ	3,07602e+09
Главный коэффи...	0,0192403
Главный коэффи...	0,0192551
Главный коэффи...	0,325867

4) Угол между трещинами 90 градусов, толщина трещины = 0.002:



Имя	Значение
Модуль Юнга X	6,23242e+09
Модуль Юнга Y	4,28512e+09
Модуль Юнга Z	4,28309e+09
Модуль сдвига XY	1,6064e+09
Модуль сдвига XZ	1,60639e+09
Модуль сдвига YZ	3,07416e+09
Главный коэффициент П...	0,0189103
Главный коэффициент П...	0,0189104
Главный коэффициент П...	0,330096

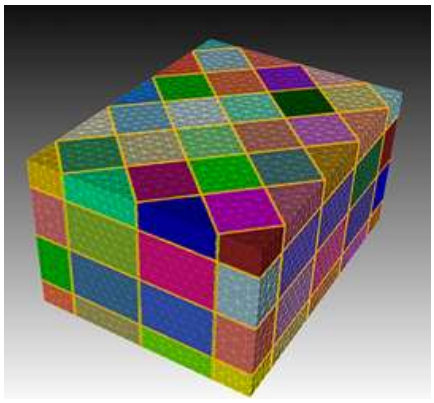
Как и прежде, отметим численную сходимость к аналитическому решению при уменьшении толщины трещины.

$$Ex\_eff = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{kn \cdot S}}$$

$$Ex\_eff = 6.25 \cdot 10^9$$

Для сравнения проведем также расчет на полной модели ячейки периодичности для тех же параметров трещины.

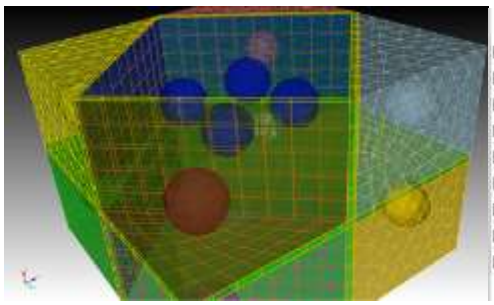
Угол между трещинами 45 градусов, толщина трещины = 0.01, полная модель:



Имя	Значение
Модуль Юнга X	6.20181e+09
Модуль Юнга Y	4.39364e+09
Модуль Юнга Z	4.38074e+09
Модуль сдвига XY	1.70882e+09
Модуль сдвига XZ	1.62807e+09
Модуль сдвига YZ	3.02995e+09
Главный коэффициент П...	0.017319
Главный коэффициент П...	0.0177843
Главный коэффициент П...	0.325245

Результаты расчета эффективных упругих модулей на полной модели, как и следовало ожидать, оказались близки к результатам на ячейке периодичности, что подтверждает правильность ее выбора.

Для определения эффективных свойств пороупругой трещиноватой среды в рамках модели двойной пористости необходимо учитывать наличие пор (и давления насыщающей жидкости в них) как в матрице (породе), так и в трещинах, ее рассекающих. Учет пористости матрицы осуществляется прямым заданием пор в ячейке периодичности (количество и размеры пор определяются заданным коэффициентом пористости для данной ячейки периодичности):



Имя	Значение
Модуль Юнга X	6,11988e+09
Модуль Юнга Y	4,29048e+09
Модуль Юнга Z	4,29052e+09
Модуль сдвига XY	1,6851e+09
Модуль сдвига XZ	1,68707e+09
Модуль сдвига YZ	3,0214e+09
Главный коэффи...	0,0209128
Главный коэффи...	0,0208772
Главный коэффи...	0,318401

Как и следовало ожидать, наблюдается ослабление прочности эффективного материала (уменьшение эффективных упругих модулей) ввиду присутствия пор в нем в сравнении с эффективными упругими модулями, рассчитанными при нулевой пористости (исходный вариант ячейки периодичности). Полученный результат (уменьшение эффективных упругих модулей с увеличением коэффициента пористости) хорошо согласуется с приведенными ранее графиками (например, Рисунок 127) зависимости эффективных модулей Юнга от коэффициента пористости, рассчитанными для случая ячейки периодичности без трещин. Представляет интерес также сравнить полученные результаты расчета эффективных свойств с результатами, описанными в статье [314], где наличие давления насыщающей жидкости в порах матрицы

учитывается в эффективном тензоре напряжений, который определяется как разность между полным тензором напряжений и поровым давлением. Соответственно эффективное напряжение запишется как $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha p$, где p – поровое давление, α – коэффициент Био. В этом случае пористость матрицы не задается явно в виде геометрии пор на ячейке периодичности, как описано выше, а вводится как один из параметров материала. Подобным же образом осуществляется моделирование изменения жесткостей насыщенных жидкостью трещин (с учетом их пористости) - нормальные напряжения, действующие по берегам трещины, модифицируются на величину порогового давления: $\bar{\sigma}_n = \sigma_n - p$. Эффект от совместного изменения пористостей и жесткостей трещин и матрицы на результаты расчета напряженно-деформированного состояния резервуара будет подробно рассмотрен в параграфе 3.4.

В заключение данного раздела рассмотрим случай ячейки периодичности трещиноватой среды с трещинами конечных размеров. Согласно теории Хадсона [485, 487], можно рассчитать, какое влияние оказывает трещиноватость на упругие модули породы. Трещины представляются в рамках данной модели плоскими эллипсоидальными включениями, заполненными жидкостью или газом. Степень влияния трещин на упругие модули зависит от комбинации нескольких параметров:

- Отношение полуосей трещин-эллипсоидов
- Количество трещин (~ трещинная пористость)
- Тип заполнителя (жидкость/газ)

Если трещины – эллипсоиды вращения (оси эллипсоида $r_1 = r_2 >> r_3$), а исходная порода изотропная, то итоговая трещиноватая порода будет относиться к классу трансверсально-изотропных сред. Для численной оценки эффективных свойств построим модель ячейки периодичности Хадсона в CAE Fidesys (Рисунок 134). Рассмотрим следующие 27 вариантов данной модели:

- 3 различных отношения полуосей трещин: 1:50, 1:100, 1:200
- 3 различных диаметра трещин (большой радиус): r_1 = 1, 2, 3
- 1, 3 или 5 трещин в объёме ячейки периодичности

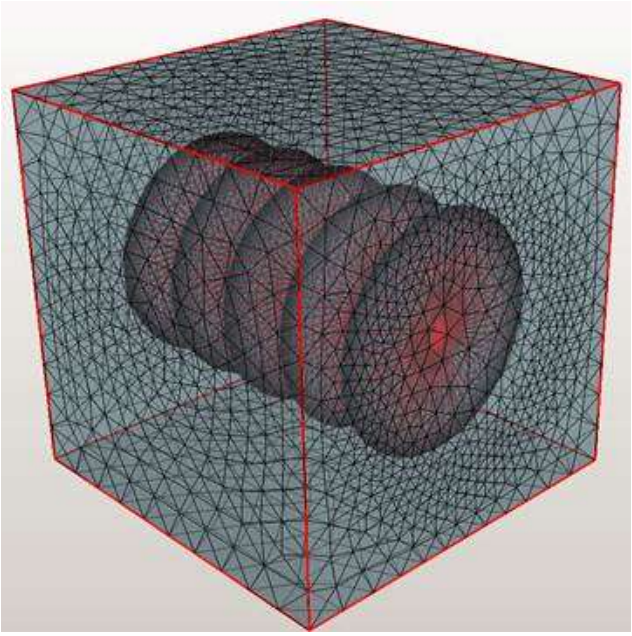


Рисунок 134 Конечноэлементная модель ячейки периодичности Хадсона

На Рисунок 135 приведены результаты сравнения численно рассчитанных эффективных свойств с аналитическими значениями по теории Хадсона. Рассчитанные в CAE Fidesys компоненты эффективного упругого тензора $\mathbf{C}_{ij}$ пересчитываются в безразмерные коэффициенты анизотропии $\varepsilon^{(v)}$, $\delta^{(v)}$, $\gamma^{(v)}$ и сравниваются с предсказанными по модели Хадсона.

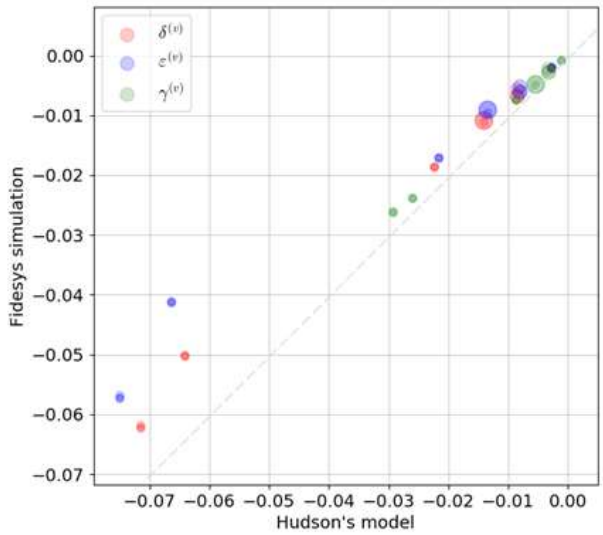


Рисунок 135 Сравнение численно рассчитанных эффективных свойств (темные кружки) с аналитическими значениями по теории Хадсона (светлые кружки)

В отличие от аналитической модели, преимущество численной модели ячейки периодичности трещиноватой среды заключается в том, что с ее использованием можно задавать и рассчитывать трещины произвольной формы с различным соотношением сторон/полуосей и ориентацией (в то время как в рамках аналитической модели Хадсона предполагается, что все

трещины в породе одинаковые). Данная универсальность и гибкость численной модели позволяет применить ее для оценки эффективных свойств реальных пород.

Оценка эффективных свойств кернов

Применим теперь разработанный алгоритм оценки эффективных свойств пористых сред для реальных образцов горных пород, извлекаемых из скважин – кернов (Рисунок 136).



Рисунок 136 Образцы кернов

Для кернов актуальна задача оценки их эффективных механических и теплофизических свойств: для прогнозирования устойчивости наклонного ствола скважины при бурении (параграф 3.3) и поведения породы во время разработки месторождения (параграф 3.4). Существуют различные методики натурных экспериментов, позволяющие оценить эффективные механические и теплофизические характеристики образцов керна [4, 27, 28, 418]. Однако в подобных методиках требуется применение специализированного дорогого оборудования. Кроме того, такие методики зачастую предполагают разрушение керна в процессе экспериментов.

Современный подход к исследованию керна основан на построении его цифровой модели в томографической лаборатории, что позволяет получить данные о внутренней структуре керна в виде компьютерной модели из кубических ячеек (вокселей). Интерпретация результатов томографии позволяет оценить, чем заполнен каждый воксель: каким-либо минералом, жидкостью, газом. После чего выполняется математическое моделирование цифрового образца керна, и определение его механических характеристик. Процесс занимает от недели до месяца, и позволяет создать внутреннюю модель керна с точностью до нескольких нм. Моделирование проводится с помощью суперкомпьютера, что позволяет, в частности, проводить большое число одновременных численных экспериментов на различных образцах керна, невозможное при натурных испытаниях в петрофизических лабораториях. Кроме увеличения скорости исследования керна, данный подход позволяет измерять параметры, которые были ранее

принципиально недостижимы – в частности, можно оценить механические характеристики каждого конкретного элемента образца породы на различных масштабах, проведя затем процедуру upscaling, необходимую при многомасштабном моделировании. Математическая модель керна дает возможность определить пористость образца, исследовать статистику распределения трещин, провести моделирование распространения упругих волн по образцу. С использованием данной цифровой модели керна возможно провести оценку его эффективных механических характеристик путём проведения численных расчётов на его представительном объёме (Рисунок 137). Представительным объёмом керна является фрагмент достаточного размера для того, чтобы на основе его свойств можно было сделать вывод о свойствах целого керна.



Рисунок 137 Представительный объем цифрвой модели керна

Сформулируем определение эффективных механических (упругих) характеристик неоднородного материала, рассмотренных в предыдущих параграфах, применительно к керну. Рассматривается представительный объём керна в форме прямоугольного параллелепипеда. Точно такой же объём заполняется сплошным однородным материалом, который по определению называется эффективным материалом, если при одинаковых перемещениях границ обоих представительных объёмов средние (по объёму) напряжения в них будут равны. Упругие модули эффективного материала называются эффективными упругими модулями керна.

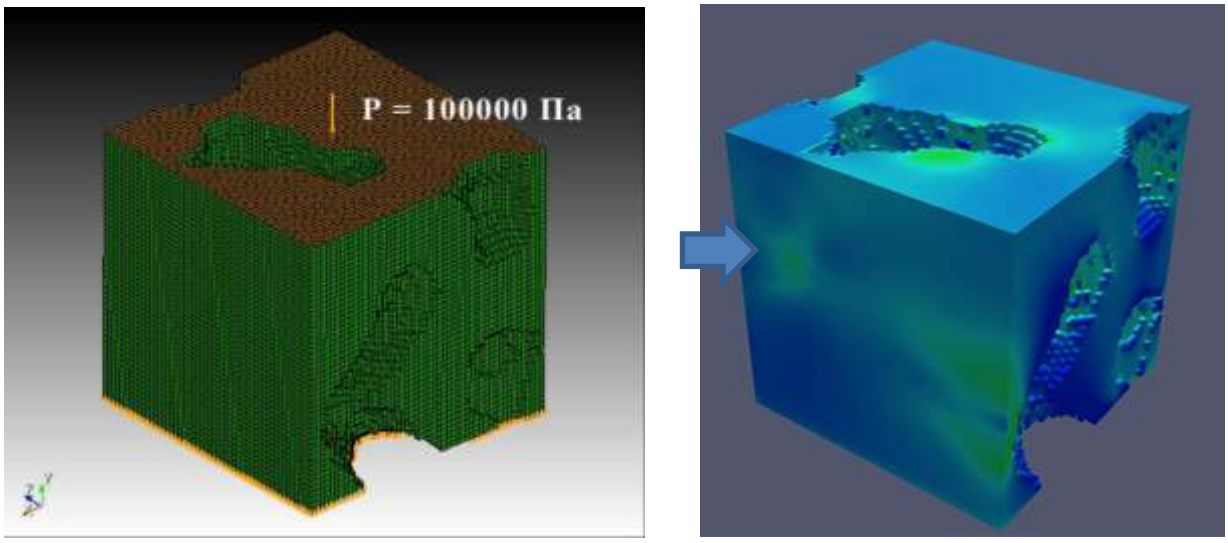


Рисунок 138 Цифровой анализ керна на воксельной модели

При конечноэлементном расчете возможны два подхода к численной оценке эффективных механических характеристик полноразмерного керна. В первом конечноэлементный расчёт проводится на гексаэдральной сетке, полностью повторяющей воксельную модель, полученную в результате томографии: каждый воксель является элементом структурированной расчётной сетки (Рисунок 138). Эффективные свойства небольших фрагментов керна можно посчитать таким способом на обычном персональном компьютере. Однако объём типичной воксельной модели полноразмерного керна – несколько сотен миллионов или даже несколько миллиардов вокселей. В таком случае расчёт необходимо производить на суперкомпьютере, распараллеливая вычисления с помощью технологии MPI.

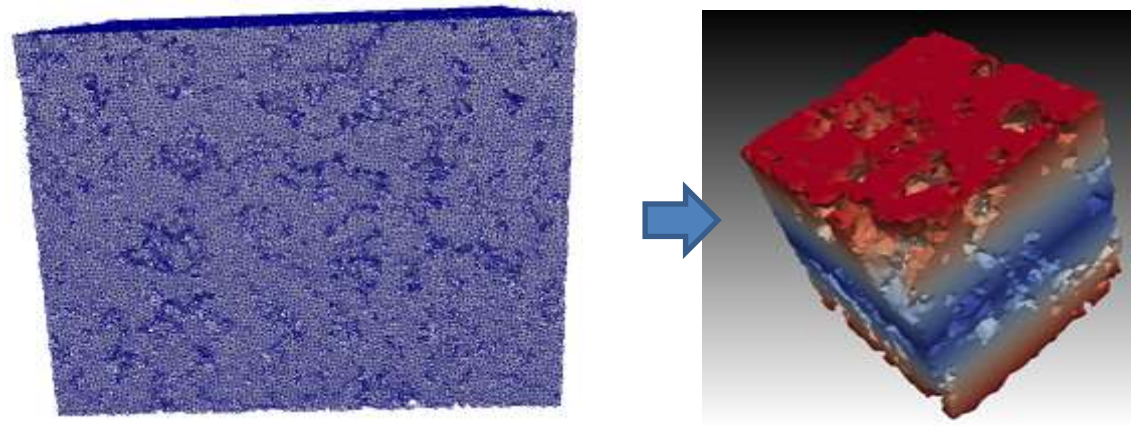


Рисунок 139 Цифровой анализ керна на неструктурированной тетраэдральной сетке

Во втором подходе с помощью внутренних средств CAE Fidesys на основе воксельной модели керна строится неструктурированная тетраэдральная конечноэлементная сетка (Рисунок 139), при этом регулируется величина измельчения сетки, определяющая размер/количество элементов. Такой подход позволяет перейти от модели из нескольких миллиардов вокселей к сетке из нескольких миллионов тетраэдров. Но при этом возникает вопрос, насколько точно

эффективные свойства, вычисленные на такой сетке, совпадают с эффективными свойствами исходной модели. Для проверки этого оценивается сеточная сходимость вычисленных эффективных свойств при измельчении тетраэдральной сетки. Если сеточная сходимость достигается – это позволяет сделать вывод о корректности результатов. В противном случае необходимо прибегнуть к первому подходу.

Приведем примеры численного расчета эффективных свойств керна в CAE Fidesys на основе обоих подходов. В первом случае оценим эффективные свойства образца керна песчаника [52, 279] со следующими параметрами: упругие свойства скелета - модуль Юнга 70 ГПа, коэффициент Пуассона 0.15; размер вокселя – 10 мкм, диаметр керна - 13 мм (Рисунок 140).

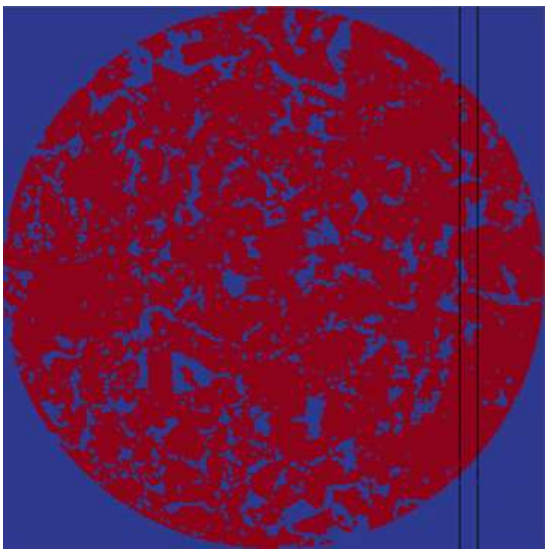


Рисунок 140 Цифровая модель керна песчаника

Эффективные свойства рассчитывались на фрагменте керна 300x300x300 вокселей. Пористость фрагмента составляла 18.5%. Количество элементов сетки – 22 млн., количество узлов сетки – 23.2 млн. Время расчёта эффективных упругих свойств на ЭВМ с общей памятью при распараллеливании на MPI составило 3 часа (т.е. решение одной краевой задачи упругости заняло 30 минут). Разбиение элементов керна по процессорам показано на Рисунок 141.

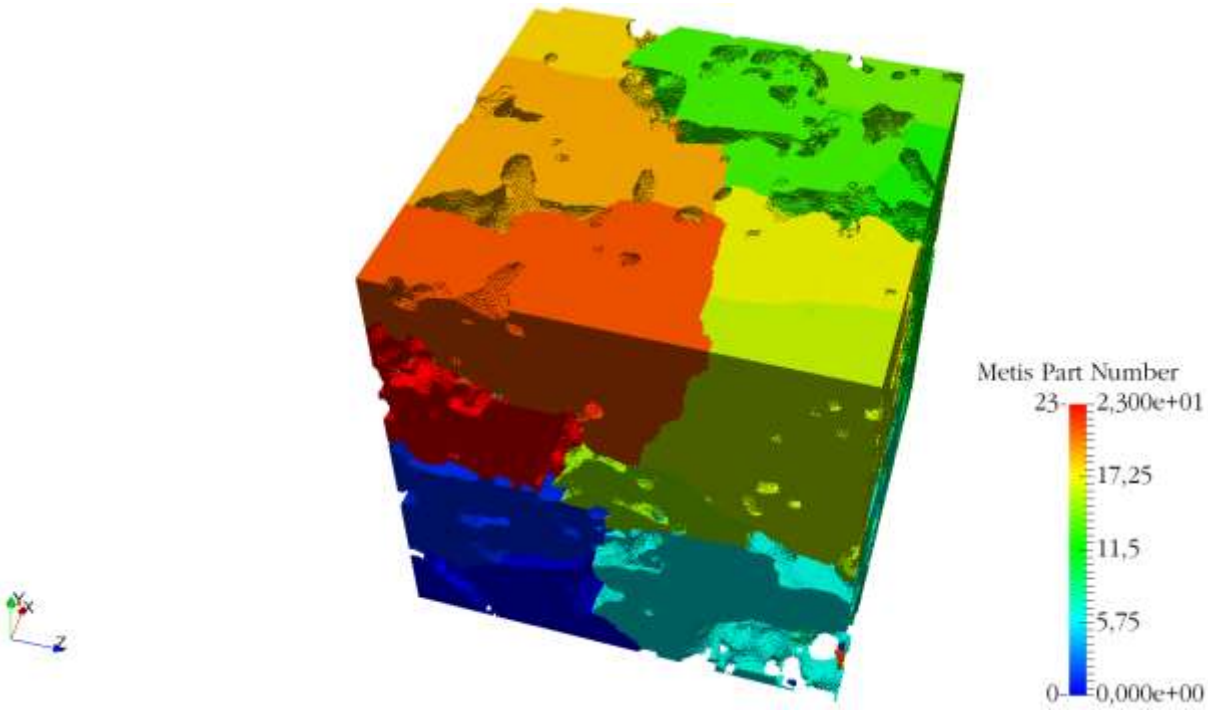


Рисунок 141 Разбиение конечноэлементной модели керна по процессорам

В результате расчета были получены эффективный модуль Юнга 43 ГПа, эффективный коэффициент Пуассона 0.15, что в целом соответствует пористости тестового образца керна.

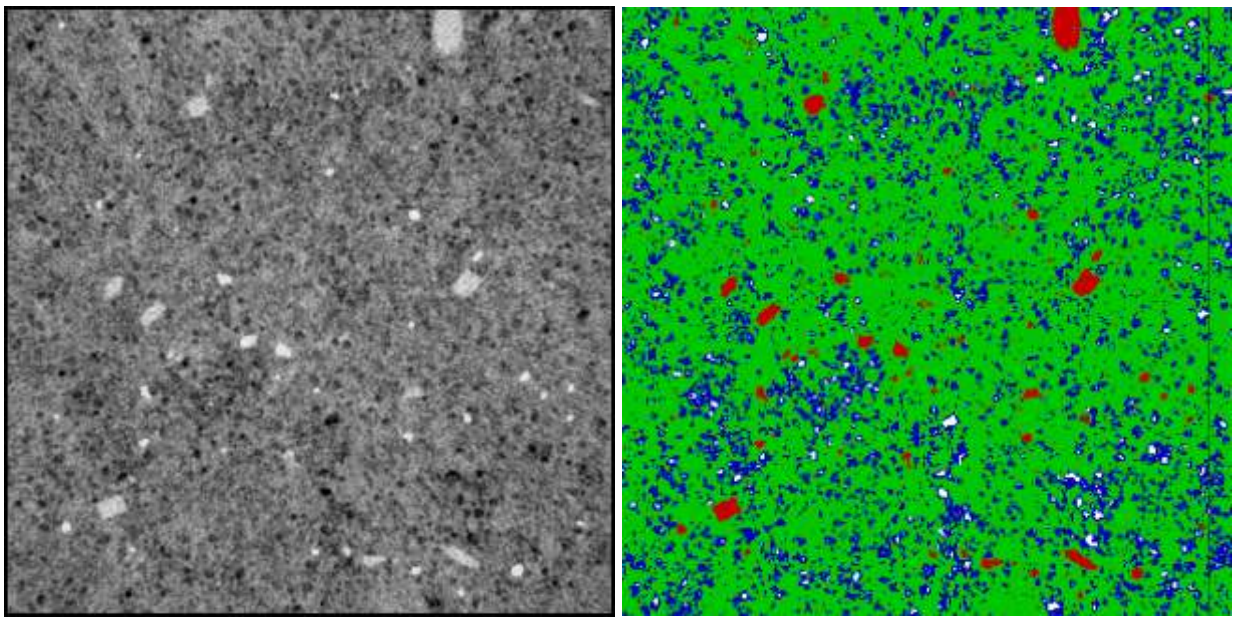


Рисунок 142 Многокомпонентная цифровая модель керна

В качестве примера второго подхода к численной оценке эффективных свойств рассмотрим цифровую модель керна оолитового известняка [27], состоящего из четырёх компонент: пирит, кальцит, разуплотнённая порода и поры (Рисунок 142) со следующими параметрами:

- Пирит: E = 291,2 ГПа, ν = 0,16
- Кальцит: E = 80,4 ГПа, ν = 0,32
- Размер вокселя - 265 мкм

- Размер керна - 80 мм

Разуплотнённая порода представляет собой кальцит с пустотами. С целью оценки ее механических свойств проводилась дополнительная микротомографии (с размером вокселя 0.8 мкм) с последующим заданием найденных эффективных свойств при оценке эффективных свойств исходного полноразмерного керна.

Для проверки применимости второго подхода к разуплотнённой породе сначала были вычислены эффективные свойства на воксельной модели (первый подход) для фрагмента 100x100x100 вокселей. Затем для этого же фрагмента в CAE Fidesys строились последовательно измельчающиеся неструктурированные тетраэдральные сетки, и эффективные свойства оценивались уже на них, после чего сравнивались с результатами для воксельной модели.

Погрешности такого сравнения приведены в таблице 1. Как видно, на самой мелкой тетраэдральной сетке количество элементов в четыре раза больше, чем вокселей – но разница в результатах составляет более 6%.

Таблица 1.

Коэф-т разгрубления	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	**Вокс. модель**
Кол-во узлов	585243	91004	31846	31846	8491	4864	3157	2231	1479	1055	**1020100**
Кол-во элементов	3081409	422295	137326	61141	33396	18313	11595	8159	5315	3597	**704643**
Погрешность	6.18%	15.61%	23.13%	31.60%	38.60%	36.32%	46.41%	50.02%	54.81%	63.39%	

На основе этих данных был сделан вывод о неприменимости второго подхода для разуплотнённой породы. Свойства разуплотнённой породы оценивались с применением первого подхода. На фрагменте 200x200x200 вокселей были получены следующие эффективные упругие модули разуплотненной породы: модуль Юнга 31,75 ГПа, коэффициент Пуассона 0,29 (пористость фрагмента составляла 30,8%).

После нахождения свойств разуплотнённой породы стала возможна численная оценка эффективных свойств исходного полноразмерного образца керна. На нем была проведена аналогичная проверка применимости второго подхода к оценке эффективных свойств на сеточной модели путём серии расчётов на фрагменте 100x100x100 вокселей, которая показала хорошее совпадение результатов с воксельной моделью уже на сетке из 5 тыс. тетраэдров. Погрешности сравнения приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Коэф-т разгрубления	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	**Вокс. модель**
Кол-во узлов	895654	131220	40680	16698	9307	5798	3376	2352	1717	1151	**1020100**
Кол-во элементов	5286753	752411	227476	91137	49700	29253	16782	11521	8337	5413	**984274**
Погрешность	0.31%	0.41%	1.01%	1.61%	1.16%	0.49%	0.49%	1.29%	1.30%	0.77%	

Полученные результаты позволили сделать вывод о применимости и достаточно высокой эффективности второго подхода для оценки эффективных свойств полноразмерных кернов (гексаэдральная сетка на основе воксельной модели, содержащая около 1 млн. узлов, была заменена неструктурированной тетраэдральной сеткой, содержащей около 1 тыс. узлов). Поэтому данный подход был применён для полноразмерных кернов.

Свойства компонент керна: пирит – модуль Юнга 291,2 ГПа, коэффициент Пуассона 0,16; кальцит – модуль Юнга 80,4 ГПа, коэффициент Пуассона 0,32; разуплотнённая порода – модуль Юнга 31,75 ГПа, коэффициент Пуассона 0,29. Воксельная модель имела размеры 320x320x1171 воксель, т.е. порядка 120 млн. узлов и элементов в сетке. Объёмные доли материалов были следующие: поры – 0,85%; разуплотнённая порода – 12,93%; кальцит – 83,87%; пирит – 2,35%. На основе воксельной модели была построена неструктурированная тетраэдральная сетка из 1,2 млн. узлов и 7 млн. элементов, расчёт эффективных свойств керна на такой сетке дал следующие результаты: модуль Юнга 78,13 ГПа, коэффициент Пуассона 0,32. Полученные результаты, как и ожидалось, близки к свойствам основной (по процентному содержанию) компоненты керна – кальциту в твёрдой (неразуплотнённой) фазе. Кроме того, для полноразмерной модели керна были проведены расчёты на последовательно измельчающихся тетраэдральных сетках, показавших наличие сеточной сходимости результатов при измельчении сетки. Это позволяет сделать вывод о применимости средств CAE Fidesys и эффективности описанного подхода (замены воксельной модели более грубой неструктурированной тетраэдральной сеткой) к численной оценке эффективных механических характеристик полноразмерных образцов керна.

Рассчитанные на микроуровне эффективные свойства образцов горных пород могут быть далее заложены на мезоуровне в рамках геомеханической модели скважины (параграф 3.3) и на макроуровне в геомеханической модели месторождения (параграф 3.4). Задача оценки механических характеристик горных пород представляет интерес в силу того, что при добыче полезных ископаемых механические напряжения и давление оказывают воздействие на каждый продуктивный пласт и ствол скважины. Процессы добычи полезных ископаемых вызывают изменение этих напряжений и давлений. При изменении напряжения, приложенного к горной породе, она деформируется, при этом изменяются каналы движения жидкости внутри неё. Напряжённо-деформированное состояние горной породы зависит от различных факторов.

Разработка месторождения приводит к изменению в напряжённо-деформированном состоянии породы, находившейся долгое время в состоянии равновесия. Эти изменения необходимо учитывать. Для прогнозирования поведения горной породы в процессе добычи полезных ископаемых изучаются механические свойства образцов пород (кернов).

3.3 Оценка устойчивости наклонного ствола скважины

Оценка деформаций в зависимости от граничных условий на давление в скважине позволяет существенно расширить возможности геомеханического моделирования. Определенное напряженное состояние может стать причиной сдвигового или разрывного поведения породы – появления вывалов или трещин. И те, и другие проявления неустойчивости ствола скважины являются причиной проблем при бурении – затяжек и посадок бурового инструмента.

Моделирование процессов в околоскважинной зоне включает в себя множество задач механики, как в статической, так и в динамической постановках, линейных задач и задач с выраженной геометрической и физической нелинейностью [240, 324].

Математическая модель

Одной из ключевых задач геомеханики в области бурения является определение технологических параметров, при котором ствол скважины будет сохранять свою стабильность. Порода имеет свои характеристики (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность, углы внутреннего трения и дилатансии, пределы прочности и текучести на растяжение и сжатие, сцепление, пористость, проницаемость, сжимаемость и пр.). Кроме того, порода находится в напряженном состоянии, которое определяется компонентами тензора напряжений в каждой ее точке.

При бурении на породу создается давление, в общем случае, долота и бурового раствора, ввиду чего происходит ее деформация и перераспределение напряжений, вызывая реакцию горной породы на оказываемое воздействие. Бурение скважин зачастую сопровождается рисками, связанными с обвалообразованием стенки ствола. Снижение проблем связанных с несовместностью условий бурения возможно при помощи геомеханического моделирования.

Первым приближением для решения задачи устойчивости ствола скважины является аналитическое решение задачи (Рисунок 143). Это решение известно как задача Кирша [234], которая рассматривает:

1. поведение материала в упругой области
2. идеальное круговое сечение скважины (срез всегда берется нормально к оси ствола скважины)

3. плоское деформированное состояние
4. плоскости напластований (при наличии) перпендикулярны оси ствола скважины

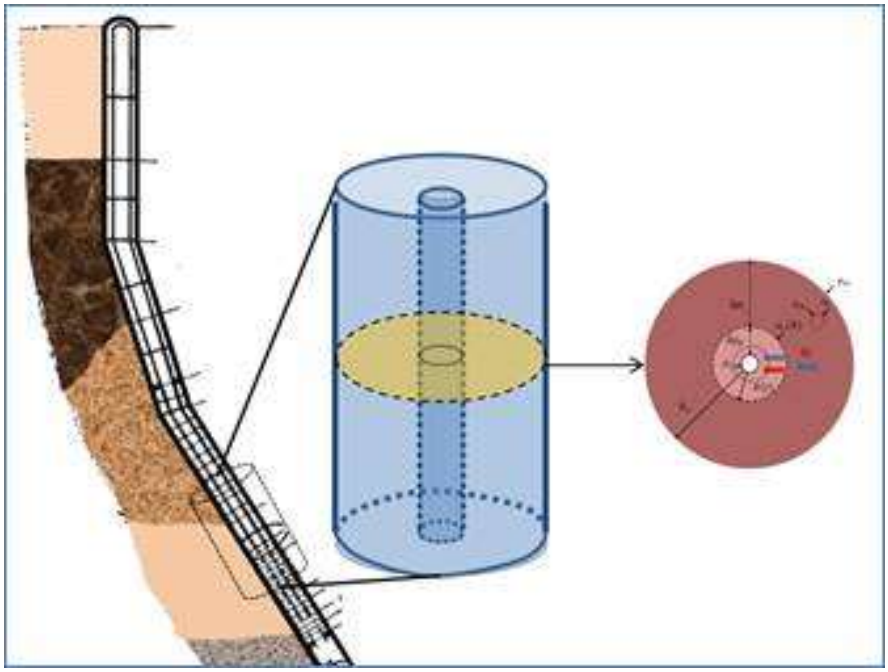


Рисунок 143 Схематическое изображение модели для расчета устойчивости ствола скважины

Подобный подход не позволяет учесть глубину зоны разрушения, наблюдаемую прибором кавернометрии. Таким образом, недостатками данного подхода являются неопределенности в решении, связанные с кавернозностью (не идеальной формой ствола скважины), сложной геометрией скважины и пренебрежением неоднородностью свойств и структуры породы. Анализ устойчивости таких форм ствола скважины требует конечно-элементного моделирования. Поэтому становится особенно важным применение фундаментальных численно-аналитических подходов к расчету прочности породы.

Решить ряд из этих проблем возможно с помощью численного трехмерного моделирования на основе метода спектральных элементов, рассмотренного в Главе 2. Применение аппарата трехмерного спектральноэлементного моделирования позволяет проводить моделирование напряжений и деформаций околоскважинной пороупругой зоны с учетом динамического изменения поля давлений насыщающего флюида. Оценка деформаций ствола скважины в зависимости от давления бурового раствора внутри нее позволяет расширить возможности геомеханического моделирования и уточнить рекомендации к параметрам бурения.

Математическая модель напряжений в окрестности ствола скважины включает в себя систему уравнений, описывающих динамическое изменение напряженно-деформированного

состояния пороупругопластического тела, насыщенного жидкостью, и уравнение теплопроводности, описывающее распределение температцры в нем:

$$div\ (\sigma(u(x,t)) - \alpha p(x,t)I) + f(x,t) = \rho\ddot{u}(x,t) \quad (1)$$

$$div\left(\frac{k}{\eta}\nabla p(x,t) - \rho_f g\right) = \beta\dot{p}(x,t) \quad (2)$$

$$div(\lambda\nabla \mathrm{T}(x,t)) + Q(x,t,T) = \rho c\dot{T}(x,t) \quad (3)$$

u – вектор перемещений точек пороупругого тела, σ – тензор напряжений,

f – внешние нагрузки,

p – поровое давление,

α – коэффициент Био,

I – единичный тензор,

k – проницаемость,

η – динамическая вязкость жидкости,

β – модуль Био, характеризующий сжимаемость жидкости с учетом деформирования пористой среды $\beta = \frac{1}{M} = \frac{\varphi}{Kf} + \frac{\alpha - \varphi}{Ks}$,

φ – пористость,

K_f – модуль объемного сжатия жидкости,

K_s – модуль объемного сжатия породы,

ρ_f – плотность жидкости,

g – гравитация,

T – температура,

Q – количество тепла, исходящее из источника,

λ – коэффициент теплопроводности,

ρ – плотность,

c – коэффициент удельной теплоемкости.

Для уравнений (1) - (3) определены следующие граничные условия:

перемещения на границе

$$u(x,t)|_{x\in\Gamma_u} = u_\Gamma(t),$$

напряжение на границе

$$\sigma(x,t)|_{x\in\Gamma_p} = \sigma_\Gamma(t),$$

температура на границе

$$T(x,t)|_{x\in\Gamma_p} = T_\Gamma(t),$$

поровое давление на границе

$$p(x,t)|_{x\in\Gamma_p} = p_\Gamma(t),$$

тепловые источники на границе

$$Q(x,t)|_{x\in\Gamma_Q} = Q_\Gamma(t).$$

Для уравнений (1)-(3) определены следующие начальные условия:

перемещение

$u(x,0) = u(x)$,скорость

$$\dot{u}(x,0) = v_0(x),$$

температура

$$T(x,0) = T_0(x),$$

поровое давление

$$p(x,0) = p_0(x),$$

начальные напряжения

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x).$$

Согласно закону Гука, определяющие соотношения при малых деформациях для упругой изотропной среды запишутся следующим образом [233]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(S)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}$$

$\varepsilon_{ij}^{(S)}$ – механические деформации, $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ – температурные деформации, задаваемые как $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha\Delta T\delta_{ij}$, α – коэффициент линейного теплового расширения.

Пластическое поведение породы характеризуется тем, что при снятии нагрузки, материал не приобретет первоначальную форму, а останется деформированным – в нем образуются необратимые остаточные деформации. Для описания напряженно-деформированного состояния пороупругопластического тела, насыщенного жидкостью, используется обобщенная модель пластичности Друкера-Прагера. Связь между напряжениями и деформациями в горной породе задается с помощью следующего соотношения:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda(\dot{\theta} - \dot{\theta}^p)\delta_{ij} + 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) \qquad (4)$$

где σ_{ij} и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформаций соответственно, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right)$ – тензор малых деформаций, $\lambda = \lambda(x) = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – первый параметр Ламэ, $\mu = \mu(x) = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – второй параметр Ламэ (модуль сдвига), $E = E(x)$– модуль

Юнга, $\nu = \nu(x)$ – коэффициент Пуассона, $\theta(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_{ii}$ – первый инвариант тензора деформаций.

Для модели пластичности Друкера–Прагера приращение полных деформаций представляется в виде суммы пластической и упругой составляющих $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{e}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}$.

Упругое состояние горной породы сохраняется до момента достижения напряжениями предельной поверхности, называемой поверхностью текучести, при достижении которой, начинается процесс неупругого, пластического деформирования, или разрушения. Неупругая часть полной деформации определяется в соответствии с уравнениями предельной поверхности и пластического потенциала:

$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}) = 0$ — уравнение предельной поверхности

$g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}) = 0$ — пластический потенциал

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}}$ — компоненты пластической (неупругой) деформации, $\mathrm{d}\lambda$ — пластический множитель, определяемый в ходе процесса деформации. Предельная поверхность в рамках выбранной модели Друкера-Прагера (Рисунок 144) задается уравнением:

$$f(\sigma, \tau) = \tau - \alpha\sigma - Y, \tag{5}$$

где α и Y — величины, которые могут быть выражены через коэффициент внутреннего трения и когезию модели Кулона-Мора (Y является функцией кумулятивной пластической деформации p в случае упрочнения, например, в случае линейного упрочнения $Y=\sigma_y+Hp$, где σ_y выражается через когезию и угол внутреннего трения, H – параметр упрочнения), $\tau = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ - интенсивность касательных напряжений, σ – первый инвариант тензора напряжений.

В случае ассоциированного закона пластического течения, выражения для уравнения поверхности текучести f и пластического потенциала g совпадают.

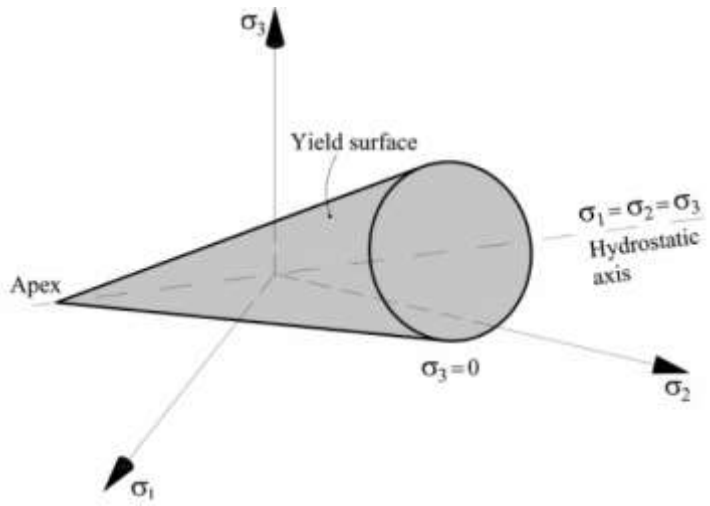


Рисунок 144 Предельная поверхность модели Друкера-Прагера

Решив приведенную нелиненую систему уравнений с помощью метода спектральных элементов (Главы 1-2) и рассчитав распределения полей перемещений, напряжений и деформаций, далее по ним необходимо оценить устойчивость ствола скважины с использованием критериев прочности по теориям Кулона-Мора и Моги-Кулона. Критерий Кулона-Мора применяется для описания сдвиговых разрушений в горных породах. Гипотеза Мора предполагает, что критическое сдвиговое напряжение τ_{max} зависит от нормального напряжения σ_n на плоскости сдвига. Условие разрушения выражается следующим образом:

$\tau_{max} = A + B\sigma_n$, где

$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos\phi$ – максимальное выдерживаемое касательное напряжение на плоскости сдвига,

$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin\phi$ – нормальное сжимающее напряжение на плоскости сдвига,

ϕ – угол внутреннего трения материала,

σ_1, σ_3 – главные компоненты тензора напряжений,

$A = c$ – когезия материала,

$B = -tan\,\phi$.

Если заданы пределы прочности, то когезия и угол внутреннего трения вычисляются по формулам:

$\phi = arcsin\frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_t + \sigma_c}$,

$\mathrm{c} = \frac{\sqrt{\sigma_c\sigma_t}}{2}$,

где σ_c – предел прочности на сжатие, а σ_t- на растяжение.

Коэффициент запаса прочности, показывающий, во сколько раз нужно увеличить нагрузку, чтобы произошло разрушение согласно критерию, вычисляется по формуле:

$n = \frac{A}{\tau_{max} - B\,\sigma_n}$.

Критерий Моги-Кулона предполагает, что критическое напряжение τ_{oct}, при котором происходит разрушение, зависит от полусуммы $\sigma_{m,2}$ первой и третьей главных компонент тензора напряжений на плоскости сдвига. Критерий выражается следующим образом:

$\tau_{oct} = A + B\sigma_{m,2}$, где

$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$,

$\sigma_{m,2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$,

$A = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$, $B = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan\phi$,

c – когезия материала,

ϕ – угол внутреннего трения материала,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные компоненты тензора напряжений.

Если заданы пределы прочности на растяжение и сжатие, то коэффициенты *A* и *B* вычисляются через них:

$A = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}$,

$B = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sigma_c + \sigma_t}$,

Коэффициент запаса прочности, показывающий, во сколько раз нужно увеличить нагрузку, чтобы произошло разрушение согласно критерию, вычисляется по формуле:

$n = \frac{A}{\tau_{max} - B\,\sigma_{m,2}}$.

Дискретизация и численное моделирование

Горная порода неоднородна по своей структуре. Наличие плоскостей ослабления, имеющих характеристики, отличные от свойств пласта, вносят значительное влияние на устойчивость участков ствола скважины. Подобные объекты имеют различную ориентацию относительно ствола скважины (Рисунок 145), что сказывается на величине и ориентации напряжений в породе и является определяющим условием для определения участков максимальных сжимающих и растягивающих касательных напряжений.

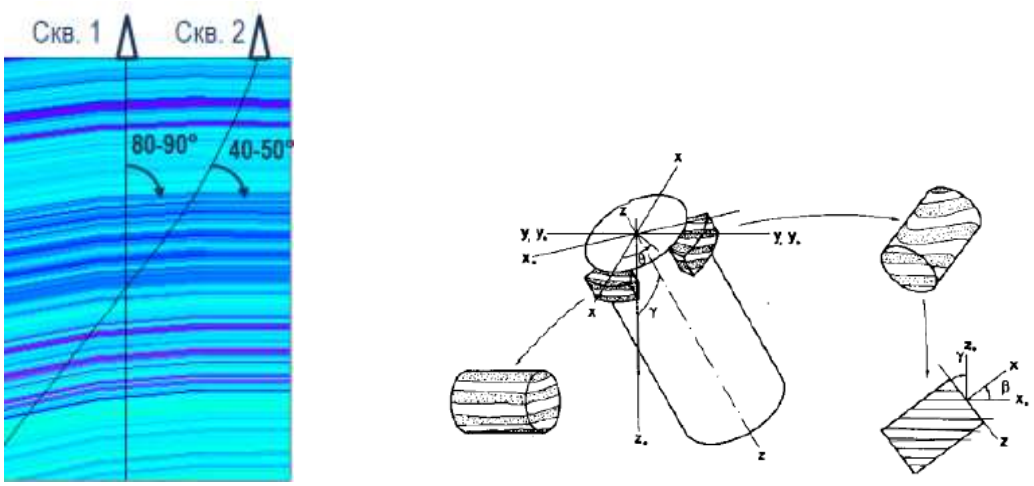


Рисунок 145 Взаимная ориентация скважины и напластований

Если скважина расположена в породе без напластований, то поведение напряжения в сечении, перпендикулярном к оси скважины, имеет вполне определенное распределение (Рисунок 146).

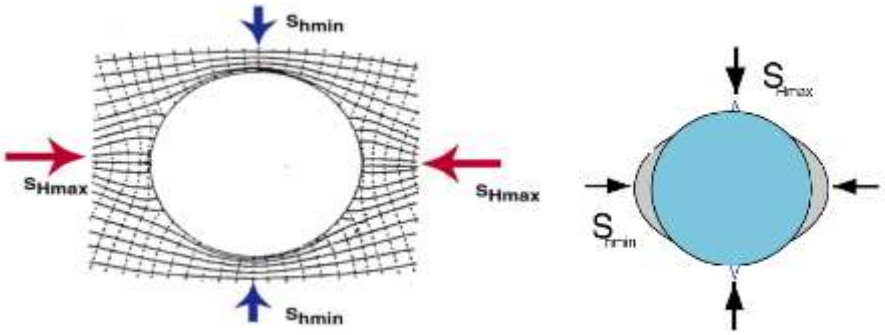


Рисунок 146 Напряжения в сечении, перпендикулярном оси скважины

Если же в породе имеются напластования, пересекающие скажину под каким-либо углом, то зоны образования вывалов и их размеры могут располагаться (в зависимости от угла напластования относительно оси скважины) (Mark Zoback Reservoir Geomechanics, стр. 199), как показано на Рисунок 147.

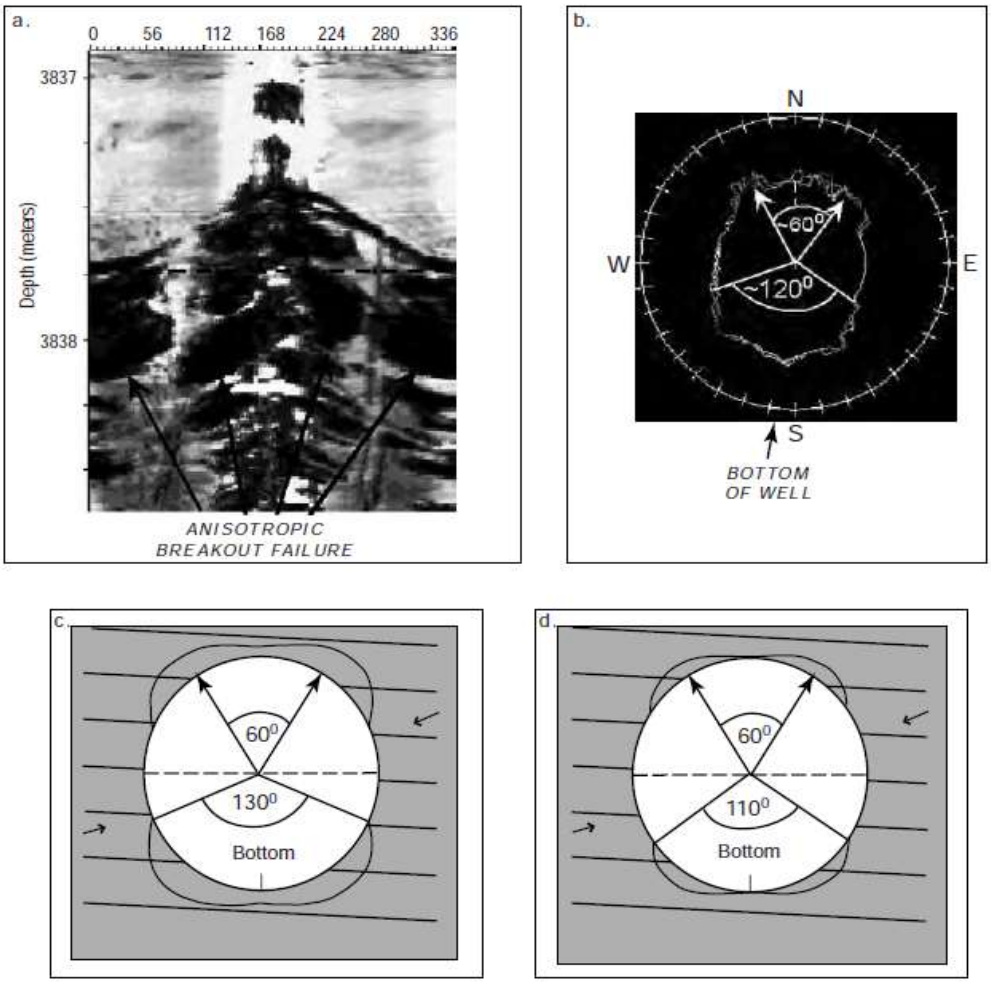


Рисунок 147 Зоны вывалов для различных углов напластования

Для формирования расчетной модели и инициализации свойств материала внутри нее в CAE Fidesys были загружены два типа данных (Рисунок 148), представляющие собой изменяющийся с глубиной набор значений:

1. Данные о геометрии скважины, включающие азимутальный угол и инклинометрию на рассматриваемом участке, а также данные о траектории скважины.
2. Пакеты данных материала, сформированные при анализе результатов ГИС, а также наборы данных напряжений (максимальных/минимальных горизонтальных, вертикальных) полученных при построении 1D геомеханичекой модели.

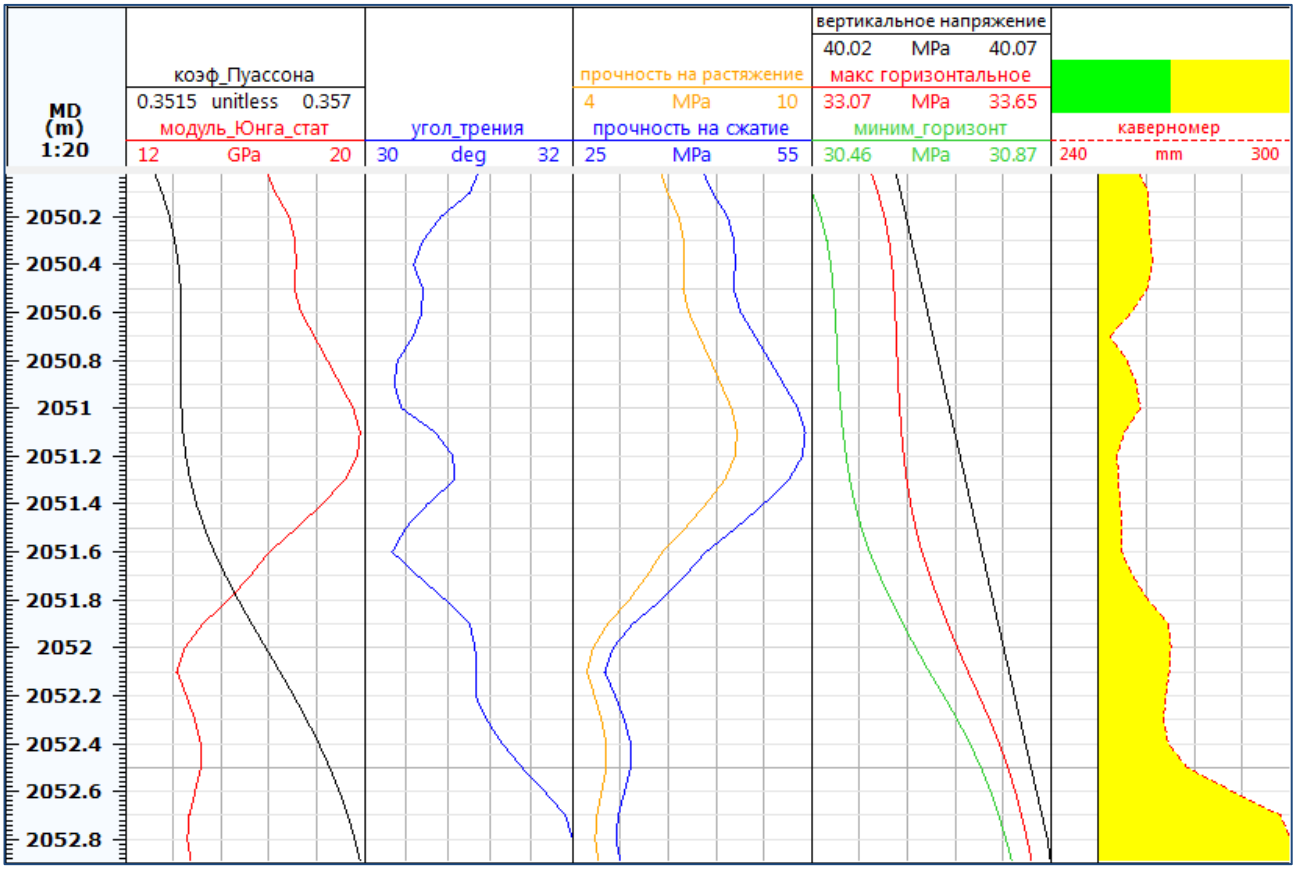


Рисунок 148 Пример исходных данных для построения дискретной геомеханической модели скважины в CAE Fidesys

Кроме того, эффективные упругие и термоупругие свойства материала стенок скважины могут быть получены по данным керновых испытаний с использованием методики оценки эффективных свойств цифровой модели керна, рассмотренной в параграфе 3.2.

Цифровая геометрическая модель скважины может быть восстановлена на основе данных каверномера. На Рисунок 149 представлен пример такой трехмерной модели скважины, построенной в CAE Fidesys.

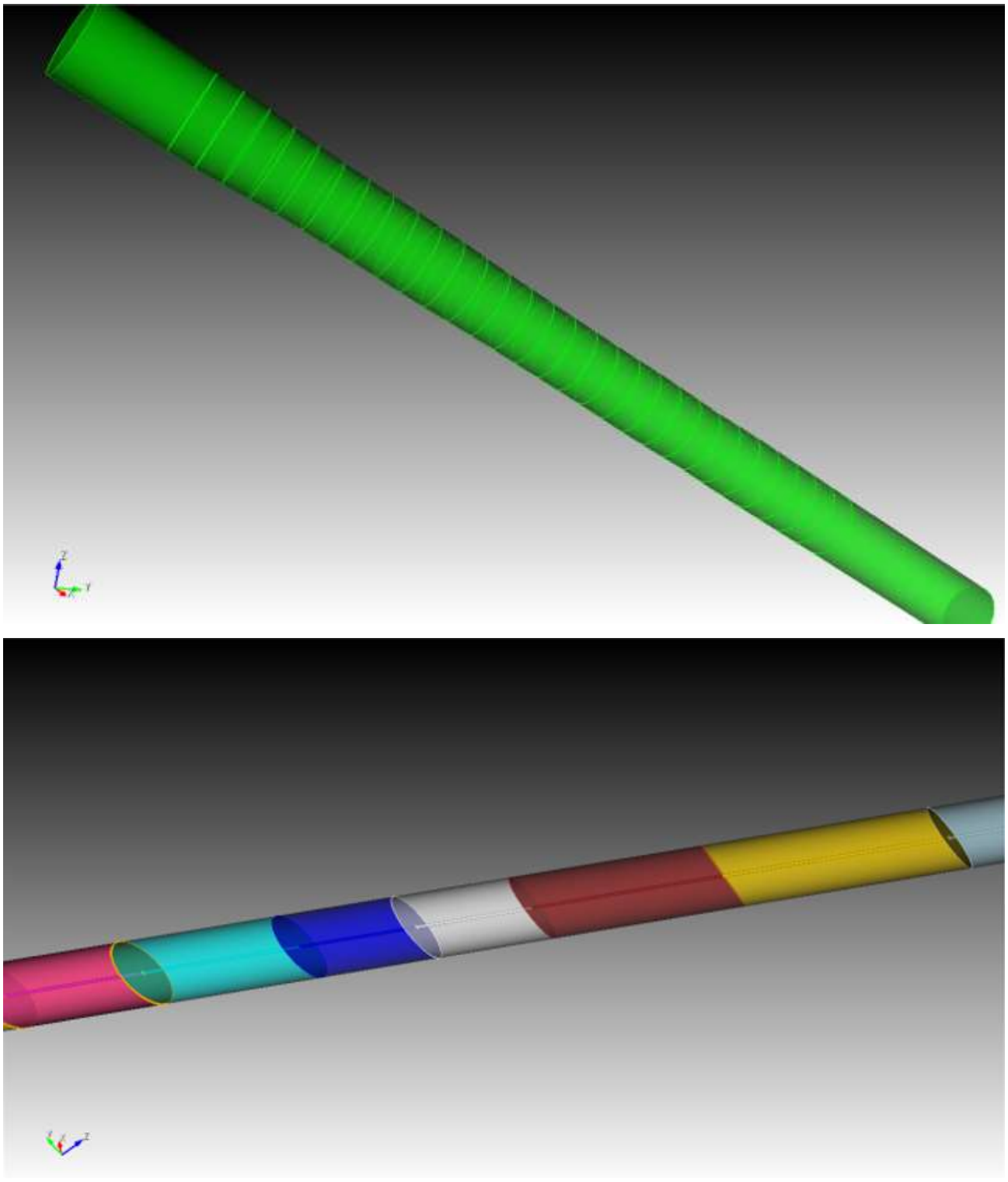
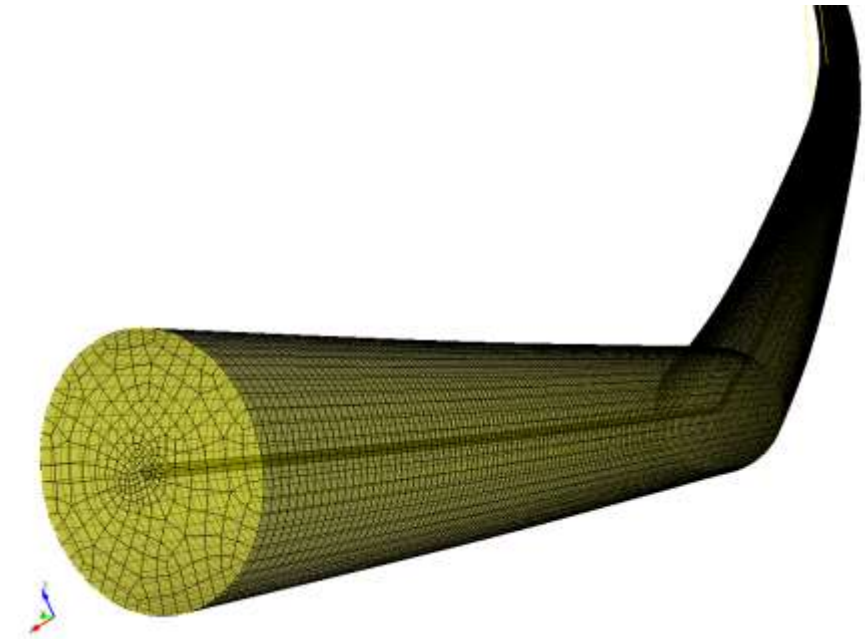


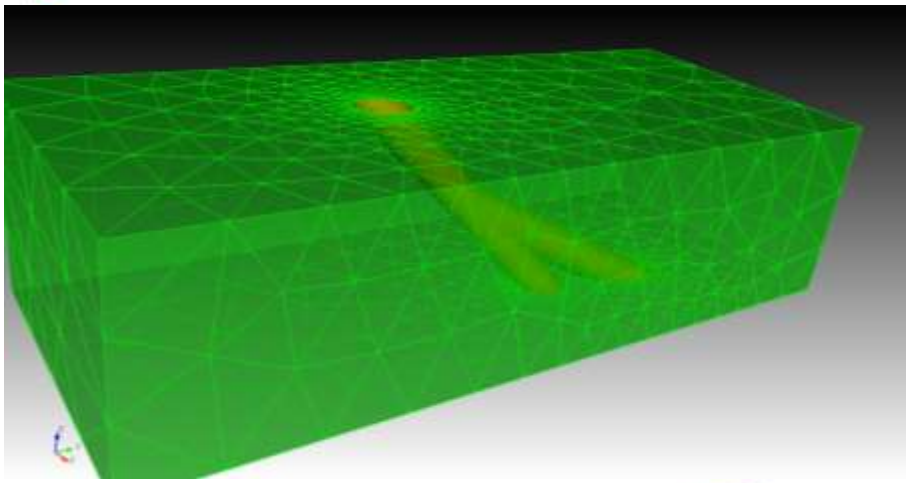
Рисунок 149 Трехмерная геометрия скважины в слоистой среде, восстановленная по данным каверномера

На основе сформированной геометрической модели далее была построена дискретная модель скважины и окружающей ее породы в CAE Fidesys. На

Рисунок 150 представлены примеры пространственных моделей изгибающейся скважины и скважины с ответвлением в CAE Fidesys с адаптивным разбиением расчетной сеткой. На

внутренней поверхности скважины задавалось давление бурового раствора, в общем случае переменное во времени. На внешних границах модели заданы распределения пластовые напряжений в соответствии с загруженными данными.





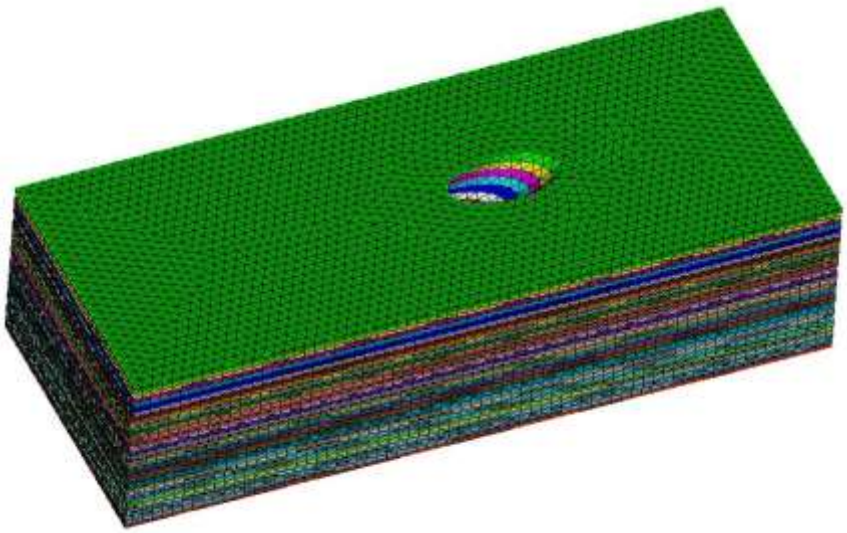


Рисунок 150 Примеры пространственных моделей скважин в однородных и слоистых средах с адаптивной геометрии неструктурированной сеткой

Неоднородность механических свойств материала и граничных условий приводили к неоднородному распределению напряжений в породе. На Рисунок 151, для сравнения, приведены расчеты напряженного состояния для однородных свойств материала и для свойств, полученных из данных на Рисунок 148. На границах модели видно влияние граничных условий. В целом, неоднородность напряженного состояния обусловлена неоднородностью механических свойств.

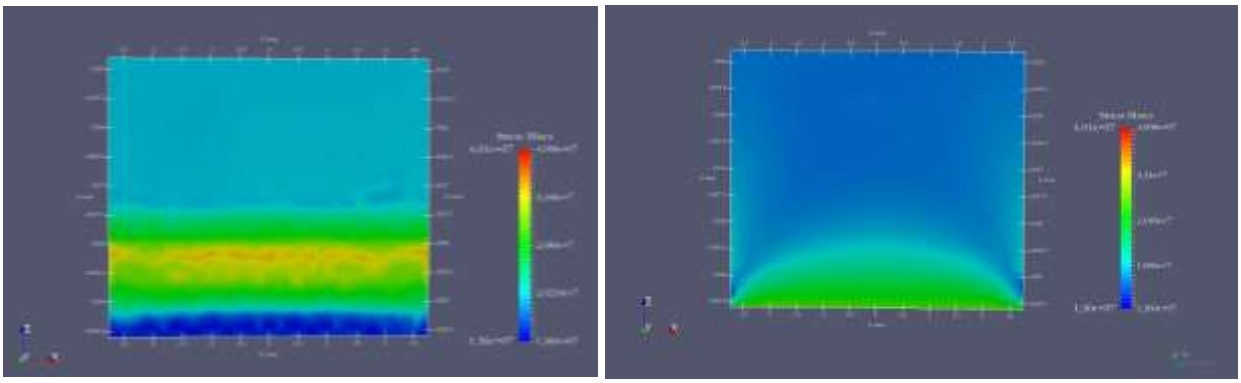
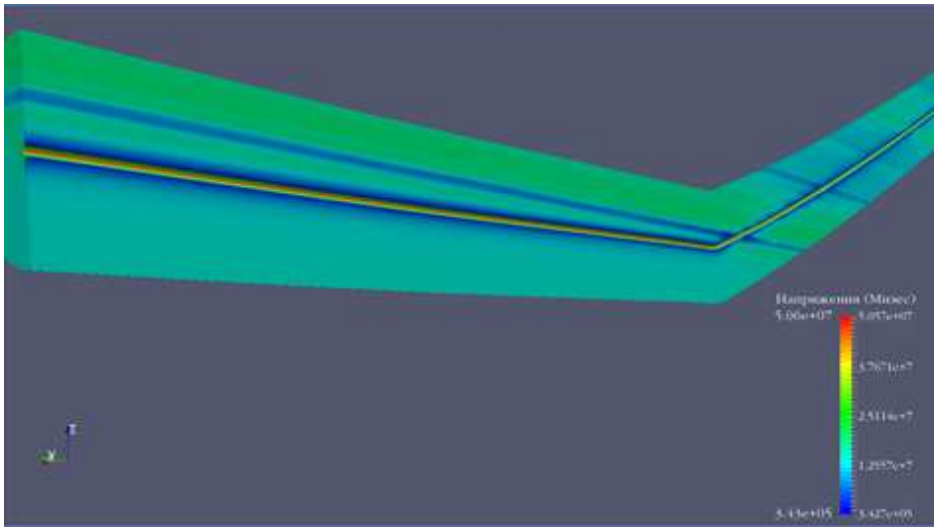
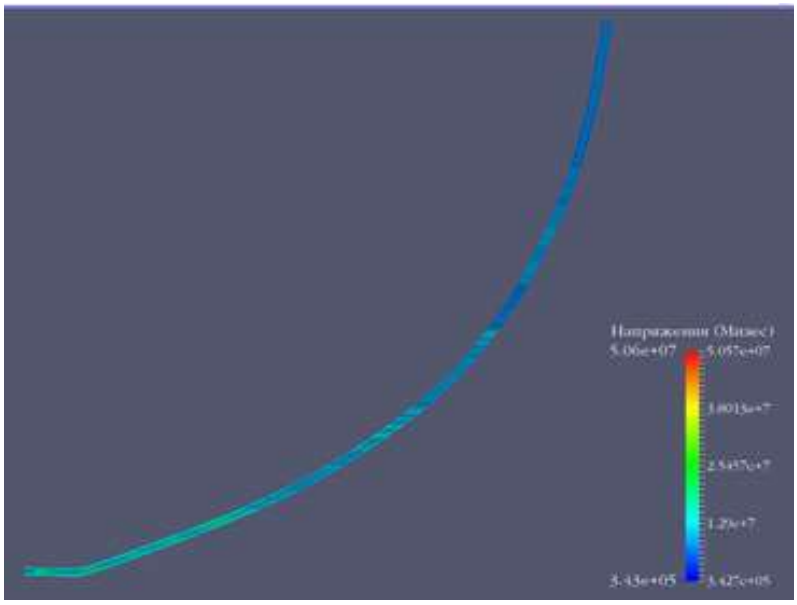


Рисунок 151 Распределение напряжений в породе. Слева – материал создан путем загрузки распределения свойств из внешнего файла, справа – однородный материал области.

Далее был произведен трехмерный расчет параметров напряженно-деформированного состояния в окрестности ствола скважины. В результате было получено распределение интенсивности напряжений Мизеса по стволу скважины (Рисунок 152). Отметим максимальную концентрацию напряжений на горизонтальном участке скважины и вблизи бокового ответвления от основного ствола скважины, а также скачки по напряжениям на пропластках, пересекающих наклонный ствол скважины.





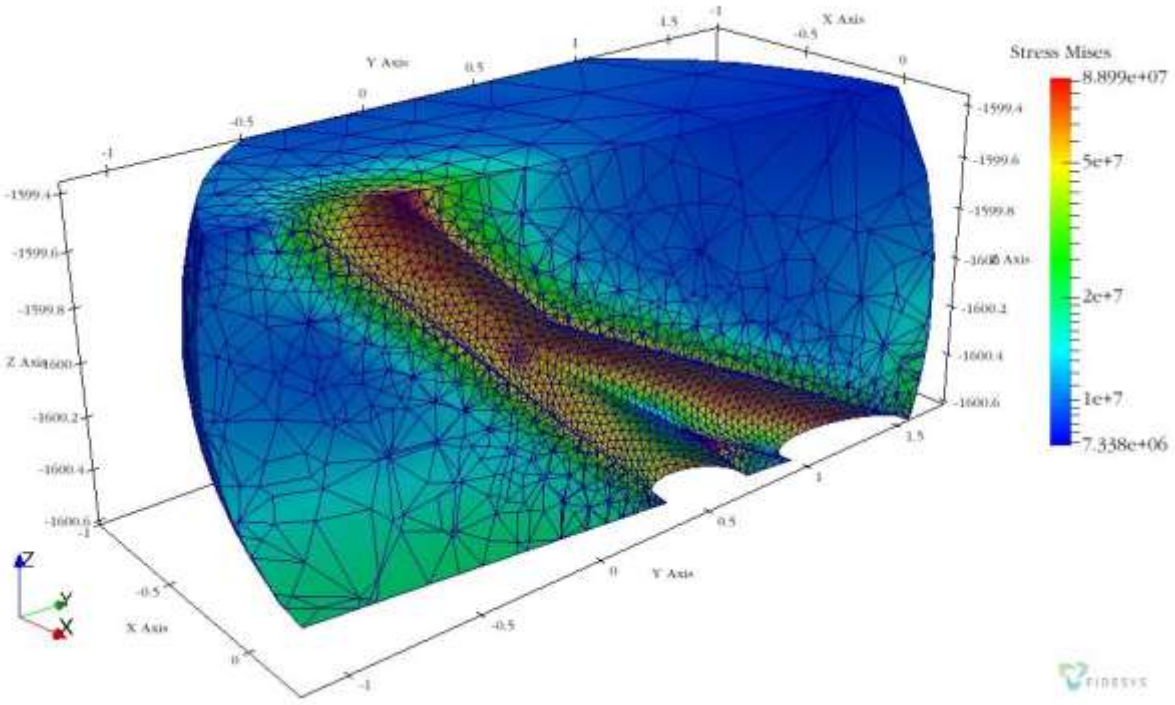


Рисунок 152 Распределение напряжений по стволу наклонной скважины и скважины с боковым ответвлением

Для верификации полученных результатов расчета было произведено сравнение с решением, полученным в ПО ABAQUS, аналогичной задачи об определении напряжений около наклонного ствола скважины (Рисунок 153).

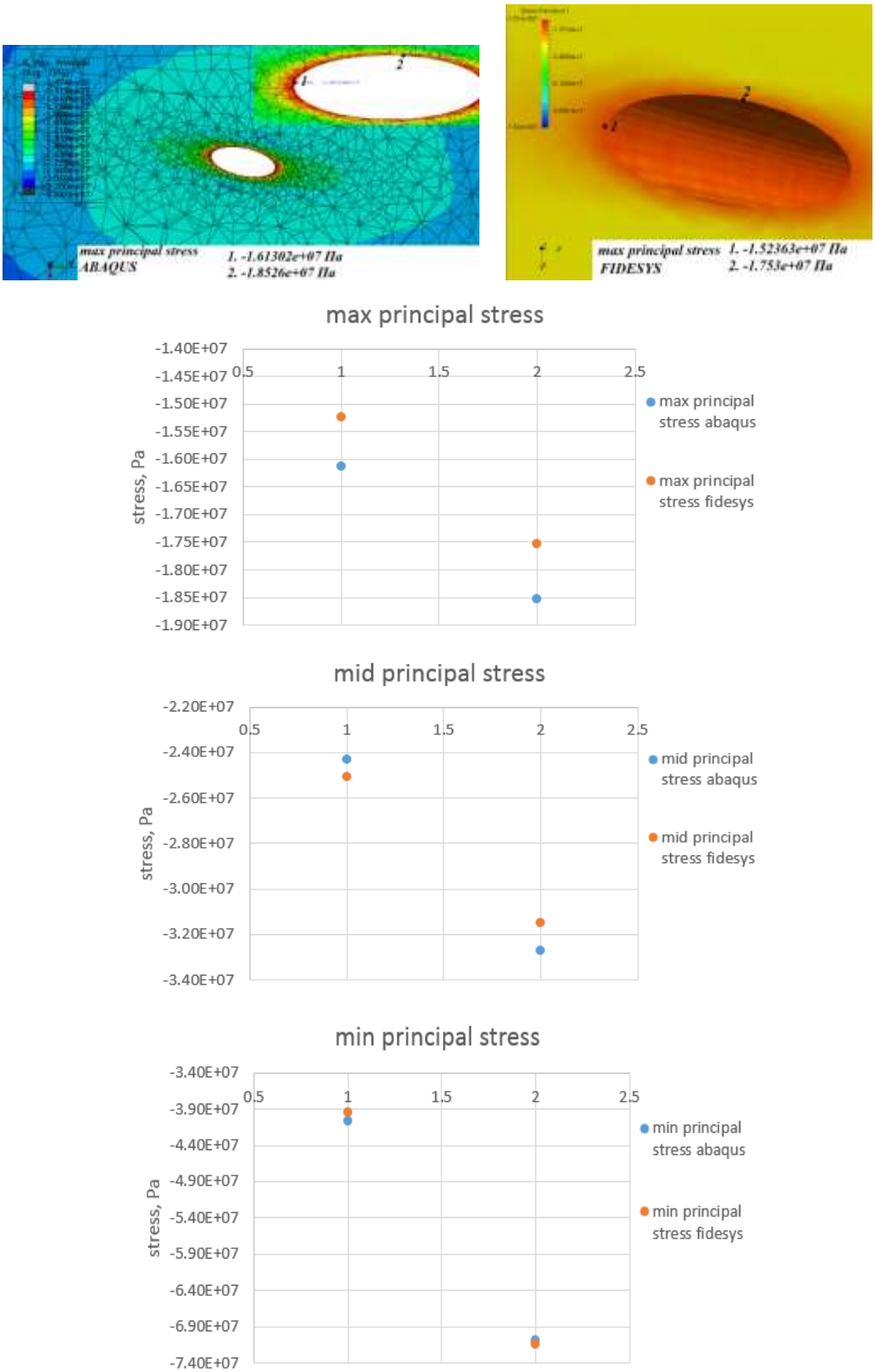


Рисунок 153 Сопоставление результатов расчета в Fidesys и ABAQUS. Разница результатов расчетов на идентичной модели и сетке составила менее 2%.

Представляет также интерес оценить влияние порового давления на итоговое напряженно-деформированное состояние в модели. Разница между решениями, полученными в упругой и

пороупругой постановках задачи, приведена на Рисунок 154. На Рисунок 155 показан график зависимости избыточного порового давления, нагнетаемого буровым раствором, при удалении от стенок скважины.

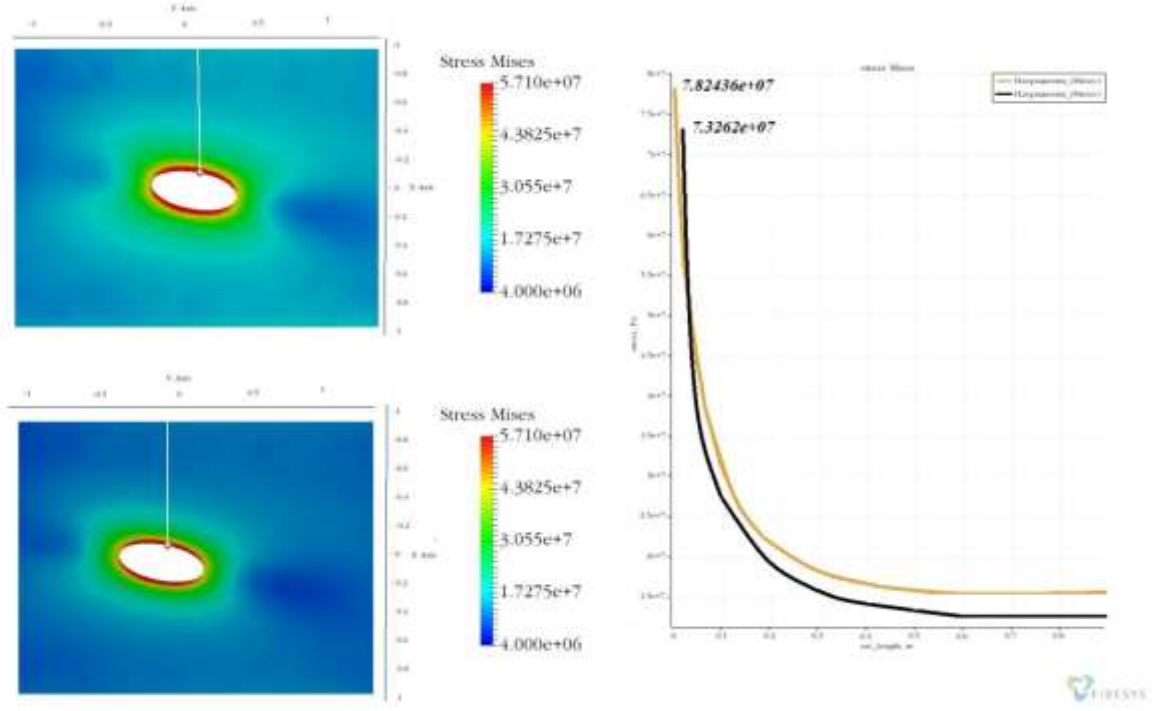


Рисунок 154 Распределение напряжений в упругой (сверху, коричневый график) и пороупругой (снизу, черный график) постановках

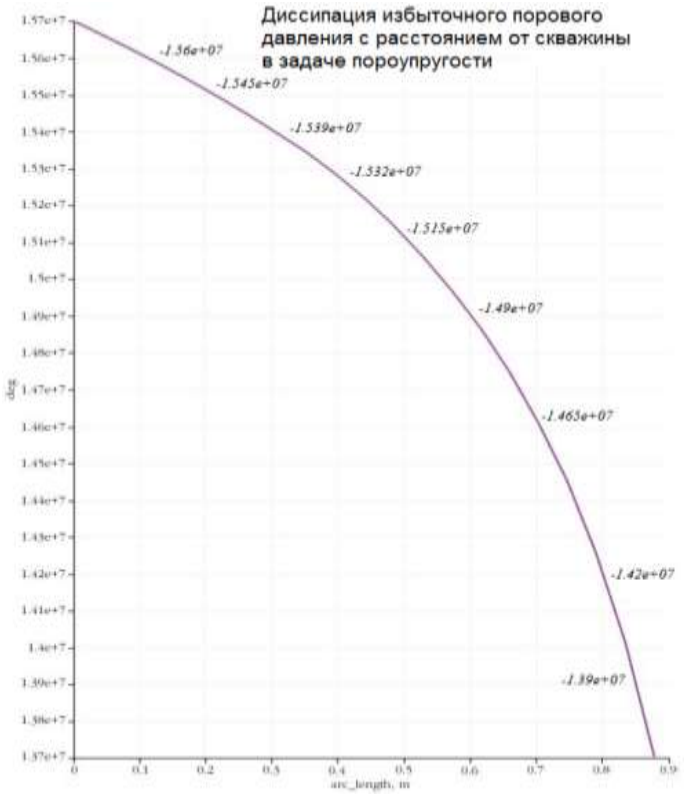


Рисунок 155 Распределение порого давления с расстоянием от скважины

Интенсивность выноса твердой фазы и формы выносимых на поверхность структур характеризуются типом разрушения породы на забое. На Рисунок 156 продемонстрирован результат расчета пластических эффектов в околоскважинной области, на которой видны линии развития плоскостей скольжения (Людерса), которые возникают по траекториям максимальных касательных напряжений. Подобные плоскости являются плоскостями формирования микротрещин в материале. Частота и интенсивность этих линий дает возможность учитывать дополнительные эффекты при подборе плотности бурового раствора, проводить анализ допустимой депрессии на пласт для прогноза пескопроявления, получать информацию о глубине проникновения нарушений.

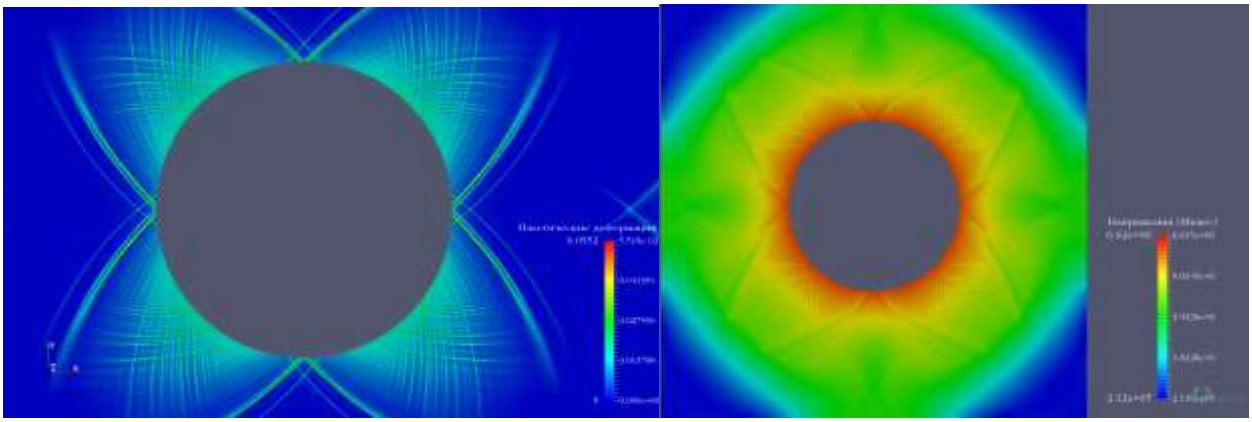
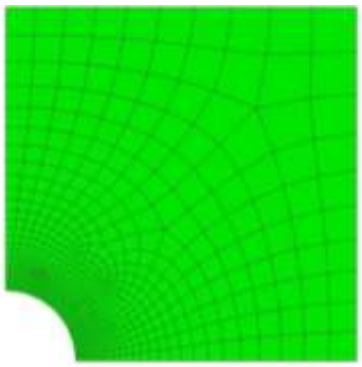


Рисунок 156 Распределений полос пластических деформаций. Слева – интенсивность пластических деформаций, справа – интенсивность напряжений Мизеса.

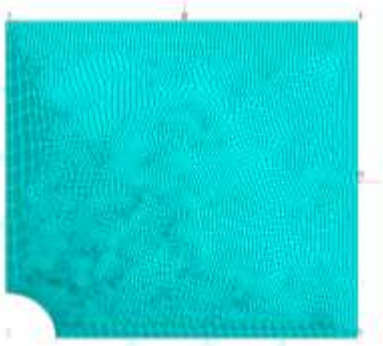
Применение метода спектральных элементов в нелинейных задачах, имеющих плохую сходимость, позволяет существенно повысить точность решения при относительно грубой исходной сетке дискретизации области. Рассмотрим пример использования спектральных элементов в сравнении с конечноэлементным пакетом ANSYS для расчета полос пластических деформаций. Исходная сетка для данной задачи в CAE Fidesys содержит 900 спектральных элементов (Рисунок 157 а). При решении использовались спектральные элементы пятого и седьмого порядка. При этом количество GLL-узлов в модели составляло 900*5*5 и 900*7*7 соответственно. При проведении сравнительного расчета в ПК ANSYS было рассмотрено несколько вариантов сеток (Рисунок 157 б, в, г) на основе наиболее точных (8-ми узловых) элементов второго порядка, включая и подробную сетку, содержащую более 49000 элементов и 148000 узлов.



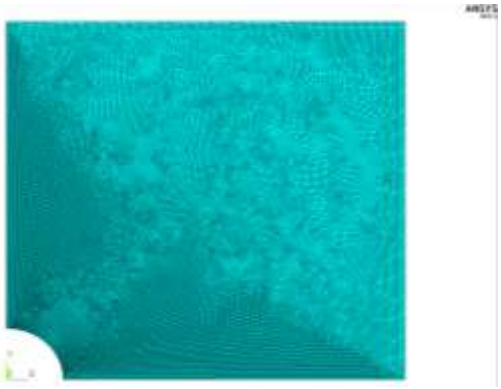
а) 900 элементов



б) 2 600 элементов (8000 узлов)



в) 10 000 элементов (31 000 узлов)

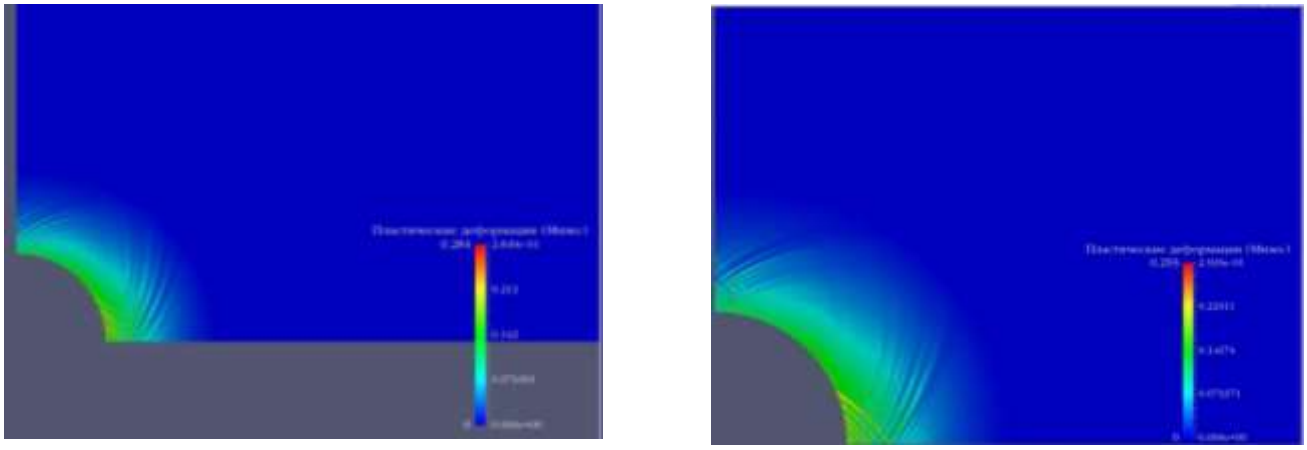


г) 49 000 элементов (149 000 узлов)

Рисунок 157 Дискретизация области вокруг скважины (четверть модели) в а) CAE Fidesys б), в) г) ANSYS.

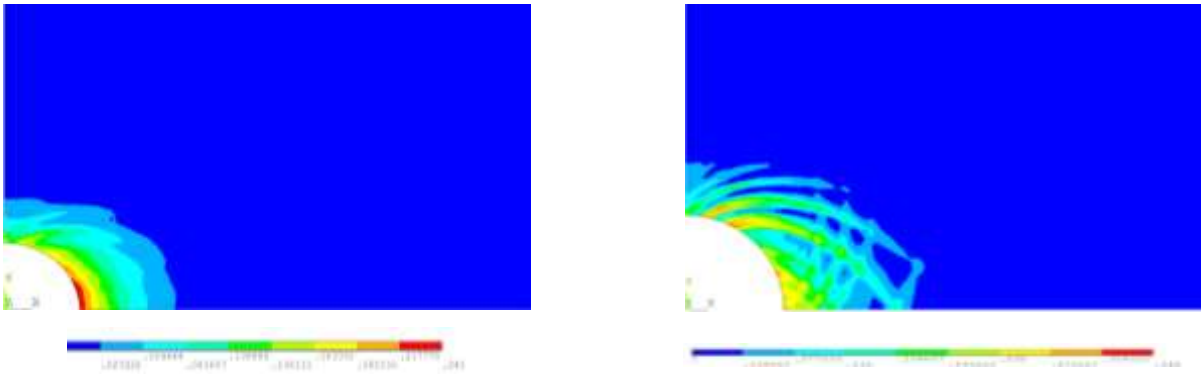
Результаты расчета в CAE Fidesys представлены на рисунке 158. Как видно из представленных результатов, четкая система полос скольжения хорошо видна уже при использовании элементов пятого порядка. Результаты расчета пластических деформаций в ANSYS показаны на рисунке 159. При решении задачи в ANSYS некоторый намёк на систему полос скольжения начинает проявляться лишь во второй схеме, при существенно более мелкой, чем в CAE Fidesys сетке конечных элементов. Отчетливые очертания полосы скольжения

приобретают лишь в третьей расчетной схеме. При этом, в результатах, полученных в ANSYS, отсутствует численная сходимость по величинам пластических деформаций.

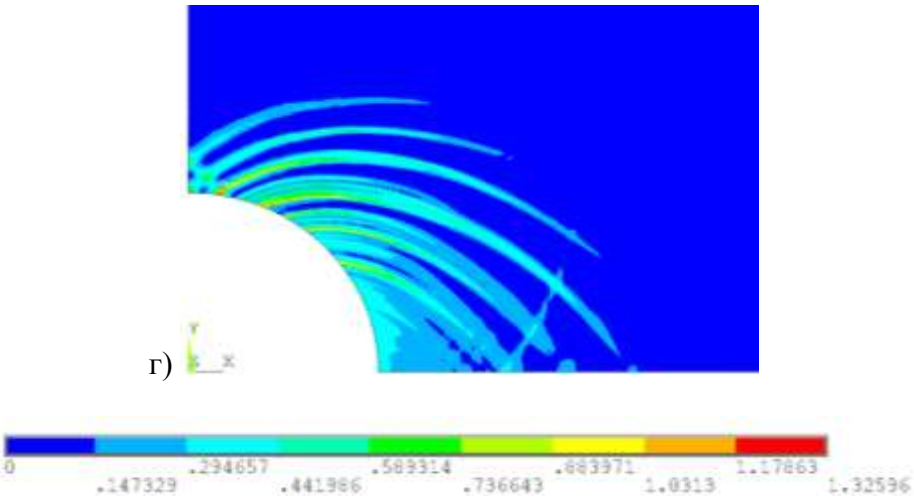


МСЭ 5-го порядка МСЭ 7-го порядка

Рисунок 158 Пластические деформации, полученные в CAE Fidesys



б) в)



г)

Рисунок 159 Пластические деформации, полученные в ANSYS

Таким образом, применение метода спектральных элементов обеспечивает более корректное решение задач с глубокой пластикой даже на относительно грубой исходной дискретизации, а также возможность уточнения результатов расчета путем повышения порядка элемента без перегенерации расчетных сеток.

3.4 Моделирование гидрогеомеханических пластовых процессов

Актуальность проведения сопряженного гидрогеомеханического моделирования обусловлена необходимостью решения практических задач нефтегазовой гидрогеомеханики с заданной точностью. К таким задачам относятся задача о выборе места и траектории бурения скважины и их устойчивости (параграф 3.3), об обеспечении высокой продуктивности пласта за счет оптимизации дизайна ГРП и контроля за пескопроявлением. Совместно с данными сейсморазведки и тестирования пласта, гидрогеомеханическое моделирование позволяет оптимизировать тактику и стратегию разработки пласта, с тем, чтобы избежать в частности, катастрофических сценариев, типа Екофиск [297]. Нарушение естественного напряженно-деформированного состояния, в окрестности скважины [240, 724] или на масштабе резервуара [311, 312, 313], приводит к развитию процессов деформации и образованию зон разрушения, а также изменению порового давления и фильтрационных свойств в пласте [773]. Исследование данной проблемы требует разработки соответствующих моделей, которые позволят, с одной стороны, описать развитие упругопластической деформации в требуемых условиях и рассчитать напряженно-деформированное состояние. С другой стороны, позволят учесть перераспределения пластового, призабойного и скважинного давления за счет движения флюида в скважине, переноса им проппанта, утечек и взаимодействия жидкости гидроразрыва с пластовыми флюидами [774].

Для решения данной задачи был разработан программный инструментарий, позволяющий совместно использовать гидродинамический и геомеханический модули для описания изменения напряженно-деформированного состояния пласта при техногенном воздействии на него. Совокупный (сопряженный) программный продукт позволяет описывать особенности развития упругой и неупругой деформации под воздействием эффективных напряжений (учитывающих влияние перераспределенного порового давления) в породе с анизотропными упруго-прочностными свойствами. Параметры анизотропии, определяемые параметрами системы микронеоднородностей (трещин, лагун, включений других минералов), могут меняться в процессе технологического воздействия на породу за счет изменения формы и жесткости этих микронеоднородностей [631], что также должно адекватно описываться совокупным продуктом.

В данном параграфе рассматривается алгоритмы сопряжения гидродинамической и геомеханической моделей в задаче фильтрации жидкости сквозь деформируемую пористую среду. В случае трещиновато-пористой среды, то есть пористой среды, пронизанной к тому же системами трещин, общие алгоритмы специфицируются до алгоритма, позволяющего учитывать динамическое изменение пористости и проницаемости в процессе фильтрации. На

основе этого алгоритма разработан программный модуль для интеграции гидродинамического симулятора и геомеханических решателей в составе CAE Fidesys. Приведены результаты решения различных тестовых задач для верификации разработанных алгоритмов и, в частности, специализированного программного модуля, а также результаты решения практически важной задачи об оптимизации режима закачки жидкости на месторождении. Обсуждаются полученные результаты решения и влияние геомеханических эффектов на них.

Алгоритм сопряжения гидродинамической и геомеханической моделей

Алгоритмы сопряжения классифицируются по нескольким признакам [51]. Наиболее важными из них являются (1) характер сопряжения – внешнее или внутреннее [377, 396, 701], (2) степень сопряжения – полное или неполное [468, 501], а также (3) выбор методики, по которой рассчитывается изменение пористости при новом эффективном напряженно-деформированном состоянии [311, 312, 314, 526, 767, 773].

Выбор алгоритма сопряжения существенно зависит от решаемой задачи. С вычислительной точки зрения наиболее точными являются полностью сопряженные алгоритмы (могут быть реализованы лишь при внутреннем сопряжении) – скорости жидкости и смещения вычисляются одновременно в процессе решения системы линейных уравнений, дискретизирующую единообразно замкнутую систему уравнений. Однако такое сопряжение не всегда требуется или практически неосуществимо – инженер обладает лицензиями двух коммерческих пакетов (например, CAE Fidesys и Eclipse 300 или tNavigator) и ищет пути их наиболее эффективного совместного использования. Поэтому в настоящей работе сделан акцент на внешнем сопряжении двух коммерческих пакетов, например, CAE Fidesys и какого-либо гидродинамического пакета (рассматривались CMG Stars, Eclipse 300, tNavigator), хотя для верификационных целей предлагается целесообразным реализовать алгоритм полного внутреннего сопряжения [773], хоть это выходит за рамки настоящей работы.

По степени сопряжения не полностью сопряженные алгоритмы условно делятся на итерационно сопряженные, явно сопряженные, псевдосопряженные и полностью несопряженные. Хотя формально все эти алгоритмы считаются основанными на хорошо зарекомендовавшем себя методе расщепления по физическим процессам [164, 165], с математической точки зрения, это можно отнести лишь к итерационно сопряженным, в которых на каждом шаге интегрирования по времени независимо отыскиваются решения геомеханической и гидродинамической задач, после чего происходит обмен значениями найденных полей, связывающих две задачи, и решения повторяются до достижения сходимости. Во всех прочих не полностью сопряженных алгоритмах обмен значениями полей

происходит далеко не на каждом шаге по времени, что экономит время расчета, но зато требует в каждом конкретном случае анализировать сходимость решения по отношению к частоте обмена. Несмотря на то, что установленная в этом смысле сходимость может и не обеспечить сходимость решения в математическом смысле слова, данный подход обладает неоспоримым преимуществом – возможностью использования готовых решателей (программных комплексов) для моделирования отдельных физических процессов в рамках связанной задачи при обеспечении соответствующей интеграции между ними.

Рассматриваемая в статьях [312, 314] геомеханическая модель трещиноватой среды состоит из двух взаимодействующих на разных масштабах континуумов – как и в стандартной модели двойной пористости, один включает в себя пористую среду горного массива, второй соответствует естественным и искусственным трещинам в породе. Следуя модели трещиноватой породы, рассмотренной в параграфе 3.2, будем далее моделировать второй тип континуума состоящим из нескольких множеств трещин, в каждом множестве содержится некоторое количество одинаково направленных трещин с одинаковой толщиной, но различным распределением в объеме породы. Каждое множество трещин характеризуется собственным коэффициентом жесткости, который определяет реакцию трещин на приложенное напряжение. Обновленные пористости на каждом шаге по времени находятся из решения упруго-пластической задачи на микромасштабной ячейке периодичности. Данный подход подразумевает итерационное сопряжение, как внутренне, так и внешнее. В настоящей работе используется внешнее сопряжение с использованием в качестве геомеханического решателя CAE Fidesys. Необходимо отметить, что CAE Fidesys выбран в качестве геомеханического решателя, поскольку в нем реализован уникальная методика наложения больших деформаций (Глава 1), что позволяет, помимо реализации сопряжения, добавлять в вычислительный комплекс пакет определения эффективных упруго-прочностных свойств среды в приближении мульти-пористости и мульти-проницаемости. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах [172, 186].

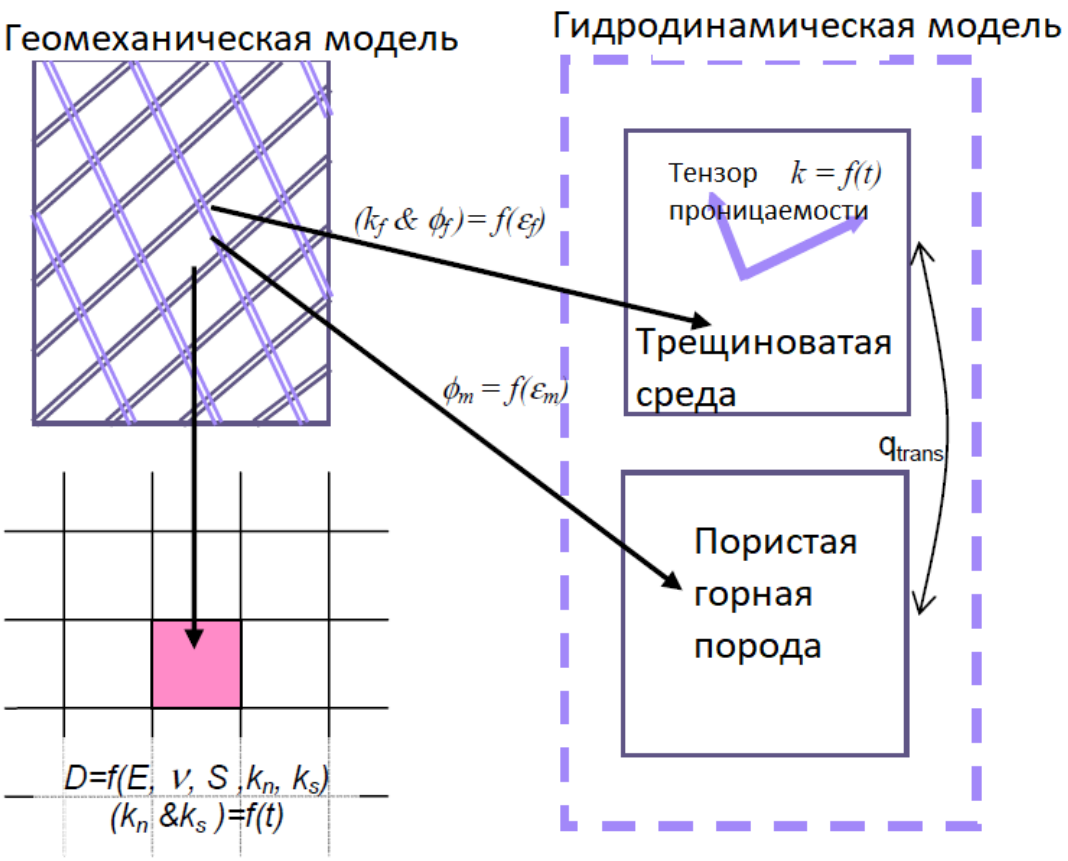


Рисунок 160 Два масштаба в гидрогеомеханическом сопряжении

Выбранная геомеханическая модель взаимодействует с гидродинамической моделью (Рисунок 160) при помощи обмена с определенной частотой обновленными значениями пористости, проницаемости, давлений в порах и трещинах, насыщенных фильтруемой жидкостью. Другой, не менее важный эффект заключается в возможности контроля изменений величины раскрытия трещин и их направления, что позволяет явно определить наведенную НДС анизотропию тензора проницаемости.

Таким образом, одним из главных результатов использования сопряженной гидрогеомеханической модели является прямое моделирование динамической проницаемости, вызванной деформированием трещиноватых пористых резервуаров в процессе фильтрации жидкости. При этом, как уже отмечалось, моделирование и расчет параметров НДС в рамках данной модели осуществляется в 2 этапа/масштаба (Рисунок 160).

На первом этапе находятся эффективные механические характеристики (эквивалентная матрица жесткости) для каждой подобласти (пористая упругая матрица + системы трещины внутри нее) на основе решения серии задач на ячейке периодичности, как было рассмотрено в параграфе 3.2. Далее на основе найденных эффективных механических параметров в подобластях решается геомеханическая задача о нахождении напряженно-деформированного состояния (НДС) во всей области. После чего идет обратная процедура - на основе

рассчитанных глобальных напряжений решаются серии задач о нагружении матрицы и трещин в каждой из подобластей для определения деформаций внутри матрицы и раскрытий (aperture) трещин, соответствующих текущему локальному НДС в окрестности трещины. Наконец, рассчитанные деформации матрицы и раскрытия трещин используются при вычислении пористости и проницаемости трещиноватой среды. При этом жесткость самих трещин также может меняться в процессе их деформирования. Рассчитанные пористости и проницаемости (матрицы и трещиноватой среды внутри нее) передаются в гидродинамический симулятор на основе модели двойной пористости, который определяет поле давлений во всей модели. Затем на основе рассчитанных давлений в матрице p_m и трещинах p_f определяется среднее давление в эффективном континууме и повторяется расчет НДС и параметров геомеханической модели. Отдельное уравнение для пористости в этом подходе не используется.

В случае итерационного сопряжения, описанный цикл повторяется в рамках одного шага по времени до тех пор, пока не будет достигнута сходимость между геомеханическим решателем и гидродинамическим симулятором. Для улучшения сходимости внутренних итераций можно зафиксировать пористость и проницаемость трещин (пористость матрицы при этом продолжает меняться), и производить их пересчет только в конце текущего шага по времени (Рисунок 161).



Рисунок 161 Внутренние итерации в методе расщепления по физическим процессам для решения связанной гидрогеомеханической задачи о фильтрации жидкости сквозь пористую трещиноватую породу

Рассмотрим детальнее каждый шаг описанного алгоритма.

1) **Начальные условия.**

В начальный момент времени значения поровых давлений, пористости и проницаемости передаются из гидродинамической модели. Дополнительные параметры и коэффициенты, присутствующие в уравнениях, описывающих геомеханическую модель, передаются из результатов лабораторных или цифровых (параграф 3.2) испытаний на образцах керна. Множества трещин задаются в соответствии с результатами лабораторных испытаний, согласованно, для гидродинамической и геомеханической моделей. На их основе определяются начальные жесткости трещин и рассчитываются эффективные свойства для каждой из ячеек периодичности, соответствующей подобласти с заданными механическими свойствами матрицы и геометрией трещин. После чего рассчитывается начальное распределение напряжений и деформаций в рассматриваемой области на основе горного давления, соответствующего глубине залегания моделируемых пластов. Возможно также задание областей аномально высоких и аномально низких давлений, при помощи модификации начальных условий на определенных участках расчетной сетки.

2) **Граничные условия.**

В качестве граничных условий задаются значения горного давления выше и ниже моделируемого пласта, а также на его вертикальных границах, которые должны охватывать область породы существенно большую той, где присутствуют ненулевые деформации, связанные с разработкой или стимуляцией интересующего горизонта. Кроме того, в геомеханический решатель на каждом шаге по времени передается из гидродинамического симулятора поле давлений в породе и трещинах, ее пронизывающих, рассматриваемое как внешняя объемная сила.

3) **Определение эффективных свойств пористой трещиноватой среды на ячейке периодичности.**

Общая деформация ячейки периодичности состоит из деформации пористой среды (I) и деформации трещин (J), строчные индексы i и j соответствуют глобальной системе координат

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^{I} + \Delta\varepsilon_{ij}^{J}$$

Деформация каждого из континуумов рассчитывается при помощи закона Гука, здесь стоит напомнить, что переменная отвечающая за напряжения является функцией деформации и температуры, что позволяет учитывать пластические и термические эффекты в породе

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{I} = C_{ijkl}^{I}\Delta\sigma'_{kl}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{J} = C_{ijkl}^{J}\Delta\sigma'_{kl}$$

Здесь $\Delta\varepsilon_{ij}^{I}, \Delta\varepsilon_{ij}^{J}$ - тензоры деформаций в континуумах I и J, коэффициенты $C_{ijkl}^{I}, C_{ijkl}^{J}$ – это коэффициенты комбинированной матрицы жесткости, $\Delta\sigma'_{kl}$ – комбинированный эффективный тензор напряжений, единый для обоих континуумов. Эффективный тензор напряжений учитывает НДС, а также поле давлений, создаваемых жидкостью, насыщающей пористую среду и трещины $\sigma' = \sigma - \alpha p$.

Здесь α – коффициент Био, p – давление в пористой среде и трещинах

$$p = \frac{\phi_m}{\phi_m + \phi_f} p_m + \frac{\phi_f}{\phi_m + \phi_f} p_f$$

здесь пористость матрицы ϕ_m и трещин ϕ_f передается с предыдущего шага по времени, а давления p_f, p_m передаются из решения гидродинамической задачи, где учитывается суммарный вклад всех жидких и газовых фаз в трещинах и пористой среде в значения давления.

Помимо гидравлических эффектов, выраженных в виде поля давлений, матрица жесткости включает в себя геомеханические эффекты, связанные с деформацией трещин. Нормальные напряжения для одной трещины описываются в соответствии с гиперболической моделью [315]

$$\sigma_n = \frac{\Delta v}{a - b\Delta v}$$

В этом выражении, Δv – представляет величину раскрытия трещины, коэффициенты a и b – константы определяемые из предельных случаев. Трещина максимально закрывается при $\sigma_n \to \infty$, что соответствует

$$\Delta v_{\max} = \frac{a}{b}$$

При нулевом нормальном напряжении ($\sigma_n = 0$) коэффициент жесткости трещины в направлении нормали к её плоскости принимает асимптотическое значение

$$k_n = \frac{d\sigma_n}{d\Delta v} = \frac{1}{a\left(1 - \frac{b}{a}\Delta v\right)^2}$$

$$k_{ni} = k_n\big|_{\sigma_n \to 0} = \frac{1}{a}$$

Здесь k_{ni} – это изначальное значение коэффициента жёсткости.

В итоге получаем:

$$k_n = \frac{k_{ni}}{\left(1 - \frac{\Delta v}{\Delta v_{\max}}\right)^2}$$

Коэффициент жесткости определяет реакцию трещины на приложенное напряжение, что создаёт связь между трещиной и окружающим её материалом. Изменяя начальное значение этого коэффициента, можно моделировать трещины в различных материалах, используя различные значения k_{ni}, соответствующие этим материалам.

Коэффициенты жесткости эффективным образом входят в элементы матрицы жесткости D_{IJ} для трещин. Согласно энергетическому методу Хуанга [484], матрица жесткости D связывает деформацию трещины $\Delta\delta_J^f$ с приложенной к плоскости трещины силой с учетом того, что трещина насыщена жидкостью с давлением *p:*

$$\Delta\delta_J^f = D_{JK}\Delta\Gamma'_K$$

$$\Delta\Gamma'_K = \Delta\Gamma_K - p$$

Сила, приложенная вдоль нормали к плоскости трещины, выражается через НДС на ее берегах. Стоит заметить, что деформация трещины представлена в локальной системе координат, обозначенной заглавными индексами *J, K*, тогда как выражение для силы представлено в глобальной системе координат

$$\Delta\Gamma_k = \Delta\sigma_{kl} n_l^f$$

В итоге получаем следующую связь между деформациями и напряжениями по берегам трещины [313]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n^e \\ \varepsilon_s^e \\ \varepsilon_t^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{WK_n^e} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & \frac{1}{WK_s^e} & 0 \\ D_{13} & 0 & \frac{1}{WK_t^e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_n' \\ \tau_s' \\ \tau_t' \end{Bmatrix}$$

Здесь K_n, K_s, K_t – текущие нормальная и тангенциальные жесткости трещин соответственно, W – текущее раскрытие трещины, D_{12} и D_{13} связывают сдвиговые напряжения и деформации по нормали к трещине.

Расчет эффективных механических свойств ячейки периодичности, содержащей пористую породу, пронизанную семействами трещин, присутствующих в контрольном объеме, производится на основе конечноэлементного решения серии задач об определении НДС внутри

ячейки периодичности с заданными выше упругими модулями матрицы и трещин и прямого численного осреднения полученных результатов (параграф 3.2).

4) Решение геомеханической задачи.

На основе рассчитанных на предыдущем шаге эффективных механических характеристик пористой трещиноватой среды и эффективного порового давления решается геомеханическая задача об определении НДС в области, занимаемой моделируемом пластом (математическая постановка задачи описана в параграфе 3.3).

5) Пересчет параметров пористой трещиноватой среды.

На основе рассчитанного поля напряжений решается серия задач об определении НДС на ячейках периодичности в подобластях с граничными условиями, соответствующими локальному значению напряжений. По полученным нормальным напряжениям на берегах трещин определяются их новые величины раскрытий:

$$\sigma_n = \frac{\Delta v}{a - b\Delta v}$$

и новые значения жесткостей трещин:

$$k_n = \frac{k_{ni}}{\left(1 - \frac{\Delta v}{\Delta v_{\max}}\right)^2}$$

Далее пористость матрицы ϕ_m пересчитывается на основе полученных значений объемной деформации матрицы и пористости матрицы ϕ_i на предыдущем шаге:

$$\phi_m = \phi_i \left(1 + \varepsilon_v\right)$$

Объемная деформация ε_v определяется на основе значений главных деформаций ε_1, ε_2 и ε_3

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \left(1+\varepsilon_1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1+\varepsilon_3\right) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \left\{\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\right\}$$

Здесь $\Delta V / V$ – это соотношение изменения контрольного объема к его значению до деформации. В предположении малых деформаций, член, заключенный в фигурные скобки, стремится к нулю и объемную деформацию можно представить в простом виде

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Новая проницаемость породы вычисляется согласно уравнению Козени-Кармана [391], как функция пористости породы и геометрических характеристик каналов в пористой среде:

$$k = \frac{\phi}{f\tau\Sigma_p^2}$$

Здесь f – параметр формы пористых каналов, $\tau = \left(L_a / L\right)^2$ – коэффициент извилистости пористых каналов, где L_a – это длина извилистого канала и L это длина контрольного объема, вдоль которого проходит извилистый канал, Σ_p – площадь удельной поверхности порового пространства.

Аналогично обновленная пористость трещин ϕ_f определяется на основе изменения объема, занимаемого трещинами в ячейке периодичности (рассчитывается на основе деформаций берегов трещин), и изменения объема самой ячейки, рассчитываемого по формуле: $BV=(1+\varepsilon_v)BV_i$, здесь BV, BV_i – текущий и начальный объемы ячейки периодичности соответственно.

Новая проницаемость трещин рассчитывается на основе полученных выше новых величин раскрытий трещин путем их подстановки в эмпирическую модель, описанную в [462]: $k_f = \lambda f v^3$, здесь ν – раскрытие трещины, безразмерная константа λ изменяется от 0 до 1/12, приближаясь к верхнему предельному значению 1/12, когда система трещин представляет собой плоские параллельные каналы, а нижнее предельное значение - 0, когда в системе нет проточных каналов (закрытые трещины), f – плотность трещин, равная числу трещин в ячейке периодичности трещиноватой породы, деленную ее на характерный размер.

В упрощенном варианте можно не решать задачу об определении НДС на каждой ячейке периодичности, а напрямую использовать локальные напряжения, полученные из решения геомеханической задачи в пласте, для расчета новых пористостей и проницаемостей в матрице и трещинах по формулам, приведенным выше. Однако в этом случае необходимо разделить суммарные напряжения на напряжения в матрице и трещинах для определения соответствующих деформаций. Напряжения в трещине рассчитываются по формуле $\Gamma_n=\sigma_{nn}-p^f$, здесь Γ_n – нормальные напряжения, действующие на берегах трещины, σ_{nn} – проекция полных напряжений на нормаль к трещине, p^f –давление жидкости в трещине.

Для определения новой пористости трещин необходимо вначале определить объем, занимаемый ими. Объем в этом случае рассчитывается как произведение нового раскрытия на площадь поверхности трещин, которая, в свою очередь, определяется по приближенной формуле: $A^f=BV/S$, здесь BV – актуальный объем ячейки периодичности, S – расстояние между трещинами.

Аналогично, напряжения в матрице находятся по формуле $\sigma' = \sigma - \alpha p_m$.

Рассчитанные пористости и проницаемости матрицы и трещин передаются далее в гидродинамический симулятор для определения новых полей давлений.

Численные исследования

Первостепенным численным исследованием, связанным с описанным выше алгоритмом, является определение степени влияния сопряжения на результат работы алгоритма. Исходная методика авторов [312, 314] основывалась на сильно ограниченном аналитическом решении для определения эффективных упругих свойств и не претендовала на определение прочностных свойств. Поэтому их метод сопряжения был итерационным, и менять его на псевдоитерационный не было особой необходимости. В случае предложенного алгоритма эффективные свойства определяются численно в каждой точке пространства в результате решения пространственной упругопластической задачи (параграфы 3.2 и 3.3). Поэтому сокращение частоты обмена данными, то есть уменьшение степени сопряжения, является принципиально важным в данном подходе.

Для ответа на вопрос о влиянии степени сопряжения на итоговый результат было проведено моделирование процедуры циклической закачки CO_2 в формации Баженовской свиты (Пальяновский разрез). Для проведения расчетов были использованы технологические, геометрические и петрофизические параметры модели из ранее описанной работы [677]. Для моделирования процесса циклической закачки в гидродинамическом симуляторе была введена скважина, пересекаемая четырьмя магистральными трещинами, перпендикулярными оси скважины (Рисунок 162). Механизм фильтрации моделировался с помощью задания тензора проницаемости с тремя главными компонентами, что соответствует трем системам взаимно перпендикулярных трещин, параллельных при этом координатным плоскостям (модель ячейки периодичности трещиноватой среды описана в параграфе 3.2).

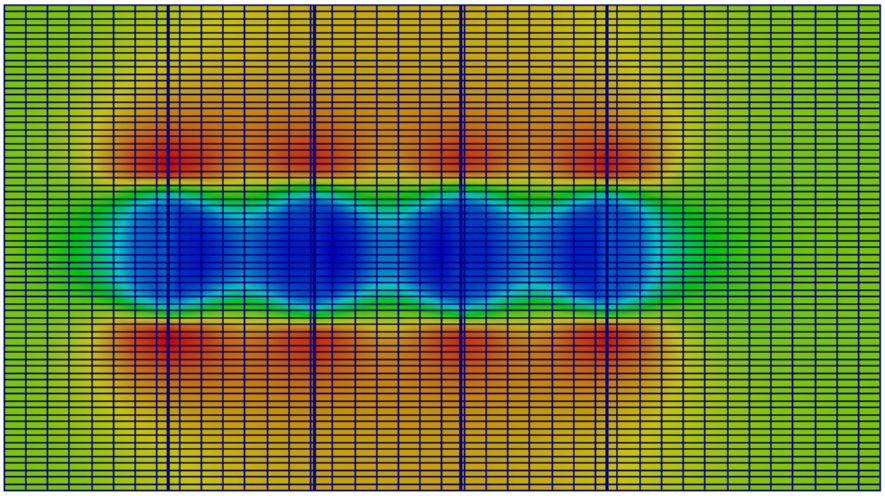
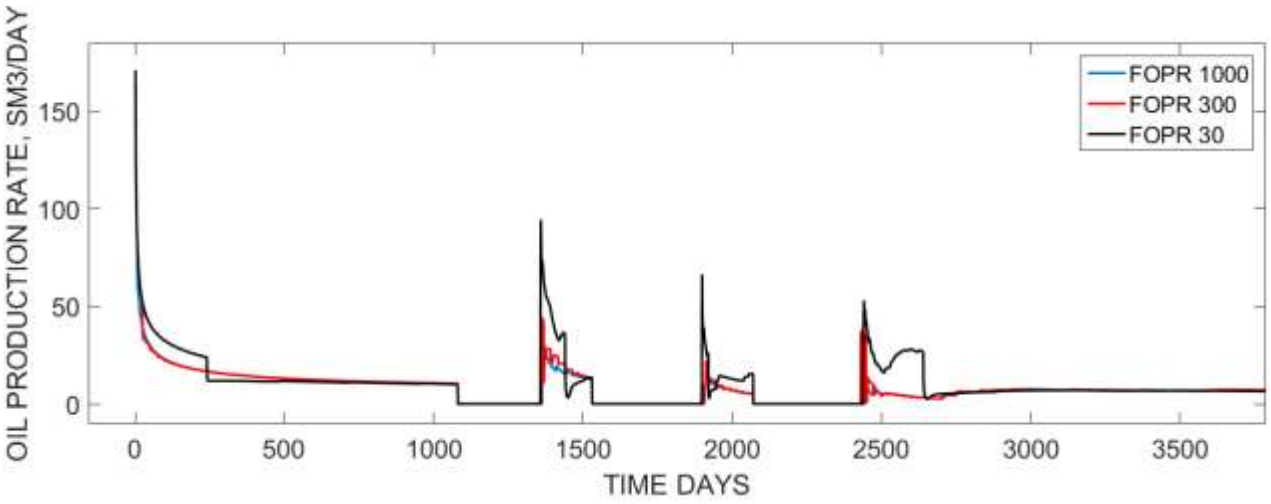


Рисунок 162 Сетка для сопряженной гидро-геомеханической модели нефтяной скважины с четырьмя магистральными трещинами. Цветовой палитрой обозначена компонента тензора напряжений σ_xx в момент добычи пластового флюида.

Первый перевод скважины под нагнетание CO_2 осуществлялся после отработки на истощение в течении 3 лет, продолжительность каждого цикла закачки CO_2 составлял 6 месяцев, дальнейшие циклы добычи были продолжительностью 3 месяца. Параметры модели брались следующими:

- Линейные размеры модели: 2400x1330x10 метров;
- Начальная проницаемость породы: 0.17 mD;
- Пористость: 0.109 д.ед.;
- Начальная водонасыщенность: 0.05 д.ед.;
- Начальное среднее пластовое давелине 196 атм.;
- Давление нагнетания 350 атм.;
- Давление добычи 150 атм.;
- Средная температура пласта 105ºC;
- Количество компонент углеводородной фазы – 5;
- Модуль Юнга породы: 8 ГПа;
- Коэффициент Пуассона породы: 0.3;
- Коэффициент α связи НДС и порового давления: 10^{-4};
- Начальная жесткость трещин: 8000 Па/м.



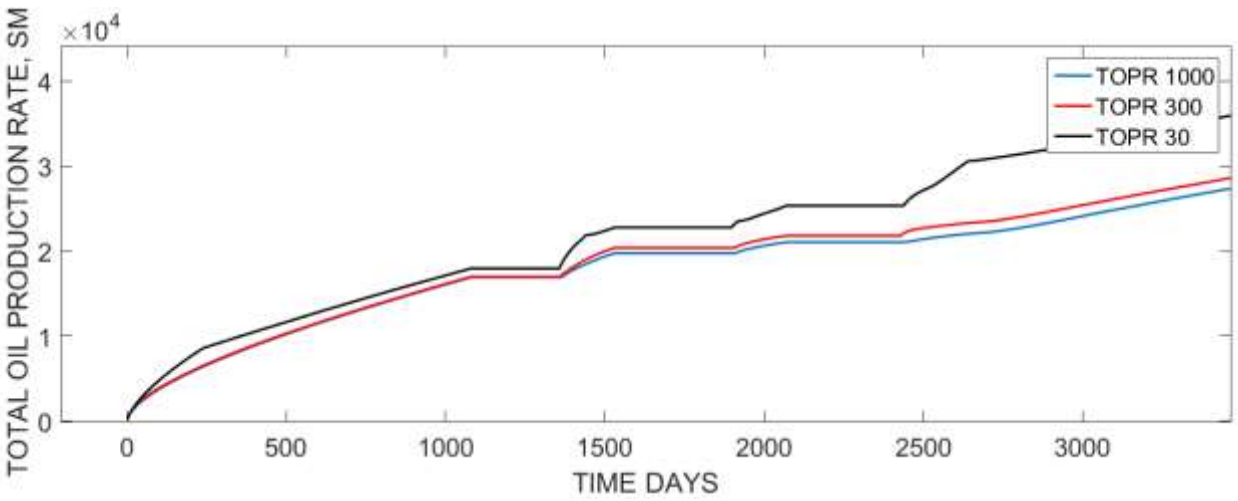


Рисунок 163 График дневной нефтедобычи (сверху) и интегральной (снизу) нефтедобычи на скважине при циклической закачке CO2. Коричневая кривая: 30 шагов процедуры сопряжения; красная кривая: 300 шагов процедуры сопряжения; синяя кривая: 1000 шагов процедуры сопряжения.

Количество моментов сопряжения было выбрано равным 30, 300 и 1000, что соответствует периодам между взаимодействием моделей в 240, 24 и 6 дней. На Рисунок 163 приведены результаты расчетов суточной и накопленной добычи нефти с различной степенью сопряжения. Как видно из графиков, при малом количестве шагов сопряжения гидродинамической и геомеханической модели (30 шагов на 20 лет расчета), результаты вычислений демонстрируют более позитивный прогноз эффективности технологии закачки CO2. Однако при дальнейшем увеличении количества точек сопряжения (300 шагов), результаты демонстрируют снижение эффективности, как по накопленной, так и по суточной добыче. Стоит отметить, что при дальнейшем увеличении числа шагов, результаты существенно не меняются, что позволяет утверждать о стабильности полученного решения. Таким образом, существует минимальное необходимое число точек совмещения гидродинамической и геомеханической моделей, в рамках выше описанного алгоритма. Вопрос устойчивости решений при выбранной степени сопряжения на данный момент детально не изучен и является целью для дальнейших работ.

На Рисунок 164 представлены гистограммы распределения проницаемостей на различных шагах совмещения гидродинамической и геомеханической моделей.

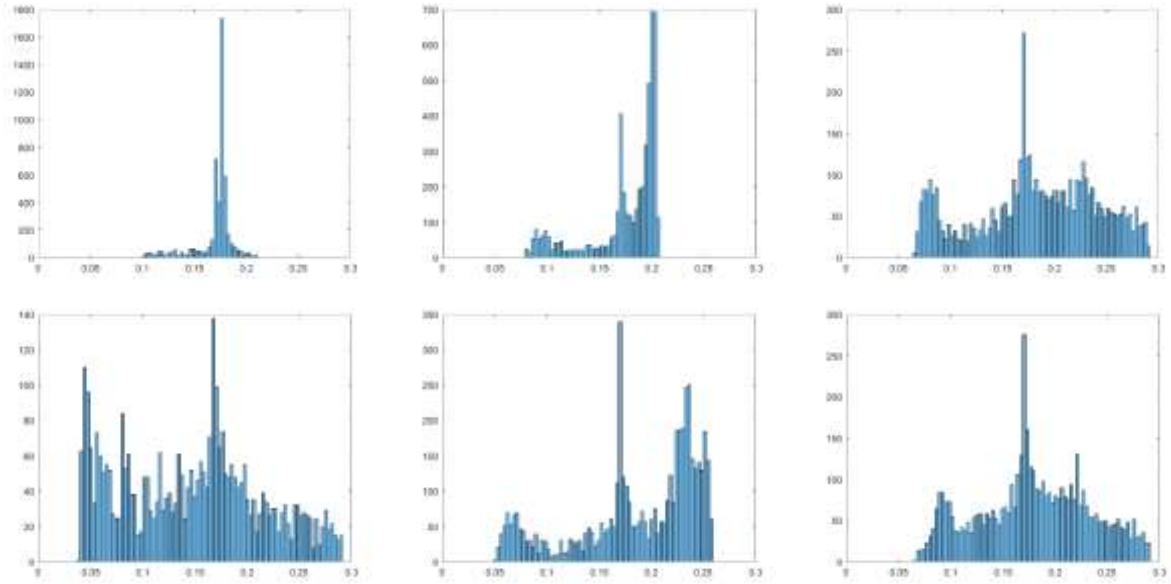


Рисунок 164 Гистограммы распределений кубов проницаемостей на различных шагах совмещения для расчета прогноза добычи на 20 лет с 1000 шагами совмещения. Слева-направо, сверху-вниз: 1) первый цикл, 2) 10-ый цикл 3) 100-ый цикл 4) 200-ый цикл 5) 400-ый цикл 6) 800-ый

Как видно из Рисунок 164, учет геомеханических процессов в породе существенно сказывается на распределении проницаемостей и, соответственно, фильтрационных свойствах породы. Стоит отметить, что определяющую роль на изменение напряженного состояния пласта оказывает режим работы скважины. Так, если первом графике мы видим распределение проницаемости, близкое к значению 0.17 (изначально оно полагалось равным 0.17 мД), то через 2 месяца работы скважины на истощение, гистограмма проницаемости стала смещаться в область минимальных значений. Противоположный эффект наблюдается на пятом графике, который соответствует моменту конца третьего цикла закачки CO_2: проницаемости в ячейках смещаются к максимальным значениям. Интересный эффект наблюдается на последнем графике, когда в процессе длительной работы скважины на истощение распределение стремится к равномерному. Это можно интерпретировать как появление зон с сомкнувшимися трещинами в одном направлении и появление зон разряжения в противоположном.

3.5 Заключение

С точки зрения технологии исследований и разработки коллекторов, нефтегазовая геомеханика как научно-техническая дисциплина дает информацию о распределении напряжений и о характере их воздействия на резервуар и окружающие его породы, правильный учет которой позволяет минимизировать риск катастрофических последствий выбранного сценария технологического воздействия на формацию. Хотя изначально нефтегазовая

геомеханика в основном изучала процессы на околоскважинном масштабе, сейчас стало очевидно, что они часто обусловлены перераспределением напряжений на масштабе разрабатываемого месторождения. В то же время сложная пористо-трещиноватая структура горных пород определяет необходимость детального изучения их механических свойств на масштабе кернов, извлекаемых из скважин. Поэтому важной задачей нефтегазовой геомеханики является выработка простых рецептов, позволяющих инженеру находить решения практических задач на масштабе скважины, учитывая все важные крупно и мелкомасштабные факторы наиболее эффективным образом. Одним из решений этой задачи является численная реализация геомеханических моделей на различных масштабах и алгоритмов их сопряжения между собой. Следуя этой парадигме, в данной главе предложен новый подход для моделирования геомеханических процессов различного уровня сложности на различных масштабах.

В параграфе 3.2 разработан универсальный алгоритм расчета эффективных механических характеристик пористо-трещиноватой среды на основе конечноэлементного осреднения параметров напряженно-деформированного состояния ячейки периодичности, который может быть применен для произвольной структуры периодических трещиноватых пористых сред. Данный алгоритм реализован в промышленной системе конечноэлментного анализа CAE Fidesys [795] на основе численного осреднения ячейки периодичности заданной геометрии. В качестве примера рассмотрено обобщение модели ячейки периодичности, предложенной в [313] для расчета эффективных свойств элемента горной породы из упругого материала, рассеченного группами плоскопараллельных трещин. Рассмотрен общий случай связи между перемещениями и усилиями по берегам трещины (нормальные напряжения связаны с тангенциальным ненулевым коэффициентом Пуассона), и дополнительно геометрия ячейки усложнена наличием пор в материале матрицы, суммарный объем которых соответствует заданному коэффициенту пористости. Проведенные в CAE Fidesys численные расчеты наглядно продемонстрировали значительное влияние данных обобщений на эффективные упругие модули, приводящее, в ряде случаев, к изменению эффективного модуля Юнга до 30% по отношению к исходному значению, приведены графики зависимостей упругих модулей от коэффициента пористости. Построенная в CAE Fidesys конечноэлементная модель ячейки периодичности позволяет гибко настраивать и варьировать параметры системы трещин: количество, шаг, толщина, жесткости, а также количество и размеры пор в матрице. Приведены результаты численных исследований на сеточную сходимость, влияние размеров ячейки периодичности и толщины трещины на результаты осреднения. Для упрощенной (исходной) модели ячейки периодичности показано совпадение аналитических и численных значений

эффективных упругих модулей. Полученные результаты могут быть использованы при построении геомеханических моделей реальных месторождений в сланцевых формациях [172] и анализе геомеханических процессов в них [139].

В параграфе 3.3 разработана математическая модель и численный алгоритм на ее основе, позволяющие рассчитать в системе инженерного анализа CAE Fidesys напряженно-деформированное состояние вокруг наклонного ствола скважины в слоистой неоднородной среде. Математическая модель включает в себя систему уравнений, описывающих динамическое изменение напряженно-деформированного состояния пороупругого тела, насыщенного жидкостью. Закон деформирования горной породы в рамках теории пластического течения описывается соотношениями Друкера–Прагера. Данный подход позволяет учитывать процесс формирования пластической зоны, связанный с появлением остаточных деформаций. Численное решение поставленной задачи получено с помощью метода спектральных элементов (МСЭ) в совокупности с методом Галеркина. Рассмотрены примеры решенных практически важных задач о скважине с боковым ответвлением, загибающейся скважине с горизонтальным участком, скважине в слоистой среде. Для построения дискретной МСЭ-модели и задания механических свойств материала использованы данные о геометрии скважины, включающие азимутальный угол и инклинометрию на рассматриваемом участке, а также данные о траектории скважины, пакеты данных материала, сформированные при анализе результатов ГИС, а также наборы данных напряжений (максимальных/минимальных горизонтальных, вертикальных) полученных при построении 1D геомеханичекой модели. Продемонстрировано влияние плотности бурового раствора на уровень и размер зоны пластических деформаций, исследован механизм возникновения и развития нелинейных упругопластических полос скольжения в зависимости от величины и вида внешних нагрузок. Продемонстрирована эффективность использования метода спектральных элементов в данных задачах.

Построенная под конкретную задачу геомеханическая модель околоскважинной зоны позволяет уменьшить риски при бурении и проводке траектории скважины, оценить потенциально перспективные зоны для бурения и для стимуляции, решить проблемы устойчивости ствола скважины. Математическое моделирование в CAE Fidesys позволяет более детально прогнозировать поведение горной породы при разработке месторождения, определять распределение и ориентацию напряжений в породе, учитывать неоднородности механических свойств породы, а также геометрические неоднородности такие, как разломы и напластования, учитывать поровое давление насыщающей жидкости. Предложенная в данной главе методика определения напряженно-деформированного состояния в окрестности наклонного ствола

скважины позволяет проводить комплексные исследования и осуществлять прогнозное моделирование в следующих задачах:

- Расчет устойчивого состояния ствола скважин, используя данные одномерной геомеханической модели.
- Расчет профиля минимальной депрессии для предотвращения обвалообразования стенки скважины.
- Расчет профиля максимального допустимого давления на забое для предотвращения поглощений бурового раствора.
- Определение основных зон нестабильности и зон возможных потерь бурового раствора.
- Оценка изменений устойчивости стенки скважины к перепаду давления на забое, изменению траектории (азимута и зенитного угла).
- Определение наиболее устойчивого направления бурения скважины (азимут и зенитный угол).
- Выделение интервалов, совместимых с бурением, формулировка рекомендаций к конструкции скважин и определение оптимальных глубин спуска обсадных колонн.
- Определение безопасных углов вскрытия пластов.
- Формирование рекомендаций к конструкции проектной скважины, определение оптимальных диапазонов значений параметров плотности бурового раствора для снижения рисков обвалообразования стенки ствола скважины.

В параграфе 3.4 разработан алгоритм внешнего итерационного сопряжения гидродинамических и геомеханических симуляторов, позволяющий моделировать связанные процессы деформирования трещиноватых пород и фильтрации жидкости в них с учетом динамического изменения параметров среды: пористости, проницаемости, упругих модулей породы и раскрытия трещин. В сочетании с методикой расчета эффективных свойств, рассмотренной в параграфе 3.2, данный алгоритм сопряжения позволяет обойтись без явного вывода уравнения для пористости и определять в процессе расчета эффективные упруго-прочностные параметры среды, меняющиеся в процессе разработки. Проведены исследования зависимости степени сопряжения на результаты расчетов, наглядно продемонстрировавшие, что для среды с параметрами Пальяновского месторождения Баженовской свиты степень сопряжения влияет на характеристики добычи, что может критически сказаться на эффективности применения новых технологий разработки нетрадиционных коллекторов.

Выводы:

1. Разработан алгоритм расчета эффективных механических характеристик пористо-трещиноватых материалов на основе конечноэлементного осреднения параметров напряженно-деформированного состояния ячейки периодичности. Данный алгоритм был применен для оценки эффективных свойств как модельных образцов трещиноватых горных пород, так и реальных цифровых моделей кернов, полученных по данным компьютерной томографии.
2. На основе изопараметрического МСЭ разработан численный алгоритм расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния горной породы вокруг наклонного ствола скважины в слоистой неоднородной среде. По реальным данным о структуре слоев и геометрических параметрах скважины в CAE Fidesys была построена ее цифровая модель и произведена оценка устойчивости с учетом переменного порового давления.
3. Разработан алгоритм внешнего итерационного сопряжения гидродинамических и геомеханических симуляторов, позволяющий моделировать связанные процессы деформирования трещиноватых пород и фильтрации жидкости в них с учетом динамического изменения параметров среды: пористости, проницаемости, упругих модулей породы и раскрытия трещин. Проведена серия вычислительных экспериментов в задачах гидрогеомеханического моделирования, продемонстрировавшая необходимость учета сопряженных процессов деформирования пористо-трещиноватых сред.

Глава 4. Алгоритмы распараллеливания МКЭ и МСЭ с использованием технологий высокопроизводительных вычислений

4.1 Введение

Задачи прочности представляют интерес для многих отраслей промышленности: автомобильной, нанотехнологий, нефтегазовой отрасли, аэрокосмической промышленности, энергетики, машиностроения и станкостроения, оборонной промышленности, судостроения, электронной промышленности, телекоммуникационной отрасли, гражданского и промышленного строительства, химической промышленности, производства товаров массового спроса, разработки изделий и технологий, ориентированных на охрану окружающей среды. Во всех перечисленных отраслях при проектировании изделий, которые в процессе эксплуатации подвергаются механическим нагрузкам и другим воздействиям, требуется провести анализ прочности, который, в свою очередь, включает в себя одним из этапов расчет напряженно-деформированного состояния в теле с использованием численных методов решения краевых задач. В основе класса конечноэлементных методов лежит разбиение тела на элементы, которые обладают достаточно простой геометрией (треугольники или четырехугольники в двумерном случае и тетраэдры или гексаэдры в трехмерном) и внутри которых значение любого параметра напряженно-деформированного состояния в произвольной точке определяется его значениями в конечном наборе точек элемента. Иными словами, при помощи такой дискретизации задача сводится от бесконечномерной к конечномерной.

При решении рассмотренных в предыдущих главах задач с помощью метода конечных элементов или метода спектральных элементов для увеличения точности, а также и самой достоверности результатов расчета, нередко приходилось использовать большое количество элементов/узлов в сеточной дискретизации. Расчет на такой сетке без использования параллельных вычислений потребует длительного времени, если вообще окажется возможным. Поскольку в практических задачах часто требуется обеспечить как приемлемую точность расчетов, так и разумное время работы программы, то зачастую производительности персонального компьютера (по мощности процессора и объему оперативной памяти) оказывается недостаточно. В связи с этим возникает необходимость применения современных вычислительных комплексов (СуперЭВМ, кластеры, системы с общей памятью и т.д.) и разработки программного обеспечения инженерного анализа, адаптированного под них с использованием технологий высокопроизводительных вычислений.

Современные высокопроизводительные вычислительные комплексы (PC с GPU или MultiGPU, гибридные суперЭВМ) позволяют во много раз увеличить скорость вычислений по

сравнению с однопроцессорными ЭВМ. Их применение необходимо для обеспечения высокой точности расчета реальных элементов конструкций. Однако адаптация существующих программных продуктов для современных вычислительных комплексов осложняется тем, что расчетные ядра в составе данных продуктов были разработаны задолго до появления современных программно-аппаратных платформ, и не все этапы вычислительных алгоритмов, реализованных в этих ядрах, допускают возможность эффективного распараллеливания.

Разработка алгоритмов численного решения нелинейных задач прочности в областях с криволинейными границами с учетом наложения конечных деформаций и их перераспределения на основе изопараметрического метода спектральных элементов и их промышленная программная реализация с использованием технологий CUDA [37, 529, 820, 821], OpenMP [7, 69] и MPI [8, 116] является новой задачей в области создания систем компьютерного моделирования инженерного анализа прочности (CAE) [177, 592, 795]. Процесс решения задачи инженерного прочностного анализа состоит из нескольких последовательных этапов [177, 178]: построение сетки в исследуемой области, составление системы линейных уравнений, ее решение, анализ полученных результатов. Каждый из данных этапов может повторяться многократно при решении нелинейных и(ли) динамических задач, обсуждавшихся в предыдущих главах, сопряженных с изменением формы тела в процессе нагружения, ростом в нем дефектов и т.п. Решение систем линейных уравнений [695, 696] является задачей во многом независимой и встречающейся повсеместно, поэтому на текущий момент существует достаточное количество параллельных решателей промышленного уровня, как коммерческих, так и с открытым кодом [382, 808, 822]. Распараллеливание на современных архитектурах, включая гибридные, данного этапа реализовано уже во многих передовых CAE-пакетах. В то же время этап составления самой матрицы системы и вектора правой части является специфичным для выбранного метода решения, универсального подхода здесь не существует.

В данной главе излагаются реализованные в CAE Fidesys алгоритмы распараллеливания основных этапов решения краевых задач с помощью МКЭ/МСЭ на многоядерных, многопроцессорных и гибридных (на основе графических процессоров) высокопроизводительных вычислительных системах. Ввиду бурного развития вычислительной техники в последние годы автор не претендует на актуальность изложенных особенностей конкретных архитектур и соответственно на адекватность и применимость методик распараллеливания и оптимизация расчетного кода под современные платформы. Однако рассматриваемые вопросы о распараллеливании вычислительного процесса, оптимизации доступов к памяти, анализ основных компонент расчетного кода на примере разобранных в данной главе архитектур и технологий параллельного программирования являются

необходимыми этапами при разработке эффективного и быстрого кода для параллельных платформ, при реализации и оптимизации различных составляющих процесса решения задачи с помощью конечноэлементных методов.

4.2 Применение технологии OpenMP

Современные центральные процессоры содержат два и более вычислительных ядра. Для того чтобы сократить время расчета и полностью использовать возможности многоядерного процессора самые ресурсозатратные части расчётного кода CAE Fidesys были распараллелены с использованием технологии OpenMP [7]. Использование OpenMP дает следующие преимущества:

1. За счет идеи "инкрементального распараллеливания" OpenMP идеально подходит для вычислительных программ с большими параллельными циклами. В этом случае вместо разработки новой параллельной версии программы, в текст последовательной версии добавляются OpenMP-директивы для расспараллеливания циклов.
2. OpenMP - гибкий механизм, предоставляющий разработчику большие возможности контроля над поведением параллельного приложения.
3. OpenMP-программа на одноядерной платформе может быть использована в качестве последовательной программы, т.е. нет необходимости поддерживать одновременно две версии: последовательную и параллельную. Директивы OpenMP в случае последовательной версии игнорируются компилятором, а для вызова процедур OpenMP могут быть подставлены заглушки (stubs), текст которых приведен в спецификациях OpenMP.

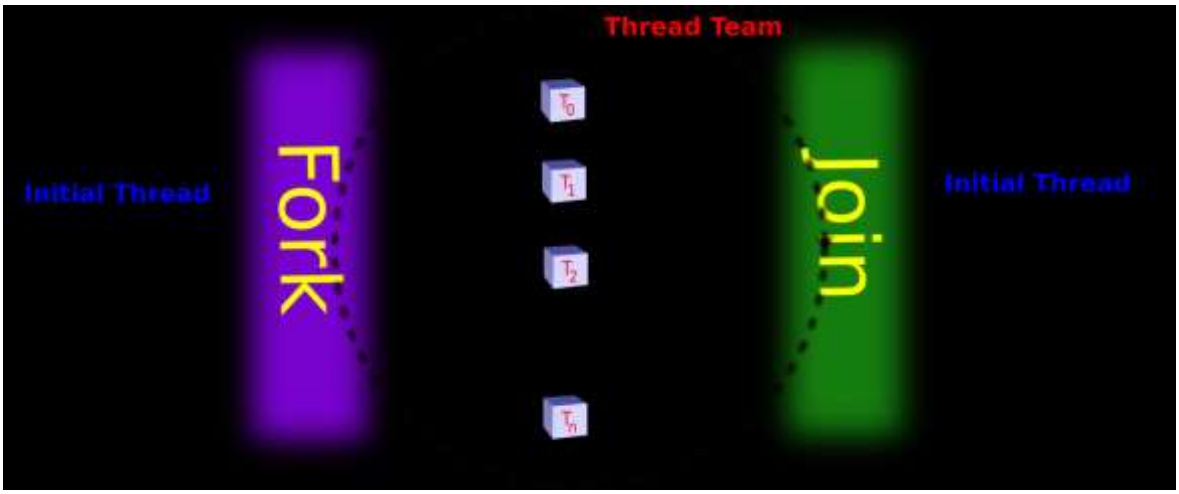


Рисунок 165 Многопоточность с использованием технологии OpenMP

OpenMP реализует параллельные вычисления с помощью многопоточности, в которой «главный» (master) поток создает набор подчиненных (slave) потоков, и задача распределяется

между ними, а потом «объединяет» их обратно в один (Рисунок 165). Предполагается, что потоки выполняются параллельно на машине с несколькими процессорами (количество процессоров не обязательно должно быть больше или равно количеству потоков) и общей памятью. Задачи, выполняемые потоками параллельно, так же, как и данные, требуемые для выполнения этих задач, описываются с помощью специальных директив препроцессора соответствующего языка. Количество создаваемых потоков может регулироваться как самой программой при помощи вызова библиотечных процедур, так и извне, при помощи переменных окружения OpenMP.

Технология OpenMP позволяет задействовать при вычислениях несколько процессоров в системе, при этом все процессоры выполняют вычисления независимо, но используют общую память для хранения данных. В задаче решения уравнений методом конечных элементов присутствует большое количество однотипных действий, выполнение которых может быть ускорено за счет использования технологии OpenMP на многоядерной/многопроцессорной системе с общей памятью.

Алгоритм распараллеливания

Особенностью составления матрицы жесткости в методе конечных элементов является независимость вычислений, которые проводятся для каждого элемента расчетной сетки, поэтому на данном этапе можно существенно ускорить работу приложения, используя технологию OpenMP. При использовании OpenMP для распараллеливания сборки матрицы жесткости и вектора правой части системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) за каждым потоком резервируется приблизительно одинаковое количество конечных элементов, для которых он будет вычислять локальные матрицы и вектора. Потоки читают данные каждый для своей группы элементов сетки и производят независимые вычисления, после чего записывает данные в глобальную матрицу и вектор. При распараллеливании процесса ассемблирования локальных матриц в глобальную возникают трудности: разные локальные системы записываются в одну и ту же глобальную, и от порядка записи будет зависеть результат, что некорректно. В OpenMP это называется проблемой доступа к общей памяти, и существуют специальные конструкции, помогающие её решить. Поэтому на этапе записи в глобальную матрицу необходимо синхронизовать потоки, поскольку возможна ситуация, когда несколько потоков одновременно записывают в одну и ту же область памяти (гонка данных). Данная синхронизация осуществляется средствами OpenMP (критические секции, атомарные операции), однако их применение может снизить общую производительность параллельного алгоритма.

Граничные условия, входящие в постановку задачи через интегралы по поверхности, например, давление, заданное на части границы, в процессе формирования СЛАУ дают вклад в вектор правой части СЛАУ. Значения, входящие в вектор правой части, также, как и значения матрицы жесткости, могут быть эффективно вычислены на нескольких независимых потоках, поскольку данные вычисления независимы для различных элементов расчетной сетки. Граничные условия на перемещения хранятся в виде массива, поэтому проверка величины, записываемой в матрицу, на попадание в данный массив распараллеливается посредством разделения массива между потоками и независимой проверки для каждого элемента. Аналогично случаю матрицы жесткости, граничные условия на перемещения для вектора правой части проверяются прохождением по массиву, т.е. прохождением по части массива каждым из процессоров.

Результатом решения системы линейных уравнений является вектор перемещений для всех узлов расчетной сетки. На практике не менее важны для инженерного анализа значения деформаций и напряжений в элементах расчетной сетки. Вычисление напряжений и деформаций для элемента в простейшем случае не зависит от данных для других элементов и не требует синхронизации между процессорами. Поэтому данный этап также эффективно распараллеливается средствами технологии OpenMP.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

В процессе решения рассмотренных в предыдущих главах краевых задач методами конечных и спектральных элементов на одном из этапов возникает необходимость в решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной матрицей. Причём в динамических задачах при использовании неявной схемы интегрирования по времени и(ли) нелинейных задачах при использовании метода Ньютона необходимо решать СЛАУ на каждом шаге/итерации. Зачастую это системы достаточно большого размера с матрицами со сложной структурой (зависит от размерности задачи, порядка схемы и того, насколько мелкая сетка получилась в результате дискретизации). В зависимости от задачи, матрицы могут быть симметричными (в линейных задачах) или несимметричными (в нелинейных задачах). Чем сложнее геометрическая модель и неоднородны свойства материала в рассматриваемой задаче, тем более нерегулярен будет портрет матрицы (структура заполнения ненулевыми элементами) и больше число обусловленности матрицы. Примеры портретов матриц, возникающих в результате решения краевых задач теории наложения конечных деформаций с помощью МКЭ (Глава 1) приведены на Рисунок 166. Решение задачи МКЭ получается тем точнее, чем мельче сетка, потому возможность эффективно решать большие системы линейных алгебраических

уравнений (СЛАУ) в параллельном режиме является важной задачей, требующей отдельного рассмотрения подходов к оптимизации алгоритмов ее решения.

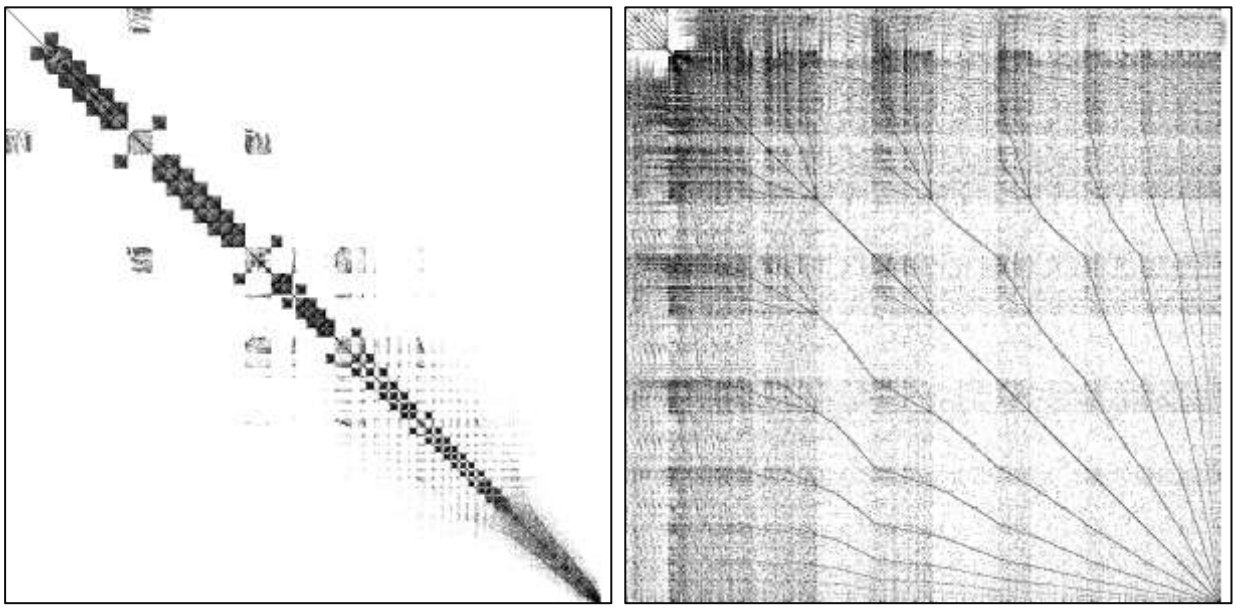


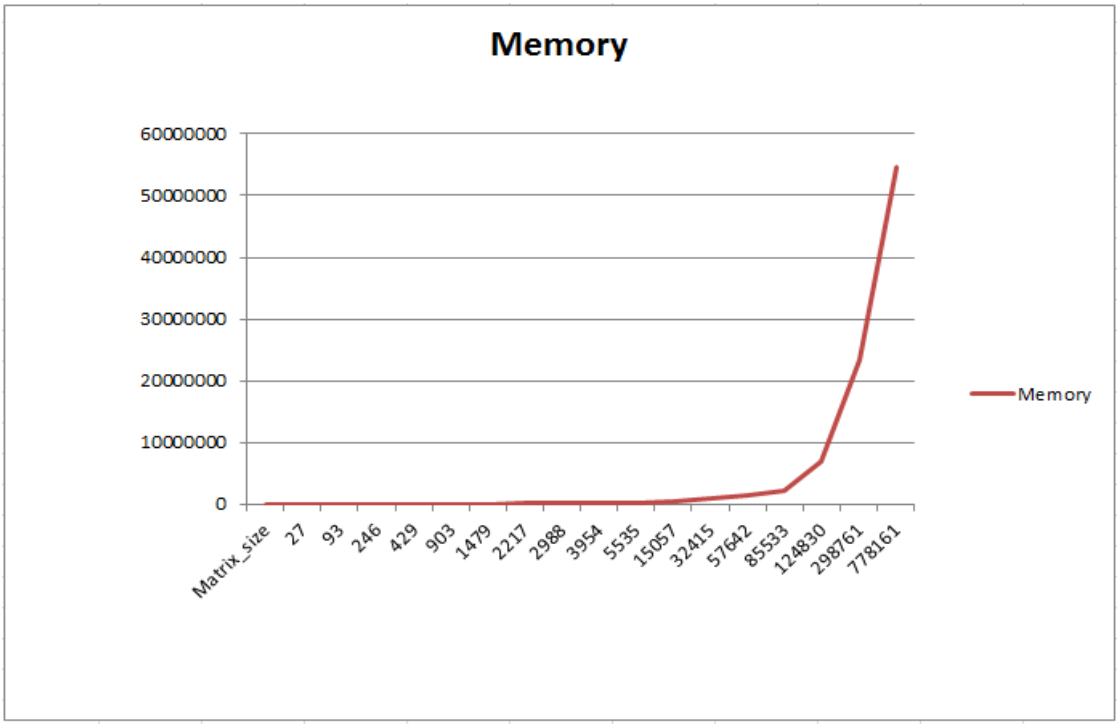
Рисунок 166 Примеры портретов разреженных матриц СЛАУ, полученных в результате дискретизации двумерной (слева) и трёхмерной (справа) краевых задач теории наложения. Черные точки – ненулевые элементы.

Методы решения СЛАУ делятся на прямые и итерационные. Прямые методы, как правило, точнее и надежнее, но требуют значительно больших вычислительных ресурсов, поэтому, начиная с некоторого размера матриц, их применение становится невозможным. Наиболее эффективными и устойчивыми среди итерационных методов решения СЛАУ с разреженной матрицей считаются так называемые проекционные методы, основанные на подпространствах Крылова [26]. Данные методы поддерживают работу с различными строчными (столбцовыми) форматами хранения разреженных матриц, допускают применение предобуславливателей. Наиболее ресурсоемкие операции в итерационных методах - это умножение матрицы на вектор и умножение матрицы на матрицу, для которых существуют алгоритмы эффективного распараллеливания.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с построенной матрицей жесткости и правой частью на многоядерной системе с общей памятью использовались функции в составе библиотеки Intel MKL [808]. Intel MKL предоставляет возможность достаточно гибкой работы с итерационными методами решения СЛАУ. После каждого шага алгоритма управление возвращается и можно получить все необходимые данные, которые получены на данный момент, а также выполнить проверку критериев сходимости и остановки, возможно добавить в алгоритм сторонний предобуславливатель и т.д.

В CAE Fidesys реализован алгоритм автоматического выбора решателя СЛАУ [246, 729]. Сначала оценивается доступная оперативная память на компьютере, где происходит расчёт. Далее, исходя из размера матрицы, который напрямую зависит от того, насколько мелкая сетка построена в задаче, определяется, сможет ли эта задача быть решена прямым методом. Если да, то мы используем его, так как он даёт самое точное решение, ограниченное лишь машинной точностью. В противном случае используются итерационные методы. Далее делается проверка, что на главной диагонали матрицы отсутствуют нули, что позволяет использовать самый быстрый в построении предобуславливатель – диагональный (или предобуславливатель Якоби). Для большинства задач его оказывается достаточно. Если с ним не получилось решить систему ввиду плохой обусловленности матрицы, то решение перезапускается с более "тяжелыми" предобуславливателями.

На Рисунок 167 показаны результаты оценки требуемой оперативной памяти и времени решения для прямого метода, предлагаемого в PARDISO из Intel MKL. Можно заметить, что, начиная с матриц размером 150 тыс. строк и более, оперативной памяти перестаёт хватать и начинает использоваться режим OOC (Out Of Core), т.е. все данные, не помещающиеся в оперативной памяти, начинают записываться на жёсткий диск. Из-за этого сразу же начинает очень существенно расти время расчётов и становится разумным использовать итерационные методы, такие как CG (Conjugate Gradient, метод сопряженных градиентов, применим к симметричным положительно определенным системам), BiCGStab (Biconjugate gradient stabilized method, стабилизационный метод бисопряженных градиентов, применим к несимметричным системам) и GMRES (Generalized minimal residual method, метод наименьших невязок, применим к несимметричным системам). Эти методы строятся на основе линейных операций над матрицами и векторами, которые в свою очередь легко поддаются распараллеливанию.



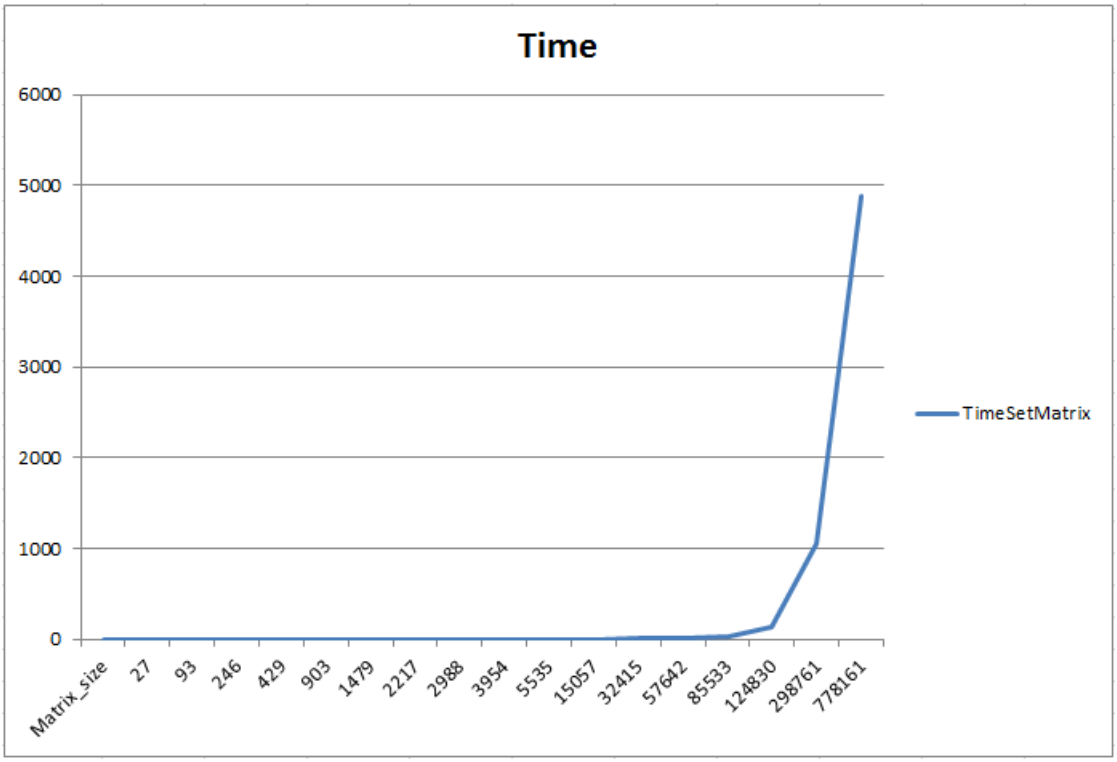


Рисунок 167 Объем требуемой оперативной памяти (сверху) и время решения (снизу) при использовании прямого метода решения СЛАУ в зависимости от размера разреженной матрицы

На Рисунок 168 приведена оценка требуемой оперативной памяти и времени решения итерационным методом CG для различных размеров матрицы. Как можно заметить, для итерационных методов, в отличие от прямых, рост потребляемой памяти растёт линейно вместе

с размером матрицы, что даёт возможность использовать их для задач с большим количеством элементов в сетке.

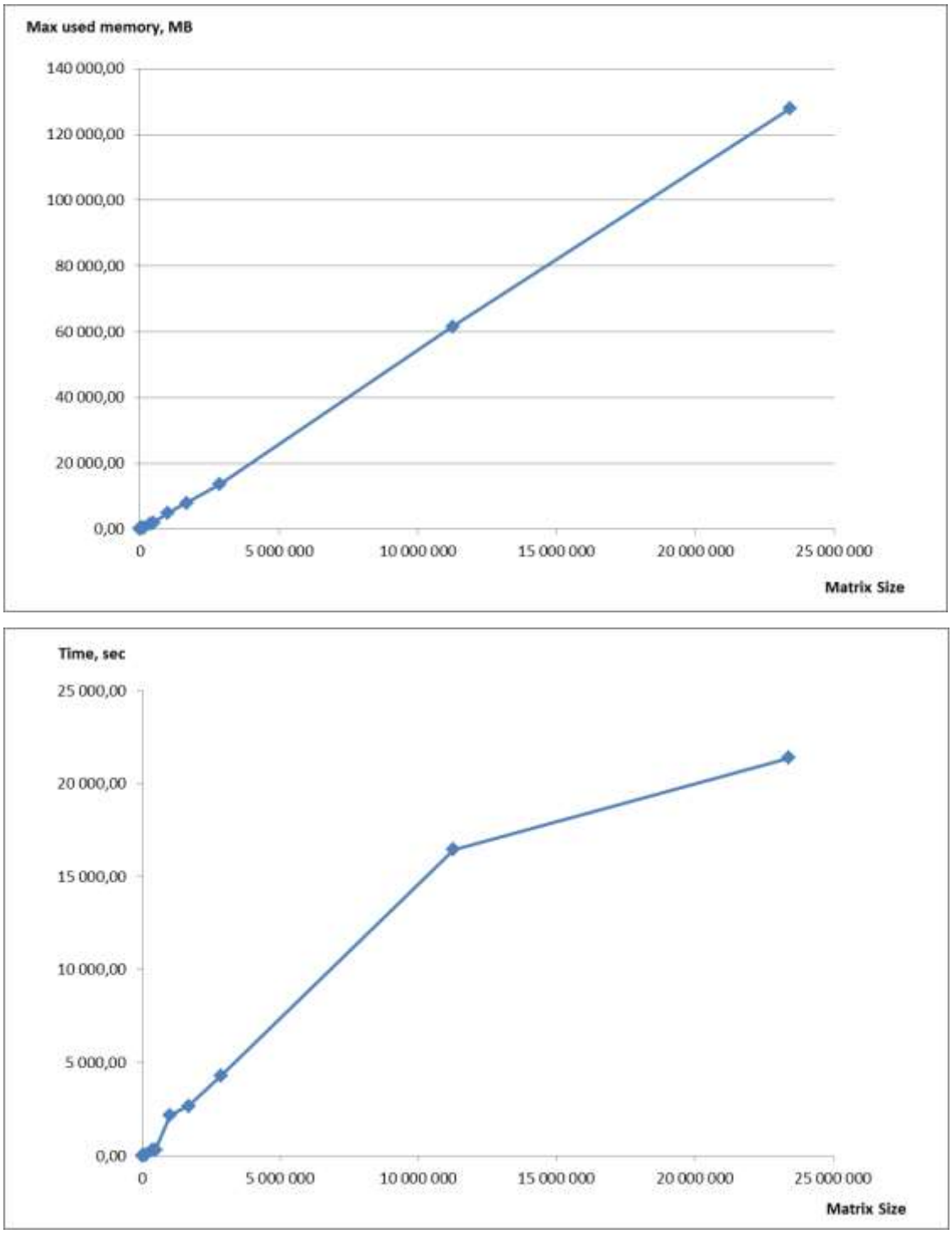


Рисунок 168 Объем требуемой оперативной памяти (сверху) и время решения (снизу) при использовании итерационного метода решения СЛАУ в зависимости от размера разреженной матрицы

Далее были проведены две серии тестов: при использовании прямого метода решения системы линейных уравнений и итерационного. Тестирование проводилось при разном числе потоков на машине с 12 ядрами (24 при включенном режиме hyperthreading). На Рисунок 169 представлен график эффективности использования дополнительных ядер при расчете - отношение времени выполнения задачи на одном ядре, к суммарному времени выполнения на нескольких ядрах. Отметим ожидаемую более высокую эффективность распараллеливания для итерационного решателя СЛАУ.

Рисунок 169 Эффективность (отношение времени выполнения задачи на одном ядре, к суммарному времени выполнения на нескольких ядрах) распараллеливания с использованием OpenMP для прямого и итерационного методов решения СЛАУ

4.3 Применение технологии CUDA

Как было отмечено ранее, для численного решения краевых задач механики деформируемого твердого тела в CAE Fidesys используются метод конечных элементов и метод спектральных элементов. Применение данных методов в реальных промышленных задачах сопряжено со значительными объемами вычислений, вызванными необходимостью проведения расчетов на сетках, состоящих из нескольких десятков миллионов элементов. Во второй главе были приведены примеры данных расчетов в задачах полноволнового моделирования распространении волн в трехмерных неоднородных средах. В третьей главе рассмотрены трехмерные задачи оценки эффективных свойств полноразмерных образцов керна и устойчивости наклонного ствола скважины в слоистой пористой среде, также требующие построения расчетных сеток, состоящих из нескольких миллионов элементов. Важная

особенность методов конечных и спектральных элементов при их параллельной реализации состоит в том, что на этапе составления системы линейных алгебраических уравнений вклад каждого элемента сетки вычисляется независимо от других. Таким образом, данные методы допускают массивное распараллеливание на графических процессорах (GPU), в рамках которого выполняется набор однотипных операций одновременно на каждом конечном элементе.



Рисунок 170 Отличия в архитектурах центрального и графического процессоров

GPU прежде всего предназначены для проведения массивно-параллельных вычислений, например, в задачах рендеринга трехмерных графических изображений. Соответственно, в архитектуре GPU, большое число транзисторов выделяется для обработки данных, а не для кэширования и управления потоками (ветвление, и т.д.), как в случае центрального процессора (Рисунок 170). Другая отличительная особенность – это пропускная способность графической памяти, в разы превышающая оперативную память. Однако доступ к графической памяти сильно связанный - если считывается тексель (минимальный элемент текстуры), то через несколько тактов будет считываться соседний тексель; когда записывается пиксель, то через несколько тактов будет записываться соседний. Правильно организуя доступ к памяти во время работы вычислительного алгоритма, можно получить производительность, близкую к теоретической пропускной способности. В то же время GPU, в отличие от CPU, не обладает многоуровневым кэшем большого размера.

На Рисунок 171 представлена общая структура графического процессора. Он состоит из нескольких потоковых мультипроцессоров (SM). Их число варьируется в зависимости от модели устройства. Каждый мультипроцессор состоит из скалярных процессоров (SP), имеет быструю разделяемую*(shared)* память и регистровую память. Соответственно, перед выполнением программы, SM распределяет имеющиеся ресурсы по отдельным потокам, каждый из которых запускается на отдельном SP. Это распределение влияет непосредственно на производительность – чем меньше регистров использует программа, тем больше параллельных потоков можно запустить. То же самое относится к разделяемой (shared) памяти. Перед исполнением программы, потоки в рамках одного блока разбиваются на группы по 32 –

единицы параллельного исполнения на GPU, которые называются варпами *(warps)*. Каждый warp исполняется параллельно в режиме SIMD мультипроцессорами GPU.

Также доступны константный и текстурный кэши для более быстрого доступа к данным в глобальной графической памяти GPU.

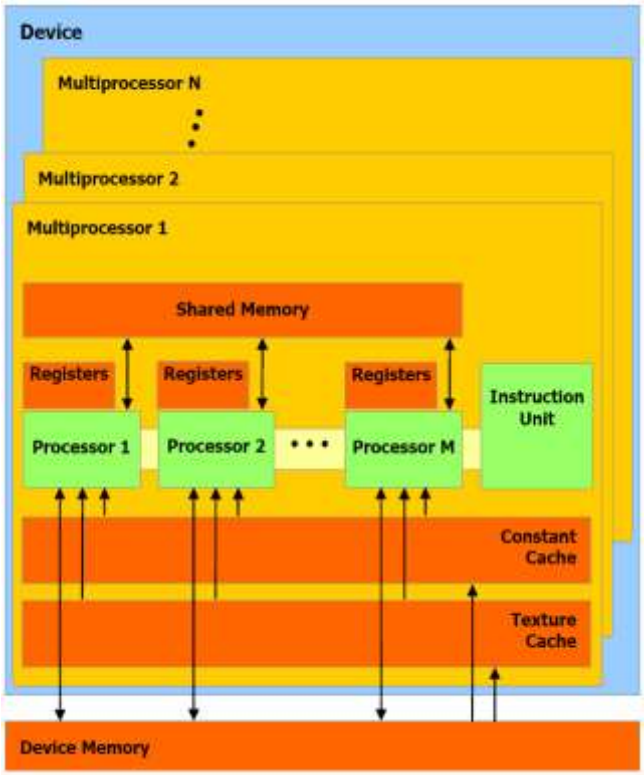


Рисунок 171 Структура графического процессора

С точки зрения программирования на GPU, технология CUDA позволяет включать в текст программы на C/C++ [247, 529, 821] специальные функции – ядра (kernels), которые выполняются на графическом процессоре. CUDA даёт разработчику возможность по своему усмотрению организовывать доступ к набору инструкций графического ускорителя и управлять его памятью, организовывать на нём сложные параллельные вычисления. По сравнению с традиционным подходом к организации вычислений общего назначения посредством возможностей графических API, у архитектуры CUDA можно выделить следующие преимущества в этой области:

- Интерфейс программирования приложений CUDA (CUDA API) основан на стандартном языке программирования C.
- Разделяемая между потоками память (shared memory) может быть использована под организованный пользователем кэш с более широкой полосой пропускания, чем при выборке из обычных текстур.
- Более эффективные транзакции между памятью центрального процессора и видеопамятью

- Полная аппаратная поддержка целочисленных и побитовых операций

Модель CUDA C позволяет разработчику создавать функции на C, называемые ядрами (kernels), которые, при вызове, исполняются массивом параллельных потоков. Таким образом, в случае CUDA имеет место модель параллелизма SIMT–Single Instruction Multiple Threads. Каждая нить (поток) получает определенный номер *(thread ID)*, который доступен внутри ядра через встроенную переменную threadIdx. В программной модели CUDA существует некоторая иерархия потоков (Рисунок 172). Отдельные потоки объединяются в блоки*(blocks)*. Каждый блок потоков исполняется ровно одним потоковым мультипроцессором на GPU (таким образом, один мультипроцессор может иметь в очереди для обработки несколько целых блоков). Потоки одного блока могут обращаться к разделяемой памяти мультипроцессора, при этом есть средства для синхронизации потоков одного блока во время исполнения. Далее, блоки объединяются в сетки*(grids)*. Соответственно, ядро запускается с заданной сеткой, а уже сам GPU распределяет блоки по мультипроцессорам в зависимости от доступных ресурсов. Отметим, что поток (thread) в CUDA имеет далеко не такое же значение, как поток в рамках рассмотренной ранее технологии OpenMP. В отличие от потоков CPU, потоки CUDA очень "лёгкие", то есть переключение контекста между двумя потоками происходит намного быстрее. Непосредственное разбиение потоков по варпам внутри блока и блоков по мультипроцессорам внутри сетки осуществляется уже на аппаратном уровне CUDA. Кроме того, подобная модель хорошо масштабируется. Если конкретный GPU имеет небольшое количество мультипроцессоров, то он будет выполнять блоки последовательно. Если же число вычислительных процессоров велико, то блоки будут выполняться параллельно. Таким образом, один и тот же код может работать на GPU как начального уровня, так и верхнего, и даже будущих моделях графических процессоров. Например, в случае реализации МСЭ с использованием технологии CUDA количество блоков равно количеству спектральных элементов, а количество потоков внутри блока равно количеству GLL-узлов внутри спектрального элемента, что естественным образом задает отображение МСЭ-сетки на сетку (grid) GPU, и число одновременно рассчитываемых спектральных элементов зависит от аппаратных возможностей конкретного GPU, на котором запущен программный код МСЭ.

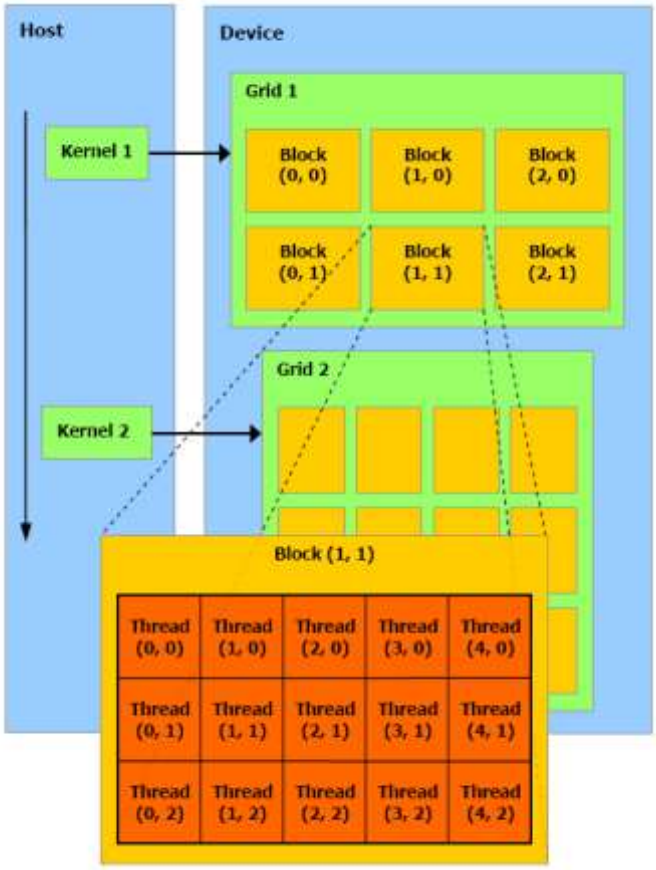


Рисунок 172 Многоуровневая структура потоков на GPU

Для эффективного распараллеливания МКЭ или МСЭ на GPU необходимо рассмотреть одно из наиболее “узких” мест, возникающих при параллельной реализации численных методов решения краевых задач – работу с памятью. На GPU существует 6 различных видов памяти:

- **Регистры**

  Используются для хранения промежуточных результатов. Расположены на мультипроцессоре. Имеют высокую скорость доступа (2-3 такта работы процессора). Используются для хранения временных локальных переменных внутри потока.

- **Разделяемая память (Shared Memory)**

  Управляемый кэш. Расположен на мультипроцессоре. Также имеет высокую скорость доступа. Позволяет как считывать, так и записывать данные. Например, разделяемый кэш эффективно использовался при реализации МСЭ на GPU, в рамках которой 1 блок CUDA соответствовал 1 спектральному элементу, и соответственно построение локальных матриц масс, жесткости и вектора внешних нагрузок проводилось потоками внутри блока с активным обменом данными внутри кэша без необходимости частых обращений к глобальной графической памяти.

- **Локальная память**

Расположена вне мультипроцессора. Не кэшируется. Скорость доступа низкая. Позволяет как считывать, так и записывать данные. В локальную память, как правило, попадают данные (например, локальные для потока массивы), не поместившиеся в регистрах.

- **Глобальная память**

  Отличается от локальной памяти большим размером и более медленной скоростью доступа. В ней хранятся основные данные задачи (поля перемещений, координаты узлов и элементы сетки и т.д.).

- **Константная**

  Память вне мультипроцессора, кэшируемая. Используется только на чтение. В основном применяется для хранения константных данных задачи (GLL-координаты, веса кубатурной формулы, порядок схемы, математические константы и т.п.).

- **Текстурная**

  По структуре близка к константной памяти, но использует двумерное локальное обращение к данным в глобальной памяти. Применяется для кэшируемого доступа из-под потока к глобальным массивам с локально упорядоченными данными.

Эффективность применения текстурного и других видов кэша во многом определяется количеством попаданий/промахов в кэш при считывании данных из глобальной памяти. В случае МКЭ/МСЭ это приводит к требованию оптимальной нумерации узлов сетки - узлы сетки внутри одного элемента имеют близкие индексы, что обеспечивает близкое расположение соответствующих этим узлам данных (координат, перемещений и т.д.) в глобальных массивах, и при считывании данных по узлу внутри блока, близлежащие данные кэшируются и скорость их считывания другими потоками внутри блока значительно возрастает. С другой стороны, для узлов элемента с сильно отличающимися индексами (позициями в глобальных массивах данных) время считывания данных по узлам из глобальной памяти прямо пропорционально количеству узлов, т.е. в худшем случае имеет место линейный рост временных затрат на работу с памятью по числу узлов сетки.

Задача оптимальной нумерации узлов сетки сводится к решению задачи сжатия полосы разреженной матрицы связности графа, соответствующего данной сетке. Кроме того, если ненулевые элементы разреженной матрицы находятся в некоторой полосе вдоль главной диагонали, то система линейных уравнений с такой матрицей может быть решена существенно быстрее и с меньшими затратами по памяти нежели, чем система уравнений с матрицей, обладающей тем же набором ненулевых элементов, но расположенных в матрице в произвольном порядке. В связи с этим значительно сократить время не только при построении

матрицы, но и при решении СЛАУ с ней можно путем специальной перестановки строк и столбцов матрицы системы (Рисунок 173) - перенумерации [395].

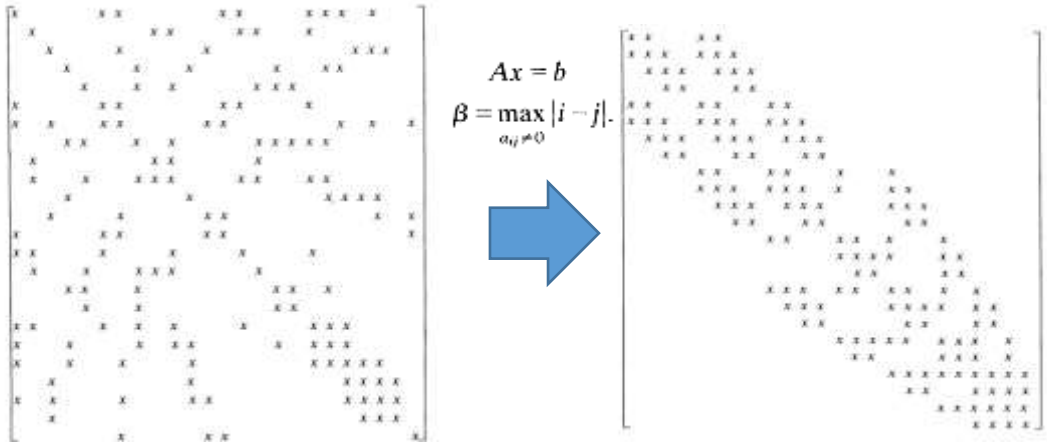


Рисунок 173 Перенумерация строк и столбцов разреженной матрицы

Для приближенного решения NP-полной задачи оптимальной нумерации узлов МКЭ-сетки существует ряд алгоритмов (Рисунок 174):

- Reverse Cuthill McKee (RCM) [395]
- Z-curve [628]
- Hilbert curve [470]
- Metis [518]

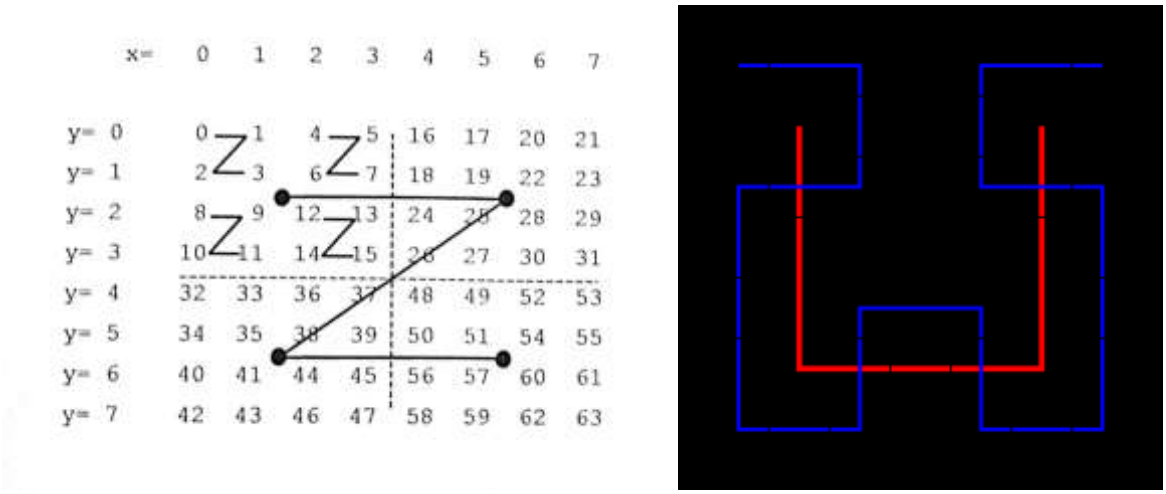


Рисунок 174 Алгоритмы Z-кривой (слева) и кривой Гильберта (справа) в задаче оптимальной нумерации

Алгоритмы Z-кривой и кривой Гильберта обеспечивают локальное сближение номеров сетки, при этом сужение полосы глобальной матрицы связности происходит незначительное. Рассмотрим подробнее алгоритмы RCM и Metis. Первый из них реализован в пакете библиотек boost (http://www.boost.org). Metis (http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis/) — набор программ для разбиения графов на подобласти, разбиения конечно-элементных расчетных

сеток на подобласти и оптимальной перенумерации. Metis зарекомендовал себя высоким качеством перенумерации, в результате которой полоса разреженной матрицы становится значительно «уже», чем при использовании других алгоритмов. При использовании данного алгоритма на первом этапе необходимо осуществить перевод расчетной сетки в формат графа связности Metis.

Результаты сравнения времени работы алгоритма МКЭ при использовании методов перенумерации RCM и Metis представлены на Рисунок 175. Отметим, что ускорение расчетов становится существенным только на задачах с количеством узлов более 1 миллиона. На задачах с количеством узлов в конечноэлементной аппроксимации менее 10 тысяч перенумерация дает выигрыш, который нивелируется временем, затрачиваемым на саму перенумерацию.

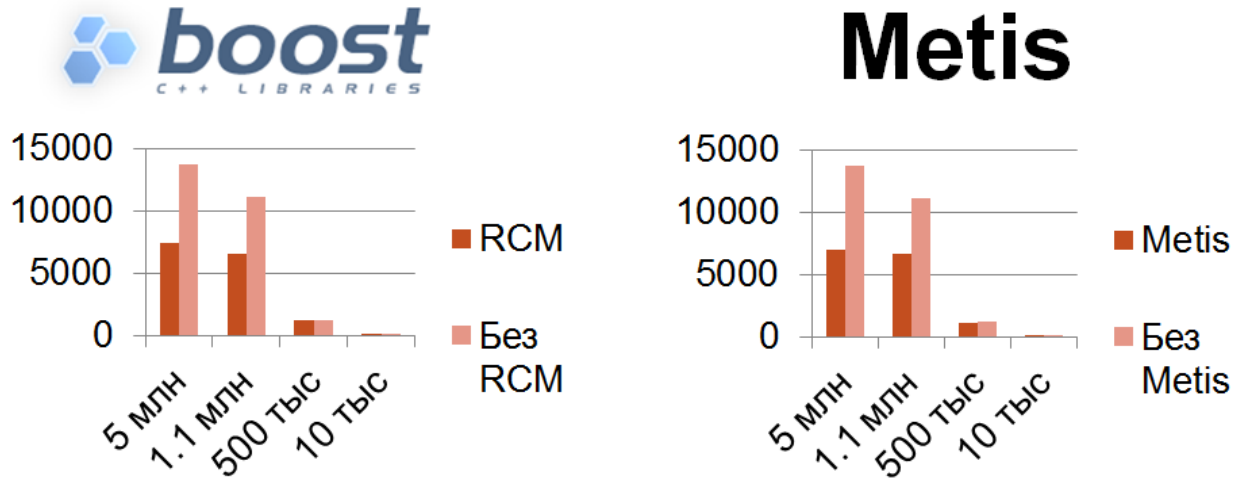


Рисунок 175 Сравнение времени работы МКЭ-решателя при использовании методов перенумерации RCM и Metis

Во время исполнения программы на CUDA потоки могут одновременно обращаться к нескольким видам памяти, как показано на Рисунок 176. Каждый поток имеет доступ к своей собственной локальной памяти. Потоки одного блока могут обращаться к разделяемой памяти, которая существует тот же период времени, что и блок. И, наконец, все потоки имеют доступ к глобальной памяти устройства. При обращении к текстурной памяти работает текстурный кэш, поэтому в некоторых случаях удается достигнуть более высокой скорости получения данных. Константная память применяется, в том числе, для передачи параметров ядрам.

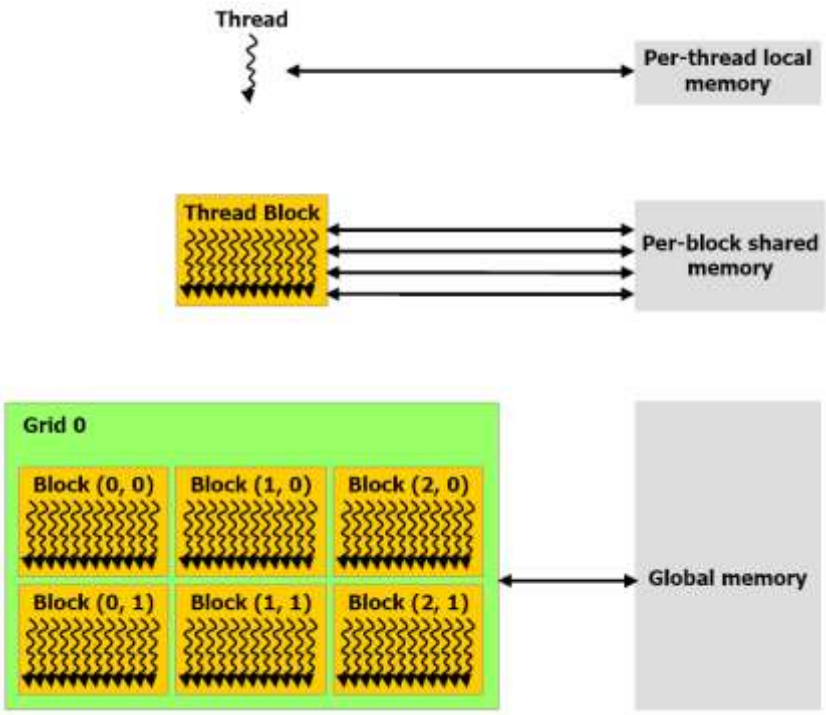


Рисунок 176 Виды памяти на GPU

При обращении к глобальной памяти есть возможность объединять запросы нескольких потоков одного блока в один. Такие запросы называются *coalesced*. Данный механизм обеспечивается за счет возможности GPU считывать блоки памяти размером 32, 64 и 128 байт за один запрос. При этом необходимо, чтобы адреса запросов были выровнены по 32, 64 и 128 байт соответственно для 16 нитей, или одного полу-варпа *(half-warp)*. Таким образом, например, если нити одного полуварпа читают последовательные элементы в памяти размером 4 или 8 байт, то обращение к памяти идет наиболее оптимальным образом – всего за одну транзакцию. Использование данного механизма позволило существенно повысить пропускную способность алгоритма МСЭ при организации доступа к глобальной памяти, что положительно сказалось на общей производительности разработанной программы на основе CUDA.

Также при разработке МКЭ/МСЭ алгоритма на CUDA использовались следующие правила, которые позволили эффективно задействовать перечисленные ранее возможности GPU:

- по возможности, промежуточные вычисления повторяются, а не сохраняются, т.к. зачастую пересчитать значение временной переменной существенно быстрее, чем считать ее значение из глобальной памяти, кроме того это позволяет сэкономить достаточно ограниченную по размеру графическую память;
- используются структуры массивов вместо массивов структур для обеспечения *coalesced* доступов к глобальной памяти;

- оптимальное количество потоков в блоке для конкретного ядра (kernel) вычисляется с помощью CUDA Occupancy Calculator.

Алгоритм распараллеливания

Алгоритм решения статической краевой задачи упругости с помощью МКЭ можно условно разделить на три основных этапа: подготовка данных, определение НДС (напряженно-деформированное состояние) тела и обработка результатов.

В этап подготовки данных входит: генерация расчетной сетки, задание параметров задачи (свойства материалов, нагрузки, начальные деформации и т.д.), создание внутренних объектов расчетного ядра (создание узлов и элементов сетки, запись характеристик материалов и собственных деформаций в элементы, запись граничных условий в созданные узлы и элементы, перенос начальных деформаций в элементы и т.п.).

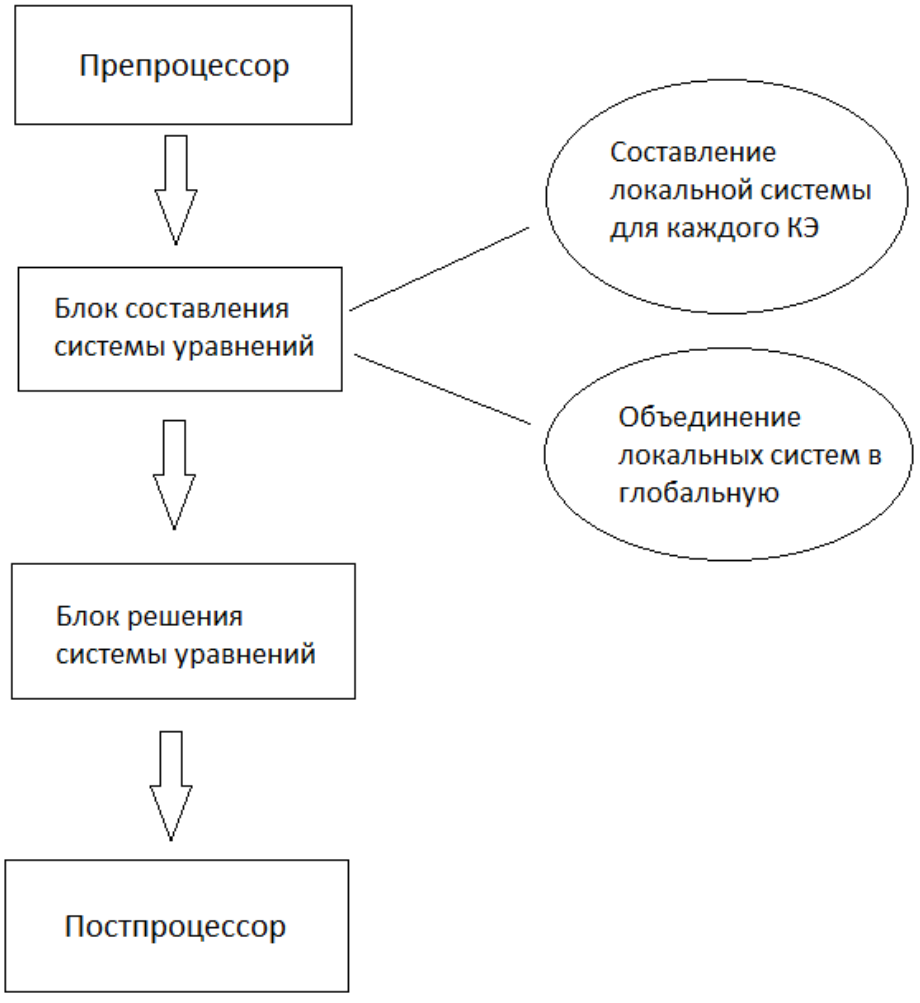


Рисунок 177 Основные этапы расчета в МКЭ

Алгоритм параллельного вычисления напряженно-деформированного состояния тела с использованием МКЭ/МСЭ может отличаться в зависимости от его реализации на конкретной программно-аппаратной платформе, однако можно выделить несколько основных этапов

(Рисунок 177), присущих всем реализациям. Это составление матрицы системы линейных алгебраических уравнений, составление вектора правой части и решение системы линейных алгебраических уравнений с полученной матрицей и вектором правой части. Эти три этапа наиболее затратны по количеству вычислительных операций. Поэтому им уделено далее особое внимание при оценке производительности расчетного ядра. Составление матрицы происходит следующим образом: для каждого элемента расчетной сетки вычисляется локальная матрица, после чего записывается в глобальную. Данные для составления локальной матрицы элемента независимы от данных других элементов, а количество элементов может быть очень велико (от нескольких тысяч до нескольких миллионов) Поэтому данная часть может быть эффективно распараллелена за счет использования технологии массивно параллельных вычислений с помощью графических процессоров Nvidia CUDA. По аналогичным причинам может быть распараллелено составление вектора правой части. Несмотря на то, что вычислительные затраты для нахождения вектора правой части малы по сравнению с затратами на составление матрицы, в некоторых расчетных ядрах этому этапу стоит уделять внимание (например, в задачах динамики, в которых не требуется перестраивать матрицу системы на каждом шаге интегрирования). Завершающий этап решения задачи МКЭ включает в себя обработку (анализ) и сохранение результатов расчета и очистку памяти.

Прежде чем производить вычисления на GPU требуется скопировать все необходимые данные на вычислительное устройство. Процедура копирования данных из памяти центрального процессора в память графического процессора по шине PCI-Express наиболее затратна по времени ввиду наименьшей пропускной способности в сравнении с остальными видами памяти, рассмотренными ранее. Поэтому необходимо минимизировать объем данных для отправки с/на GPU. В связи с этим значительно эффективнее решать СЛАУ сразу после ее составления на GPU, а не копировать систему в память центрального процессора для последующего решения на нем (Рисунок 178).



Рисунок 178 Сквозное формирование матрицы и решение СЛАУ на GPU

В случае моделирования динамических процессов при конечных деформациях и их наложении возникает необходимость решать ряд задач нелинейной теории упругости, что, в свою очередь сводится, к решению нелинейной системы алгебраических уравнений. Решение этой системы находится с использованием метода Ньютона. Для моделирования 100 шагов по времени приведенные на Рисунок 177 этапы вызываются порядка 1000 раз при использовании неявной схемы интегрирования по времени. Поэтому для моделирования динамических эффектов с высокой степенью дискретизации требуется большое количество вычислительных ресурсов. Для примера, один шаг метода Ньютона для модели с сеткой, содержащей более миллиона элементов, требует порядка 30 минут, что делает расчет динамической задачи на данной сетке фактически невозможным на персональном компьютере (расчеты производились на компьютере с процессором intel core 2 quad Q8400 2.66 Ghz). Однако все перечисленные этапы решения распадаются на множество более мелких подзадач с независимыми данными.

Это позволяет применить массивно параллельный подход к решению задачи. Применение технологии CUDA позволяет уменьшить общее время расчета в несколько (а в некоторых случая десятков) раз. Причем с увеличением размера расчетной сетки, ускорение по отношении к последовательной версии увеличивается. Опишем более детально каждый из приведенных этапов решения.

Составление матрицы системы

Глобальная матрица системы линейных алгебраических уравнений ассемблируется [787] из локальных матриц, составленных для каждого элемента расчетной сетки. Для каждого элемента расчетной сетки строится локальная матрица, которая не зависит от локальных матриц на других элементах. После чего элементы локальных матриц прибавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы. В параллельной версии программы составление глобальной матрицы жесткости производится иначе (Рисунок 179). Перед началом вычислений все данные о сетке, свойствах материала и граничных условиях копируются в графическую память GPU. Ввиду того, что динамическое выделение памяти невозможно внутри CUDA-потоков (а также приведет к резкому падению производительности в массивно-параллельном SIMT режиме), перед тем, как начать заполнять глобальную матрицу жёсткости, строится её портрет – на основе графа связности построенной конечноэлементной сетки формируется структура матрицы с нулевыми элементами на позициях, соответствующих узлам сетки. Для этого определяются индексы элементов в глобальной матрице жёсткости, которые будут ненулевыми. ij–ый элемент матрицы будет ненулевой, если i-ый и j-ый узлы расчётной сетки соединены ребром. Таким образом, после того как мы построили расчётную сетку, можно определить по ней структуру глобальной матрицы жёсткости.

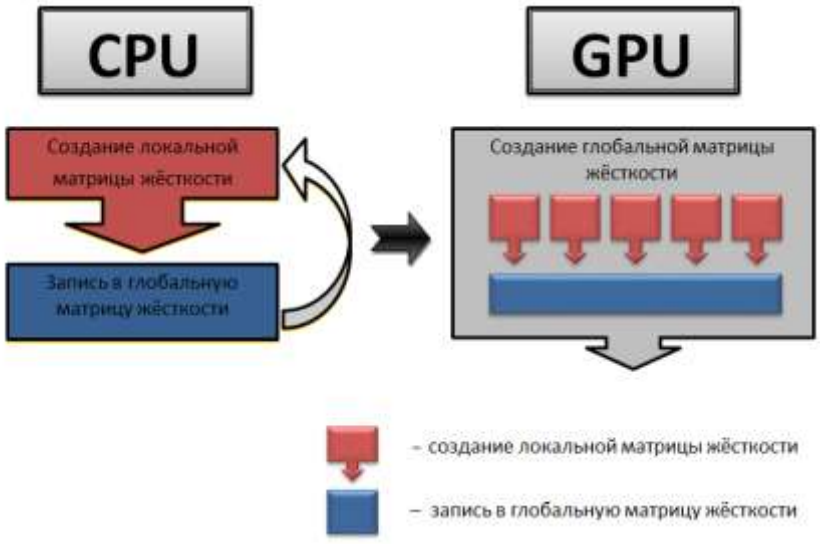


Рисунок 179 Ассемблирование глобальной матрицы жесткости в последовательной и параллельной версиях алгоритма

Далее для каждого конечного элемента, создаются локальные матрицы жесткости и добавляются к определённым элементам глобальной матрицы жесткости в соответствии со стандартной процедурой ассемблирования. Создание локальных матриц жесткости происходит независимо друг от друга в отдельных потоках общим количеством, равным числу элементов в сетке - по сути, в массивно параллельном режиме. Для создания локальной матрицы жёсткости требуется относительно небольшой размер локальной памяти потока, что позволяет использовать технологию CUDA для распараллеливания. При этом для различных локальных матриц данные могут подсуммироваться в один и тот же элемент глобальной матрицы, если соответствующие им конечные элементы содержат общие узлы. В результате может возникать гонка данных и коллизия типа “чтение-после-записи”. Для решения данной проблемы возможны два подхода. В первом случае можно использовать атомарные операции или другие механизмы синхронизации, что естественно приводит к нарушению общей концепции массивного параллелизма (single instruction multiple data - SIMD).

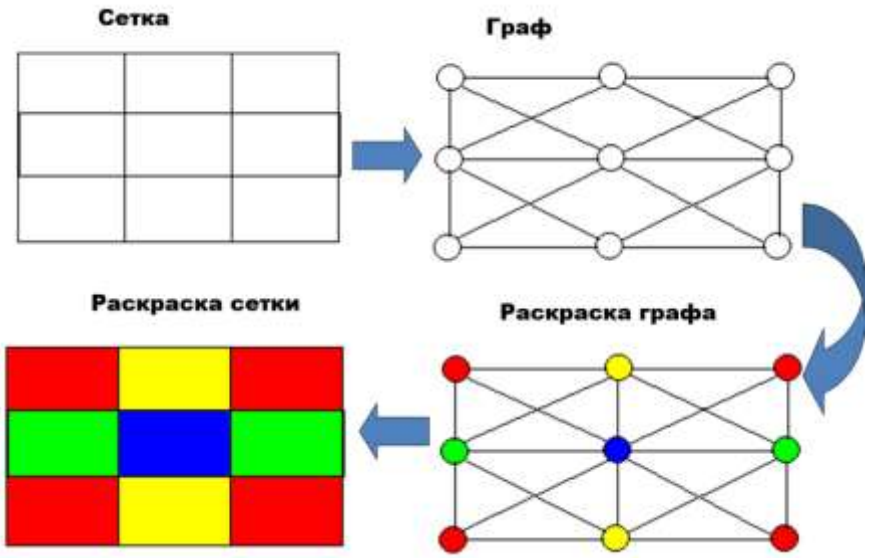


Рисунок 180 Раскраска сетки на непересекающиеся подмножества. Элементы одного цвета не имеют общих узлов.

Во втором варианте, сохраняющем SIMD массивный параллелизм, применяется раскраска элементов сетки (Рисунок 180), обеспечивающая условие, что элементы одного цвета не имеют общих узлов. Это позволяет записывать значения из локальных матриц в глобальную матрицу без конфликтов доступа к данным. Заметим, что раскраска сетки производится один раз на начальном этапе работы алгоритма МКЭ.

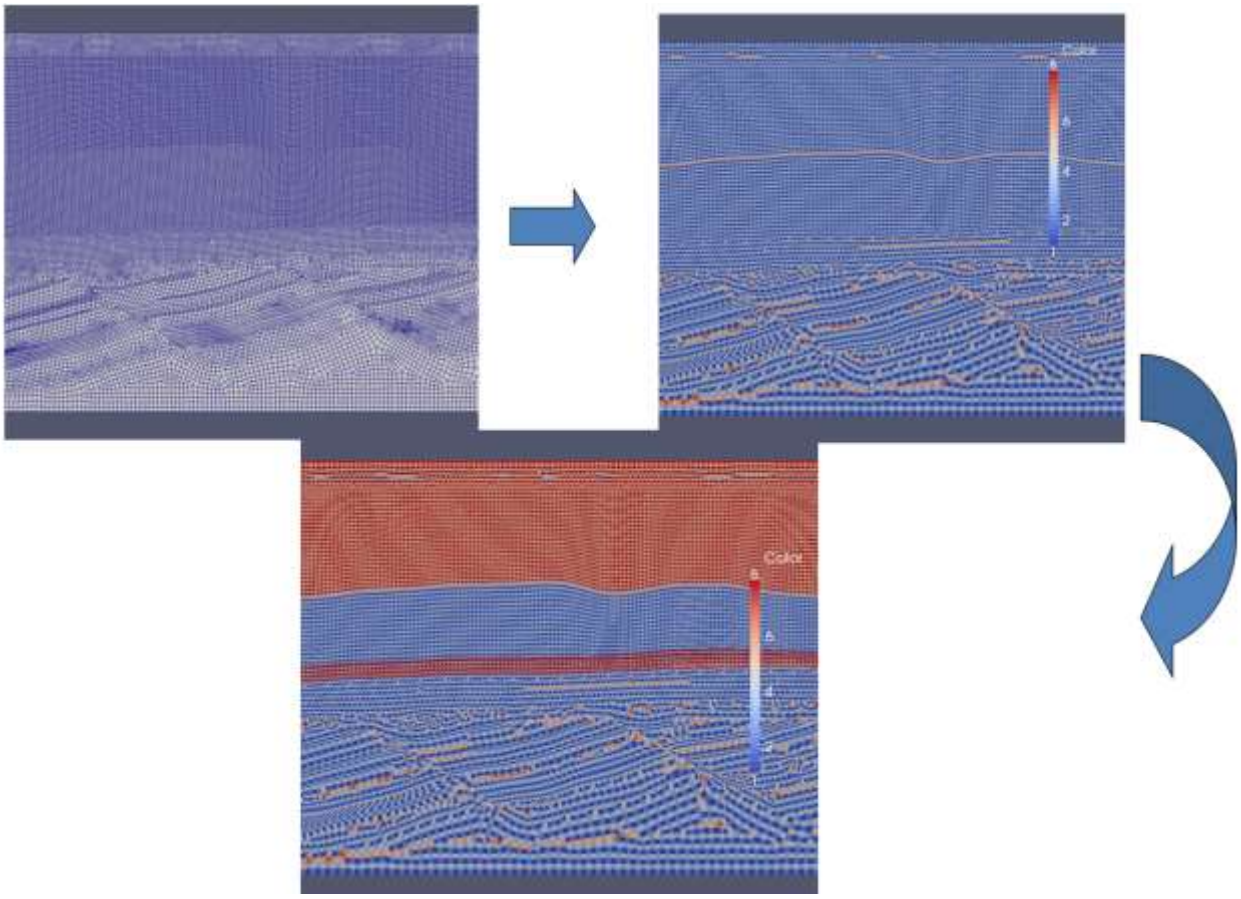


Рисунок 181 Раскраска сетки и балансировка цветов в двумерном случае

Разбив сетку по цветам, можно переходить непосредственно к ассемблированию локальных матриц в глобальную. Однако, чтобы обеспечить полную загрузку GPU, в каждой группе одного цвета должно содержаться достаточное число элементов, чтобы все мультипроцессоры работали в режиме полной загрузки, иначе итоговая общая производительность МСЭ-кода будет ниже, нежели она была бы без использования раскраски. Поэтому дополнительно применяется балансировка цветов (Рисунок 181), чтобы обеспечить примерно равное число элементов каждого цвета.

Рассмотренный алгоритм ассемблирования одинаковым образом подходит и для трёхмерных задач (Рисунок 182) лишь с одним замечанием: для неструктурированной сетки в трёхмерном случае число различных цветов может достигать 30 или даже 40. Кроме того, как хорошо известно, задача оптимального раскрашивания (с целью уменьшения числа цветов) является NP-полной задачей, так что она не может быть точно решена за разумное время на современных архитектурах. Соответственно для ее решения применялись приближенные алгоритмы, например, “жадный” (greedy) алгоритм, в ряде случаев, дающие сильно завышенное количество цветов по отношению к минимально возможному.

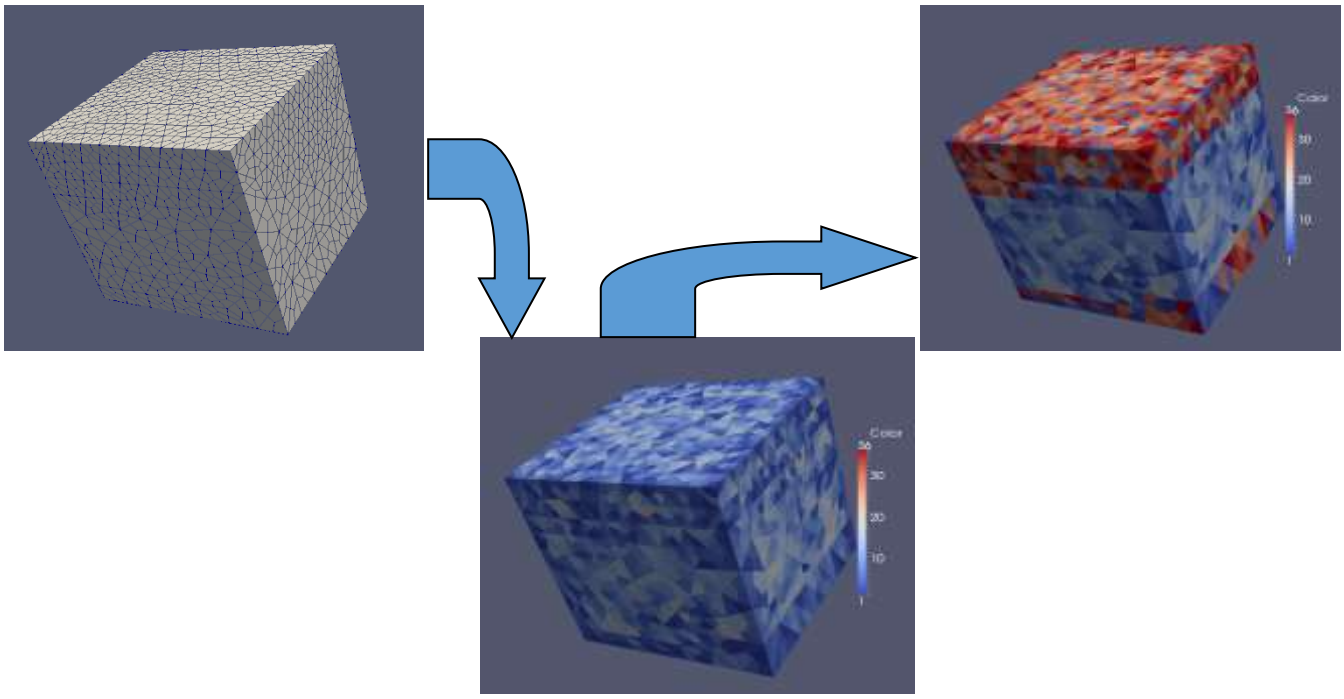


Рисунок 182 Раскраска сетки и балансировка цветов в трёхмерном случае

В заключение отметим, что результатом раскраски сетки явилась экономия по времени работы массивно-параллельного алгоритма ассемблирования матрицы жесткости на 20-30%. Пример распределения общего времени построения глобальной матрицы жесткости на GPU по основным этапам приведен на Рисунок 183.

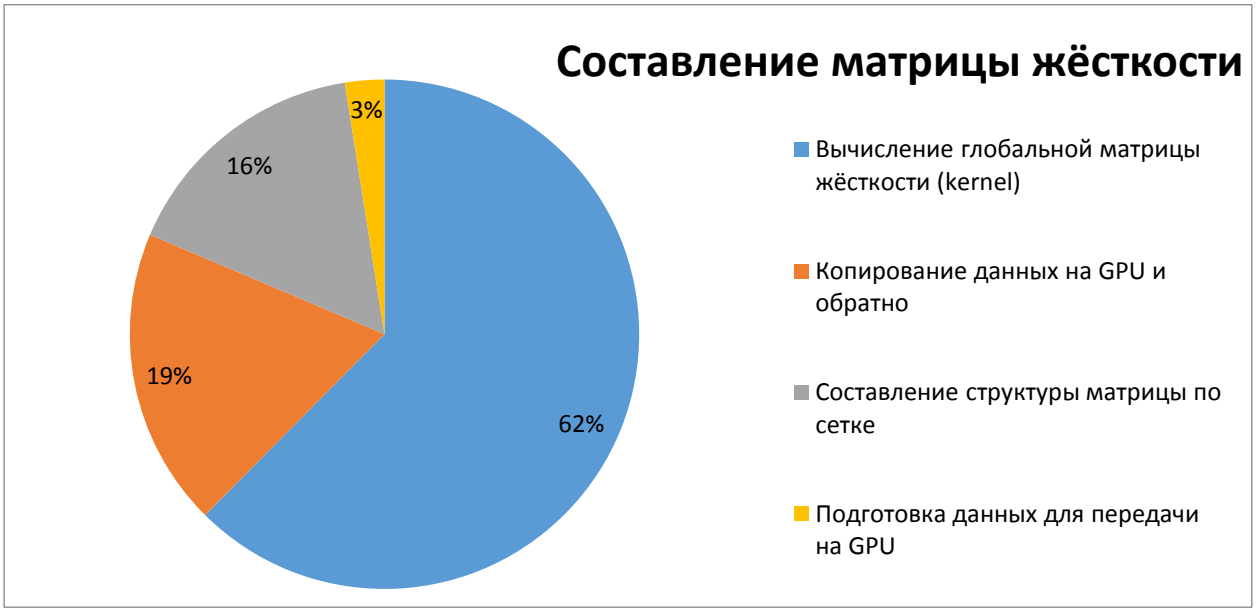


Рисунок 183 Основные этапы формирования матрицы жесткости на GPU

Составление вектора нагрузок

Составление вектора правой части аналогично составлению матрицы системы уравнений. Для каждого элемента расчетной сетки строится свой локальный вектор, после чего компоненты вектора прибавляются к соответствующим компонентам глобального вектора в

соответствии с выбранным подходом к ассемблированию в массивно-параллельном режиме. Однако в данном случае алгоритм ассемблирования упрощается, так как нам не нужно заранее определять структуру заполняемого объекта.

Решение СЛАУ

Как было ранее показано, для решения больших систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей предпочтительно применение итерационных методов, основанных на операциях линейной алгебры. Данные операции распараллеливаются на графических процессорах с использованием соответствующих программных библиотек. Например, одной из наиболее эффективных является библиотека CUSP [822].

CUSP – это библиотека для решения задач линейной алгебры с разреженными матрицами с помощью технологии CUDA. Библиотека представляет собой высокоуровневый интерфейс для:

- итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной матрицей;
- переводов матрицы в различные форматы хранения для разреженных матриц;
- задания матриц в формате MatrixMarket;
- перемещения данных между оперативной памятью и памятью на GPU.

В CUSP, среди прочих, реализованы два популярных метода итерационного решения СЛАУ:

- метод сопряжённых градиентов (conjugate gradient method, CG) – метод нахождения локального минимума функции на основе информации о её значениях и её градиенте. Данный метод применяется для решения СЛАУ с симметричной матрицей.
- стабилизированный метод бисопряжённых градиентов (biconjugate gradient stabilized method, BiCGStab) – модификация метода сопряжённых градиентов, которая позволяет решать СЛАУ с несимметричной матрицей.

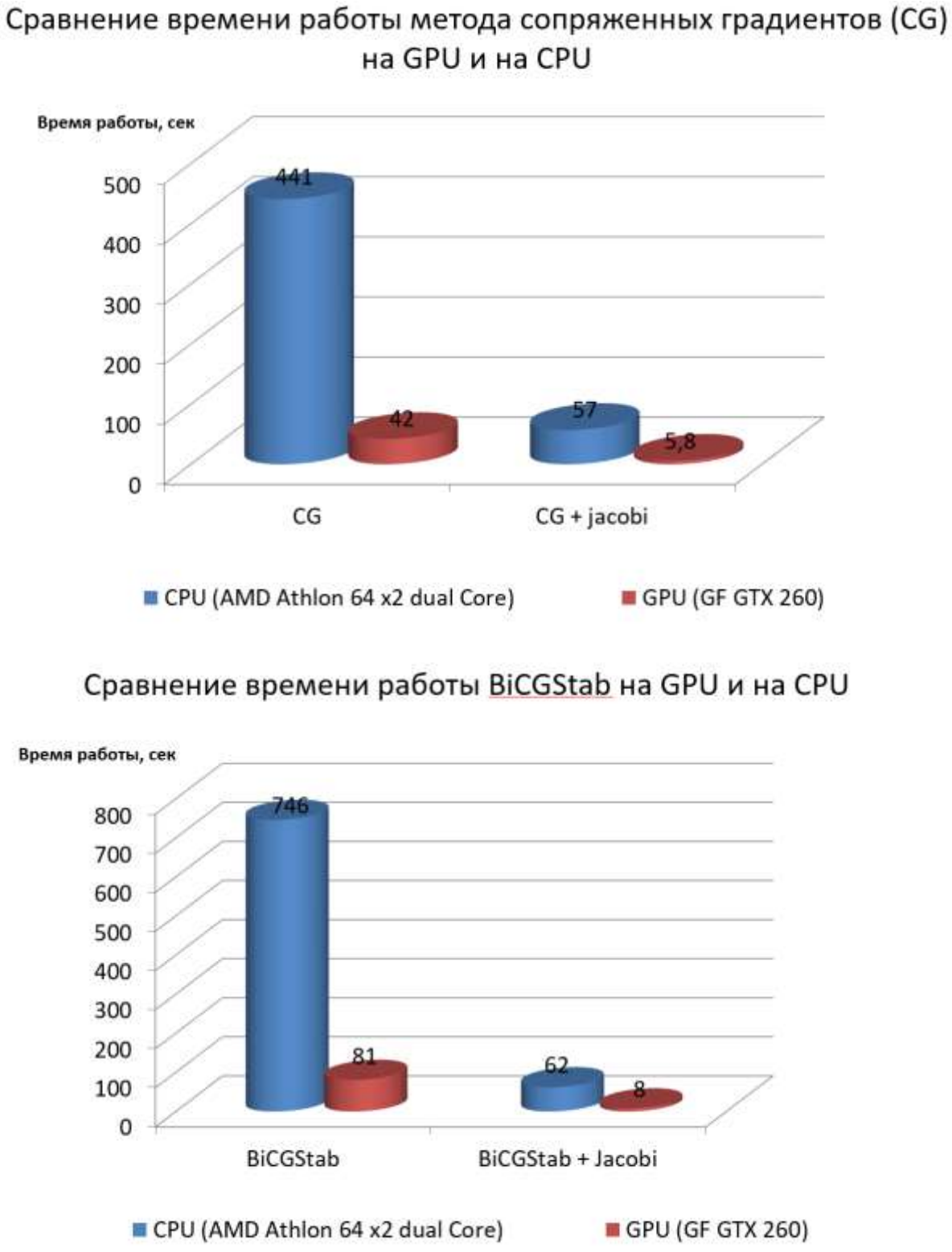
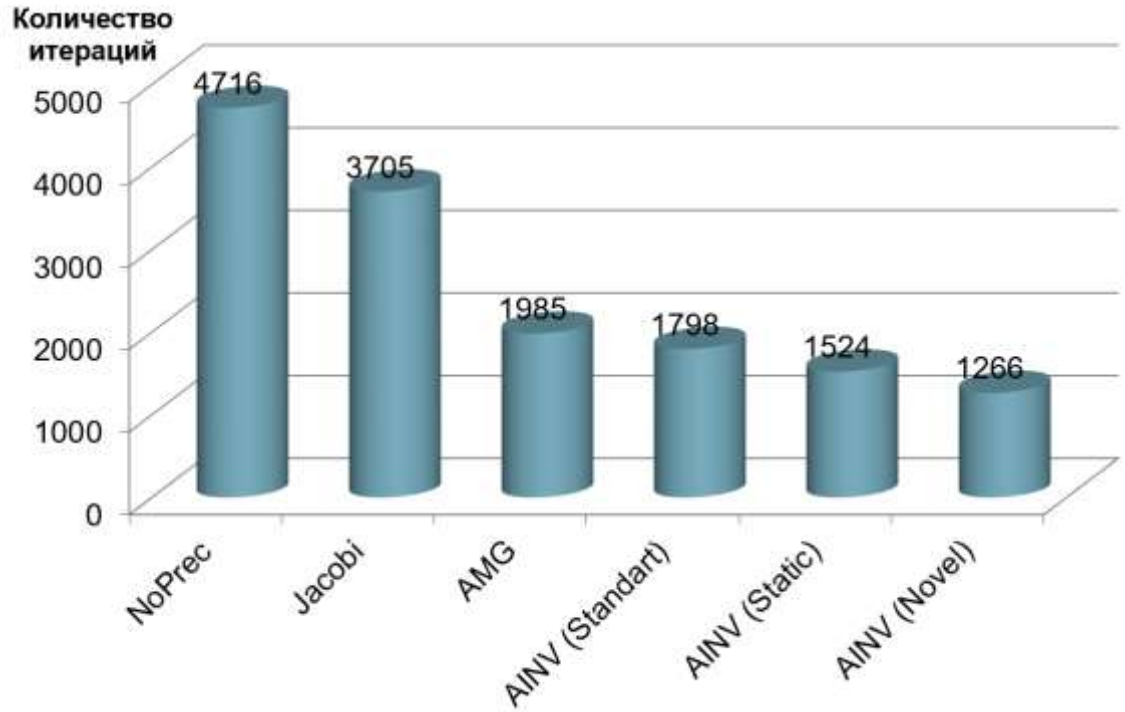


Рисунок 184 Сравнение времени работы итерационных решателей CG(сверху) и BICGStab (снизу) на CPU и GPU.

Помимо этого, в CUSP реализована возможность применять различные предобуславливатели для обоих методов (CG и BiCGStab). Заметим, что использование предобуславливателей ведет к дополнительным накладным расходам, связанным с созданием

предобуславливателя и его использованием при работе итерационного алгоритма. Для того, чтобы убедиться в оправданности этих действий, и что уменьшение количества итераций перекрывает все дополнительные затраты на использование предобуславливателя, были проведены вычислительные эксперименты. На Рисунок 184 представлено сравнение времени решения СЛАУ методами CG и BICGStab с использованием технологии CUDA и без неё, а также с предобуславливанием Якоби. Получен прирост производительности в 10 раз. Тесты производились на матрице, полученной в результате дискретизации трёхмерной задачи упругости на конечноэлементной сетке из 300 тыс. узлов.

Представляет интерес исследовать также вопрос оптимального выбора предобуславливателя. Сложные в построении предобуславливатели требуют значительных вычислительных ресурсов. С другой стороны, более сложный предобуславливатель может существенно понизить число обусловленности матрицы, а значит и обеспечить лучшую сходимость итерационного метода. Приведем диаграмму результатов сравнения предобуславливателей на примере трехмерной задачи линейной теории упругости. На Рисунок 185 приведено сравнение количества итераций и общего времени работы итерационного метода решения СЛАУ при использовании различных преобуславливателей в составе библиотеки CUSP.



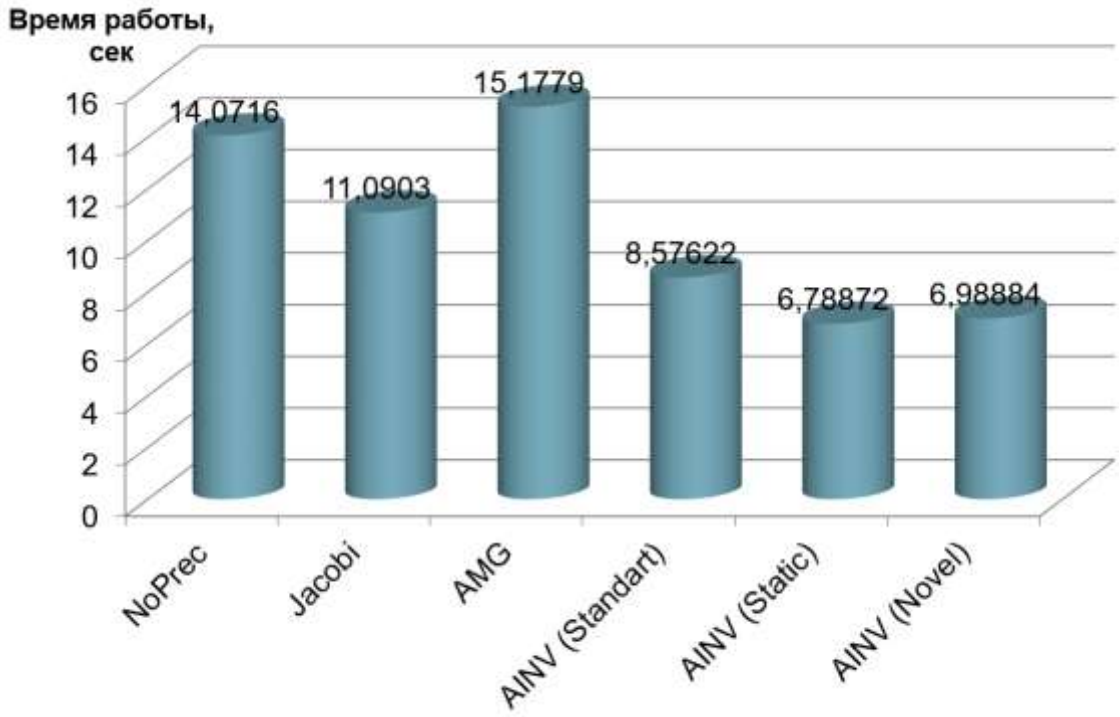


Рисунок 185 Сравнение предобуславливателей по числу итераций (сверху) и общему времени (снизу) работы итерационного алгоритма решения СЛАУ

Для хранения разреженной матрицы в памяти компьютера достаточно использовать информацию только о ненулевых элементах и их расположении в матрице. Для этого существуют различные форматы хранения разреженных матриц, различающиеся в эффективности применения в зависимости от решаемой задачи и платформы: некоторые форматы более экономны по памяти, другие позволяют более быстро извлекать элементы матрицы по их параметрам и т.п. CUSP позволяет хранить матрицу в памяти как в стандартных форматах представления разреженных матриц [331, 822], так и оптимизированных под использование графических процессоров. Рассмотрим основные из них:

1) Для диагональных матриц существует диагональный (DIA) формат. В нём разреженная матрица хранится в виде двух массивов:
   а) *data*, который содержит ненулевые значения матрицы;
   б) *offsets*, в котором хранится смещение каждой диагонали от главной.

Например, для матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\texttt{data} = \begin{bmatrix} * & 1 & 7 \\ * & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & * \end{bmatrix} \qquad \texttt{offsets} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Элементы, обозначенные звёздочками, заполняются произвольно (например, нулями).

2) ELLPACK/ITPACK (или ELL) формат для разреженных матриц общего вида, эффективен для векторных архитектур. Матрица MxN, имеющая не более K ненулевых элементов в строке, хранится как плотный MxK массив *data* ненулевых элементов и массив *indices*, содержащий индексы столбцов. Все строчки дополняются нулями до длины K.

Например, для той же матрицы A:

$$\texttt{data} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & * \\ 2 & 8 & * \\ 5 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & * \end{bmatrix} \qquad \texttt{indices} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 2 & * \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & * \end{bmatrix}$$

ELL является наиболее эффективным способом хранения, если максимальное количество ненулевых элементов в каждой строке не сильно отличается от среднего значения. Такие матрицы получаются на основе неструктурированных сеток с примерно одинаковым количеством связей для каждого узла сетки.

3) Наиболее распространенным способом хранения разреженных матриц произвольной структуры является CSR (Compressed Sparse Row). В нем разреженная матрица A хранится с использованием следующих массивов:
   а) *data*, который содержит все ненулевые элементы матрицы A, перечисленные в строчном порядке;
   б) *indices*, который содержит столько же элементов, сколько data, и для каждого из них указывает, в каком столбце находится данный элемент;
   в) *ptr*, который хранит число элементов, равное увеличенной на единицу размерности СЛАУ. Его i-й элемент указывает, с какой позиции в массивах data и indices начинается i-я строка матрицы.

Соответственно ptr[i+1]-iptr[i] равно числу ненулевых элементов в i-й строке. Последний элемент ptr[n+1] равен числу элементов в data, увеличенному на единицу. Для рассмотренной выше матрицы A:

$$\begin{aligned} \texttt{ptr} &= [0 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \quad 9] \\ \texttt{indices} &= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3] \\ \texttt{data} &= [1 \quad 7 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 9 \quad 6 \quad 4] \end{aligned}$$

Элементы, принадлежащие одной строке, могут храниться как с упорядочиванием по столбцовому индексу, так и без упорядочивания. Это не влияет на алгоритм умножения матрицы на вектор, однако в ряде случаев упорядочивание способно дать выигрыш.

Очевидно, что для симметричных матриц достаточно хранить только один из треугольников (верхний или нижний). Для несимметричных матриц с симметричным портретом (портретом разреженной матрицы A называется множество пар индексов (i, j), таких что a(i,j) не равно 0) необходимо хранение всех ненулевых элементов, однако схему их размещения опять же достаточно задать лишь для одного из треугольников.

Для хранения матриц с симметричным портретом и ненулевой главной диагональю может быть применена та же CSR-схема, со следующими изменениями:

а) элементы главной диагонали хранятся отдельно в массиве *diag*;

б) вместо массива data используется массив *ltr*, в котором таким же образом хранятся только поддиагональные элементы матрицы. Для него формируются массивы *indices* и *ptr*;

в) для наддиагональных элементов матрицы формируется массив *utr*, причем он хранит элементы не в строчном, а в столбцовом порядке. Для *utr* в силу симметрии портрета матрицы массивы *indices* и *ptr* не формируются.

В случае, когда матрица симметрична, массивы *ltr* и *utr* для нее совпадают, поэтому достаточно хранить только один из них.

4) Относительно простым способом хранения разреженной матрицы является координатный формат (COO). Массивы *row*, *indices* и *data* содержат, соответственно, индексы строки, столбца и само значение для каждого ненулевого элемента. Для матрицы A получаем:

$$\begin{aligned} \texttt{row} &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3] \\ \texttt{indices} &= [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3] \\ \texttt{data} &= [1 \quad 7 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 9 \quad 6 \quad 4] \end{aligned}$$

5) В то время как ELLPACK формат хорошо подходит для векторных и SIMD архитектур, его эффективность резко падает, когда количество ненулевых элементов в строках матрицы сильно варьируется. С другой стороны, для координатного формата этот показатель не имеет значения. Для получения преимуществ обоих способов хранения был разработан гибридный (HYB) формат. В гибридном формате в ELL-структуре хранится типичное число

ненулевых элементов на строку, а остальные элементы записаны в COO-структуре. Для матрицы A получаем:

$$\mathtt{data} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathtt{indices} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathtt{row} &= [2] \\ \mathtt{indices} &= [3] \\ \mathtt{data} &= [9] \end{aligned}$$

Правильный выбор формата хранения матрицы системы напрямую влияет на требуемый объем и время считывания данных из графической памяти, что является традиционным “узким” местом при вычислениях на GPU. Приведем на примере рассмотренной ранее задачи результаты сравнения CSR и гибридного форматов хранения разреженной матрицы в оперативной и графической памяти (Рисунок 186) при использовании итерационных методов решения СЛАУ. По результатам тестов, можно сделать вывод, что гибридный формат заметно проигрывает CSR-формату при вычислениях на центральном процессоре, но даёт преимущество при вычислениях на GPU за счёт особенностей его архитектуры и организации графической памяти.

Данный пример наглядно показывает, что разные форматы хранения разреженных матриц показывают лучшие результаты на разных программно-аппаратных платформах. Поэтому важно иметь возможность выбора между форматами в конкретных задачах.

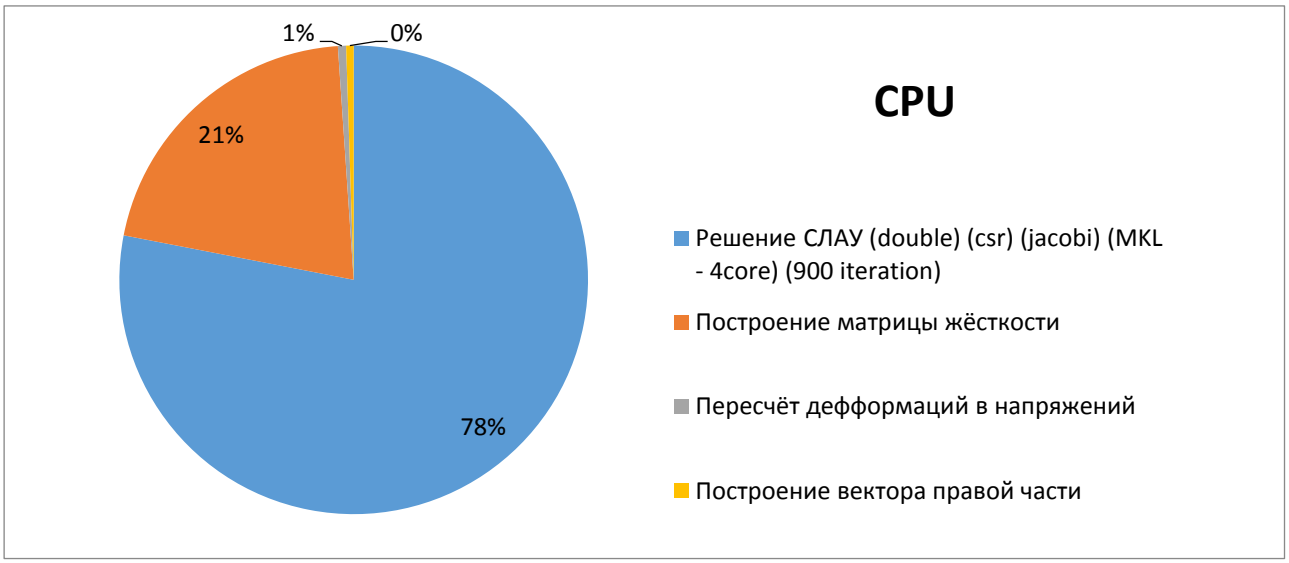




Рисунок 186 Сравнение форматов хранения разреженных матриц при использовании итерационных методов решения СЛАУ CG (сверху) и BiCGStab (снизу).

Анализ производительности

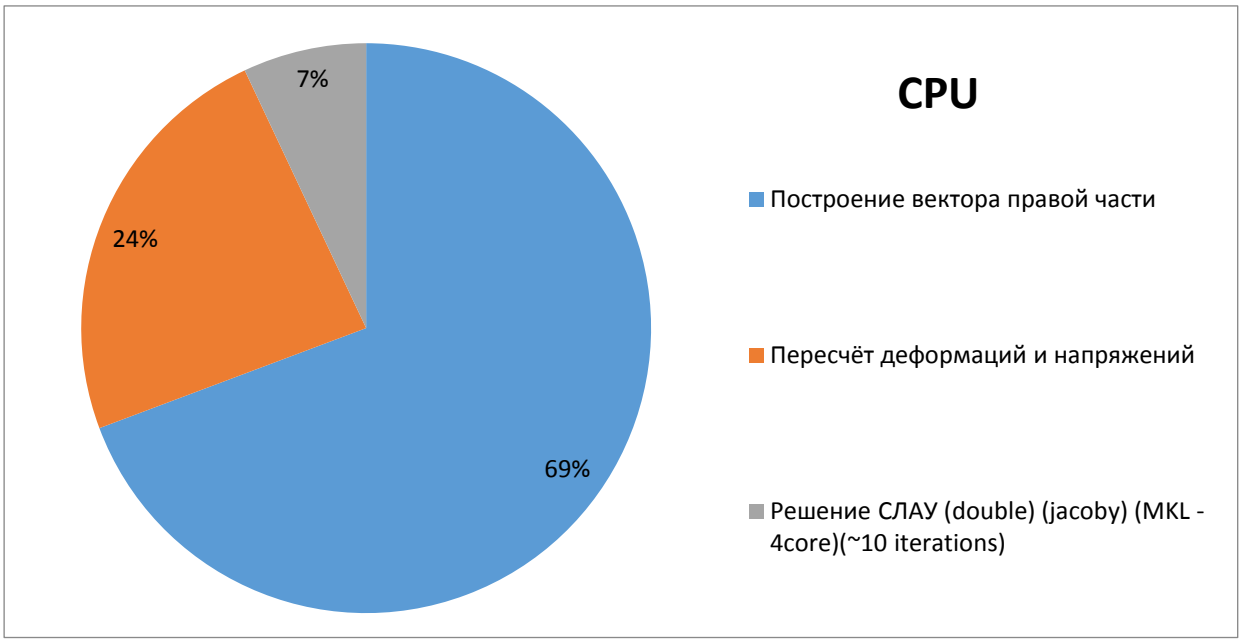
Для определения наиболее затратных по времени этапов алгоритма было произведено детальное таймирование решения задач. При таймировании не учитывалось создание расчетной сетки, так как она может быть получена различными способами и это не влияет на дальнейшее решение задачи. На Рисунок 187 приведены основные по времени этапы решения статической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на CPU. Из представленной диаграммы видно, что основное время расчёта занимает составление матрицы жёсткости и решение СЛАУ с этой матрицей.



Решение СЛАУ	78,0%
Построение матрицы жёсткости	20,9%
Прочие расчеты	0,6%
Построение вектора правой части	0,5%
Всё время	**100,0%**

Рисунок 187 Основные по времени этапы решения статической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на CPU

Результаты аналогичных измерений, полученных при решении динамической задачи линейной теории упругости на CPU, приведены на Рисунок 188. В линейных задачах динамики матрица СЛАУ строится один раз, после чего необходимо решать несколько раз эту систему с различными правыми частями. Поэтому приведены результаты для одного шага по времени. В данном случае, в отличие от статической задачи, рассмотренной выше, решение СЛАУ занимает малое время, так как в качестве начального приближения для итерационного метода берется решение с предыдущего шага по времени, поэтому солверу для достижения необходимой точности достаточно нескольких итераций.



Построение вектора правой части	69,3%
Пересчёт деформаций и напряжений	23,7%
Решение СЛАУ	7,0%
Всё время	**100,0%**

Рисунок 188 Основные по времени этапы решения динамической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на CPU

Посмотрим теперь, как изменится относительное соотношение по затрачиваемому времени между основными этапами решения задачи для GPU-версии программы. На Рисунок 189 приведено распределение времени работы параллельной версии алгоритма МКЭ при решении статической задачи на GPU.

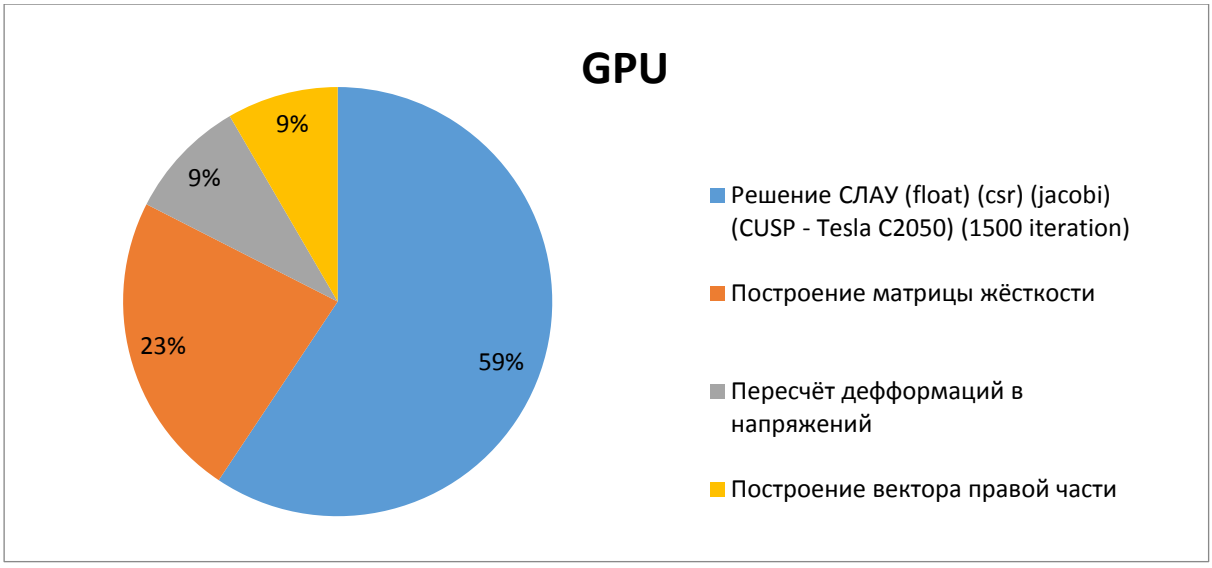


Рисунок 189 Основные по времени этапы решения статической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на GPU

Результаты аналогичных измерений, полученных при решении динамической задачи линейной теории упругости на GPU, приведены на Рисунок 190.

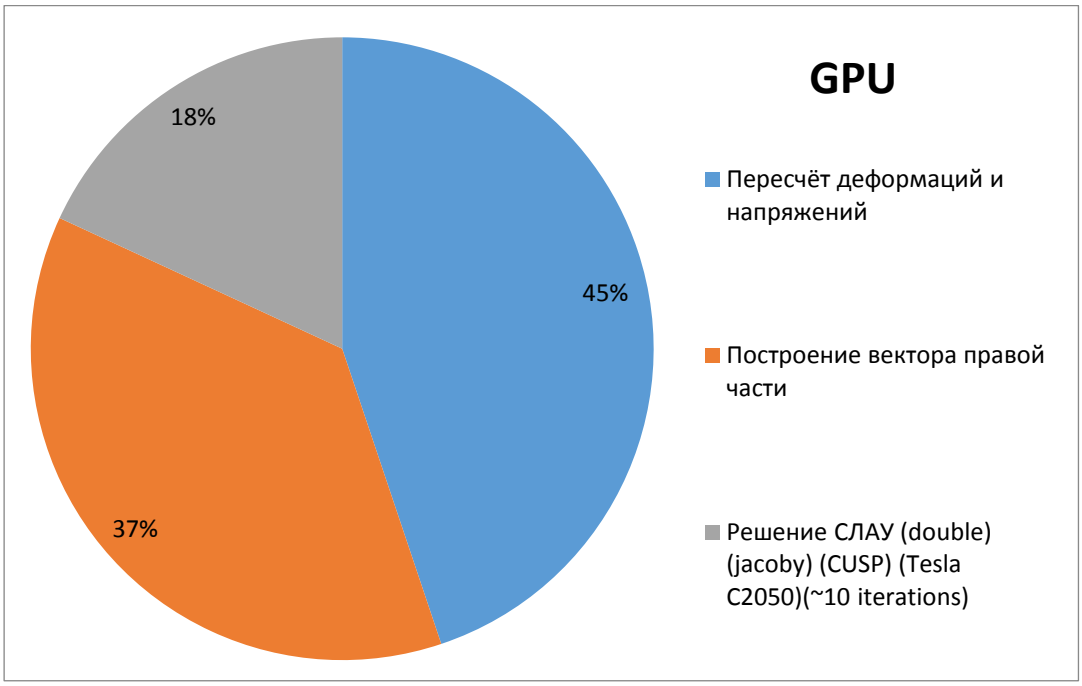


Рисунок 190 Основные по времени этапы решения динамической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на GPU

Отметим существенную разницу в соотношении между основными этапами решения задачи на CPU и GPU.

Из анализа приведенных диаграмм можно сделать вывод, что подавляющую часть времени решения статических и динамических задач занимают три этапа (составление СЛАУ, составление вектора правой части, решение СЛАУ). Как было показано в предыдущих разделах, данные этапы могут быть эффективно и полностью распараллелены с использованием GPU, что позволяет избежать лишних копирований из памяти CPU в память GPU и обратно. Весь процесс решения производится на GPU, на центральном процессоре происходит только подготовка данных к решению и обработка результатов вычислений. Причем с увеличением размера задачи (размера расчетной сетки) растет доля этих этапов в общем времени решения задачи, а значит растет и эффективность распараллеливания параллельной версии программы в соответствии с законом Амдала [691].

Для анализа полученного ускорения от использования технологии CUDA приведем результаты измерений для задачи об одноосном растяжении однородного кубика (размер расчётной сетки 2 млн. элементов). При решении тестовой статической задачи применение технологии CUDA (с использованием графического ускорителя Nvidia Tesla C2050), дало итоговое ускорение в 7 раз (Рисунок 191).

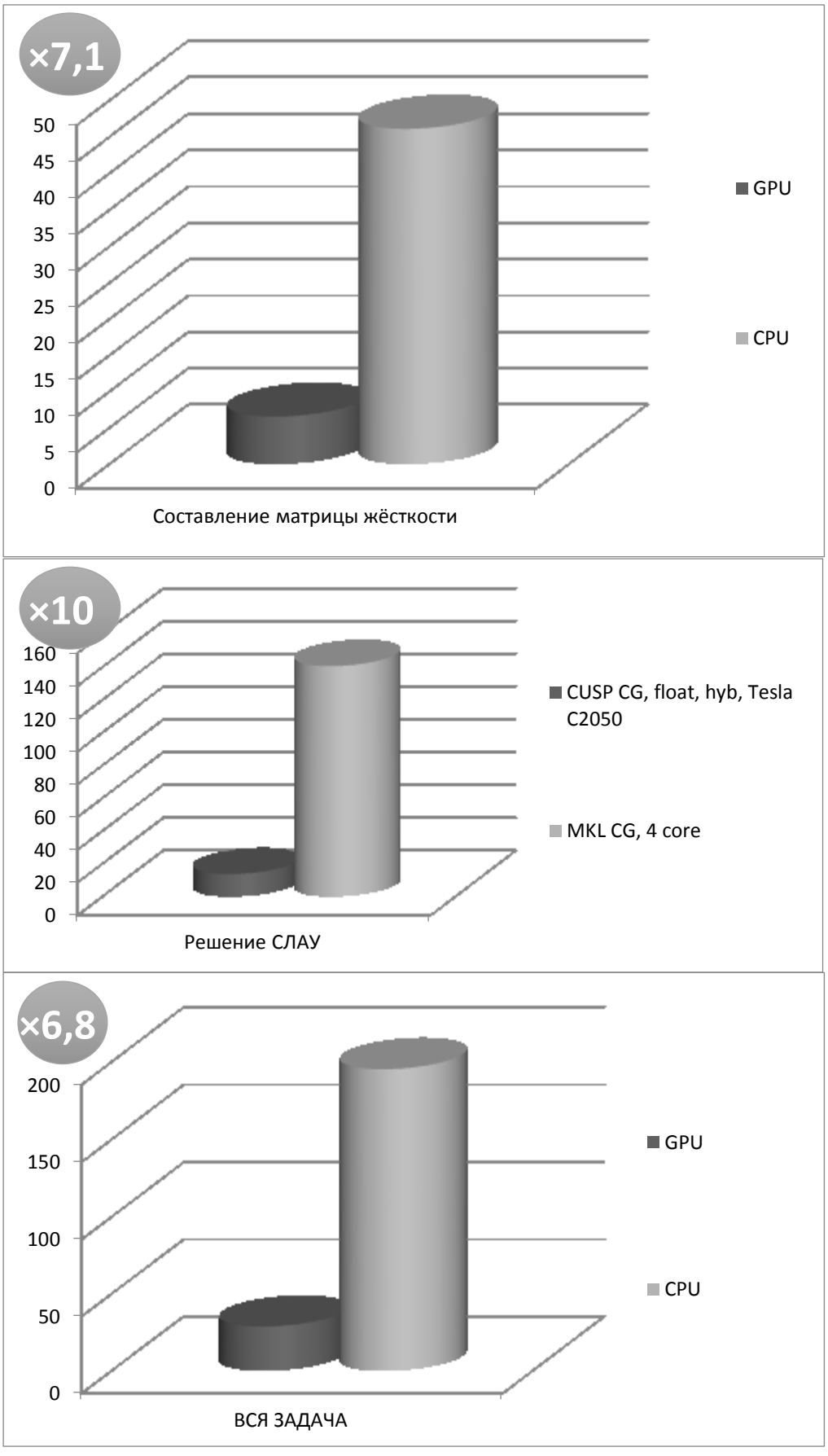


Рисунок 191 Сравнение основных этапов решения статической задачи с использованием МКЭ на CPU и GPU

При решении динамических задач прочности, как было показано, значительный вклад во время расчета вносят такие этапы решения, как составление вектора нагрузок системы линейных уравнений и пересчет напряжений и деформаций на каждом шаге по времени, т.к. в линейном случае матрицы масс и жесткости постоянны на всех шагах интегрирования. Алгоритм ассемблирования глобального вектора нагрузок аналогичен алгоритму для глобальной матрицы жесткости, что позволяет применить к нему ту же самую схему распараллеливания на GPU. При использовании этого алгоритма на каждом шаге по времени отпадает необходимость копировать данные в память графического ускорителя, что является одной из наиболее затратных по времени и нежелательных операций в параллельном программировании на GPU. Операция пересчета напряжений и деформаций выполняется независимо для каждого элемента расчетной сетки, и данный алгоритм можно реализовать без дорогостоящей операции атомарного суммирования.

На

Рисунок 192 приведен результат тестов производительности CAE Fidesys на линейной динамической задачи прочности, в которой удалось достичь более значительного прироста производительности, чем в случае статической задачи. GPU-версия программы работает почти в 30 раз быстрее, чем CPU-версия.



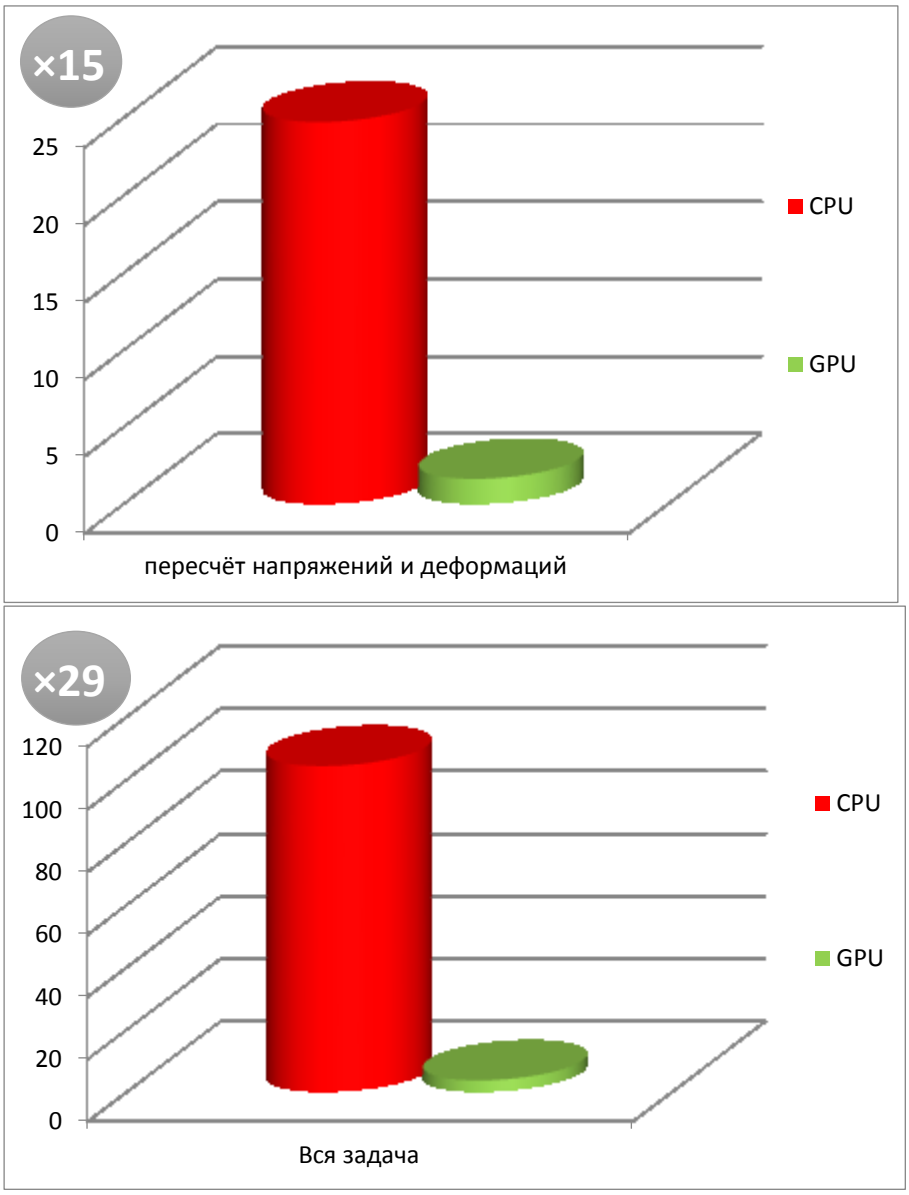


Рисунок 192 Сравнение основных этапов решения динамической задачи с использованием МКЭ на CPU и GPU

С целью экономии графической памяти элементы матрицы жёсткости можно хранить в памяти графического процессора с одинарной точностью (float). Однако решение СЛАУ итерационным методом в режиме одинарной точности в некоторых случаях не сходится к требуемому уровню погрешности, поэтому оно производится в режиме двойной точности (double). Аналогично вычисление компонент матрицы жесткости, вектора правой части СЛАУ и т.п. в режиме двойной точности с хранением результатов в одинарной позволяет существенно сократить требования к объему графической памяти. На Рисунок 193 приведено сравнение эффективности распараллеливания алгоритма МСЭ в режимах одинарной и двойной точности на GPU, а также на CPU.

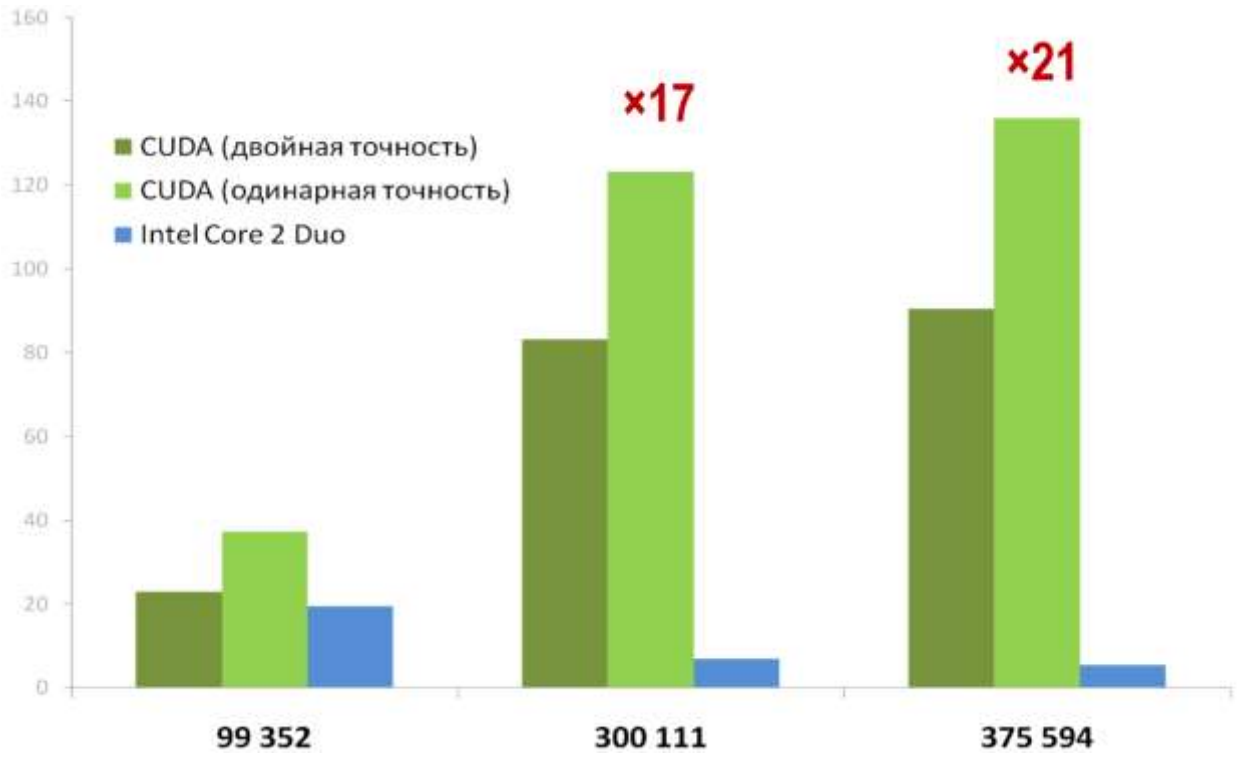


Рисунок 193 Сравнение эффективности распараллеливания алгоритма МСЭ в режимах одинарной и двойной точности на GPU, а также на CPU

Проведение полного расчета (30000 шагов интегрирования по времени) динамической задачи МСЭ заняло 14 минут в режиме одинарной точности и 21 минуту в режиме двойной точности (с хранением данных в одинарной точности). Таким образом, падение производительности в режиме двойной точности составило менее двух раз за счет эффективного применения кэширования при доступе к текстурной, константной и разделяемой памяти.

4.4 Применение технологии MPI

Наиболее распространенной технологией для вычислений на суперкомпьютерах является MPI – Message Passing Interface, интерфейс передачи сообщений. В случае использования MPI отдельная копия программы запускается на каждом узле кластера, при этом каждая копия рассчитывает свою часть задачи и обменивается необходимыми данными с другими узлами. Технология MPI реализует параллельность за счет одновременной работы приложения в нескольких равноправных процессах, при этом считается, что память процессов независима и общение между процессами происходит при помощи посылки сообщений через специальные коммуникаторы. В современных системах с распределенной памятью соединение между узлами, на которых запускаются процессы, реализовано с помощью высокоскоростных сетевых технологий, однако именно передача данных между процессами является наиболее узким местом при использовании MPI.

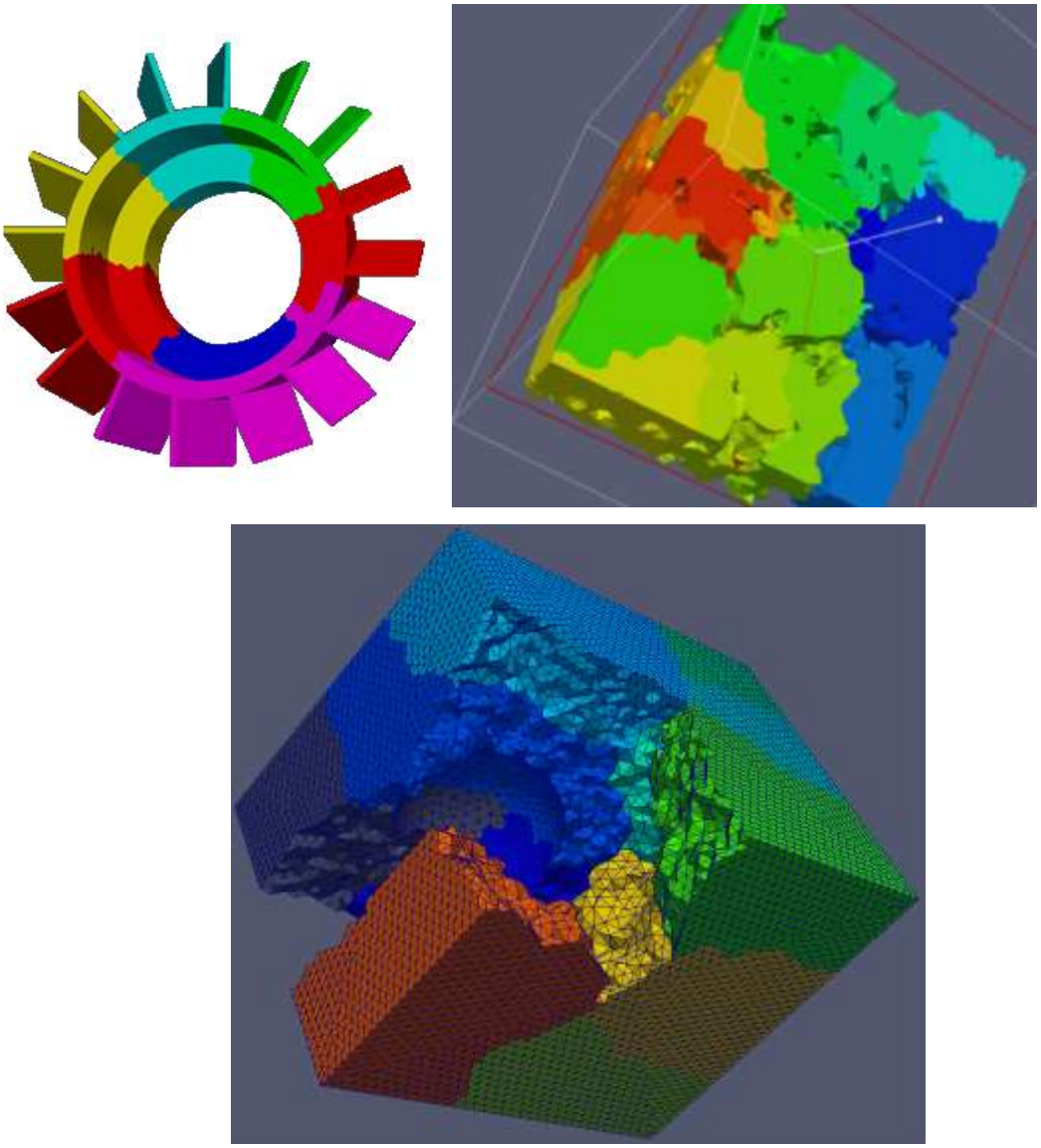


Рисунок 194 Примеры разбиений расчетной области по блокам, соответствующим различным процессам MPI

В отличие от технологий OpenMP и CUDA, произвольное разбиение элементов сетки между потоками не является эффективным и может существенно замедлить работу программы. Алгоритм распараллеливания решения задачи методом конечных элементов на MPI базируется на методе разделения области. Расчетная область, состоящая из элементов сетки, разделяется на некоторое количество непересекающихся геометрически связных групп элементов, называемых блоками, таким образом, чтобы каждый блок имел минимальное количество общих узлов с остальными блоками (Рисунок 194). Блоки и все связанные с ними данные распределяются, по возможности, равномерно между процессорами. Каждый процессор в своей локальной памяти хранит и обрабатывает все переданные ему данные в ходе решения задачи.

На данный момент существует большое число приложений с открытым исходным кодом, предназначенных для разделения расчетной области на блоки. При реализации расчетных ядер

для разделения области использовалась библиотека Metis [518], поскольку в ней реализован обширный набор алгоритмов, позволяющий настраивать работу библиотеки для конкретной сетки. Другим важным преимуществом Metis является наличие распараллеленной версии библиотеки – ParMetis.

При разделении на подобласти некоторые узлы попадают сразу в несколько блоков, такие узлы называются интерфейсными, остальные узлы называются внутренними. Принципиально возможны два варианта хранения интерфейсных узлов: в первом варианте они разделяются между блоками, во втором дублируются для каждого блока. Недостатком первого варианта является необходимость в обмене сообщениями между процессорами при обработке принадлежащих им блоков, поскольку данные об интерфейсных узлах могут оказаться в памяти соседнего процессора. Поэтому для реализации был выбран второй вариант, в котором требуется меньше обменов, однако данные могут дублироваться. Интерфейсный узел помечается как принадлежащий только одному процессору, однако на всех процессорах, содержащих конечные элементы с данным узлом, сохраняется информация о том, каким еще процессорам он принадлежит. Использование данного подхода оправдано тем, что количество интерфейсных узлов существенно меньше общего числа узлов при правильном разбиении сетки на блоки, минимизирующем границы между блоками.

На этапе решения системы линейных алгебраических уравнений происходит обмен данными между процессорами для согласования решения на границах блоков. С одной стороны, чем меньше таких границ, тем меньше потребуется процессорам обмениваться данными. Как известно, именно обмен данными по сети является узким местом большинства численных алгоритмов решения краевых задач, реализованных на многопроцессорных системах. С другой стороны, размеры блоков должны быть максимально близки друг к другу для обеспечения равномерной загрузки системы. Одним из вариантов решения данной задачи является динамическая балансировка нагрузки, при которой расчетная область изначально разбивается на число блоков большее, чем число процессоров, и блоки перераспределяются между процессорами при неравномерной их загруженности, например, в случае мультифизических неоднородных задач взаимодействия жидкости и твердого тела, рассмотренных во второй и третьей главах. Кроме того, в динамических задачах возможно оптимизировать балансировку путем прямого измерения времени расчета на каждом из процессоров в рамках одного шага интегрирования по времени и перебалансировкой нагрузки на последующем шаге в зависимости от полученных замеров. В ряде случаев динамическая балансировка нагрузки может давать существенное уменьшение (десятки процентов) общего времени решения задачи по отношению к статической.

Алгоритм распараллеливания

По аналогии с технологиями CUDA и OpenMP, локальную матрицу жесткости можно создавать в каждом MPI-процессе и затем добавлять ее к общей глобальной матрице. Глобальная матрица жесткости при этом хранится разделенной по примерно равным блокам строк между процессами. Однако тестирование показало, что недостатком такого подхода является длительное время сборки матрицы, вызванное затратами коммуникационных ресурсов на пересылку элементов матрицы. Поэтому было принято решение оптимизировать процесс расчета за счет использования безматричного итерационного способа решения системы линейных уравнений, который отличается тем, что хранить матрицу целиком не требуется. При решении СЛАУ итерационными методами не требуется наличия матрицы системы в явном виде, достаточно лишь уметь выполнять операцию умножения матрицы на произвольный вектор.

В задачах метода конечных элементов рассматриваются вектора, которые однозначно соответствуют расчетным точкам, т.е. вектор имеет размерность, равную числу степеней свободы задачи, умноженному на число точек в сетке. Распределенное представление такого вектора основано на разбиении точек между процессорами, на каждом процессоре хранятся степени свободы точек, принадлежащих процессору. Однако, как уже было отмечено выше, помимо точек процессора на нем могут находиться интерфейсные точки, не принадлежащие процессору. Вектор правой части, который формируется локально на каждом процессоре, содержит как точки процессора, так и интерфейсные. Для формирования глобального вектора правой части необходимо передать все значения вектора, соответствующие интерфейсным точкам на процессор-владелец данной точки, где сложить все полученные значения. После такой операции сложения итоговый вектор формируется из локальных частей, где отбрасываются интерфейсные точки, не принадлежащие процессору.

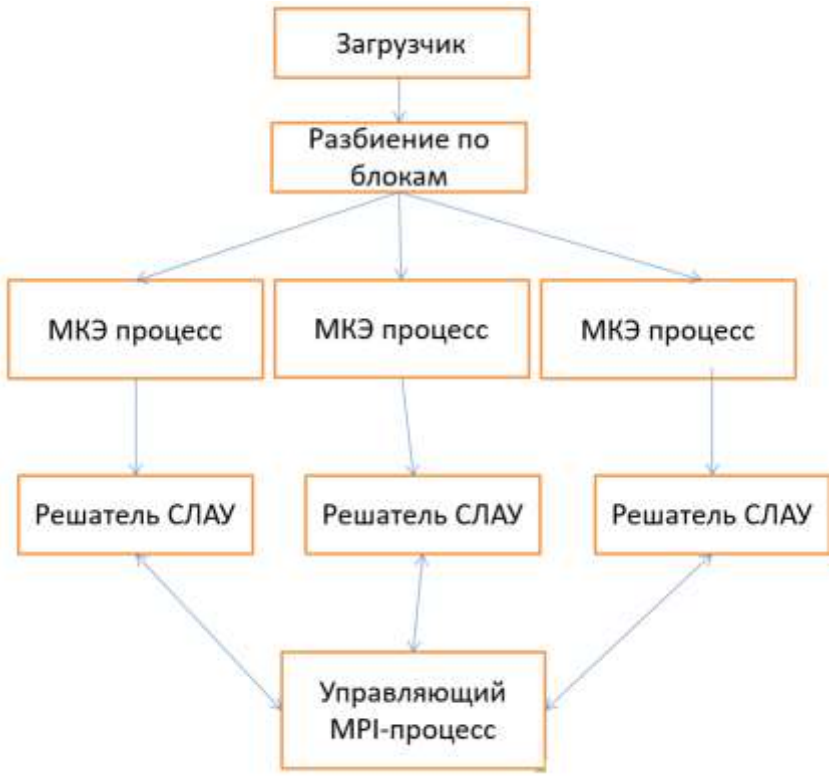


Рисунок 195 Решение задачи МКЭ с использованием MPI

При использовании метода декомпозиции области совместно с MPI умножение распределенно хранящейся матрицы на вектор состоит из следующих основных этапов (Рисунок 195):

1. Каждый процесс заполняет локальную матрицу, соответствующую конечным элементам принадлежащего текущему процессу блока;
2. Перед началом вычисления вектор хранится в распределенной форме, и его значения соответствуют узлам процессора. Компоненты вектора в собственных интерфейсных узлах передаются остальным процессорам, для которых они являются интерфейсными, но не собственными;
3. Полученные несобственные интерфейсные значения добавляются к локальной части вектора, формируя, таким образом, расширенную локальную часть вектора;
4. Расширенная локальная часть вектора умножается на локальную матрицу на каждом процессоре;
5. Процессы обмениваются информацией о значениях в результирующих локальных векторах на позициях, соответствующих глобальным узлам сетки, принадлежащим одновременно нескольким блокам;
6. Полученные от других процессов данные прибавляются к локальному вектору, рассчитанному на текущем процессе.

Отсюда, в частности, видно, что чем меньше общих узлов сетки на границе между блоками, тем меньше операций обмена требуется проводить в ходе вычислений.

Расчётные ядра программы для решения краевых задач механики деформируемого твердого тела в параллельном режиме используют метод конечных элементов (МКЭ) и метод спектральных элементов (МСЭ). В ходе выполнения расчета вычислительные ядра (модули) могут взаимодействовать друг с другом при помощи посылки сообщений по коммуникационной сети кластера. Модуль MPI служит как внешний модуль по отношению к расчетным ядрам, отвечающим за формирование СЛАУ.

Численное решение нелинейных динамических задач сводится к последовательному решению нескольких линейных задач в два этапа. На первом этапе динамическая задача сводится к последовательному решению набора нелинейных статических задач на каждом шаге по времени, получаемых в результате выбора разностной схемы для решения динамической задачи. На втором этапе нелинейная статическая задача сводится к решению нескольких линейных статических задач, получаемых в результате линеаризации нелинейной системы при ее решении методом Ньютона.

Решение линеаризованных задач проводится, как и для линейных задач, описанных выше, с применением метода декомпозиции области. Матрица системы для каждой подобласти-блока и вектор правой части составляются при помощи вызова локального расчетного OpenMP/GPU ядра для MPI-версии приложения. Таким образом, как и в случае линейной задачи, при решении нелинейной задачи сборка матрицы для линейной системы и вектора правой части происходит независимо на каждом процессоре, несмотря на то, что в нелинейном случае процесс получения самой системы принципиально отличается, а именно, матрица и вектор получаются дискретизацией исходного нелинейного уравнения в частных производных по времени с последующей линеаризацией нелинейной задачи на каждом шаге по времени.

Другим важным отличием решения нелинейной задачи является необходимость принятия решения о продолжении итераций в процессе решения нелинейной системы, которые принимаются на основании совокупной оценки погрешности для всей глобальной системы. Для решения данной задачи каждый процессор, после решения системы линейных уравнений, должен передать данные о погрешности на специально выделенный процессор, контролирующий процесс решения нелинейной системы. Затем выделенный процессор производит оценку погрешности и принимает решение о продолжении решения либо о завершении, по результатам оценки все остальные процессоры получают соответствующее уведомление. При решении линейной динамической задачи, в отличие от нелинейной, оценка погрешности на каждом шаге по времени не производится, таким образом, не возникает

необходимости в дополнительных пересылках. Каждый процессор производит вычисления независимо от остальных.

Решение серии краевых задач в параллельном режиме

Помимо рассмотренного алгоритма решения одной краевой задачи на многопроцессорной системе путем разбиения ее сеточной модели на блоки, технология MPI может быть эффективно применена для решения в параллельном режиме на кластере серии краевых задач, например, как в случае оценки эффективных свойств керна (Глава 3), в рамках которой требуется провести серию однотипных расчетов с различающимися граничными условиями для цифровой модели керна. Алгоритм решения в этом случае содержит три основных этапа.

Этап 1. Чтение входных данных из файлов и распределение между процессорами. Распараллеливание решения на основе технологии MPI базируется на распределении серии задач между доступными приложению процессорами и последующем независимом решении каждым из процессоров своего подмножества задач. Как правило, в приложениях, написанных с использованием технологии MPI, имеется выделенный главный процессор, так называемый мастер-процессор, остальные процессоры являются второстепенными или подчиненными. Задача мастер-процессора заключается не только в решении подмножества из серии задач, но также и в координации работы подчиненных процессоров.

При запуске на исполнение приложения каждый процессор содержит список задач для решения. Изначально все задачи находятся в списке мастер-процессора, а списки подчиненных процессоров пусты. Задачей первого этапа является сбалансированное распределение задач между процессорами. Выполнение приложения на мастер-процессоре начинается с запуска анализа списка задач и их числа, а также количества доступных для использования процессоров. Мастер-процессор по очереди перебирает идентификаторы доступных процессоров, в том числе и свой, отправляя каждому из них по одной задаче. Если идентификатор отличается от идентификатора мастер-процессора, то отправленная задача удаляется из его списка задач, в противном случае, нет необходимости в пересылке, и задача остается в списке, а в дальнейшем будет решена самим мастер-процессором, также как другие задачи решаются подчиненными процессорами. Если после отправки каждому из доступных процессоров еще имеются нераспределенные задачи, то цикл повторяется необходимое число раз для завершения распределения.

Отправка каждой задачи состоит из трех последовательных пересылок данных:

1. Вначале подчиненному процессору отправляется набор параметров задачи:
    а) Тип механической задачи для решения;
    б) Размер сериализованных данных задачи;

в) Инструкции принимающему процессору по обработке дальнейших задач – ждать следующую задачу или прекратить получение задач и приступить к их решению;

2. Затем отправляются собственно данные задачи;
3. Также отправляется информация о файле, в который должен быть записан результат расчета задачи.

После исчерпания задач в списке мастера-процессора, распределение завершается формированием специальной технической задачи, содержащей сигнал к началу выполнения. Данная задача не добавляется подчиненными процессорами в список задач, а лишь служит для передачи информации о завершении этапа распределения.

Этап 2. Запуск задач на расчет.

После завершения первого этапа, каждый процессор содержит список задач для решения, и в дальнейшем нет необходимости в координации их действий, поэтому программа выполняется идентично как на главном процессоре, так и на подчиненных. Процессоры последовательно получают задачи из списка и формируют задание на расчет при помощи последовательных модулей, выбор которых осуществляется на основании типа задачи, переданного на этапе распределения.

Этап 3. Вывод результатов расчета в файл.

Каждый процессор после выполнения расчетов задач содержит всю необходимую информацию для вывода результатов расчета в файл. Имя файла для вывода результатов процессоры получают на этапе формирования списка задач. Вывод осуществляется средствами последовательных модулей, осуществлявших решение.

Масштабируемость данного этапа напрямую зависит от особенностей используемой многопроцессорной системы. В случае если система поддерживает параллельный ввод-вывод данных, то этап является полностью масштабируемыми, поскольку время выполнения вывода результатов одним процессором никак не зависит от времени выполнения данного этапа другими. Если же многопроцессорная система не поддерживает параллельный вывод, то данный этап не является масштабируемым, поскольку запись результатов решения на каждом процессоре возможна только при получении доступа к системе вывода, который передается им последовательно.

Таким образом, итоговая масштабируемость приложения напрямую зависит от двух факторов:

1) Поддержка в системе параллельного вывода;

2) Процентное соотношение времени выполнения задачи и всего времени выполнения приложения. Чем больше времени при выполнении программы тратится на расчет по сравнению с вводом, рассылкой и выводом, тем более эффективно будет использование модуля распараллеливания на основе MPI.

Анализ производительности

Решение задачи методом конечных элементов завершается решением системы линейных уравнений. Для решения различных систем линейных уравнений в настоящий момент существует достаточно большое число библиотек с открытым исходным кодом, в частности, для решения СЛАУ с использованием MPI в данной работе были выбраны решатели в составе библиотек PETSc [809] и MKL [808] – MUMPS и Intel Cluster Pardiso соответственно. Cluster Pardiso (CPARDISO) показал большую универсальность при решении систем уравнений, возникающих в задачах механики деформируемого твердого тела (некоторые плохообусловленые матрицы не разлагались в решателе MUMPS 4.10 в составе PETSc). В обоих решателях задание матрицы происходит распределенным образом – по слоям, что позволяет минимизировать число пересылок при сборке, однако, в отличие от MUMPS 4.10, CPARDISO также позволяет параллельно задавать вектор правой части и работать с результирующим вектором.

На Рисунок 196 представлены результаты анализа эффективности распараллеливания при решении системы линейных уравнений, полученных в результате дискретизации статической задачи линейной теории упругости. Матрица имеет размерность около 1 миллиона строк. Количество ненулевых значений в матрице около 25 млн. Оба решателя показали достаточно хорошие результаты ускорения на кластере, оборудованном InfiniBand. Видно, что CPARDISO заметно превосходит прямой решатель в составе библиотеки PETSc. Запуск производился на кластере, состоящем из 4х узлов. Конфигурация узлов: 16 ядер (2 два 8-ядерных процессора Intel Xeon E5-2665@2.40ГГц) размер оперативной памяти 64 ГБ. Программа не использовала технологию OpenMP внутри узла, вместо этого на одном узле было запущено несколько экземпляров приложения в режиме MPI. Отметим, что наилучшую масштабируемость, как и следовало ожидать, продемонстрировал итерационный решатель.

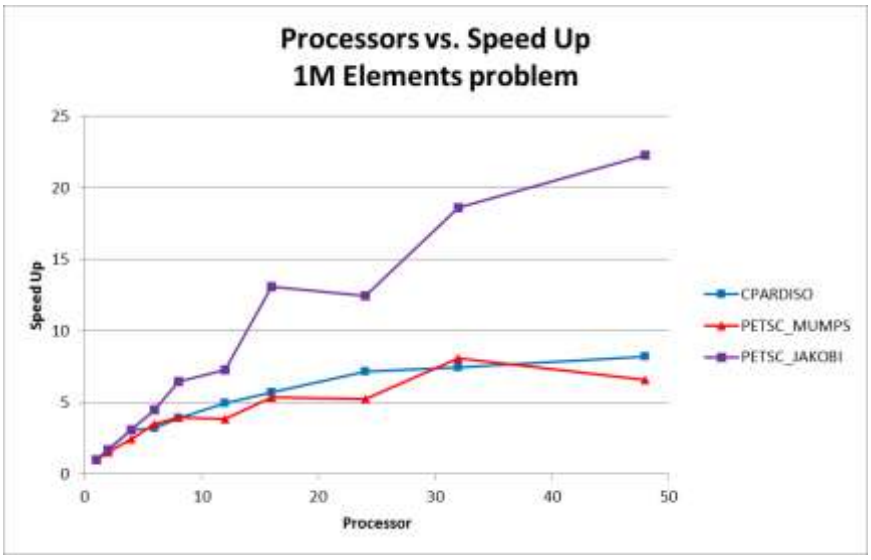


Рисунок 196 Сравнение эффективности распараллеливания решателей СЛАУ на многопроцессорной системе

На Рисунок 197 представлены результаты расчетов для линейной статической задачи теории упругости с двумя различными дискретизациями конечными элементами: 500 тысяч узлов и 4 миллиона узлов сетки. Расчеты для данной задачи с использованием MPI проводились на суперкомпьютере ИВМ РАН. Анализ результатов продемонстрировал, что для первой задачи уже при использовании 32 процессоров дальнейшее увеличение их числа не приводит к заметному увеличению эффективности ввиду эффекта насыщения, вызванного преобладанием коммуникационных затрат над вычислительными, при этом для задачи большего размера эффективность продолжает возрастать. Отметим, что областью применения MPI, как правило, являются сверхбольшие задачи, поскольку для относительно небольших задач можно применять технологию OpenMP, значительно более простую в реализации, или CUDA, требующую лишь наличия видеопроцессора с графической памятью. Кроме того, большие задачи не могут быть целиком загружены в оперативную память персонального компьютера/рабочей станции или видеокарты, что критически сказывается на времени выполнения. На современном кластере для каждого расчетного ядра выделяется количество оперативной памяти сравнимое с персональным компьютером, что позволяет проводить расчеты без использования памяти на жестком диске при достаточном числе расчетных узлов кластера.

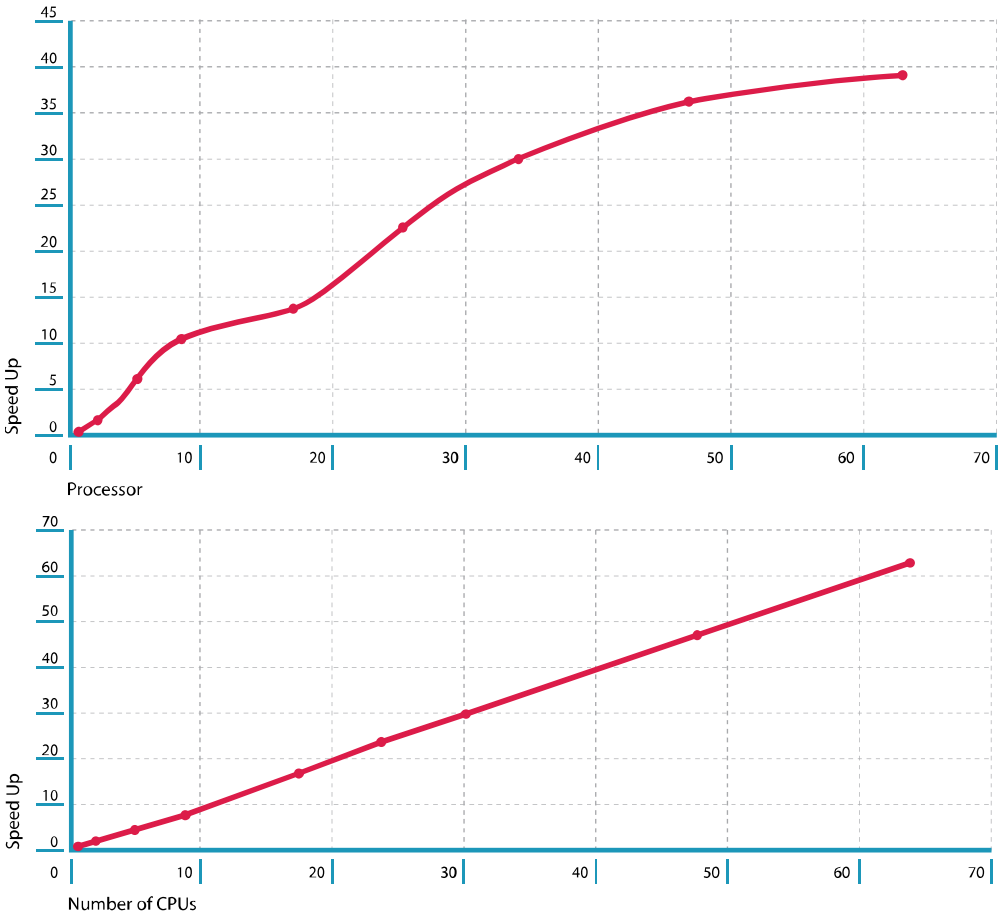


Рисунок 197 Ускорение расчетов на различном количестве процессоров для краевой задачи теории упругости, решаемой МКЭ, на сетке из 500 тыс. (сверху) и 4 млн. (снизу) узлов

На Рисунок 198 представлена диаграмма, демонстрирующая время выполнения различных этапов решения задачи методом конечных элементов при применении технологии MPI. Представляет интерес сравнить данный рисунок с аналогичным рисунком для статической линейной задачи для GPU, который был приведен ранее. Отметим, что с увеличением числа процессоров, время, затрачиваемое на сборку матрицы системы, становится незначительным по отношению ко времени решения данной системы ввиду растущих коммуникационных затрат. Также существенное время затрачивается на чтение задачи и запись результатов, поскольку на этих этапах дополнительно происходит разбиение задачи на блоки, рассылка информации о задаче между вычислительными узлами при чтении и сбор информации со всех узлов при записи результатов. Как и следовало ожидать, вклад данных этапов в общее время расчета растет с увеличением числа процессоров.

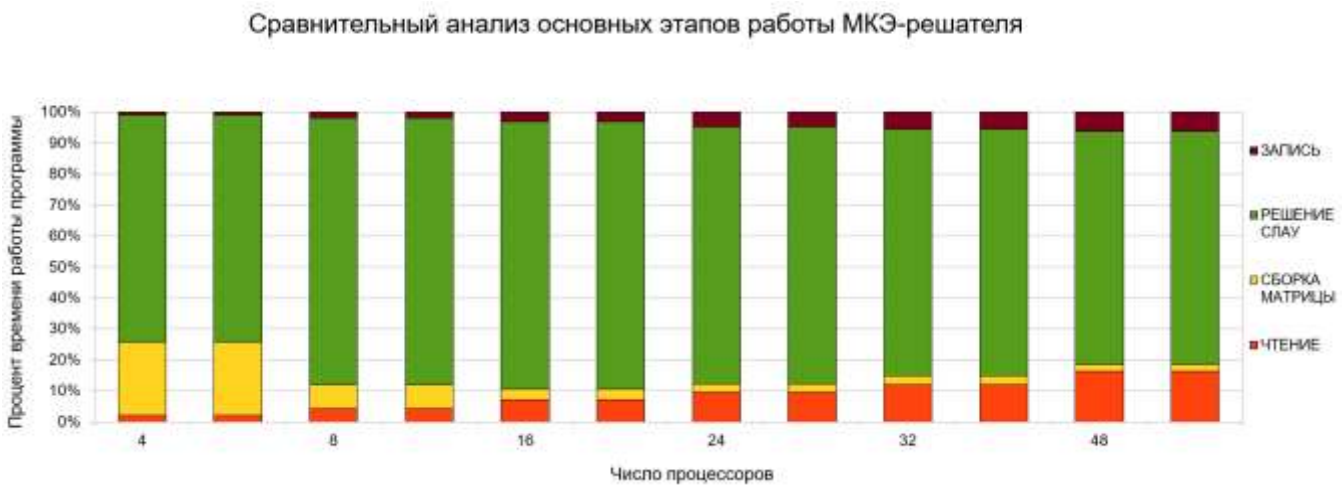


Рисунок 198 Время выполнения основных этапов решения задачи МКЭ с использованием MPI

В отличие от рассмотренной ранее технологии CUDA, многопроцессорные системы не ориентированы на массивный параллелизм, для них наиболее подходящим является решение меньшего числа относительно независимых задач, поэтому элементы объединяются в блоки примерно равной величины и передаются для вычислений на процессоры. Здесь в полной мере проявляется важнейшее преимуществом такого типа систем - наличие независимой памяти у каждого из процессоров, что позволяет рассчитывать без использования дискового пространства задачи на больших сетках. Кроме того, исчезает проблема синхронизации множественного доступа из различных потоков в общую область глобальной памяти (оперативной или графической), актуальная для OpenMP и CUDA. Разбиение на блоки может быть применено и при реализации алгоритмов МКЭ/МСЭ на современных гибридных системах, объединяющих достоинства многопроцессорных систем и графических ускорителей, при этом изначально элементы сетки разделяются на блоки и передаются различным процессорам, каждый из которых использует для вычислений графическую карту, как будет рассмотрено в параграфе 4.5.

4.5 Распараллеливание в режиме MultiGPU

Численное моделирование в реальных задачах (например, рассмотренных во второй и третьей главах) с областями со сложной структурой и возможными неоднородностями, разрывами в параметрах материалов требует построения подробной дискретизации исходной модели для учета всех особенностей и эффектов исходной физической модели. Для проведения расчетов на данных дискретных моделях, в свою очередь, требуются значительные вычислительные ресурсы и разработка программ, основанных на применении нескольких технологий параллельного программирования, приведенных ранее.

Для решения рассмотренных во второй главе трехмерных задач полноволнового моделирования использовалась рабочая станция с многоядерным процессором и несколькими графическими процессорами (MultiGPU система - Рисунок 199), поддерживающими технологию CUDA, т.к. графической памяти одного GPU оказалось недостаточно для хранения всех данных задачи. Поскольку у каждого GPU независимая память, такую систему можно рассматривать как гибридную систему с распределённой памятью.



Рисунок 199 MultiGPU система

Перед началом расчёта на данной системе, как и в случае MPI, расчетная сетка разбивается на подобласти по количеству используемых GPU. Для минимизации передачи данных необходимо, чтобы площадь границ между подобластями была минимальной. Разбиение на подобласти осуществляется с помощью пакета METIS (http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis), который предлагает квазиоптимальное разбиение сетки, с точки зрения минимизации граничных поверхностей подобластей (Рисунок 200), чтобы уменьшить передачу данных между различными графическими процессорами. Одновременно он разбивает расчетную область таким образом, чтобы вес каждой подобласти (например, число спектральных элементов в ней) был приблизительно одинаковым, что обеспечивает равные нагрузки на все графические процессоры и, следовательно, высокую эффективность распараллеливания.

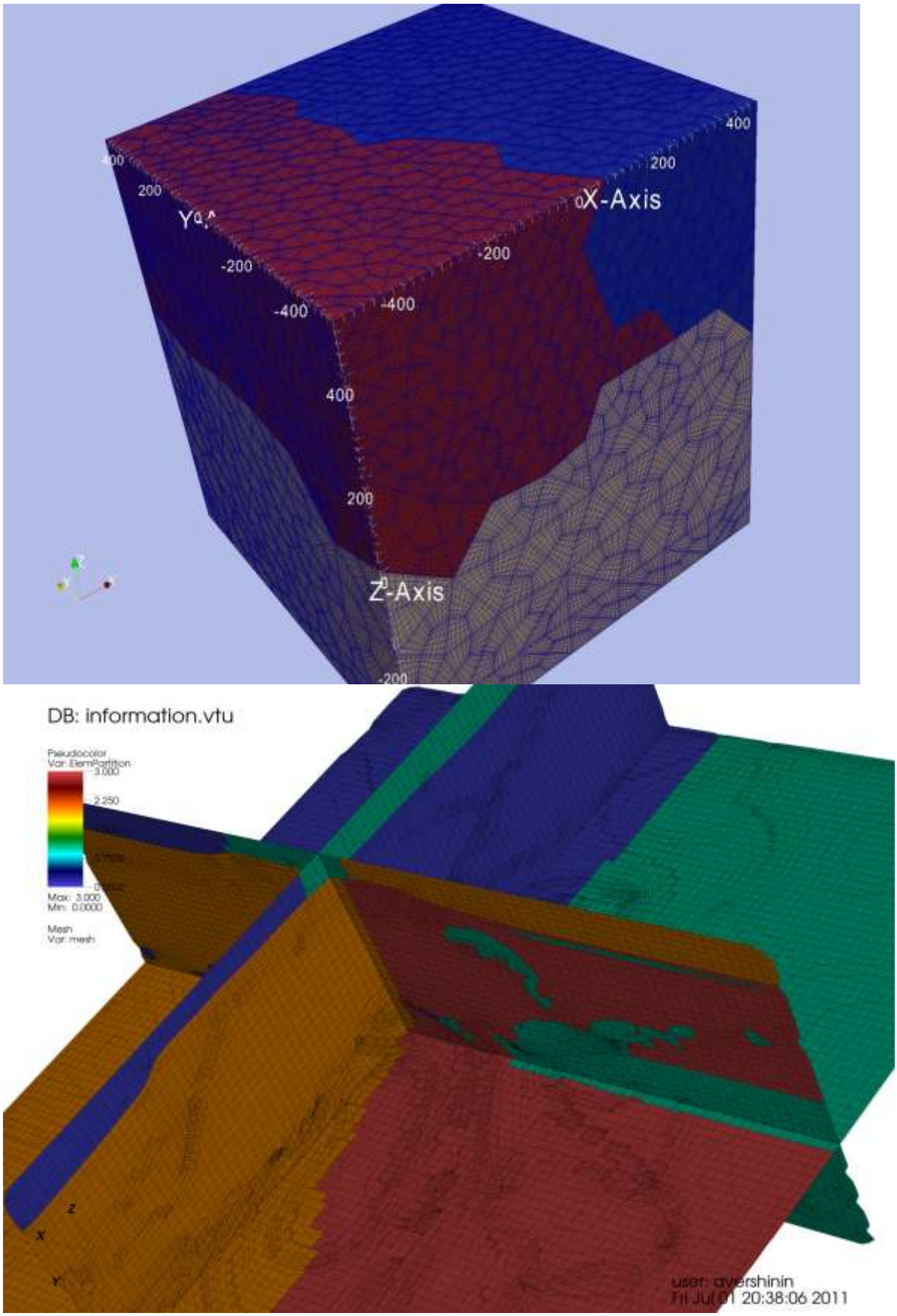


Рисунок 200 Пример разбиения МСЭ сетки по подобластям.

Разбив сетку на подобласти, перейдем к задаче организации распределённых (на разных GPU) вычислений, т.е. к способу разбиения вычислительного процесса между несколькими GPU. Для этой цели взаимодействие с каждым GPU было выделено в отдельный “подчиненный” поток в рамках центрального процессора, так что все операции доступа к конкретному GPU проходят через данный поток, и каждый GPU выполняет одинаковый набор команд для независимой трёхмерной модели (подобласти). Все связи между графическими процессорами и координация «подчинённых» потоков осуществлялись «главным» потоком центрального процессора (Рисунок 201). Данный подход обеспечил высокий уровень абстракции и масштабируемости по числу графических процессоров. Оптимальное количество физических ядер центрального процессора при таком подходе должно быть не менее числа GPU плюс один (для выполнения главного мастер-потока).

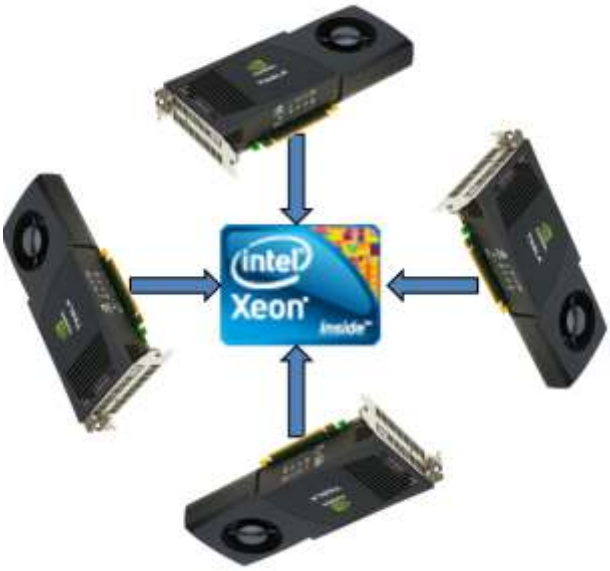


Рисунок 201 Обмен данными между GPU в рамках MultiGPU системы координируется потоками на центральном процессоре

Чтобы минимизировать передачу данных между различными подобластями, был применен алгоритм, в рамках которого на каждом шаге по времени при использовании трёхмерного МСЭ в процесс обмена по шине PCI-Express между графическими процессорами были включены узлы, принадлежащие только границам подобластей (Рисунок 202). Кроме того, за счет использования возможностей CUDA по одновременному выполнению ядер (kernels) и копированию данных между CPU и GPU, удалось скрыть операции обмена данными между GPU на фоне выполнения расчетных операций внутри подобластей. В результате это позволило значительно сократить так называемые “коммуникационные затраты” – время, потраченное только на передачу данных по отношению ко времени вычислений.

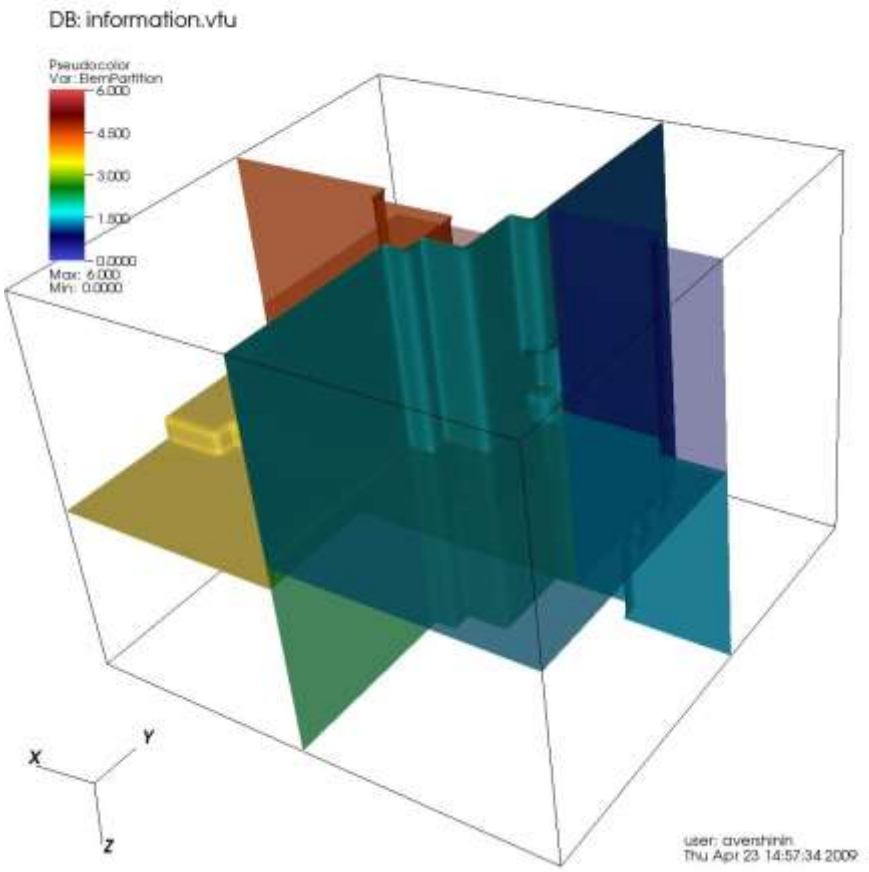


Рисунок 202 Границы подобластей в МСЭ сетке. Для 10000 спектральных элементов: неравномерность в распределении между подобластями – 0.05% и 1433 граней-разрезов (граней элементов, принадлежащих двум различным подобластям).

Для модели размером *NxNxN* спектральных элементов эффективность распараллеливания на *D* графических процессорах в составе MultiGPU системы аналитически оценивается величиной $\frac{D}{1+\alpha \cdot D\sqrt[3]{D}/N}$, в то время как объём данных для обмена между GPU пропорционален $N^2 \cdot \sqrt[3]{D}$. Очевидным образом из этой формулы следует, что, чем больше *N*, тем эффективность распараллеливания на MultiGPU системе ближе к теоретическому максимуму *D* (линейная скорость по отношению к числу графических процессоров), т.е. для больших задач и малом числе графических процессоров предполагается, что ускорение близко к *D*. В случае использовавшейся MultiGPU-конфигурации (4 × Tesla C2050 + quadcore Intel Xeon) для задачи с 30 миллионами узлов коммуникационные затраты составили приблизительно 3.5% от общего времени, затраченного на решение проблемы.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что МСЭ допускает эффективную реализацию для проведения массивно-параллельных вычислений на графических процессорах.

Внедрение MultiGPU-MPI/OpenMP подхода в кластерную/SMP-систему может быть одним из способов масштабируемости данного подхода.

4.6 Заключение

Можно выделить следующие тенденции развития современных систем инженерного анализа прочности:

- разработка новых математических моделей для адекватного описания механического поведения структурированных материалов, в том числе при больших (конечных) деформациях;
- разработка математических моделей, описывающих изменение структуры и механических свойств материалов при воздействиях различной физической природы;
- разработка математических моделей, описывающих образование повреждений в элементах конструкций при их эксплуатации;
- разработка методов и технологий неразрушающего контроля, позволяющих выявить дефекты, возникающие в элементах конструкций в процессе эксплуатации, и приближенно определить размеры, расположение и форму этих дефектов;
- расширение применения программных продуктов инженерного анализа в инженерной практике при проектировании изделий и анализе их жизненного цикла;
- разработка новых численных методов для расчета напряженно-деформированного состояния, обеспечивающих более высокую точность расчетов (метод спектральных элементов);
- увеличение производительности за счет использования ресурсов многоядерных рабочих станций и многопроцессорных СуперЭВМ;
- разработка алгоритмов параллельных вычислений, позволяющих эффективно использовать ресурсы ускорителей (например, технологии CUDA).

Решение реальных трёхмерных задач, рассмотренных в предыдущих главах, с помощью методов конечных и спектральных элементов требует наличия большого объёма оперативной памяти и значительных вычислительных ресурсов. Сложность выполнения такого расчета связана, в частности, с тем, что для обеспечения высокой точности расчета реальных элементов конструкций в трехмерном случае необходимо использовать расчетную сетку с большим количеством узлов (десятки миллионов узлов). Расчет на такой сетке без использования параллельных вычислений потребует длительного времени. В связи с этим возникает необходимость применения современных высокопроизводительных вычислительных комплексов (PC с GPU или MultiGPU, гибридные СуперЭВМ) и разработки программного

обеспечения, адаптированного для этих вычислительных комплексов. Существующие универсальные программные пакеты для инженерного прочностного анализа при конечных деформациях не имеют возможности осуществить эффективное распараллеливание расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций на гибридных массивно-параллельных системах. Модификация какого-либо из этих программных пакетов с целью включения в них дополнительной функциональности, реализующей распараллеливание на современных программно-аппаратных платформах, потребует существенной переработки исходного кода расчетных ядер в данных пакетах.

Для решения данной задачи был разработан комплекс программ на основе технологий OpenMP, CUDA, MPI и MultiGPU, который значительно превосходит в производительности последовательную реализацию алгоритмов МКЭ/МСЭ на CPU. Данный программный комплекс может быть запущен как на многопроцессорных рабочих станциях, так и на системах с распределенной памятью, включая гибридные системы, основанные на использовании ресурсов графических процессоров для проведения массивно-параллельных вычислений общего назначения. Уникальность данных разработок связана также с тем, что при создании программного комплекса в него изначально была заложена возможность распараллеливания всех основных этапов численного решения краевой задачи, что позволило в итоге эффективно организовать процесс параллельных вычислений и достичь высоких уровней производительности и масштабируемости кода.

В данной главе изложены алгоритмы распараллеливания основных этапов решения краевых задач МКЭ/МСЭ с использованием технологий OpenMP, CUDA, MPI на многоядерных и многопроцессорных системах, включая гибридные, проведена оценка производительности их программной реализации, разработаны подходы к ее оптимизации и повышению эффективности распараллеливания с учетом особенностей архитектуры рассматриваемых программно-аппаратных комплексов, сделаны выводы и рекомендации по применению разработанного комплекса программ для решения прикладных задач.

Разработанный комплекс программ является многоплатформенным, т.к. поддерживает платформы PC, GPU, MultiGPU, гибридные СуперЭВМ. В нем реализованы эффективные алгоритмы параллельных вычислений, которые позволяют многократно увеличить скорость расчётов при использовании PC с графическими процессорами (GPU, MultiGPU), гибридных СуперЭВМ по сравнению с однопроцессорными PC.

Выводы:

1. Разработаны алгоритмы распараллеливания основных этапов решения краевых задач МКЭ/МСЭ с использованием технологий OpenMP, CUDA, MPI на многоядерных и

многопроцессорных системах, включая гибридные MultiGPU системы с графическими процессорами.

2. Проведена оценка производительности программной реализации данных алгоритмов и разработаны подходы к ее оптимизации и повышению эффективности распараллеливания с учетом особенностей архитектур рассматриваемых программно-аппаратных комплексов.

Глава 5. Пакет прочностного инженерного анализа

5.1 Введение

При создании нового изделия требуется знать его прочностные характеристики. При эксплуатации изделия требуется прогноз его долговечности (срока службы). Решить эти проблемы можно с помощью серии натурных экспериментов, численных экспериментов (компьютерное моделирование) или их сочетания. Разумное сокращение количества натурных экспериментов в пользу численных значительно удешевляет и ускоряет процесс создания нового изделия. В ряде случаев при предсказании срока службы, измеряемого десятками лет (характерный пример АЭС), численный эксперимент может быть основным. В задачах прочностного инженерного анализа численный эксперимент (который надо рассматривать как одновременное физическое и компьютерное моделирование) будет корректным, если он основан на достоверно определенных механических свойствах материалов и соответствующих нагрузок, на корректной научной теории, правильно применённом численном методе и будет эффективно реализован с использованием современных HPC-технологий. Современные CAE (computer aided engineering) системы для прочностного инженерного анализа основываются именно на таком подходе. Обычно такие системы для промышленного использования создаются как универсальные, т.е. ориентированные на несколько отраслей промышленности, где необходимы такие расчеты (например, на прочность).

К числу компаний, разработавших наиболее передовые CAE системы, относятся ANSYS (www.ansys.com), Dassault Systems (www.3ds.com), MSC Software (www.mscsoftware.com), LMS International, Altair Engineering, Siemens PLM Software, ESI Group, CD-adapco, Autodesk, PTC. Программные продукты для инженерного анализа традиционно используются в машино- и приборостроении, автомобилестроении, аэрокосмической отрасли. К условно «новым» отраслям для внедрения систем для прочностных расчетов относятся электроника, химия, медицина, производство потребительских товаров. Прочностной анализ долгие годы основывался на линейной теории упругости, но в последние годы возникла необходимость в промышленном моделирование новых типов задач при больших (обратимых и необратимых) деформациях. Это связано, с одной стороны, с внедрением в повседневное использование «умных материалов» (материалов с памятью формы), композиционных материалов, резиноподобных материалов, материалов, испытывающих при эксплуатации немеханические воздействия, например, радиация, химические, высокотемпературные. С другой стороны, необходим детальный анализ катастрофических сценариев при эксплуатации изделия. Отметим,

что приведенные задачи лишь в минимальном объеме реализованы в современных CAE, что связано частично со временем их создания.

В процессе эксплуатации элементов конструкций в них возникают при нагружении различные дефекты (концентраторы напряжений) – полости, включения (области, в которых произошло изменение механических свойств материала, вызванное, например, изменением его микроструктуры). Современные технологии неразрушающего контроля позволяют не только обнаружить дефект, но и определить приближённо его размеры, форму и расположение в элементе конструкции. В связи с этим возникает необходимость оценивать возможность разрушения элементов конструкций при возникновении в них дефектов. Для этого необходим расчёт напряжённо-деформированного состояния в нагруженных элементах конструкций с возникающими в них дефектами. Во многих случаях необходимо при этом учесть нелинейные эффекты, связанные с конечностью деформаций. Существующие универсальные программные пакеты для инженерного прочностного анализа при конечных деформациях не имеют возможности осуществить расчет напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, в которых в процессе нагружения происходит образование дефектов (полостей или включений). В некоторых системах инженерного анализа предусмотрен способ моделирования образования дефектов посредством так называемого «убийства элементов», когда модули упругости конечных элементов, расположенных в области, где возникает дефект, обнуляются или принимают очень малые значения по сравнению с первоначальными. Однако применение «убийства элементов» имеет ряд существенных ограничений. Во-первых, этот способ не позволяет произвольным образом задать граничные условия на границах вновь возникающих дефектов (например, задать давление, приложенное к этим границам). Во-вторых, форма дефекта при таком способе может быть задана только в начальном (недеформированном) состоянии, в то время как при решении практических задач (например, задач мониторинга) эта форма может быть известна только в деформированном состоянии. Так как дефект образуется в процессе нагружения, то следует учитывать изменение границ и граничных условий. Для расчетчика это означает, в частности, необходимость решения системы из нескольких уравнений равновесия для нескольких векторов перемещений. Поэтому возникает необходимость в специализированных программных комплексах, созданных на основе теории многократного наложения больших деформаций в телах из упругого или вязкоупругого материала [127, 138], позволяющая ставить и решать новый класс задач о концентрации напряжений, в которых новые концентраторы напряжений образуются (возникают) в теле, уже имеющем конечные деформации.

Вторая и не менее важная составляющая CAE-системы - это методы решения полученных математических уравнений (нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных) с соответствующими граничными и начальными условиями. В большинстве универсальных промышленных CAE для прочностного инженерного анализа используется метод конечных элементов (МКЭ), хорошо апробированный в расчетной практике. С начала нашего века в научную практику для решения таких уравнений стал входить метод спектральных элементов (SEM) [131], позволяющий осуществлять высокоточную дискретизацию по пространству без перестроения расчетной сетки.

В данной главе приводится описание структуры и процесса работы в системе прочностностного инженерного анализа CAE Fidesys. Система CAE Fidesys является полнофункциональной, т.е. обеспечивает проведение всех основыных этапов инженерного анализа, рассмотренных в данной главе:

- построение и работа с геометрической моделью элемента конструкции для плоского и пространственного случаев;
- задание свойств материалов, из которых изготовлен элемент конструкции;
- задание нагрузок, прикладываемых к элементу конструкции;
- автоматизированное построение конечно-элементной сетки;
- расчёт напряжённо-деформированного состояния элемента конструкции;
- вывод результатов расчёта в текстовой и графической форме.

В CAE Fidesys поддерживается решение следующих плоских и пространственных задач в области прочности:

- статический и динамический анализ (при динамическом анализе используются явные и неявные схемы интегрирования);
- анализ потери устойчивости;
- модальный и гармонический анализ;
- задачи с геометрической нелинейностью (конечные деформации, большие перемещения);
- задачи с физической нелинейностью (гиперупругие и упругопластические материалы);
- контактные задачи;
- анализ теплопроводности и термоупругости;
- оценка эффективных свойств композиционных материалов.

Качество получаемых численных результатов подтверждается проведенным тестированием с использованием стандартов и тестов NAFEMS (http://www.nafems.org), сравнением с точными аналитическими решениями и с результатами решения задач в других CAE-пакетах (тестовые примеры приведены в приложении).

Приведены примеры решенных в CAE Fidesys практически важных задач из различных отраслей промышленности.

5.2 Структура CAE Fidesys

На сегодняшний день разработка CAE пакетов является наиболее наукоемкой и трудозатратной частью при создании PLM (что в частности определяет и стоимость лицензии на CAE). На Рисунок 203 приведено классическое представление о месте CAE в системе жизненного цикла изделия, элемента конструкции (PLM). PLM – концепция автоматизации процесса разработки и вывода на рынок продукта, получившая распространение в 80х годах XX века. В настоящее время направление PLM формирует отрасль, представленные в которой программные пакеты решают следующие задачи пользователей в процессе разработки и сопровождения промышленной продукции:

- MCAD (MR) (системы машиностроительного проектирования)
- MCAD (HE) (системы машиностроительного проектирования)
- CAM (системы для подготовки производства)
- CAE (системы инженерного компьютерного анализа)
- PDM (коллаборативные системы создания данных об изделии)
- DM (системы цифрового производства)
- Systems Integration

Применение систем инженерного компьютерного анализа (CAE) в настоящее время является де-факто стандартным этапом при разработке любого нового продукта в наукоемких отраслях, например, в энергетике, нефтегазовой промышленности, аэрокосмической, химической отраслях, в области нанотехнологий.

Большинство систем класса CAE разрабатываются как универсальные с целью охвата как можно большего числа потенциальных задач проектирования в различных отраслях. Именно такие CAE-пакеты являются частью распространенных PLM-систем. Среди типового функционала CAE-систем можно выделить:

- Структурный (прочностной) анализ.
- Температурный анализ.
- Анализ движения жидкостей и газов
- Электромагнитный анализ

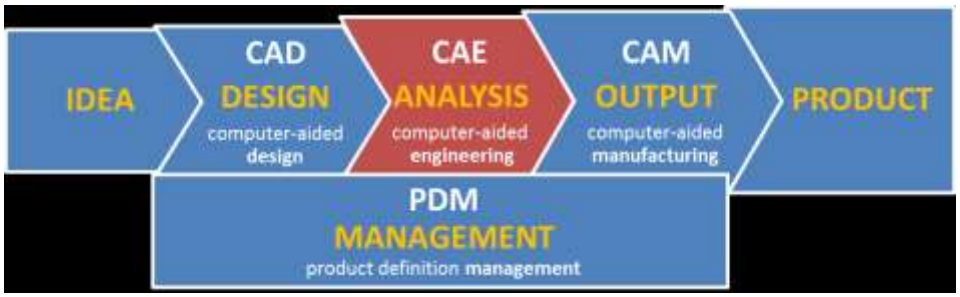


Рисунок 203 Место CAE в жизненном цикле разработки изделия (PLM).

Приведем вариант классификации CAE-систем:

1. «Тяжелые» (универсальные) CAE - могут быть использованы как для обычных поверочных расчетов, так и для моделирования при проектировании новых типов материалов, сложных изделий, для оценки результатов мониторинга при эксплуатации сложных изделий и сооружений. Обычно такие CAE создаются как междисциплинарные (принятый термин «мультифизичные») или обеспечивают возможность решения междисциплинарных задач путем интеграции с другими CAE.
2. Нишевые CAE. Они подразделяются на:
   2.1. Высокотехнологические CAE предназначенные для анализа (моделирования) для узкоспециализированных задач, например, ответственных участков трубопроводов в атомной промышленности, оценки результатов акустического каротажа (Глава 2), задач геомеханики (Глава 3) или поведения сооружения при динамическом воздействии. Обычно такие CAE достаточно быстро начинают развиваться в сторону CAE для междисциплинарных задач или интегрироваться с CAE, позволяющими решать такие задачи.
   2.2. CAE для изделий и сооружений, относительно простых с точки зрения расчетов, например, малоэтажных деревянных домов или специализированных типов трубопроводов. Обычно такие CAE достаточно быстро развиваются до специализированных CAD[1] или PLM, становясь хорошим инструментом для поверочных расчетов в таких системах.
3. Региональные CAE. Они обычно создаются для региона (страны) нацелены на малобюджетные сегменты регионального рынка, обладают достаточно большой функциональностью (типами анализа), но ограниченны по количеству и типам конечных элементов, качеству генерации сеток, т.е. по тем составляющим, которые не являются востребованными на данном сегменте рынка. Достаточно часто

[1] В более ранней терминологии САПР (систем автоматического проектирования)

эволюционируют в сторону создания региональных CAD, а в ряде случаев и региональных PLM для малобюджетных пользователей.

4. Расчетный комплекс в составе CAD. Ключевые мировые CAD и PLM системы имеют в своем составе полностью интегрированные в структуру CAD и PLM решатели (расчетные ядра) для прочностностного анализа. Обычны такие решатели создаются (или приобретаются на рынке) вендорами CAD и PLM.

Структура любого CAE - это препроцессор (включая генератор сеток), расчетные ядра, постпроцессор (включая и часть расчетной функциональности, например, построение полей прочностных характеристик для того или иного критерия прочности). Основной составляющей (реализующей основную функциональность) CAE является расчетное ядро (ядра), в которое заложены:

1. механические модели — математическое описание объекта инженерного анализа. Для прочностных CAE - это системы дифференциальных уравнений в частных производных (в общем случае нелинейных), решение которых позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние конструкции и ее элементов в процессе нагружения, моделировать развитие дефектов в нагруженных телах (данные модели рассмотрены в первой главе);
2. численные методы (рассмотренные в главах 2-3) решения краевых задач на основе сеточной дискретизации исходной аналитической постановки данных задач, обеспечивающие сходимость к точному решению при измельчении расчетной сетки и(ли) повышении порядка используемых базисных функций без перестроения сетки;
3. алгоритмы их программной реализации, позволяющие произвести полное распараллеливание всех основных этапов решения задачи (рассмотренные в четвертой главе) на различных программно-аппаратных платформах. Отметим, что CAE, созданные до 2010 г., пока не предусматривают полное распараллеливание в расчетных ядрах.

Отметим, что одной из ключевых составляющих процесса разработки и развития, а также поддержки CAE является процесс непрерывного тестирования. При этом следует в полном объеме использовать тесты, приведенные в материалах NAFEMS и дополнительную информацию по точным решениям.

Программный комплекс CAE Fidesys (конечно-деформационный анализ прочности) предназначен для решения статических и динамических задач прочности – задач о расчете напряженно-деформированного состояния тел при конечных деформациях с использованием метода конечных элементов (МКЭ) и метода спектральных элементов (МСЭ) (Рисунок 204).

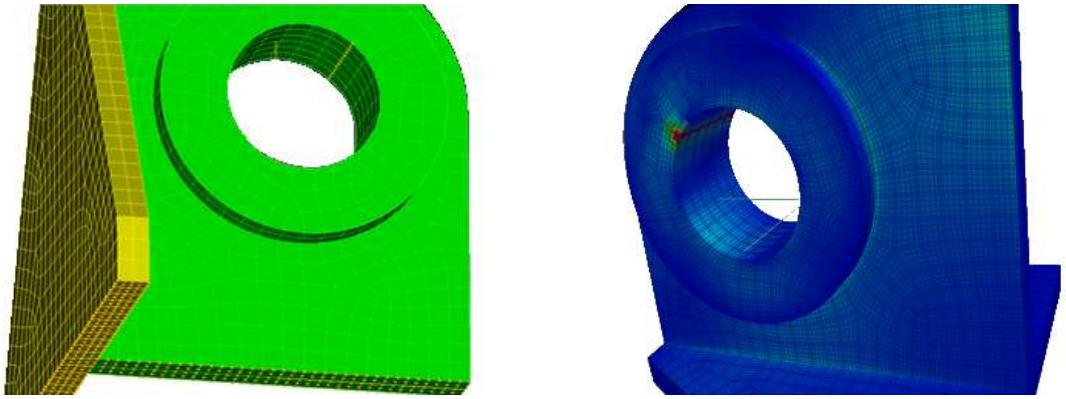


Рисунок 204 Автоматизация анализа на сеточную сходимость. С использованием МСЭ точность численного решения (справа) повышается варьированием порядка спектрального элемента без перестровения исходной сетки (слева).

Комплекс разработан таким образом, что, с одной стороны, системные требования для него невысоки: он может быть запущен на обыкновенном персональном компьютере, а при наличии в компьютере видеокарты с поддержкой технологии CUDA вычисления могут быть выполнены на ней [529] (что может дать ускорение в расчетах более 20 раз, как было показано в четвертой главе); с другой стороны, комплекс адаптирован также и для работы на СуперЭВМ [134, 135].

Уникальностью данного программного комплекса[2] является возможность решения задач, в которых в процессе нагружения происходит образование новых граничных поверхностей (полостей) в теле или изменение свойств материала в некоторой части тела, что ведет к перераспределению конечных деформаций в теле. Комплекс позволяет явным образом учитывать перераспределение конечных деформаций и, в отличие от схем, связанных с «убийством элементов» или заменой свойств материала внутри элемента (без точного учета граничных условий), использует подход, основанный на точной записи аналитических соотношений полной постановки задачи, в том числе учитывающей принудительное удаление части тела.

В комплексе использован подход прямой замены системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных системой нелинейных алгебраических уравнений с помощью МКЭ/МСЭ с последующим их решением методом Ньютона. Для решения задач с вязкоупругими материалами комплекс позволяет использовать интегральные определяющие соотношения со слабосингулярными ядрами. Кроме того, комплекс позволяет (в том числе и

[2] Существующие пакеты таким функционалом не обладают.

при конечных деформациях) решать следующие задачи, подробно рассмотренные в предыдущих главах:

- моделировать процесс разрушения с учетом возникновения и развития зон предразрушения;
- решать связанные задачи гидрогеомеханики;
- при решении задач прочности решать задачи вязкого развития трещины (ненулевого раскрытия) с последовательным поглощением основной трещиной вторичных;
- учитывать как локальные, так и нелокальные критерии прочности;
- решать задачи по определению первоначальной формы удаленной части нагруженного тела при задании формы тела после удаления и последующего деформирования;
- оценивать эффективные свойства материала (включая пористые материалы).

Увеличение расчетных возможностей комплекса осуществлено за счет следующих преимуществ:

1. уточнения моделей, расчетных схем и методов, в частности:

1.1. более точной оценки нелинейных эффектов, возникающих при конечных деформациях и их перераспределении;

1.2. возможности учета для больших деформаций принудительного изменения формы тела (элемента конструкции) при нагружении, возникновения новых поверхностей в нагруженном теле;

1.3. возможности учета для больших деформаций изменений свойств материалов при нагружении;

1.4. возможности решения различных типов связанных задач, в том числе и при конечных деформациях;

1.5. применения новейших численных схем решения задач математической физики, например, полностью явного метода спектральных элементов.

2. использования современных вычислительных, программных и аппаратных подходов и методов:

2.1. современных программных библиотек и средств, позволяющих значительно упростить разработку и ускорить вычислительный процесс;

2.2. распараллеливания вычислительных процессов на системах с общей памятью, массивно-параллельных системах и системах кластерного типа;

2.3. применения технологий, использующих дополнительные вычислительные ресурсы, например, технологии CUDA.

Пакет Fidesys прошел тестирование и верификацию в различных отраслях промышленности, в том числе проводилось сравнение с другими пакетами прочностного анализа, в результате которого получено не только качественное, но и количественное совпадение результатов расчетов промышленных задач, рассмотренных в параграфе 5.4.

Функциональные возможности пакета Fidesys различаются в зависимости от комплектации: Fidesys Standard, Fidesys Professional и дополнительные модули.

Основные функциональные возможности Fidesys Standard:

- Решение задач при плоских напряжениях и деформациях.
- Расчет напряженно деформированного состояния трехмерных тел при статическом и динамическом нагружении.
- Расчет собственных частот и форм колебаний трехмерных тел.
- Расчет критических нагрузок и форм потери устойчивости.
- Решение задач для тел, содержащих балочные и/или оболочечные элементы.

Fidesys Professional позволяет решать различные статические и динамические задачи прочности, в том числе, требующие учета конечных деформаций (рассмотренные в первой главе) и других нелинейных эффектов, таких как пластичность, нелинейные вязко- и термоупругость, гиперупругость, контактное взаимодействие тел с трением**:**

- Учет нелинейных эффектов, возникающих при конечных деформациях и их перераспределении.
- Термомеханический анализ упругих тел путем расчета температурных полей (стационарная и нестационарная теплопроводность) и термоупругих деформаций, вызванных ими (термоупругость).
- Анализ прочности деформируемого твердого тела с учетом геометрической нелинейности (конечные деформации и большие перемещения) в задачах статики и динамики.
- Проведение прочностного анализа для случая упругопластического деформирования при конечных деформациях.

Функциональные и технологические возможности Fidesys Standard и Fidesys Professional могут быть существенно расширены за счет применения дополнительных модулей:

Fidesys Dynamics – модуль, позволяющий решать нестационарные задачи с быстропротекающими процессами, требующими повышенной точности в дискретизации по пространству. Уникальной особенностью модуля является использование в расчетах метода спектральных элементов (рассмотренного во второй главе), что позволяет существенно повысить скорость и точность расчетов.

Fidesys Composite дополняет функционал продуктов Fidesys Standard и Professional возможностью расчета эффективных свойств композитов и пористых материалов (включая слоисто-волокнистые, тканые композиты, а также природные композиты – керны, рассмотренные в третьей главе) при малых и конечных деформациях.

Fidesys HPC – модуль, обеспечивающий возможность распараллеливания основных этапов решения задач с использованием технологий высокопроизводительных вычислений (рассмотренных в четвертой главе) для сокращения времени расчета и получения максимальной точности вычислений.

Рассмотрим далее основные функциональные модули в составе CAE Fidesys. Общая функциональная структура CAE Fidesys приведена на Рисунок 205.

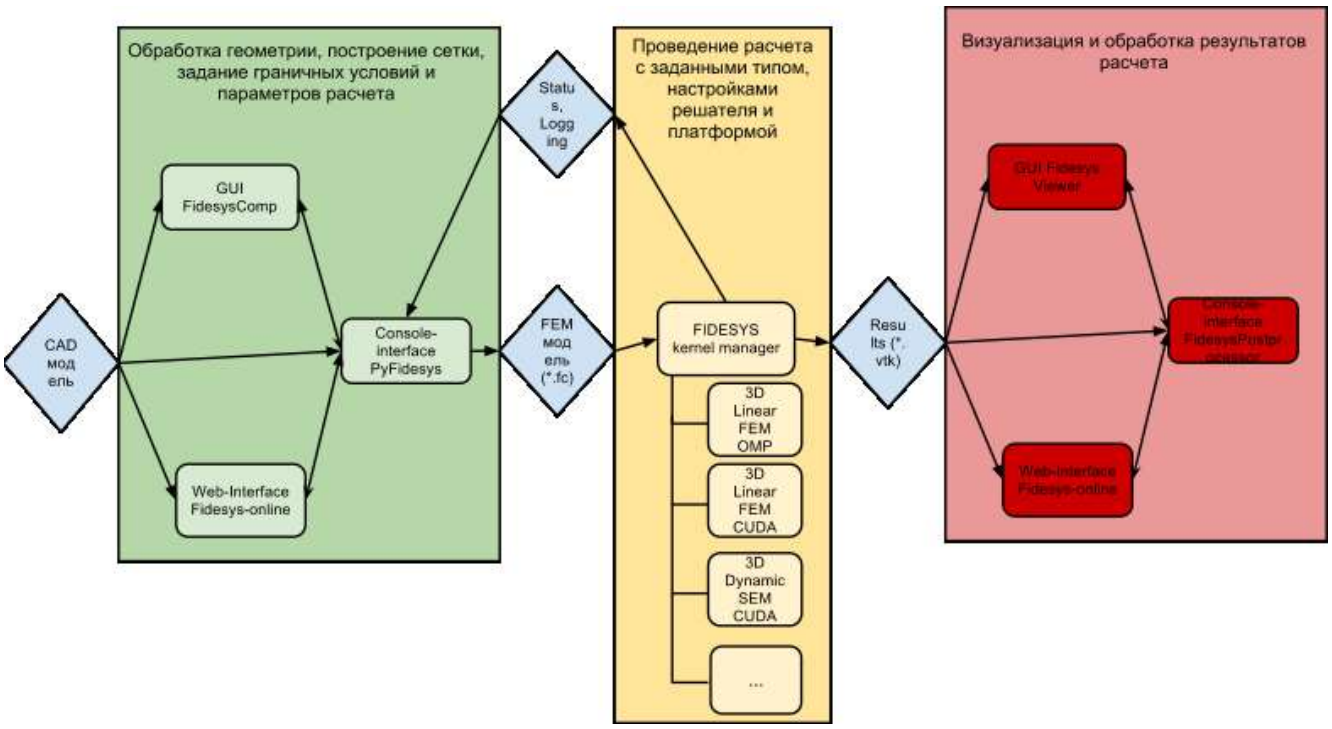


Рисунок 205 Функциональная структура CAE Fidesys. Слева направо представлен процесс инженерного анализа в препроцессоре, расчетных ядрах и постпроцессоре.

Программная структура CAE Fidesys состоит из следующих блоков (Рисунок 206):

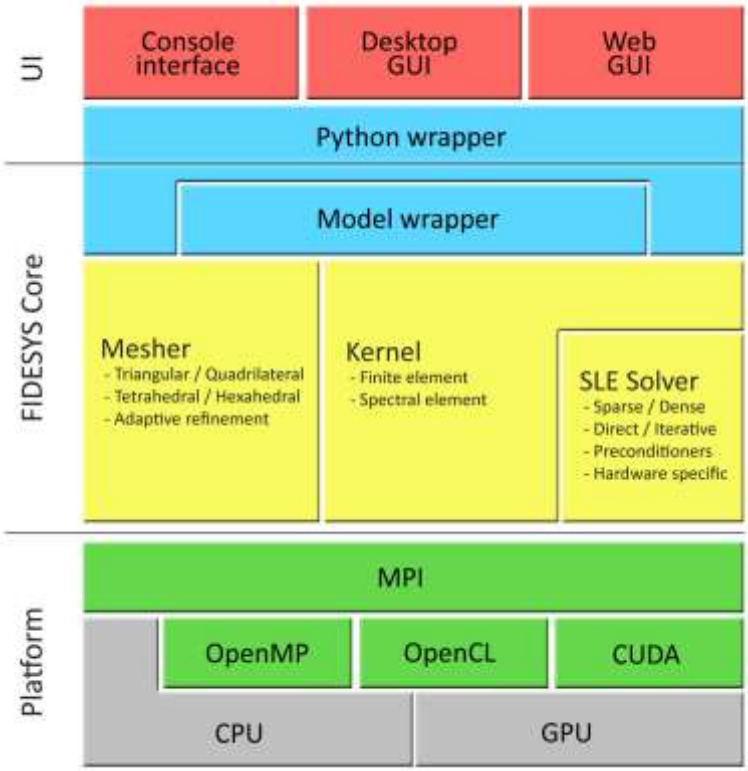


Рисунок 206 Программная структура CAE Fidesys. Сверху вниз: варианты интерфейсов пользователя, интерпретатор команд Fidesys на основе Python, математические ядра (генератор сеток, расчетные ядра МКЭ/МСЭ, решатель СЛАУ), программно-аппаратный уровень.

1. **Интерфейс.** Кроссплатформенный интерфейс на базе библиотеки Qt. Интерактивная визуализация данных и отрисовка двумерных и трёхмерных полей на базе библиотек VTK. Доступная расширяемость интерфейса пользователя (задание сложных нагрузок, закреплений, проведение серии расчетов) с помощью языка Python [160, 161] посредством консольного интерфейса к CAE Fidesys. Взаимодействие с CAD-системами (Autodesk Inventor, Bricsys BricsCAD). Экспорт расчётной сетки и результатов расчёта для анализа в программах ParaView, VisIt, FidesysViewer.

   Web-интерфейс (Рисунок 207, Рисунок 208) к пакету Fidesys позволяет упростить доступ к вычислительным ресурсам, в т.ч. к кластерам, к которым доступ традиционно организуется через интерфейс командной строки, а также доступ к вычислительным ресурсам, выделенным в облаке [797, 798]. Применение технологий облачных вычислений [636] обеспечивает возможность динамического выделения вычислительных ресурсов, масштабируемость по размерам решаемой задачи и количеству одновременно подключенных пользователей, высокую надежность и отказоустойчивость (при отказе одного из физических серверов, виртуальная машина с

CAE Fidesys автоматически перемещается на другой сервер). Кроме того, web-интерфейс реализует вариант доставки приложения как сервиса (Software as a Service, SaaS) [796] с возможностью совместной работы с расчетной моделью в CAE Fidesys напрямую через Интернет-браузер.

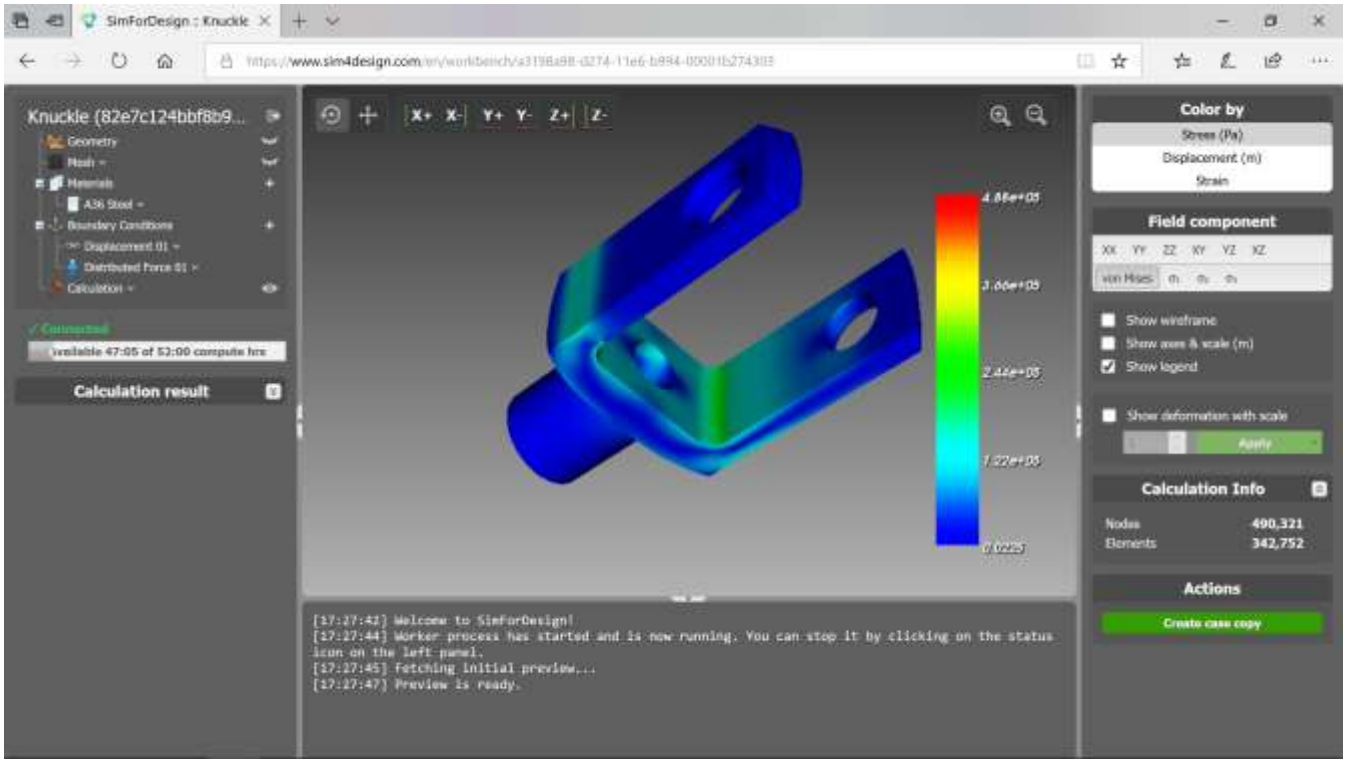


Рисунок 207 Web-интерфейс для запуска CAE Fidesys в облачной инфраструктуре

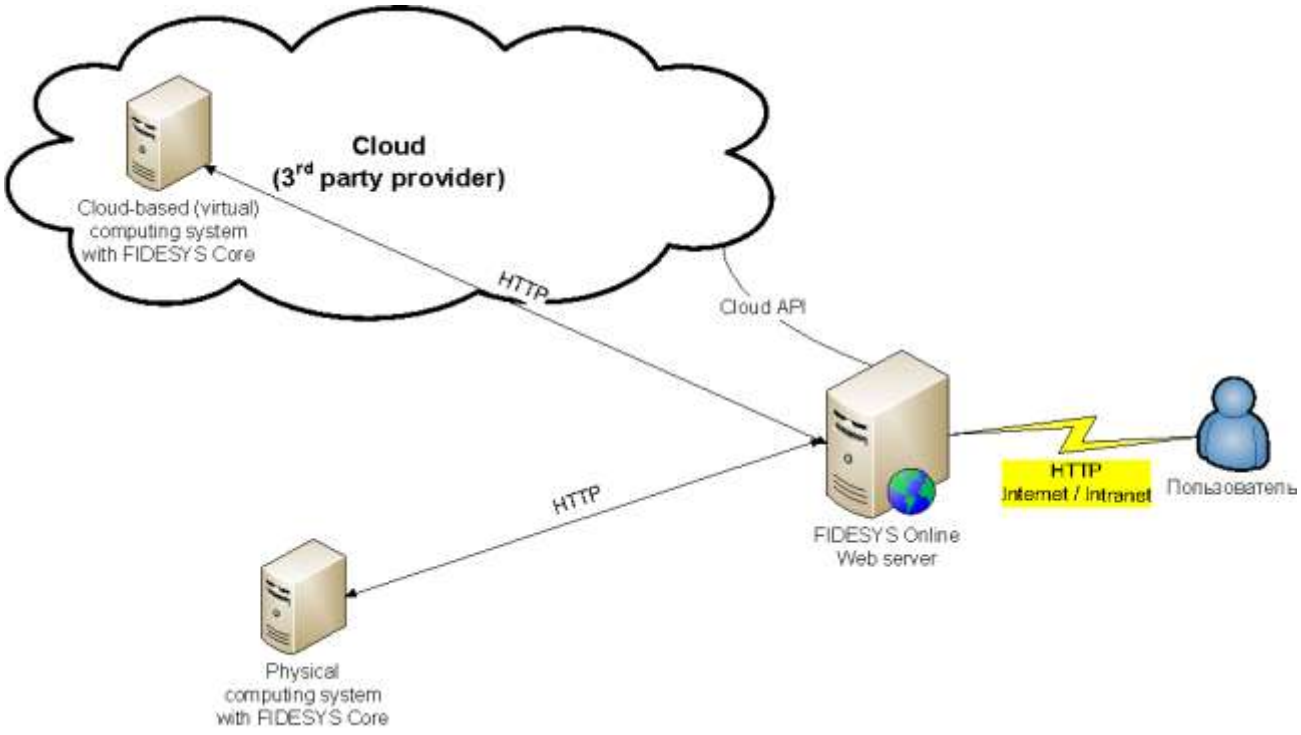


Рисунок 208 Архитектура облачного решения

Представленная на Рисунок 208 архитектура облачного решения состоит из:

- web-сервера, отвечающего за взаимодействие с интернет-браузером на стороне пользователя по протоколу HTTP(S), включая отображение визуальной информации и перенаправление запросов/ответов к/от вычислительных ресурсов;
- вычислительных ресурсов – реальных или виртуальных машин, предоставляемых пользователю в соответствии с его запросом; одна машина может использоваться как индивидуально одним пользователем, так и несколькими.

Поскольку все вычисления производятся на удаленных ресурсах и благодаря web-интерфейсу, требования к компьютеру пользователя минимальны (возможность работы в браузере без установки дополнительного ПО), облачный сервис доступен из любой точки мира с доступом в Интернет.

2. **Генератор сеток.** Построение двумерных (треугольных и четырехугольных) и трехмерных (тетраэдральных и гексаэдральных) неструктурированных адаптивных геометрии сеток. Локальное измельчение сеток. Адаптация и улучшение сеток в заданной пользователем метрике. Автоматическое построение сеток для CAD-моделей.
3. **Ядра МКЭ**. МКЭ-решатели для линейных и нелинейных задач механики деформируемого твердого тела, включая случай последовательного образования концентраторов напряжений. Возможность решения задачи в координатах промежуточного и конечного состояний. Поддержка моделей материалов Гука (включая анизотропные материалы), Мурнагана, Блейтца-Ко, Муни, Трелоара, Мизеса, Друкера-Прагера, обобщенного стандартного линейного твердого тела и т.д. с возможностью задания формульной и табличной зависимостей от пространственных координат, времени и температуры для параметров материала. Учет собственных деформаций тела. Моделирование развития дефектов при малых и конечных деформациях.
4. **Ядро МСЭ**. Применение метода спектральных элементов (МСЭ) для эффективного решения трехмерных нестационарных задач (включая сверхбольшие задачи геофизики) на многоядерных системах с общей памятью, а также на массивно-параллельных системах (графических процессорах).
5. **Решатели СЛАУ**. Использование прямых методов (разложение Холецкого, LU разложение) и итерационных методов (сопряженных градиентов, обобщенных минимальных невязок, бисопряжённых градиентов) решения СЛАУ с разреженной матрицей на CPU, GPU, системах с распределенной памятью. Поддержка различных переобуславливателей. Алгоритмы автоматического выбора решателей и параметров к ним.

6. **Технологии OpenMP, CUDA, MPI**. Адаптированные и параллельные версии МКЭ/МСЭ решателей под CPU/GPU платформы с использованием технологий OpenMP (многоядерные и многопроцессорные рабочие станции), CUDA (графические платы Тесла, MultiGPU решения), MPI (кластеры, SMP-машины).

Препроцессор

Графический интерфейс препроцессора (Рисунок 209) обеспечивает взаимодействие пользователя с возможностями пакета и позволяет поэтапно контролировать полный цикл подготовки модели для проведения расчета:

- создание или импорт геометрии
- построение расчетной сетки
- задание нагрузок, сил
- задание закреплений и граничных условий
- выбор модели материала и задание параметров для них, включая возможность загрузки параметров материала из базы данных
- выбор типа анализа и настроек к нему
- выбор решателя СЛАУ
- задание параметров расчета
- запуск расчета

Для визуализации модели на всех этапах используется библиотека VTK [803], широко применяемая для отображения и обработки научных данных. Возможности препроцессора в плане интерактивной визуализации позволяют:

- интерактивно работать с двух- и трехмерными моделями
- отображать скалярные, векторные и тензорные поля
- строить срезы, сечения
- отрисовывать выбранные точки/линии/поверхности/тела
- скрывать/показывать части геометрический и сеточной моделей
- реализовать прозрачность/непрозрачность частей геометрический и сеточной моделей
- осуществлять приближение/удаление, поворот, перенос сцены
- назначать идентификаторы/цвета частям геометрической модели (точкам, линиям, поверхностям, телам) и сеточной модели (узлам, ребрам, граням, элементам)

Кроссплатформенный графический интерфейс пользователя реализован на основе библиотеки Qt [806] и доступен на английском и русском языках.

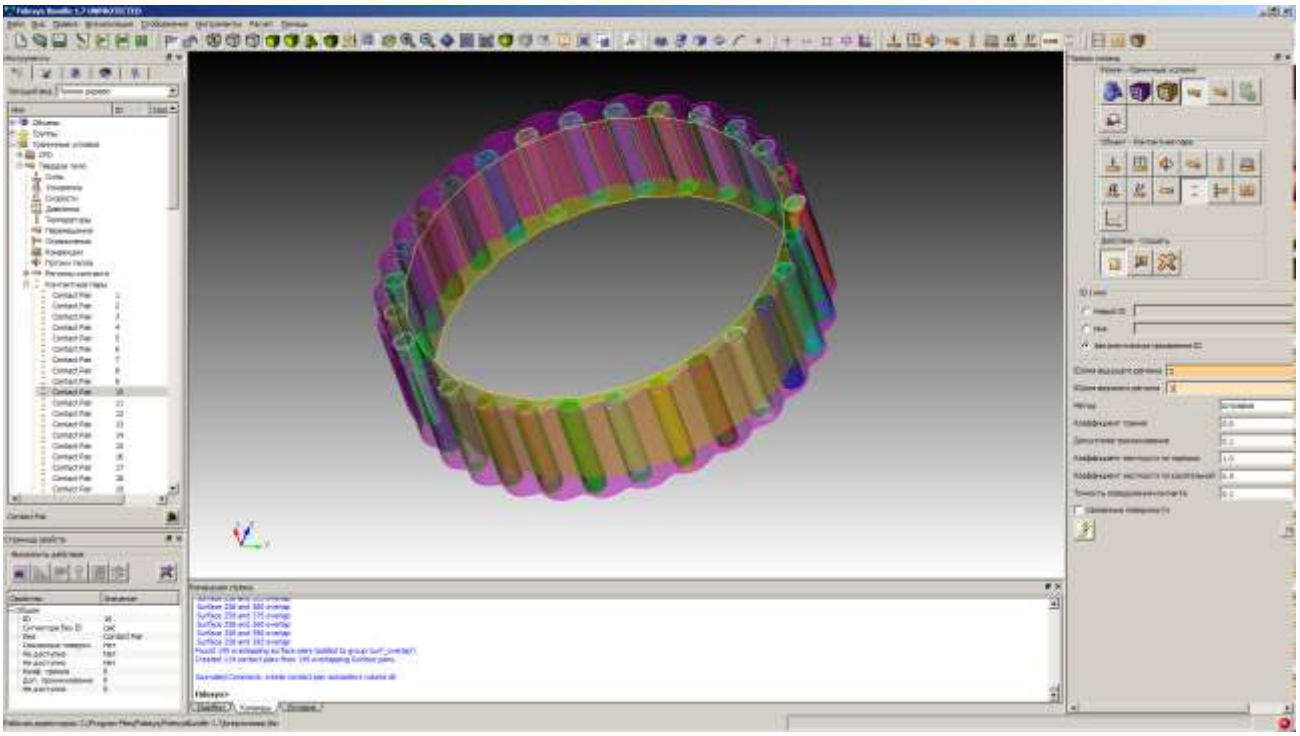


Рисунок 209 Графический интерфейс препроцессора CAE Fidesys.

Помимо графического интерфейса (GUI), есть возможность текстового (скриптового) ввода команд посредством интерфейса командной строки на основе языка Python для доступа к API препроцессора, а также сохранения (логирования) действий пользователя в GUI в журнальные файлы с их последующим воспроизведением в интерактивном и пакетном режимах. Это позволяет пользователю, обладающему минимальными навыками программирования, автоматизировать выполнение рутинных задач, а также воспользоваться возможностями пакета, недоступными через графический интерфейс. Язык программирования Python известен своим простым синтаксисом и легкостью в изучении. Он широко распространен как в коммерческой среде, так и среди сообщества программного обеспечения с открытым исходным кодом. Для языка Python доступно большое количество библиотек для практически любых задач. Например, библиотеки NumPy и SciPy предоставляют обширный набор инструментов для научных расчетов.

Python — интерпретируемый язык программирования. В отличие от компилируемых языков (таких, как Java, C++, FORTRAN) он не требует наличия у пользователя средств разработки (компилятора, линковщика) и опыта работы с ними, так как интерпретатор Python полностью встроен в CAE Fidesys. Интерпретируемость также означает, что можно выполнять не только целые программы, но и отдельные команды в интерактивном режиме.

В графическом интерфейсе Fidesys предусмотрена интерактивная консоль. В ней пользователь может вводить любые команды на языке Python и сразу же наблюдать результат

их выполнения. В частности, это очень удобно на этапе ознакомления с языком, а также для проведения экспериментов.

С помощью команд на языке Python можно выполнять все действия, доступные через графический интерфейс, причем пользователь не ограничен в выборе только одного средства взаимодействия с пакетом. Например, возможно создать в графическом интерфейсе модель с одним включением, задать его свойства (размеры, форму, параметры материала и другие) и затем, уже с помощью интерактивной консоли, создать несколько копий включения, расположив их требуемым образом в пространстве. В документации к пакету Fidesys [177, 795] имеются примеры и пошаговые руководства, которые описывают некоторые типичные сценарии применения языка Python. Примеры составлены таким образом, чтобы пользователь мог взять их за основу и адаптировать для решения своих конкретных задач.

В качестве основы для препроцессора программного комплекса Fidesys был выбран адаптированный вариант пакета CUBIT – Trelis [799, 800]. Препроцессор Fidesys реализован на основе геометрического ядра ACIS [801] и предоставляет широкие возможности по созданию, изменению и улучшению геометрической модели для последующего построения конечноэлементых сеток на ней (Рисунок 210).

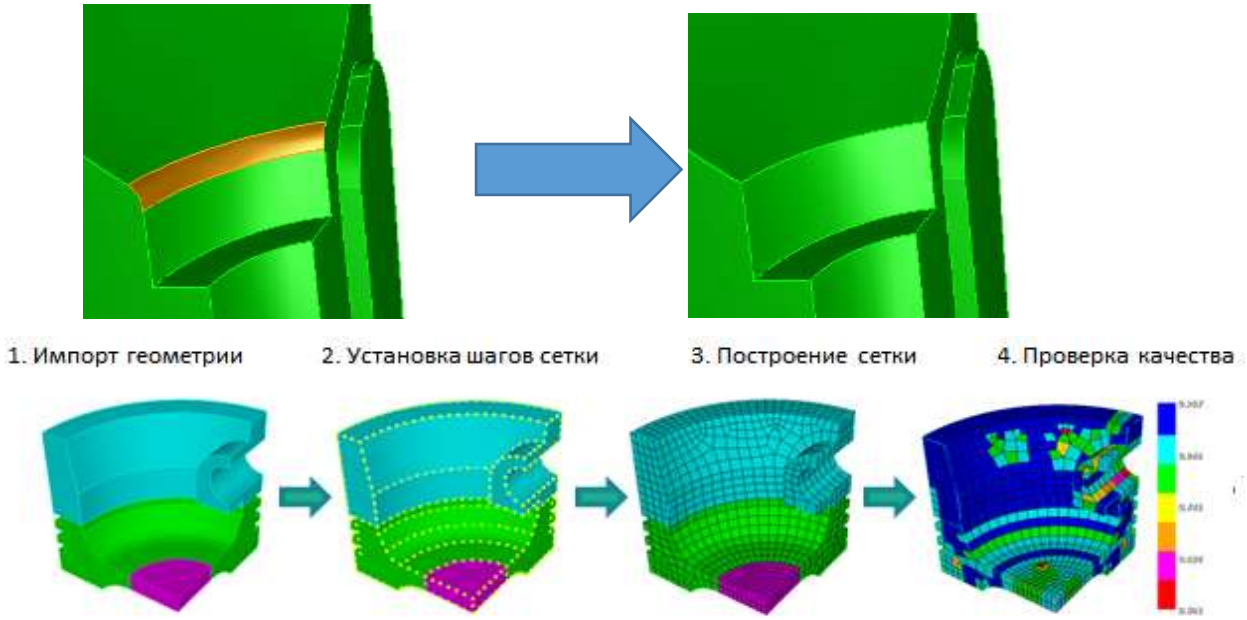


Рисунок 210 Изменение начальной геометрической модели (сверху) и процесс построения сетки (снизу) в CAE Fidesys

Работа с пакетом Fidesys начинается с задания геометрии задачи. С помощью графического интерфейса можно задавать простую геометрию, например, тела с включениями и отверстиями различной формы. Такие модельные задачи позволяют сравнивать результаты расчета с аналитическими решениями и другими расчетными пакетами. Для задания более

сложной геометрической модели пользователь может подготовить ее в CAD-системе и импортировать далее в Fidesys.

Поддерживается импорт геометрической модели в следующих CAD-форматах: ACIS (*.sat, *.sab*), Pro/Engineer(*.prt*, *.asm*), SolidWorks(*.sldprt, *.sldasm), CATIA(*.CATPart, *.CATProduct), Parasolid(*.x_t, *.x_b), нейтральных форматах STEP (*.stp, *.step*) и IGES (*.igs, *.iges*), а также в сеточных форматах: STL(*.stl), AVS(*.avs), Facets(*.fac), Genesis/Exodus(*.g, *.gen, *.e, *.exo), Abaqus(*.inp), Patran(*.pat, *.neu, *.out), IDEAS(*.unv), Fluent (*.msh), Nastran (*.bdf).

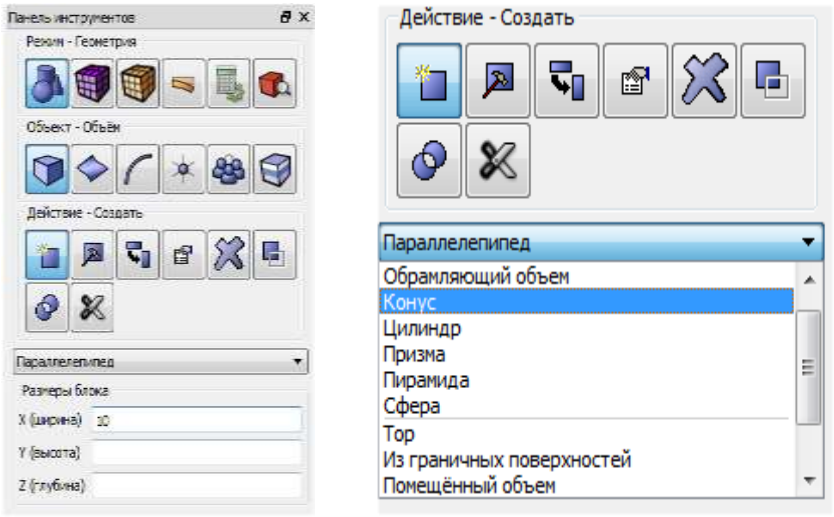




Рисунок 211 Варианты построения геометрической модели в CAE Fidesys. Сверху – геометрические примитивы, снизу – построение восходящим методом.

Препроцессор позволяет загружать геометрию анализируемого изделия в виде CAD-модели и при необходимости редактировать ее, а также строить геометрическую модель (Рисунок 211) восходящим образом (от вершин и кривых к поверхностям и объемам) и/или с использованием примитивов (точки, прямые/кривые (в том числе сплайны) линии, плоскости, поверхности (в том числе натянутые на точки, кривые), тела (параллелепипед, шар, цилиндр, конус, пирамида, призма, тор)):

- Выполнение логических операций над объектами в составе геометрической модели: объединение, вычитание, пересечение, оттиск(imprint), слияние(merging).

- Анализ и обработка геометрической модели: автоматически обрабатывает случаи некорректной геометрической модели (нахлест, пересечения) и ее топологии, а также артефакты в модели, полученной при импорте из CAD-системы.
- Диагностика геометрической модели: диагностирует проблемы с геометрической моделью. Доступны интерактивные инструменты по обработке и улучшению геометрической модели.
- Выделение(захват) точки/кривой/поверхности/объема.
- Копирование/вставка объектов.
- Поворот вокруг заданной оси/вектора с/без сохранения оригинала.
- Перенос на заданный вектор с/без сохранения оригинала.
- Отражение относительно заданной плоскости с/без сохранения оригинала.
- Растяжение/сжатие.

Следующий этап работы с пакетом — построение расчетной сетки. Вначале строится дискретизация границы (в двумерном случае) или поверхностная сетка (в трехмерном), затем по этим данным строится сетка во всей области. При этом пользователь может интерактивно задавать параметры построения сетки: коэффициент разгрубления, максимальный размер элемента, количество точек на границе или поверхности и провести различные операции над сеткой:

1. Добавление опорных узлов в сетку
2. Построение одномерных сеток вдоль кривых
3. Построение треугольных/четырехугольных неструктурированных конформных сеток различными методами (например, advancing front, Delaunay) на плоскости и поверхности, включая криволинейные сетки
4. Построение тетраэдральных/гексаэдральных неструктурированных конформных сеток различными методами (advancing front, Delaunay) в пространстве, включая криволинейные сетки
5. Автоматическое построение сеток для CAD-моделей с учетом внутренних границ подобластей
6. Возможность задания шага сетки в подобластях
7. Возможность построения разгрубляющихся сеток с заданным коэффициентом разгрубления
8. Адаптивные к геометрии сетки
9. Восстановление геометрии по сетке
10. Перенумерация узлов сетки

Если для задачи уже имеется расчетная сетка (например, построенная в другой программе), пользователь может импортировать ее. Также предусмотрен экспорт любой построенной в пакете сетки в различные сеточные форматы, упомянутые выше.

Пакет «Фидесис» содержит функционал, как для создания расчетных сеток, так и для перестроения уже имеющихся.

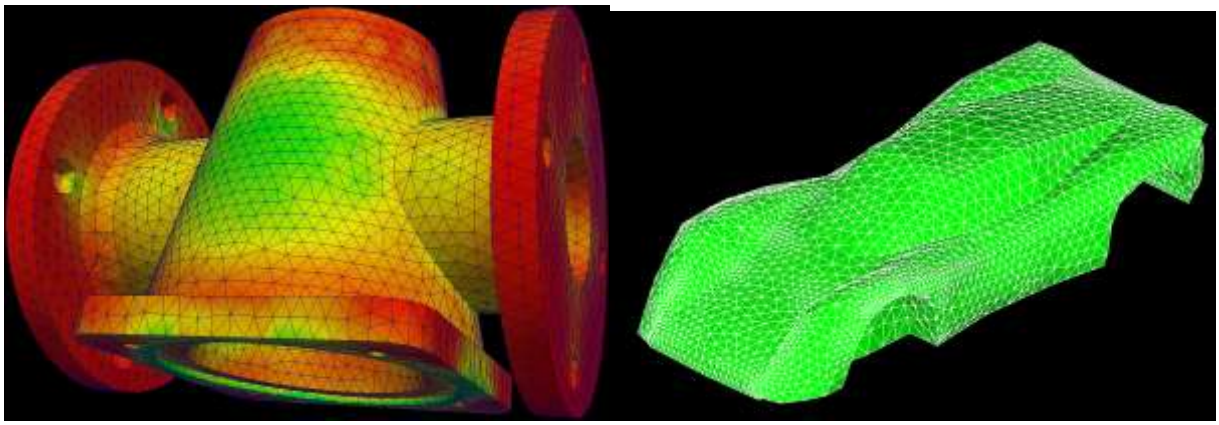


Рисунок 212 Примеры неструктурированных конформных сеток

Пакет работает с неструктурированными треугольными и четырехугольными (на плоскости и на поверхности в трехмерном пространстве) и тетраэдральными и гексаэдральными (в трехмерном пространстве) конформными сетками. Сетка называется конформной, если пересечение любых двух ее элементов является либо общей вершиной, либо целым общим ребром, либо целой общей гранью, либо пустым множеством (Рисунок 212). Конформность сетки является важным свойством для используемых в пакете вычислительных методов МКЭ/МСЭ. Использование неструктурированных сеток позволяет строить расчетые сетки для сложных областей с криволинейными границами. Пакет позволяет работать с многокомпонентными и многосвязными областями.

Возможна работа как с дискретным, так и с аналитическим представлением области. В первом случае необходима лишь граница области, заданная в дискретном виде (набор отрезков на плоскости, или набор треугольников в пространстве). Во втором случае возможно использование криволинейных границ, заданных параметрически.

Для эффективной работы МКЭ/МСЭ требуется, чтобы, с одной стороны, элементы в сетке были близки к правильным, с другой стороны, для более точного вычисления в определенных областях требуется сгущать сетку, т.е. сетка в общем случае является неравномерной и неструктурированной. Заложенные в пакет Fidesys генераторы сеток позволяют сгущать и разгрублять сетку в различных частях рассчитываемой области. Дискретизация тела может быть получена несколькими способами:

1) дискретизация строится автоматически для определенного класса примитивов (Рисунок 213): круг, эллипс, квадрат, прямоугольник, шар, эллипсоид, цилиндр, куб;

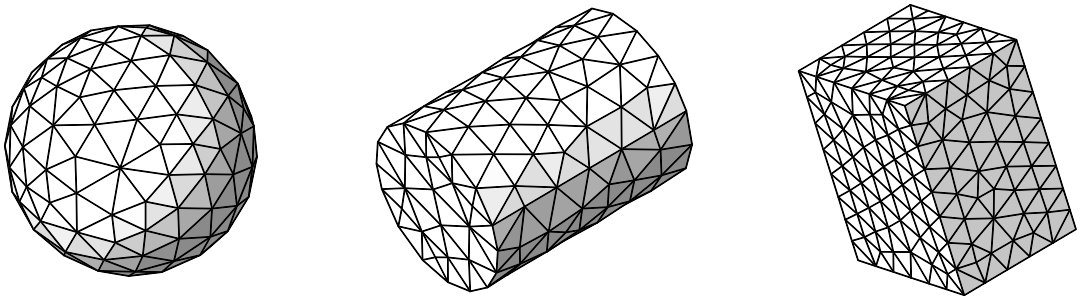


Рисунок 213 Построение сетки на геометрических примитивах

2) дискретизация строится автоматически для моделей, заданных в системах САПР (Рисунок 214), для этого используется встроенное в препроцессор геометрическое ядро ACIS, которое поддерживает широкий набор форматов CAD-моделей, перечисленный ранее;



Рисунок 214 Дискретизация CAD-модели

3) дискретизация может быть предоставлена пользователем, при этом она может быть автоматически улучшена за счет перестроения поверхностной сетки [48] и построения объемной на ее основе (Рисунок 215), в том числе для сеточных моделей, построенных в САПР (Рисунок 216);

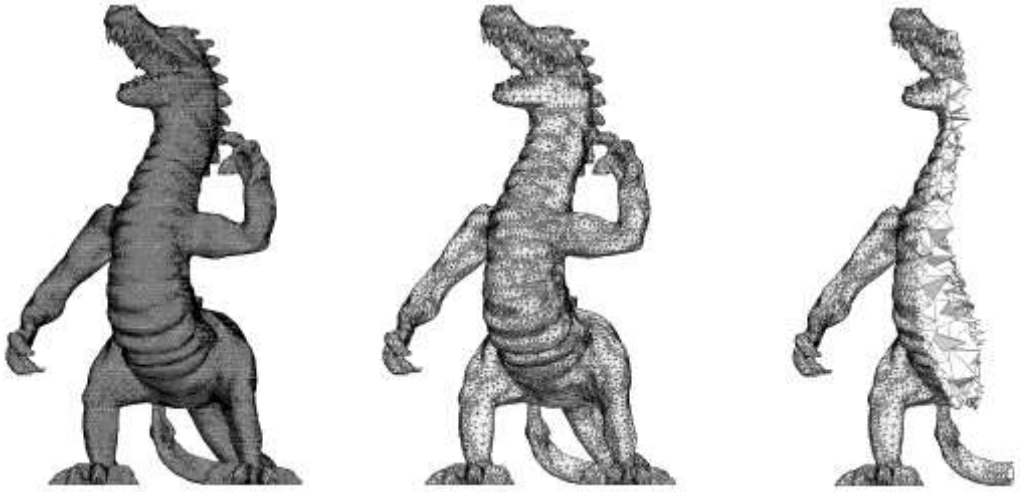


Рисунок 215 Перестроение и улучшение сеточных моделей

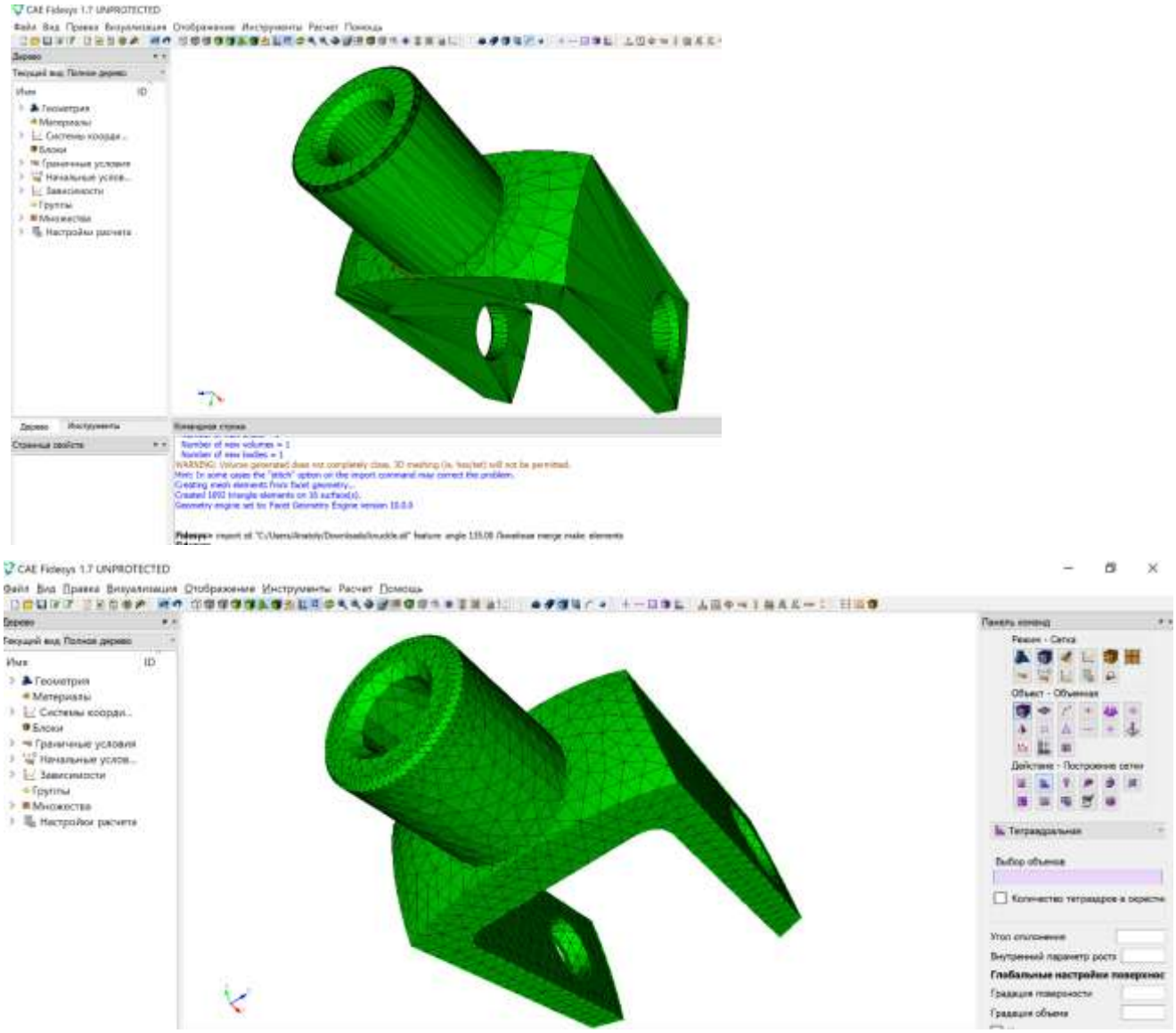


Рисунок 216 Импорт модели из САПР. Сверху - грубая начальная сетка с элементами низкого качества; Снизу - перестроенная неструктурированная сетка.

Размер сеточных элементов может быть задан пользователем, а может выбираться автоматически. Например, он может быть задан константой для получения квазиравномерных сеток, либо может быть определен пользователем для локального контроля шага сетки элемента конструкции. Например, шаг сетки может быть уменьшен вблизи геометрических особенностей модели или в области особенности численного решения, если имеется априорная информация об этом (Рисунок 217).

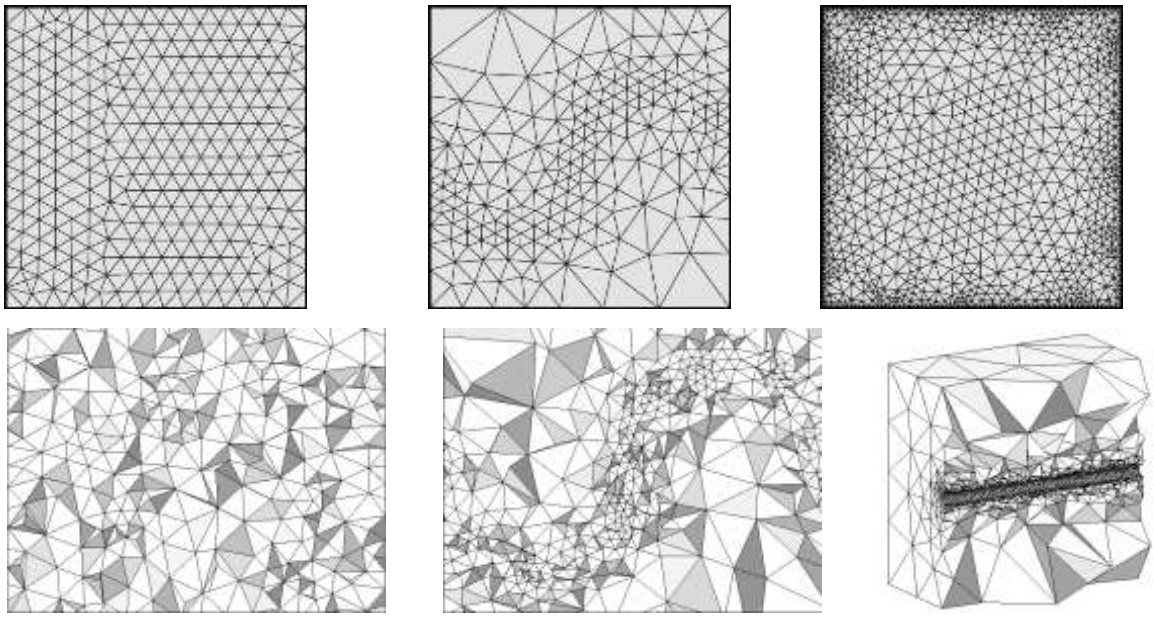


Рисунок 217 Варианты задания шага сетки. Слева - квазиравномерная сетка; в центре - задание шага сетки вдоль кривой; справа - автоматическое сгущение к границам области.

Развитая функциональность пакета в области построения неструктурированных сеток позволяет сократить время генерации сеток, в частности, больших гексаэдральных сеток, для сложных и многосвязных геометрических моделей. Алгоритмы генерации сеток включают алгоритмы разбиения поверхности треугольными и четырёхугольными элементами, создание гексаэдральных сеток по одной или нескольким шаблонным поверхностям, генерация тетраэдральных сеток в автоматическом режиме и др. CAE Fidesys содержит большое количество алгоритмов контроля и автоматизации процессов разбиения сеток (Рисунок 218), таких как автоматический выбор схемы разбиения, размера элемента, проверку полученного разбиения, а также включает алгоритмы улучшения качества построенных сеток.

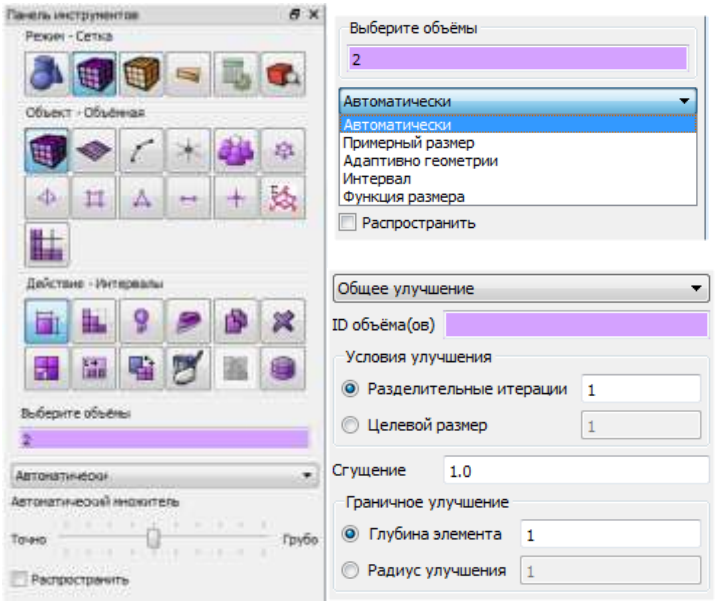


Рисунок 218 Панели для работы с сетками в CAE Fidesys

Препроцессор CAE Fidesys поддерживает следующие операции по работе с сетками (Рисунок 219):

- Построение неструктурированных сеток с заданным или адаптивным к геометрической модели шагом в 2D и 3D.
- Алгоритмы прямой генерации сеток из четырёхугольных элементов (paving) [763]
- Алгоритмы прямой генерации треугольных элементов на поверхностях (triangulation)
- Построение неструктурированных тетраэдральных сеток [77, 78, 285, 398]
- T-Hex: создание неструктурированной гексаэдральной сетки на основе тетраэдральной путём разбиения тетраэдров на гексаэдры.
- Операции с сеткой: копирование, трансформирование, отображение.
- Автоматический выбор схемы разбиения: позволяет выбрать наилучший алгоритм разбиения для заданной геометрической модели.
- Автоматическое разбиение сборок (моделей, состоящих из нескольких элементов): выбирает последовательность разбиения элементов сборки.
- Автоматическое определение размера элементов: задаёт наилучшее количество точек на кривой для обеспечения условия конформности сетки.
- Контроль качества сетки: по якобиану, асимметрии, плавности перехода, депланации, отношению сторон, максимальному/минимальному углу, числу обусловленности и т.п.
- Улучшение сетки на основе различных алгоритмов сглаживания. Глобальные и локальные настройки качества. Улучшение и очистка тетраэдральных сеток.
- Редактирование сеток: интерактивное редактирование сетки, в том числе удаление, слияние, трансформация элементов и т.д.

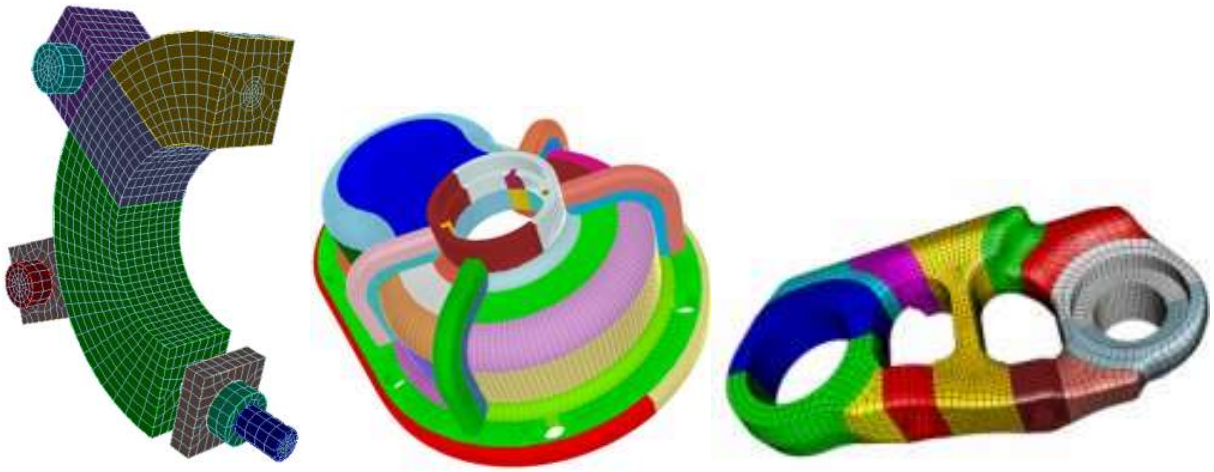


Рисунок 219 Примеры сеточных моделей, построенных в CAE Fidesys

Когда расчетная сетка построена, пользователь задает параметры задачи: нагрузки, начальные и граничные условия, свойства материалов, параметры расчета (Рисунок 220). С

помощью графического интерфейса пользователь может установить наиболее типичные варианты нагрузок (например, равномерное давление, приложенное к поверхности отверстия или полости) и граничных условий (например, условие симметрии перемещений). Если требуется большая гибкость в задании параметров материала и нагрузок (например, переменных по пространству), возможно написать подпрограмму на языке Python, автоматизирующую данные операции. Свойства материала могут быть заданы вручную, путем ввода констант, или же выбраны из библиотеки материалов.

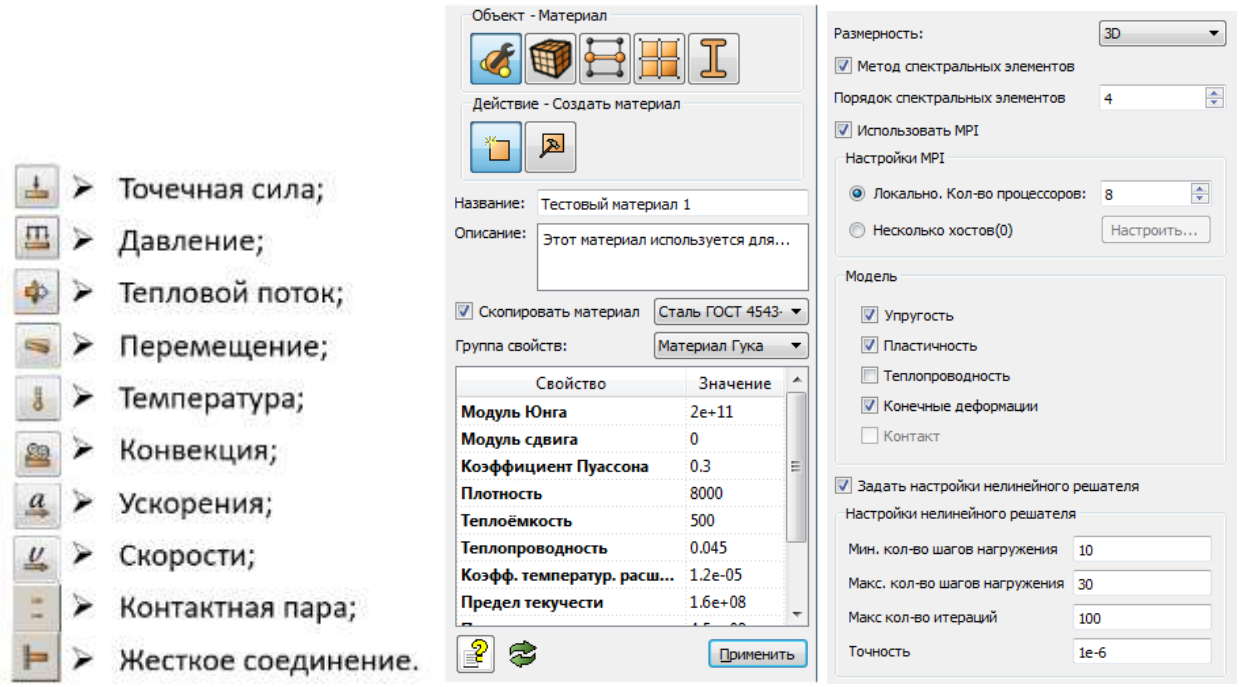


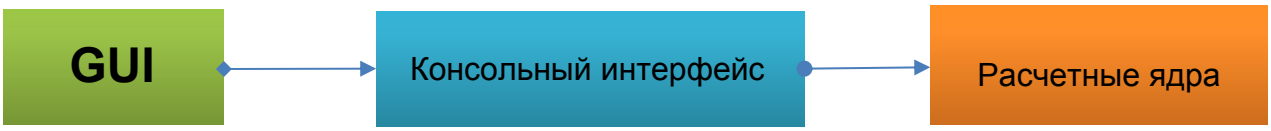
Рисунок 220 Задание граничных условий (слева), параметров материала (в центре) и расчета (справа)

По умолчанию пакет Fidesys автоматически выбирает наиболее оптимальные параметры расчета, соответствующие возможностям компьютера пользователя и типу решаемой задачи. Например, если в системе присутствует многоядерный процессор, будет включено распараллеливание с использованием технологии OpenMP.

Также автоматически выбирается наиболее эффективный метод решения систем линейных уравнений, исходя из типа и размера решаемой задачи. Такой подход в большинстве случаев оптимален для пользователя, однако за ним всегда остается возможность изменить настройки по своему усмотрению.

Если заданы противоречивые входные данные или невозможные параметры расчета, пользователю будет выдано сообщение об ошибке, содержащее описание проблемы и наиболее вероятную ее причину. В сообщении также будут предложены способы устранения ошибки и даны ссылки на соответствующие разделы справки. На протяжении всех длительных

вычислительных процессов (построение расчетной сетки, проведение расчета) пользователю отображается окно с информацией о текущем действии и статусе его выполнения.



Передача данных из препроцессора в расчетные ядра реализована посредством файлового интерфейса в формате *.fc (Fidesys case), содержащего:

- координаты узлов сетки,
- список конечных элементов,
- свойства материалов,
- динамические и статические граничные условия,
- вид и параметры анализа.

Постпроцессор

Постпроцессор вызывается на заключительном этапе решения задачи, в рамках которого пользователь изучает, обрабатывает, анализирует и экспортирует результаты расчета.

Сразу после завершения расчета пользователь может воспользоваться встроенными в пакет возможностями визуализации и анализа. Результаты расчета передаются в постпроцессор в формате базы данных библиотеки VTK (*.vtk и *.vtu). Файл в данном формате может быть визуализирован и отредактирован с помощью ряда пакетов программ для работы с компьютерной графикой, например, таких как кроссплатформенные пакеты Paraview и Visit с открытым программным кодом. CAE Fidesys использует для анализа и обработки результатов постпроцессор FidesysViewer (Рисунок 221).

FidesysViewer обладает широким функционалом для постпроцессорной обработки, анализа и визуализации результатов вычислений с наложением различных фильтров**:**

- Визуализация векторных и тензорных полей
- Построение графиков и диаграмм
- Анализ временных зависимостей
- Отображение в режиме прозрачности модели
- Построение срезов и сечений модели, изолиний, изоповерхностей
- Скалывание значение в выбранных точках (в том числе интерактивно, с помощью курсора)
- Отрисовка полей на поверхностях модели (в исходной и деформированной геометриях)
- Анимация результатов для динамических задач с выбором частоты визуализации

- Построение сейсмограмм: изменения величин от времени в выбранных пространственных точках
- Расчет запасов прочности по различным теориям (первая теория прочности, энергетическая, Писаренко-Лебедева, Мора, Треска, Кулона-Мора, Друкера-Прагера, Моги-Кулона)
- Выбор цветовой палитры, макс/мин значений
- Отражение/вращение/перенос относительно заданного вектора
- Сохранение результатов визуализации и обработки в форматах: MS Excel, VTK, ASCII (графики), снимки экрана (jpg, png, tiff), анимация (avi, mpeg)

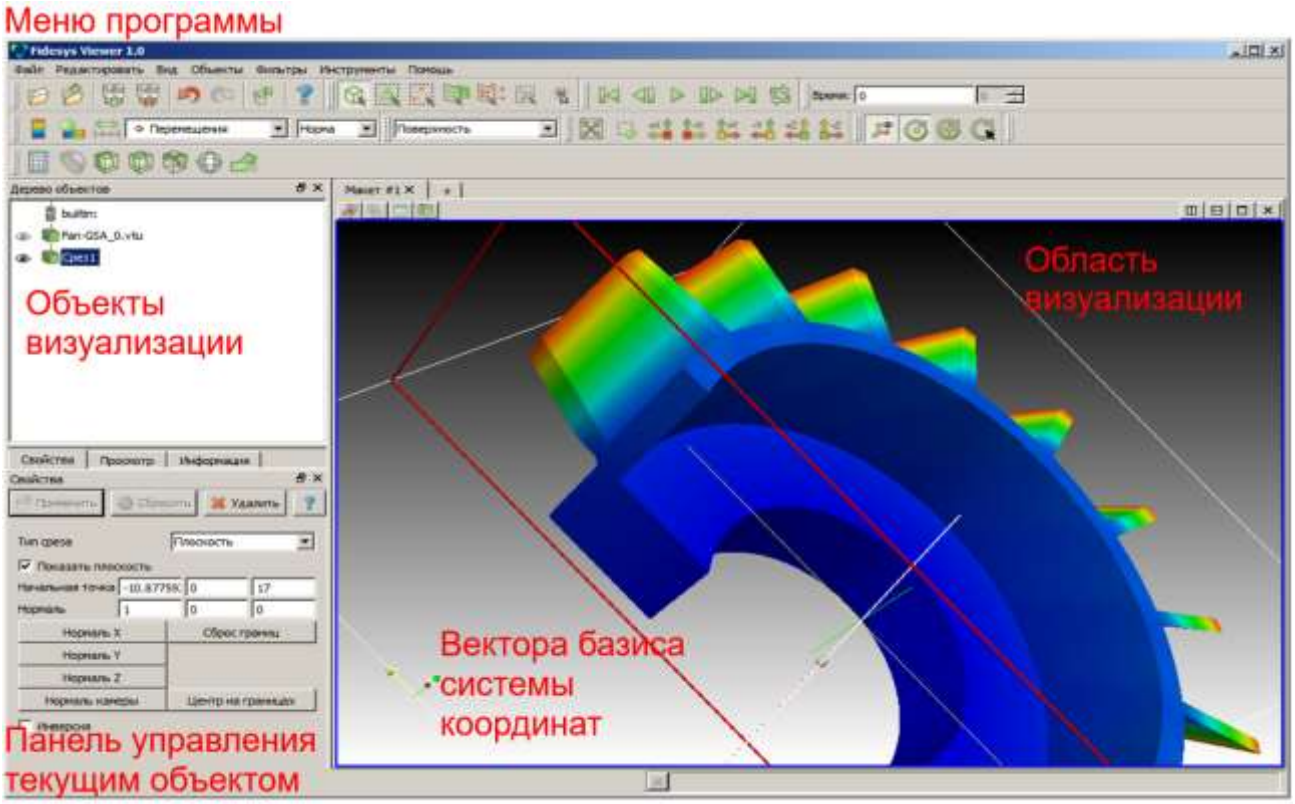
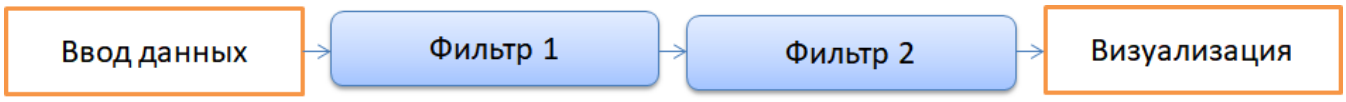


Рисунок 221 Графический интерфейс FidesysViewer.

Исходные данные поступают в конвейер визуализации, в котором результат выполнения фильтра является исходными данными для следующего фильтра. Над последним также можно выполнить набор операций. Результат последних станет исходными данными для нового фильтра.



С использованием FidesysViewer в статических задачах возможно отобразить модель в начальном и в конечном (деформированном) состояниях; в динамических задачах — воспроизвести колебания тела и изменения напряженно-деформированного состояния во

времени. В качестве результатов расчета выдаются поля напряжений, перемещений и деформаций.

Расчетные ядра

CAE FIDESYS [177, 795, 848, 851, 852] предназначен для решения статических и динамических задач прочности – задач о расчете напряженно-деформированного состояния тел при малых и конечных деформациях с использованием метода конечных элементов (МКЭ) и метода спектральных элементов (МСЭ), рассмотренных в Главах 1 и 2. Метод, наиболее подходящий для расчета конкретной задачи, может быть выбран в автоматическом режиме, но также предусмотрена и возможность выбора пользователем предпочтительного метода расчета. Стоит отметить, что все представленные на данный момент на рынке CAE-системы, как правило, используют для расчетов только МКЭ.

Метод конечных элементов [131, 140] является одним из самых распространенных численных методов для решения задач механики деформируемого твердого тела. В основе метода лежит разбиение рассчитываемой области на элементы (для механики деформируемого твердого тела это область, занимаемая телом). Элементы обычно имеют простую геометрическую форму: для плоских задач, как правило, используются треугольники или четырехугольники, для пространственных — тетраэдры или гексаэдры. Поведение и свойства каждого элемента считаются известными, т.е. по приложенным нагрузкам сразу же можно вычислить напряженно-деформированное состояние в любой точке этого элемента. На практике это означает, что вся информация о внутреннем состоянии элемента содержится в его узлах. Узлами являются вершины элемента и иногда некоторые дополнительные точки на ребрах. Для расчета всей задачи необходимо также знать, каким образом элементы взаимодействуют друг с другом. В МКЭ считается, что элементы взаимодействуют между собой только в узлах, т.е. в некотором смысле можно представлять, что нагрузка передается от элемента к элементу, как если бы они были закреплены шарнирно. С математической точки зрения, метод может рассматриваться как поиск решения в виде линейной комбинации конечного количества базисных функций, которые строятся на каждом элементе по его узлам. В данной постановке для решения краевой задачи требуется найти коэффициенты этого разложения. CAE Fidesys поддерживает следующие виды элементов в сеточной дискретизации (включая дискретизации из элементов смешанного типа):

- 8- и 20-узловой гексаэдральный объемный элемент
- 4- и 10-узловой тетраэдральный объемный элемент
- 6- и 15-узловой призматический объемный элемент

- 5- и 13-узловой пирамидальный объемный элемент
- 4- и 8-узловой плоский четырехугольный элемент: плоская деформация, плоское напряжение
- 3- и 6-узловой плоский треугольный элемент: плоская деформация, плоское напряжение
- 6- и 8-узловой оболочечный элемент с заданием толщины и эксцентриситета (Рисунок 222)
- 2- и 3-узловой балочный элемент с заданием параметров профиля (Рисунок 222)
- Контактные элементы: узел-узел, узел-поверхность, поверхность-поверхность
- Мультиэлементы для решения задач с несжимаемыми материалами в двумерной и трехмерной постановках
- Конструктивные элементы: пружины, точечные массы
- Жесткие связи по степеням свободы между элементами

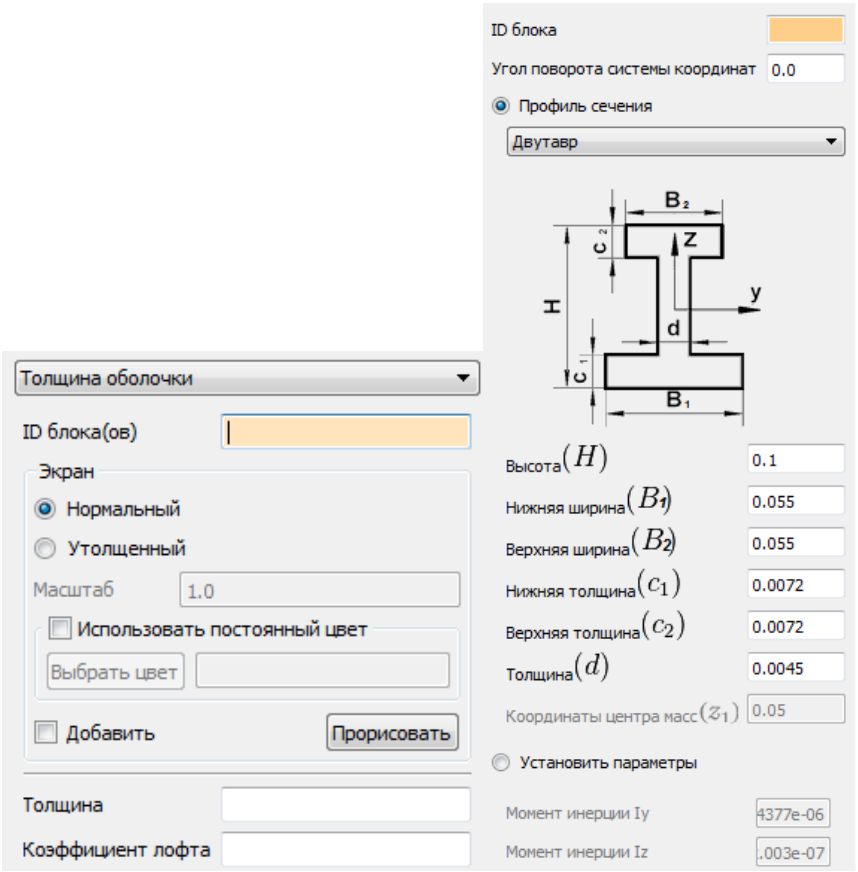


Рисунок 222 Задание параметров оболочечных (слева) и балочных (справа) элементов

Алгоритм решения краевой задачи состоит из двух основных блоков: блока составления системы уравнений и блока решения. Блок составления системы уравнений содержит блок составления локальной системы для каждого конечного элемента и блок объединения локальных систем в глобальную. Составление локальных систем для каждого КЭ происходит независимо друг от друга и, следовательно, хорошо распараллеливается (Глава 4).

Неизвестными являются перемещения узлов КЭ сетки. Для сведения системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений используется метод Галеркина. Если задача решается для случая конечных деформаций и(ли) нелинейного определяющего соотношения (например, в первой главе использовалось определяющее соотношение Мурнагана), необходим учет физической и геометрической нелинейностей. В этом случае нелинейная система алгебраических уравнений, полученная в результате применения метода Галеркина, решается с помощью метода Ньютона. В процессе численного решения проводится контроль сходимости процесса.

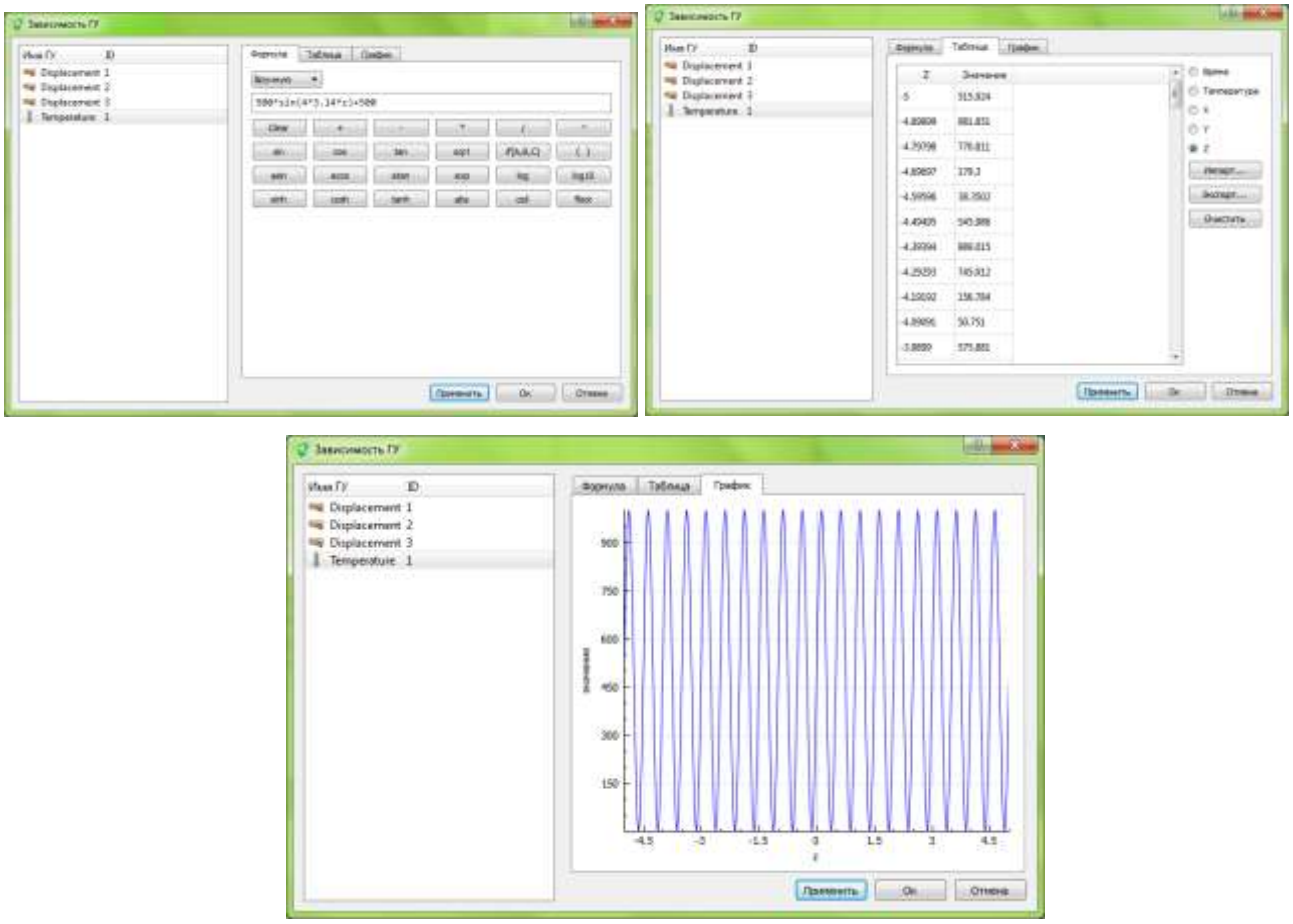


Рисунок 223 Варианты формульного и табличного задания зависимостей граничных условий от пространственных координат и времени

В качестве граничных нагрузок возможно задание точечных нагрузок и нагрузок, распределенных по поверхности, с формульной и табличной зависимостями от пространственных координат и времени для отдельных компонент (Рисунок 223). Точечные нагрузки задаются в начальный момент времени и не зависят от деформации тела (мертвая нагрузка). Распределенные нагрузки - это заданная распределенная по поверхности сила, зависящая от текущей деформации тела (следящая нагрузка). Точечные силы задаются

координатами точки приложения и вектором силы. Для задания распределенной нагрузки в общем случае используется тензор внешних напряжений. Для вычисления распределенной по поверхности силы (вектора) этот тензор умножается на нормаль к поверхности в текущем состоянии.

Помимо граничных нагрузок, возможно задание объемных (например, гравитация, центробежная сила, температурные нагрузки) как постоянных, так и зависящих от пространственных координат и времени.

Рассмотрим далее расчетные ядра, используемые для решения краевых задач при малых и конечных деформациях.

Расчетное ядро для решения краевых задач при малых деформациях

Данное ядро позволяет решать линейные двумерные и трехмерные задачи теории упругости при малых деформациях [835, 836, 850]. В двумерном варианте ядра возможен выбор между случаями плоской деформации и плоского напряжения. При программной реализации данного ядра на вход ядру из препроцессора передаются:

- Конечноэлементная сетка, описывающую геометрию тела, содержащую номера доменов и граничных поверхностей
- Домены, ассоциированные по номеру с областями сетки, содержащие название материала и его механические характеристики
- Данные, привязанные к граничным условиям, ассоциированные по номеру с поверхностями (границами) сетки, содержащие информацию о заданных перемещениях и распределенных нагрузках на поверхности тела
- Данные для узлов, ассоциированные с узлами сетки по порядковому номеру узла, содержащие информацию о заданных перемещениях узлов
- Мертвые точечные нагрузки, содержащие координаты своего приложения и вектор силы
- Начальные условия в случае нестационарных задач
- Различные параметры расчета (погрешность, шаг по нагрузки и т.д.)
- Вид и параметры решателя СЛАУ

После этого выполняются подготовительные операции, которые делаются один раз и которые нужно сделать до начала расчета. Так здесь выполняется инициализация обектов конечных элементов. Инициализация включает в себя построение функций формы. Кроме того, здесь же выполняется распределение памяти под выходные данные (хранятся в ядре) и преобразование заданных нагрузок к узловым.

Следующим шагом выполняется непосредственно решение построенной СЛАУ с матрицей жесткости. Для этого вначале по приведенным выше формулам вычисляются локальные матрицы жесткости для каждого элемента. Далее локальная матрица суммируется с глобальной, при этом учитываются граничные условия по перемещениям (закрепления или заданные перемещения). В вектор правых частей поэлементно суммируются узловые силы, заданные и получаемые от начальных напряжений и деформаций.
Данный шаг выполняется несколько раз (например, в динамических задачах), пока не будет достигнут критерий остановки процесса решения.

После завершения расчета полученные результаты (перемещения, деформации, напряжения) сохраняются в структуры данных VTK.

Расчетное ядро для решения краевых задач при конечных деформациях

Данное ядро [849] позволяет решать двумерные и трехмерные задачи теории упругости с учетом физической и геометрической нелинейности. Кроме того, ядро позволяет учитывать наложение конечных деформаций (Глава 1) - последовательное изменение граничных условий, формы тела, свойств материала части тела (добавление отверстий, включений), каждое из которых ведет к дополнительным большим деформациям. В двумерном варианте ядра возможен выбор между случаями плоской деформации и плоского напряжения. Ядро позволяет решать задачи в разных состояниях (начальное, промежуточное, конечное), моделировать наложение больших деформаций - последовательное изменение граничных условий и формы тела, каждое из которых ведет к дополнительным большим деформациям. При этом есть возможность решать задачу о последовательном образовании отверстий в предварительно нагруженном теле, форма которых известна в момент образования (в промежуточных состояниях), но для этого требуется последовательно решать серию задач и использовать наложение. Здесь под наложением подразумевается процесс, когда в уже нагруженном образце принудительно меняется форма тела (например, образовывается полость), параметры материала, нагрузки или закрепления. При этом расчет разбивается на две задачи: до изменения формы (нагрузки и т.д.) и после. Логика работы при этом следующая: сначала решается первая задача (до привнесения изменений в расчет), по результатам решения которой сохраняется поле деформаций (в динамических задачах также сохраняется поле скоростей). Далее подготавливаются данные для второй задачи (меняется форма, материал и т.д.), перед решением ядру передаются сохраненные деформации (скорости) с предыдущего расчета. Таким образом, у ядра есть информация о том, что тело обладает некоторыми начальными деформациями (и напряжениями), и необходимо корректно учесть наложение дополнительных

деформаций на уже существующие. Этот механизм позволяет моделировать, напрмер, процесс последовательного образования полостей в нагруженном образце.

Расчетное ядро выполняет следующие функции:

1) Задание и хранение параметров материала Гука;
2) Задание и хранение параметров материала Мурнагана;
3) Задание и хранение плоской сетки;
4) Задание и хранение пространственной сетки;
5) Задание и хранение нагрузок, в том числе зависящих от времени (для нестационарных задач);
6) Задание и хранение граничных условий в перемещениях, в том числе зависящих от времени (для нестационарных задач);
7) Выполнение расчетов (определение узловых перемещений);
8) Возможность выбора решателя СЛАУ;
9) Постпроцессорная обработка результатов - получение сглаженных напряжений и деформаций по методу согласованных результантов [131, 140] (Рисунок 224);

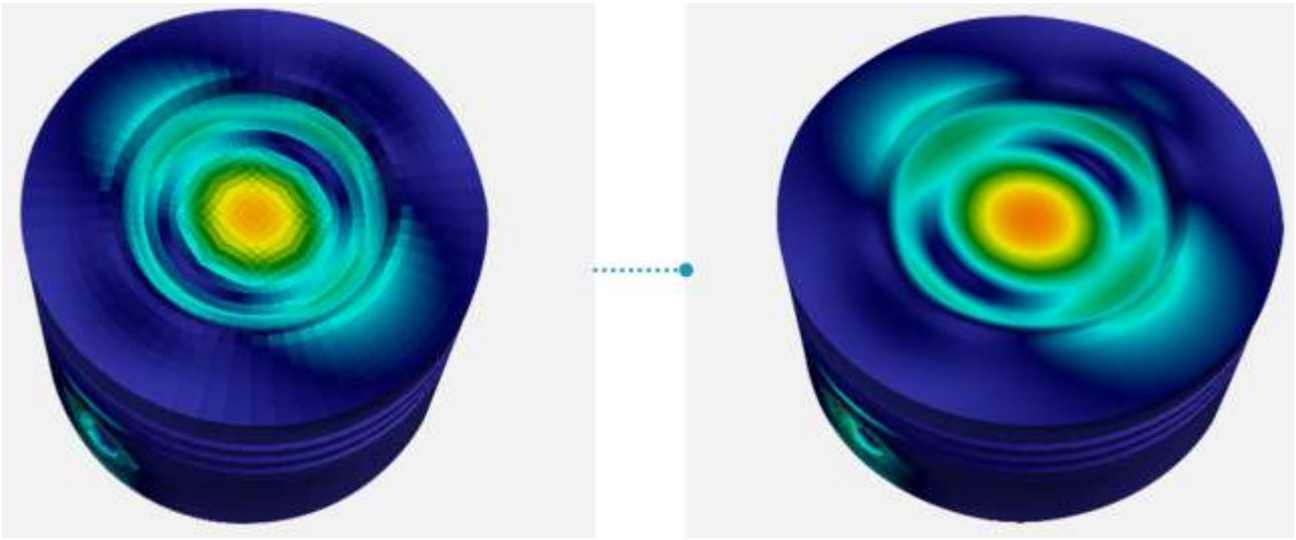


Рисунок 224 Сглаживание напряжений по методу согласованных результантов

10) Хранение и вывод в формате VTK результатов расчета (перемещения);
11) Хранение и вывод в формате VTK результатов постпроцессорной обработки результатов (напряжений и деформаций);
12) Контроль процесса сходимости решения при расчете;
13) Проверка данных введенных пользователем на корректность;
14) Задание состояния решения задачи (начальное, конечное, промежуточное);
15) Задание различных частей геометрии конструкции в различных состояниях
16) Передача деформаций из расчета в расчет;

17) Изменение геометрии тела между шагами наложения.

На вход ядру передаются:

1. Неструктурированная сетка, описывающая геометрию тела, с номерами доменов (областей).
2. Домены, ассоциированные по номеру с элементами сетки, содержащие название материала и его механические характеристики.
3. Информация о заданных перемещениях и распределенных нагрузках на границе тела.
4. Данные для узлов, ассоциированные с сеткой по порядковому номеру узла, содержащие информацию о заданных перемещениях узлов.
5. Данные для граней элементов, ассоциированные с сеткой по порядковому номеру элемента и локальным номерам узлов, принадлежащих грани в элементе, содержащие информацию о распределенных нагрузках.
6. Точечные нагрузки, содержащие координаты своего приложения и вектор силы.
7. Поле начальных деформаций, если данный расчет требуется наложить на предыдущий.
8. Решатель.

После завершения расчета из ядра передаются следующие данные:

1. Поле перемещений (дополнительных в случае наложения).
2. Поле аффинора полных деформаций.
3. Поле полных истинных напряжений.

Рассмотрим механическую и математическую постановку задачи в рамках данного ядра.

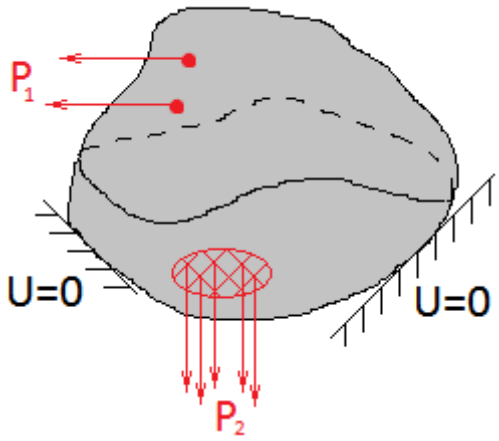


Рисунок 225 Деформируемое тело с заданными нагрузками и закреплениями

Рассмотрим произвольное деформируемое тело (Рисунок 225). Некоторые поверхности этого тела закреплены или им заданы заранее известные перемещения. К телу мгновенно или по некоторой программе нагружения прикладываются нагрузки. Тело может обладать некоторыми, заранее известными, начальными деформациями и скоростями. Требуется

определить напряженно деформированное состояние тела в каждый момент времени с учетом того, что начальные и дополнительные деформации могут быть конечными. Упругие характеристики материала тела (как упругие модули, так и тип определяющих соотношений) могут быть различны в различных областях тела.

Математическая постановка задачи базируется на теории наложения больших деформаций (Глава 1). В данной теории рассматривается три состояния тела: начальное (0), промежуточное (1) и конечное (2). Считается, что в начальном состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Далее к телу прикладывают нагрузку (и/или задают перемещения), тело теряет равновесие и переходит в промежуточное состояние (деформации могут быть конечными). В промежуточном состоянии к телу прикладываются дополнительные нагрузки (и/или перемещения), возможно меняется форма тела (например, возникают полости) или упругие характеристики материала (например, создаются включения). Это приводит к тому, что тело теряет равновесие и переходит в конечное состояние. При этом появившиеся дополнительные конечные деформации накладываются на уже существующие.

Таким образом, математическую постановку задачи можно записать в 3-х состояниях: начальном (0), промежуточном (1) и конечном (2). Если задачу разбить на две: переход 0-1 и переход 1-2, то видно, что постановка в начальном (0) для перехода 0-1 и промежуточном (1) для перехода 1-2 состояниях отличается только наличием начальных деформаций. Поэтому здесь рассмотрена постановка задачи в промежуточном (1) и конечном (2) состояниях. Постановка в начальном состоянии получается из постановки в промежуточном при отсутствии начальных деформаций. Математические постановки задачи в различных состояниях и алгоритмы их решения с использованием метода Галеркина приведены в первой главе. Численное решение задач основано на применении МКЭ/МСЭ. Неизвестными задачи являются перемещения узлов сетки. Полученная нелинейная система алгебраических уравнений решается с помощью метода Ньютона, который сводит решение нелинейной системы к последовательному решению набора линейных систем [131].

На Рисунок 226 и Рисунок 227 приведены укрупненные алгоритмы работы ядра для решения станионарных и нестационарных задач соответственно. В его центре находится блок «универсальное решение» (SimpleFEM::Solve), выполняемый единообразно для всех расчетных ядер, предназначенных для решения краевых задач при конечных деформациях. Суть работы этого кода – подготовить данные для универсального решателя (Рисунок 228), запустить процедуру решения и обработать результаты. Задача метода BeginSteps - подготовить ядро к последовательному решению задачи для каждого шага по времени или по нагрузке.

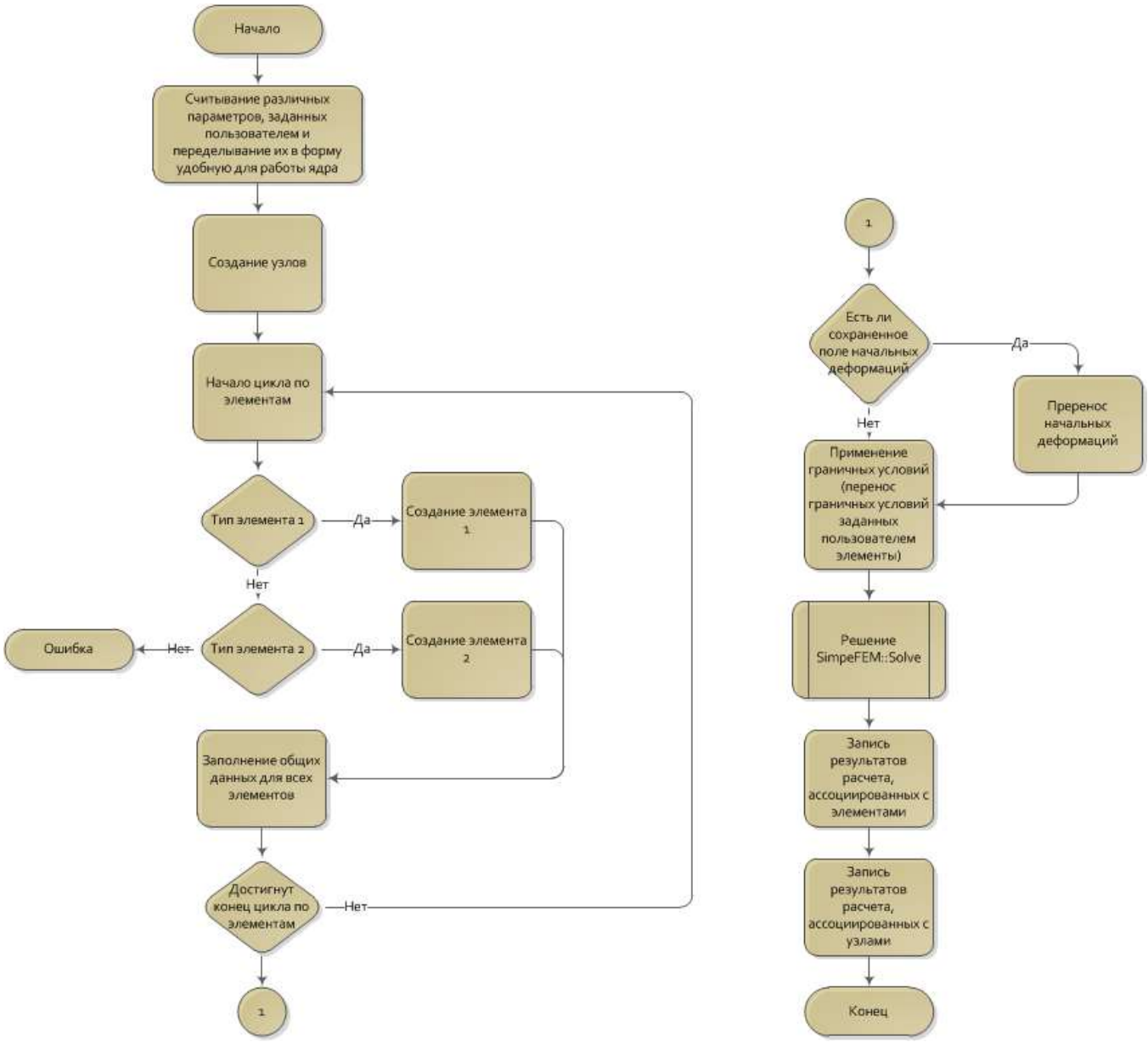


Рисунок 226 Блок-схема работы расчетного ядра (слева направо) для стационарных задач

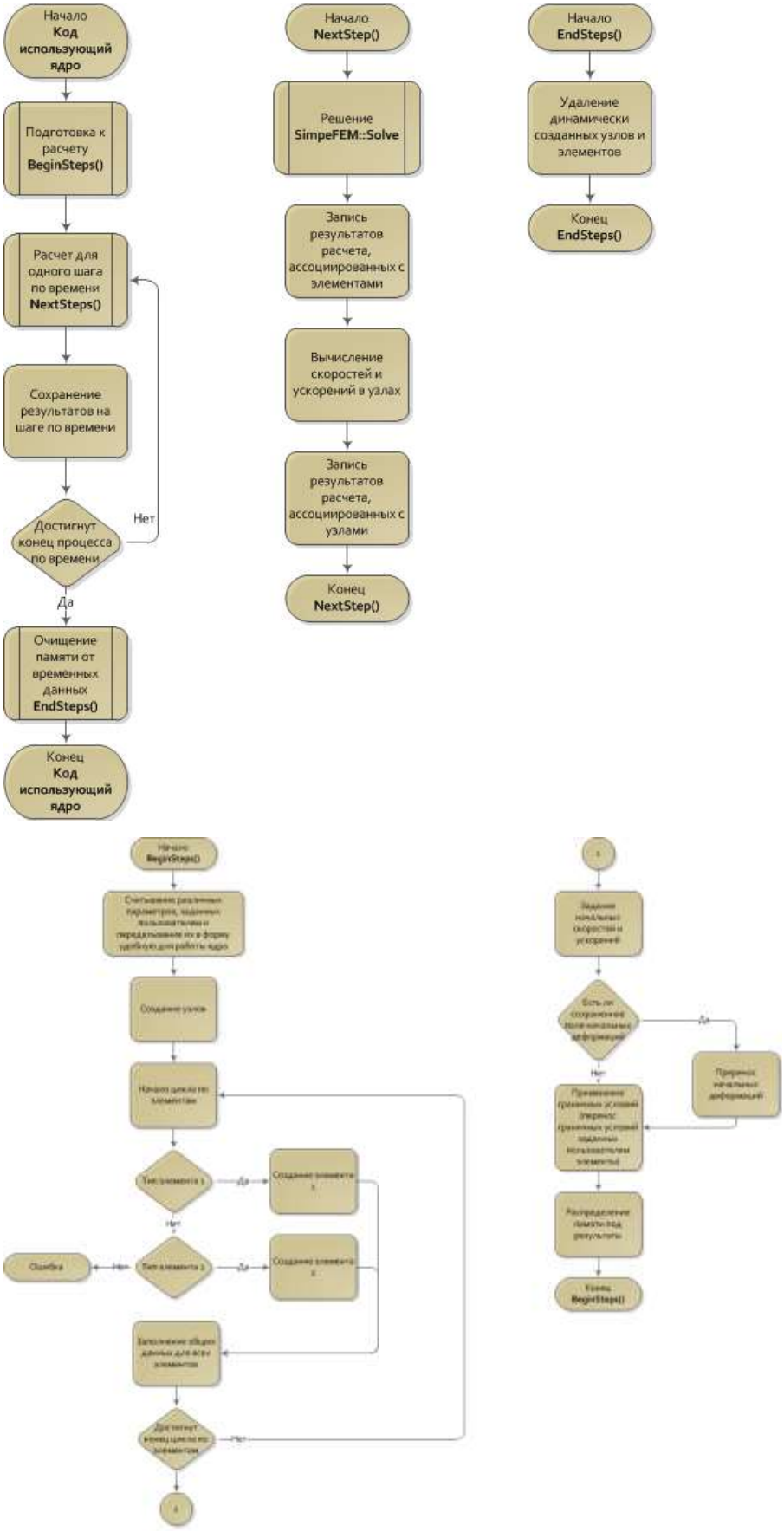


Рисунок 227 Блок-схема работы расчетного ядра (слева направо, сверху вниз) для нестационарных задач

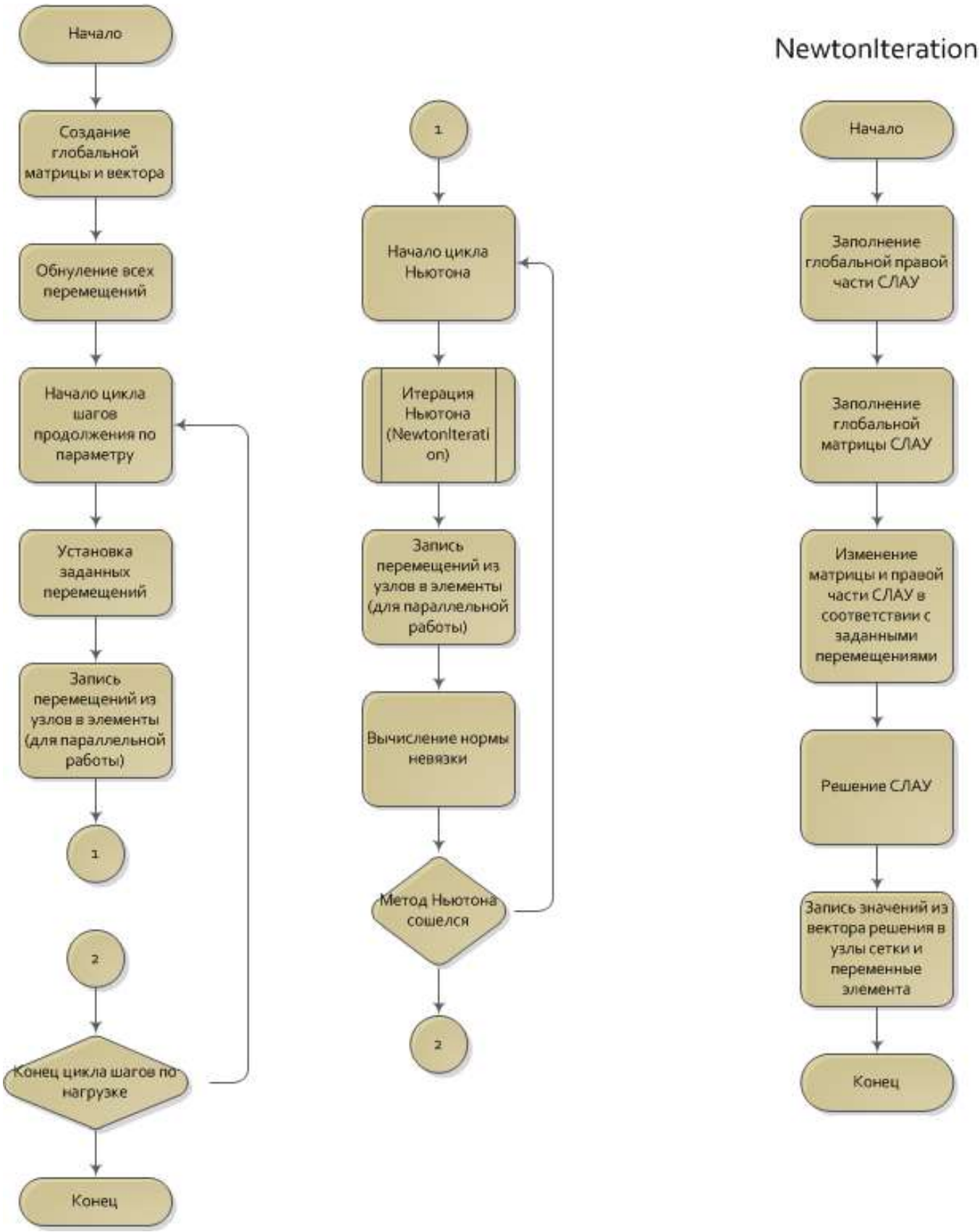


Рисунок 228 Блок-схема работы универсального решателя в составе расчетного ядра

Рассмотрим далее задачу проверки устойчивости равновесного состояния, полученного в результате решения статической задачи. Данная проверка позволяет определить, будет ли

найденное решение устойчиво при заданных нагрузках, или рассчитать предельные нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости.

Рассматривается деформирование упругого тела под действием квазистатической нагрузки, величина и распределение которой полностью определяются значением параметра нагружения. При некоторой величине этого параметра, называемой критической величиной, возможна бифуркация напряженно-деформированного состояния. Появление этой бифуркации квалифицируется как потеря устойчивости основного состояния деформирования, или просто как потеря устойчивости.

Метод нахождения критического параметра нагружения (далее просто – критической нагрузки) состоит в следующем. Записываются уравнения и граничные условия задачи в нелинейной постановке. Находится решение, отвечающее основному напряженно-деформированному состоянию. Все характеристики напряженно-деформированного состояния: перемещения, деформации, напряжения, представляются в виде суммы основных величин, уже известных, и малых добавок. С учетом их малости, проводится линеаризация всех соотношений, используемых в решении. В результате получается система однородных линейных дифференциальных уравнений относительно упомянутых добавок с однородными граничными условиями. Условие существования нетривиальных решений приводит к уравнению, определяющему критическую нагрузку. Рассмотрим основные этапы решения задачи устойчивости.

Как было ранее показано, при решении задачи МКЭ неизвестными являются узловые перемещения u. Запишем эти перемещения как сумму основного и дополнительного перемещений $u = u^0 + \Delta u$. Запишем градиент перемещений $\nabla u = \nabla\left(u^0 + \Delta u\right) = \nabla u^0 + \nabla \Delta u$ и выражение для тензора деформаций на его основе $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \left(\nabla u\right)^T + \nabla u \left(\nabla u\right)^T\right)$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla u^0 + \nabla \Delta u + \left(\nabla u^0\right)^T + \left(\nabla \Delta u\right)^T +$$
$$\nabla u^0 \left(\nabla u^0\right)^T + \nabla u^0 \left(\nabla \Delta u\right)^T + \nabla \Delta u \left(\nabla u^0\right)^T + \nabla \Delta u \left(\nabla \Delta u\right)^T]$$

Далее линеаризуем относительно дополнительных перемещений:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla u^0 + \nabla \Delta u + \left(\nabla u^0\right)^T + \left(\nabla \Delta u\right)^T + \nabla u^0 \left(\nabla u^0\right)^T + \nabla u^0 \left(\nabla \Delta u\right)^T + \nabla \Delta u \left(\nabla u^0\right)^T]$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}[\nabla \Delta u + \left(\nabla \Delta u\right)^T + \nabla u^0 \left(\nabla \Delta u\right)^T + \nabla \Delta u \left(\nabla u^0\right)^T]$$

Аналогичным образом линеаризуем определяющие соотношения, уравнение равновесия и граничные условия относительно дополнительных перемещений:

Определяющее соотношение (линейное относительно $\nabla\Delta u$)

$$\sigma = f(\nabla u^0, \nabla\Delta u)$$

Уравнение равновесия (линейное относительно $\nabla\Delta u$)

$$\nabla g(\nabla u^0, \nabla\Delta u) = 0,$$

Граничные условия (линейные относительно $\nabla\Delta u$)

$$\vec{u}_{|\Gamma} = \vec{F}(\ldots).$$

Алгоритм определения предельной нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости, представляет собой итерационный процесс (Рисунок 229), на каждом шаге которого постепенно увеличивается приложенная нагрузка и проверяется, устойчиво ли решение для заданной нагрузки. Каждая итерация выполняется в два этапа:

1. Решается краевая задача при заданной нагрузке. В результате ее решения находим основное решение u^0.

2. Зная u^0, составляем систему уравнений относительно Δu. Эта система является однородной, так как заданные силы уравновешиваются основным решением, и линейной, так как все соотношения были линеаризованы относительно Δu. Система имеет нетривиальное решение только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю. Наличие нетривиального решения говорит о неустойчивости конструкции.

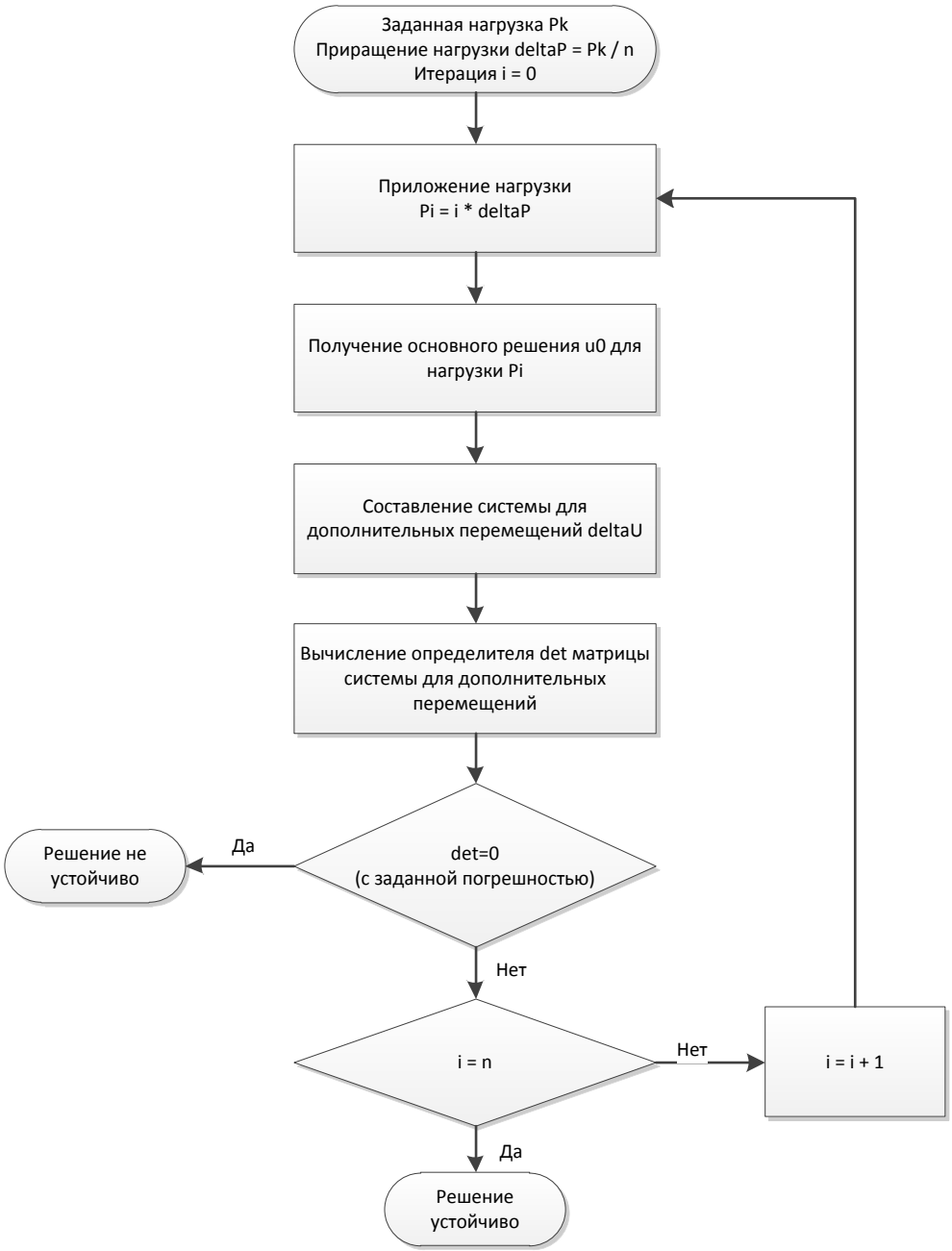


Рисунок 229 Блох-схема алгоритма решения задачи устойчивости

Расчетные ядра для решения краевых задач состоят из следующих основных функциональных модулей:

1) **Модуль задания нагрузок** (давление, силы, моменты, приложенные к граничным поверхностям модели), предназначенный для задания нагрузок, прикладываемых к элементу конструкции. Выходными данными для этого модуля является список объектов, содержащих информацию о свойствах каждой приложенной нагрузки к конечно-элементной модели материала. Программный модуль предназначен для задания и хранения данных о нагрузках, приложенных к конечно-элементной модели, а также для последующей их в другие модули.

2) **Модуль численного решения краевой задачи с помощью (МКЭ/МСЭ)** для случаев статического и динамического деформирования элемента конструкции [841, 842, 843]. Модуль предназначен для расчёта напряжённо-деформированного состояния элемента конструкции.

В случае МСЭ алгоритм решения динамической задачи теории упругости методом спектральных элементов состоит из 11 этапов:

Этап 1. Подготовка данных, заполнение структуры, содержащей:

а) данные о сетке;

б) данные о нагрузках;

в) начальные условия;

г) граничные условия;

д) свойства материалов.

Этап 2. Построение вспомогательных узлов на сетке в зависимости от порядка аппроксимации решения по пространству:

а) вычисление координат узлов Гаусса-Лежандра-Лобатто;

б) вычисление весовых коэффициентов.

Этап 3. Вычисление функций формы и их производных для гексаэдральных элементов:

а) построение отображений гексаэдральных элементов в единичный куб;

б) построение полиномов Лагранжа и расчет их производных.

Этап 4. Расчет глобальной матрицы масс (диагональная в силу ортогональности полиномов в методе спектральных элементов).

Этап 5. Расчет глобального вектора внутренних сил:

а) вычисление локальной матрицы жесткости;

б) вычисление локального вектора внутренних сил;

в) ассемблирование глобального вектора внутренних сил с использованием карты смежных элементов по граням, карты смежных элементов по ребрам и карты смежных элементов по узлам.

Этап 6. Расчет глобального вектора внешних сил с (по заданным граничным условиям).

Этап 7. Вычисление вектора перемещений на новом временном шаге по явной разностной схеме по времени (Ньюмарка).

Этап 8. Проверка корректности полученных значений.

Этап 9. Проведение достижения итогового момента времени.

Этап 10. Запись вектора перемещений в узлы сетки.

Этап 11. Выгрузка результатов и данных расчета в модуль записи результатов.

Блок-схема алгоритма представлена на Рисунок 230.

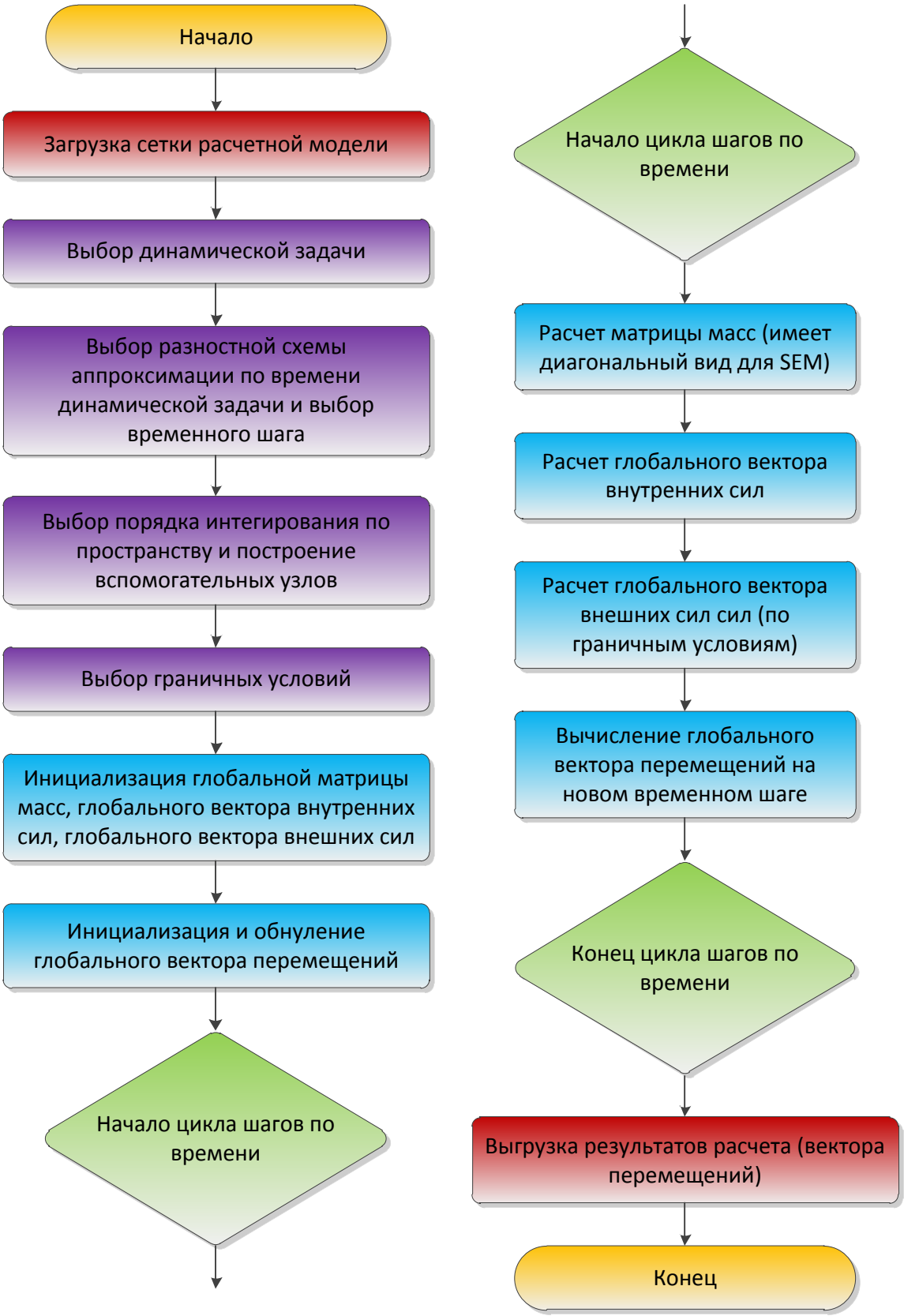


Рисунок 230 Блок-схема алгоритма решения динамической задачи с использованием МСЭ

3) **Модуль численного решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)** с разреженной матрицей, поддерживающий гибкий выбор решателя СЛАУ:

прямой/итерационный, для симметричных/несимметричных матриц [846, 847]. В случае итерационных решателей в модуле возможен выбор следующих переобуславливателей: Jacobi, ILU0, ILUT, ILU2, AMG, AINV. В рамках модуля реализован алгоритм автоматического выбора решателя и оптимальных параметров к нему в зависимости от вида матрицы СЛАУ. Алгоритм автоматического выбора решателя нацелен на выбор наиболее подходящего для заданных настроек метода решения. Он выставляет значения по умолчанию для незаполненных параметров и исправляет ситуации, где значения нескольких параметров являются несовместимыми. Далее на основе данных из расчетных ядер (например, информация о размере, симметричности, положительной определенности матрицы, используемой программно-аппаратной платформе) создается матрица для передачи выбранному решателю (разным решателям соответствуют разные типы матриц). При использовании итерационного решателя необходимо также задать требуемую погрешность решения. Существует два вида погрешности: абсолютная и относительная. Относительная погрешность задает, насколько порядков необходимо понизить норму невязки, абсолютная задает норму невязки, которую необходимо достичь.

4) **Модуль для распараллеливания вычислительного процесса на многоядерной системе с общей памятью по технологии OpenMP.** Модуль предназначен для составления матрицы и правой части СЛАУ в МКЭ/МСЭ с использованием вычислительных мощностей нескольких процессоров с общей памятью как на персональной рабочей станции, так и на суперЭВМ.

Блок составления системы уравнений содержит блок составления локальной системы для каждого конечного элемента и блок объединения локальных систем в глобальную. Составление локальных систем для каждого КЭ происходит независимо друг от друга и, следовательно, хорошо распараллеливается. Описание алгоритма распараллеливания приведено в четвертой главе.

Для запуска расчетов с использованием технологии OpenMP необходимо задать в системе переменную окружения OMP_NUM_THREADS. Данная переменная должна равняться количеству потоков, которые будут задействованы при расчете. Необходимо помнить, что потоки работают наиболее эффективно при их числе меньше, либо равном количеству процессорных ядер в системе. Некоторое дополнительное увеличение производительности можно получить, используя технологию мультисредингa, если она реализована в системе, для этого необходимо задать переменную окружения USE_MULTI_TREADING TRUE. При включенной опции мультисредингa система эмулирует наличие удвоенного числа физических процессоров, поэтому можно задать OMP_NUM_THREADS равным удвоенному количеству

процессоров. Для использования модуля необходимо, чтобы на расчётной машине был установлен процессор с несколькими ядрами или несколько процессоров. В алгоритме решения задачи прочности модуль универсального конечноэлементного решателя (Рисунок 228) может вызывать данный модуль для распараллеливания процесса решения краевой задачи.

5) **Модуль для распараллеливания вычислительного процесса на распределенной системе кластерного типа по технологии MPI.** Модуль [838] предназначен для составления матрицы и правой части СЛАУ в МКЭ/МСЭ, а также решения СЛАУ с использованием вычислительных мощностей нескольких процессоров с независимой памятью как на персональной рабочей станции, так и на суперЭВМ.

При использовании технологии MPI программа выполняется на нескольких независимых вычислительных узлах, каждый из которых имеет свою память для хранения всех необходимых данных. В ходе выполнения вычислительные узлы могут взаимодействовать друг с другом при помощи посылки сообщений, однако данной возможностью стоит пользоваться по возможности минимально, поскольку даже на современных супер-ЭВМ передача данных является узким местом по сравнению с остальными этапами.

Модуль MPI реализован как внешний модуль по отношению к расчетным ядрам, отвечающим за формирование СЛАУ. Запуск приложения MPI (mpiwrapper) необходимо производить при помощи специальной программы mpiexec(mpirun):

mpiexec mpiwrapper –type [linear|nonlinear] –in infiliname –out outfilename [PETSc option]

Здесь параметр –type определяет, какого типа задача решается (линейная или нелинейная), параметры –in и –out определяют имена файлов с входными и выходными данными соответственно, дополнительно можно задать любые опции библиотеки PETSc. Библиотека PETSc используется для решения системы линейных уравнений итерационными методами, оптимизированными для использования с MPI.

Модуль MPI разделен на несколько логических частей, выполняющих различные функции:

1) Координация работы всего приложения
2) Чтение входных данных из файла и распределение между процессорами
3) Решение системы линейных уравнений
4) Запись результатов вычислений в файл

Модуль для решения задачи на CPU распараллеливается с использованием технологии MPI посредством вызова из модуля MPI. Решение разбивается на четыре основных этапа.

1) Чтение данных из файла и распределение между процессорами

На данном этапе происходит чтение данных задачи из файла, разделение расчетной сетки на необходимое число частей и передача данных в локальную память процессоров.

2) Составление системы линейных алгебраических уравнений

На данном этапе каждый процессор уже содержит в своей локальной памяти все необходимые для построения СЛАУ данные. Составление СЛАУ производится средствами CPU модуля, по экземпляру которого запускает каждый из процессоров. В результате выполнения CPU модуля на каждом из процессоров находится часть СЛАУ.

3) Решение системы линейных алгебраических уравнений выполняется безматричным способом в соответствии с алгоритмом, описанном в Главе 4. Для формирования полной матрицы СЛАУ потребовалось бы пересылать большое количество данных между процессорами, что существенно ухудшило бы эффективность распараллеливания.

4) Сбор информации о решении и запись в файл

Перед началом данного этапа результаты решения хранятся распределенно на всех задействованных процессорах. Для записи в файл информация собирается на одном, специально выделенном процессоре посредством обмена сообщениями между процессорами. Наконец, итоговая информация записывается в файл в формате vtu. Данная часть задачи не является масштабируемой, поскольку с увеличением числа процессоров возрастают линейно и накладные расходы на сбор информации, однако для исследуемых задач и количества процессоров доля данного этапа во всем времени выполнения не превышает нескольких процентов.

Для использования модуля необходимо, чтобы на расчётной машине были установлены несколько процессоров или многоядерный процессор. Наибольшая эффективность использования нескольких процессоров достигается для больших задач при числе узлов расчетной сетки от миллиона на процессор.

6) **Модуль для распараллеливания вычислительного процесса на гибридной системе на базе графических процессоров по технологии CUDA**.

Модуль предназначен для составления и решения СЛАУ с использованием МКЭ/МСЭ и технологии CUDA для задействования в процессе расчета вычислительных мощностей графического процессора.

Алгоритм распараллеливания, описанный в четвертой главе, разбивается на два основных этапа (Рисунок 231):

1) Подготовка данных:

На этом этапе происходит заполнение структуры данных, которая впоследствии передаётся в CUDA ядро для расчёта. Эта структура содержит:

а) данные о сетке;

б) данные о нагрузках;

в) начальные условия;

г) свойства материалов.

2) Шаг итерации процесса Ньютона.

Алгоритм этого этапа состоит из следующих функций:

а) заполнение глобальной правой части СЛАУ;

б) заполнение глобальной матрицы СЛАУ (GPU);

в) изменение правой части СЛАУ в соответствии с заданными перемещениями

г) решение СЛАУ (GPU);

д) запись значений из вектора решения в узлы сетки и переменные элемента.

В функции get_Ja_cu_20() происходит копирование данных для задачи в память графического ускорителя (GPU), после чего вызывается CUDA ядро, которое в параллельном режиме на графическом ускорителе заполняет матрицу СЛАУ. Данную матрицу впоследствии принимает GPU-решатель СЛАУ, что предотвращает лишнее копирование данных.

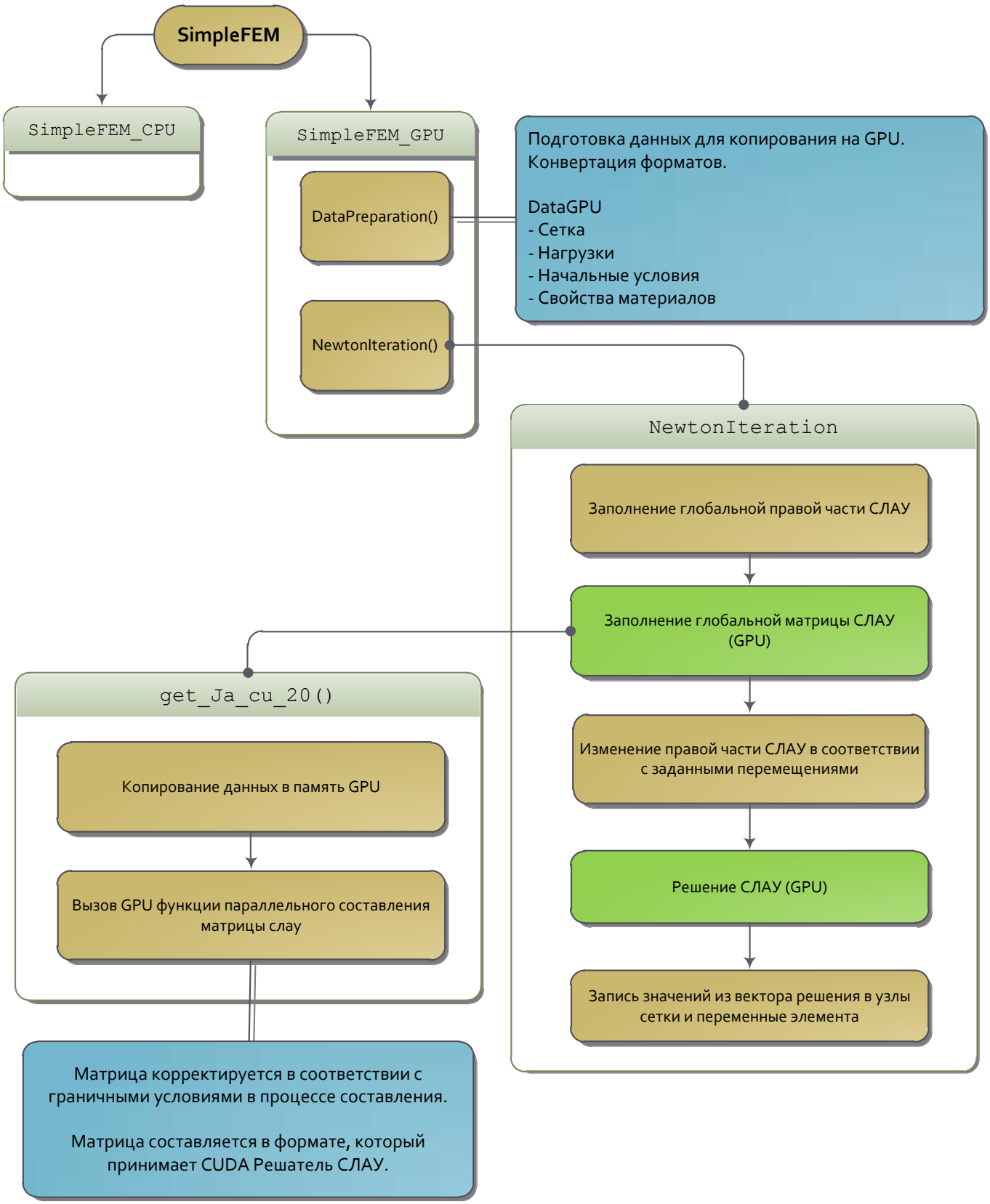


Рисунок 231 Блок-схема алгоритма функционирования модуля CUDA

Для использования модуля необходимо, чтобы на расчётной машине был установлен графический ускоритель (GPU) с архитектурой (Compute capability) не ниже 2.0.

7) **Модуль вывода результатов расчёта**. Модуль предназначен для вывода результатов расчёта в различных формах: в текстовой, для одномерных графиков распределения результатов решения, и в графической форме (VTK формат) – для визуального отображения результатов решения и их последующего анализа. Входными данными для модуля являются числовые массивы, которые получены в результате работы расчётных ядер.

Алгоритм работы модуля состоит из следующих этапов (Рисунок 232):

1) Подготовка среды:
   а) инициализация узлов;
   б) инициализация элементов.
2) Загрузка информации из расчетной сетки:
   а) данные по узлам;
   б) данные по элементам.
3) Создание данных на элементах:
   а) деформации;
   б) напряжения на элементе.
4) Добавление к элементам данных о доменах.
5) Создание данных на узлах:
   а) перемещения;
   б) напряжения в узлах.
6) Запись в файл.
7) Очистка памяти от вспомогательных структур.

Выходные данные модуля сохраняются в файл в *формате *.vtu*, который находится в рабочем каталоге программы.

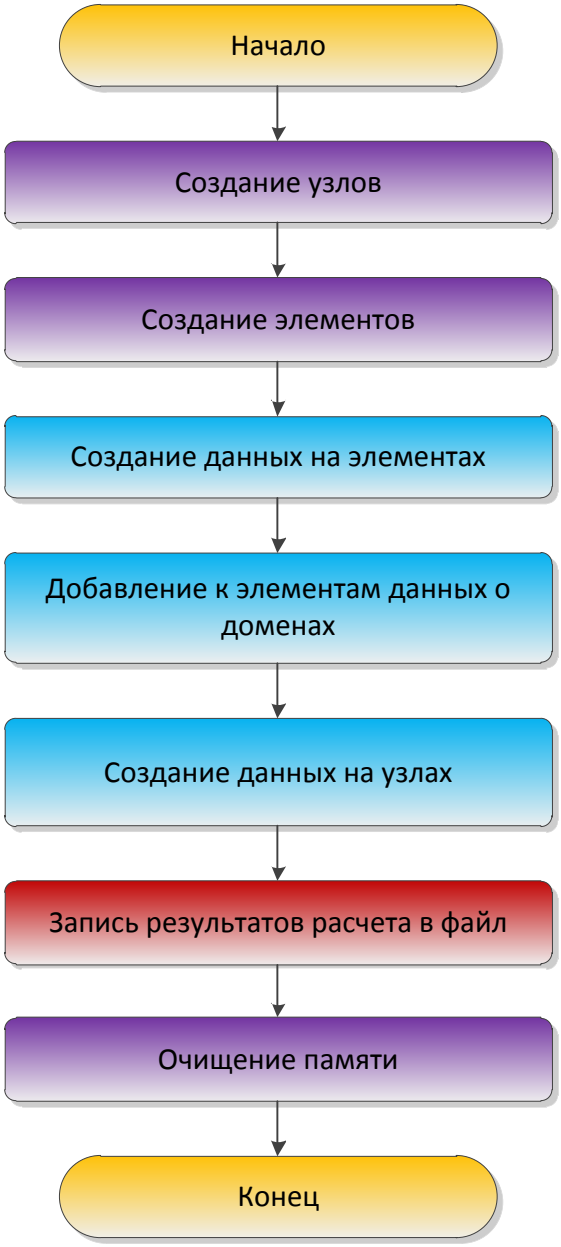


Рисунок 232 Блок-схема работы модуля вывода результатов расчета

Расчетное ядро для решения задач термоупругости

В CAE Fidesys реализован [840, 844, 845] учёт тепловых деформаций для рассмотренных выше линейных и нелинейных постановок краевых задач для различных физических моделей. Опишем особенности реализации учёта температурного расширения, в соответствии с приведенной далее классификацией материалов. Далее будет использоваться обозначение ΔT - разница температур первичного (начального) и текущего (конечного) состояния.

Линейно упругие материалы.

К данному классу материалов относятся все материалы, использующиеся в постановке малых деформаций. В теории линейной упругости выполняется аддитивное свойство

деформаций, а именно $\varepsilon^{el} = \varepsilon^{total}(\nabla u) - \varepsilon^{th}(T)$, где ε^{el} - упругие деформации, ε^{total} - полные деформации, то есть деформации, посчитанные по перемещениям, ε^{th} - тепловые деформации.

В силу аддитивности деформаций и линейной зависимости от них напряжений, верна следующая формула: $\sigma^{el} = \sigma^{total} - \sigma^{th}$

Таким образом, в случае малых деформаций напряжения можно разделить на упругие и тепловые. Свойство аддитивности позволяет в явном виде вынести интеграл от теплового воздействия на модель в правую часть системы уравнений, однако следует помнить, что в таком случае расчёт ведётся в терминах упругих напряжений. Алгоритм расчёта запишется следующим образом:

1) производится предрасчёт напряжённо-деформированного состояния (НДС), в котором вычисляются упругие и тепловые напряжения и деформации;
2) во время расчета напряженного состояния модели учитываются только упругие напряжения (например, в функции расчета внутренних усилий);
3) во время формирования правой части системы уравнений требуется проинтегрировать тепловые напряжения по элементу.

В теории малых деформаций тепловые деформации записываются следующим образом: $\varepsilon^{th} = \alpha \Delta T I$, где α - в изотропном случае коэффициент теплового расширения, а в случае ортотропного или трансверсально-изотропного материала вектор строка коэффициентов теплового расширения, I - единичный тензор.

Подставляя выражение для тепловых деформаций в закон Гука и учитывая физику теплового расширения (с точки зрения механики, это объемные напряжения), получаем следующую формулу для тепловых напряжений: $\sigma^{th} = \sigma^{th}(\varepsilon^{th}) = 3 \cdot K \cdot \varepsilon^{th}$, где K - объемный модуль упругости.

Данные величины вычисляются в первом пункте алгоритма при расчёте тепловых напряжений и деформаций.

Для учета тепловых напряжений в расчете при малых деформациях в правой части СЛАУ требуется учесть следующую интегральную добавку:

$$P = -\sum_{e} \int_{\Omega_e} B^T \sigma_{th} d\Omega$$

Таким образом, в пункте 3 алгоритма вычисляется интегральная сумма произведений матрицы B, состоящей из градиентов функции формы [131], на тензор тепловых напряжений.

Нелинейно упругие материалы.

Данный класс материалов используется в постановке конечных деформаций, в которой учёт тепловых деформаций осуществляется иным способом. Введём аффинор термических деформаций:

$$\psi^{th} = \begin{bmatrix} e^{a_x \Delta T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_y \Delta T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_z \Delta T} \end{bmatrix}$$

В отличие от свойства аддитивности тензора малых деформаций, в теории конечных деформаций используется свойство мультипликативности аффинора деформаций:

$\psi^{total}(\nabla u) = \psi^{el} \cdot \psi^{th}(T)$

Для записи определяющих соотношений для нелинейно упругих материалов используется, в частности, тензор логарифмических деформаций Генки, который выражается через аффинор деформаций как: $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln(\psi^T \cdot \psi)$

Подставив мультипликативное представление аффинора деформаций в тензор Генки, получим следующее представление полного тензора деформаций:

$$\varepsilon^{total} = \frac{1}{2}\ln((\psi^{el} \cdot \psi^{th})^T \cdot (\psi^{el} \cdot \psi^{th})) = \frac{1}{2}(\ln((\psi^{el})^T \cdot \psi^{th}) + \ln((\psi^{th})^T \cdot \psi^{el})) =$$

$$= \varepsilon^{el} + \frac{1}{2}\ln(e^{2a_i \Delta T}) = \varepsilon^{el} + a_i \Delta T$$

Таким образом, в случае нелинейно упругих материалов также получаем свойство аддитивности. В виду данного наблюдения расчёт и учёт тепловых напряжений в данном классе материалов аналогичен линейно упругим материалам.

Задача термоупругости подразумевает под собой совместное решение задач теплопроводности и расчета напряжённо-деформированного состояния (НДС) в теле с учётом заданных механических и тепловых воздействий.

В общем виде уравнение теплопроводности в координатах начального состояния и граничные условия запишутся следующим образом [89, 106, 233]:

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\left(\lambda_q \overset{0}{\nabla} T\left(\vec{\ldots},\ldots\right)\cdot \ldots\left(\vec{\ldots},\ldots\right) \ldots \rho_0 \quad \frac{\ldots\left(\vec{\ldots},\ldots\right)}{\partial t} + T\frac{\partial \overset{0}{\Sigma}}{\partial T} : \overset{0}{\nabla} v^T$$

$-\lambda_q \frac{\partial T(\vec{\ }}{\partial \vec{\ }}$ $_{\partial D}$ $(\vec{\ },\ ,\ ,\ )$ ективный теплообмен

$T\big|_{\partial D} = h(x,t)$ заданная температура

$-\lambda_q \frac{\partial T(\vec{\ }}{\partial \vec{\ }}$ $_c(T(\vec{\ },\ ,\ ,\ )),$ конвективный теплообмен с внешней средой

$-\lambda_q \frac{\partial T(\vec{\ }}{\partial \vec{\ }}$ $_{\partial D}$ $_0 \in_{12} (T^4(\vec{\ },\ ,\ ,\ )),$ теплообмен излучением

где T – температура, λ – матрица коэффициентов теплопроводности, Q – источник тепла внутри тела, который считается положительным, если тепло подводится к телу, источник может быть как объёмный, так и точечный, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, $\overset{0}{\Sigma}$ – тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, *v* – вектор скоростей точек тела, *q* – тепловой поток, *h* – заданная на границе температура.

С использованием метода Галёркина и граничного условия теплоомена данное уравнение преобразуется в следующую вариационную постановку:

$$\iint_D N_i \left(c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial \overset{0}{\Sigma}}{\partial T} \cdot\cdot \nabla v^T - \nabla \cdot (\lambda_q \nabla T) - Q \right) dD = 0, i = \overline{1,n}$$

$$-\int_{\partial D} Nq(x) d\Gamma - \iint_D (\nabla N)\lambda_q (\nabla T) dD - \iint_D Nc\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} dD + \iint_D NQ dD - \iint_D N \left[T \frac{\partial \overset{0}{\Sigma}}{\partial T} \cdot\cdot \nabla v^T \right] dD = 0$$

где N – функции формы, $T = \sum_{i=1}^{p} T_i N_i$.

Интегрирование по времени в случае нестационарных задач теплопроводности осуществляется неявной схемой по времени:

$$-\int_{\partial D} Nq(x,t_{n+1}) d\Gamma - \iint_D (\nabla N)\lambda_q (\nabla T^{n+1}) dD - \iint_D Nc\rho_0 \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} dD + \iint_D NQ^{n+1} dD - \iint_D N \left[T^{n+1} \frac{\partial \overset{0}{\Sigma}^{n+1}}{\partial T} \cdot\cdot (\nabla v^{n+1})^T \right] dD = 0$$

Будем далее рассматривать одностороннюю связь двух физических процессов - от изменений температурного поля возникают тепловые деформации, но поле температур инвариантно относительно механических воздействий, соответственно занулим последнее слагаемое в полученном выше вариационном уравнении.

Сведем полученную вариационную постановку к задаче решения системы линейных алгебраических уравнений: $\left[K\right]\left\{\hat{T}\right\}=\left\{F\right\}$, где K – матрица системы, T – вектор неизвестных узловых температур, F – вектор правой части системы.

Общую матрицу системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), также называемую “глобальной” матрицей системы, можно, как и в случае краевых задач упругости, выразить как сумму матриц, полученных интегрированием по каждому элементу, такие матрицы называются “локальными”: $\left[K\right]=\sum_{i=1}^{N}\left[k_i\right]$, где N – количество элементов, на которые разбита исходная геометрия, K – глобальная матрица, k_i – локальная матрица i – го элемента. Стоит отметить, что для проведения такого суммирования, необходимо совпадение размерностей матриц k_i и K, а такой подход скорее всего приведёт к нерациональному использование памяти и, соответственно, существенно увеличит время составления искомой матрицы. Для решения этой проблемы используется метод ассемблирования, рассмотренный ранее для добавления локальных матриц жесткости в глобальную. Для каждого элемента сетки вычисляется интеграл

$$\int_{D_i}\nabla N_k{}^T\lambda\nabla N_l dD_i$$

где ∇ - оператор градиента, N – функции форм, λ - матрица теплопроводности, D_i – конечный элемент. Далее рассчитанное значение интеграла добавляется в соответствующую позицию глобальной матрицы с номерами строк и столбцов *k* и *l*.

Некоторые граничные условия могут вносить добавку в глобальную матрицу, например, учет конвективного теплообмена. При интегрировании уравнения, описывающего конвективный теплообмен, получаем следующую добавку в глобальную матрицу: $\int_{\Gamma_i}N^T Nhd\Gamma_i$,

где Γ_i – грань или поверхность, через которую происходит процесс, h – коэффициент теплоотдачи.

Так же, как и в случае ассемблирования матрицы системы, правую часть системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), называемую “глобальным” вектором правой части системы, можно выразить как сумму векторов, полученных интегрированием по каждому элементу (“локальному” вектору): $\left[F\right]=\sum_{i=1}^{N}\left[f_i\right]$, где N – количество элементов, на которые разбита исходная геометрия, F – глобальный вектор, f_i – локальный вектор i –го элемента.

Рассмотрим далее интегралы, которые требуется вычислить для учёта граничных условий (ГУ):

1) Конвективный теплообмен

Граничное условие записывается в виде $-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\partial D} = h(T - T_\infty), x \in \partial D$

Часть этого условия дает вклад в глобальную матрицу, как было рассмотрено выше. В правую часть СЛАУ идет следующее выражение: $\int\limits_{\Gamma_i} N^T N h T_\infty d\Gamma_i$

2) Заданный поток тепла

Граничное условие записывается следующим образом: $-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\partial D} = q, x \in \partial D$

Добавка в правую часть для учета данного процесса: $\int\limits_{\Gamma_i} N^T q d\Gamma_i$

Рассмотрим источниковые члены в уравнении теплопроводности, которые также несут добавки в правую часть.

3) Объёмный источник тепла

Мощность такого источника может изменяться по объёму, соответственно вклад в правую часть получается интегрированием по объему: $\int\limits_{D_i} N^T Q(x) dD_i$

4) Точечный источник тепла

В этом случае источник сосредоточен в одной точке тела:

$Q(x, y, z) = Q^* \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$. Учитывая данный факт, он вносит в правую часть следующую добавку:

$$\int\limits_{D_i} N^T Q(x) dD_i = \int\limits_{D_i} N^T Q^* \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0) dD_i = \begin{cases} Q^* \cdot N(x_0, y_0, z_0), x \in D_i \\ 0, x \notin D_i \end{cases}$$

Учёт граничных условий на температуру, заданную в конкретных точках тела, производится после ассемблирования глобальной матрицы и правой части. Если некоторый узел i принадлежит граничному условию на температуру, то вся соответствующая строка глобальной матрицы тождественно приравнивается к нулю, за исключением диагональных элементов, а в правую часть записывается уже известное значение температуры, помноженное на диагональный элемент. Таким способом обеспечивается равенство температуры заданным значениям на границе после решения СЛАУ.

Блок-схема рассмотренного алгоритма приведена на Рисунок 233.





Рисунок 233 Блок-схема алгоритма решения задачи термоупругости

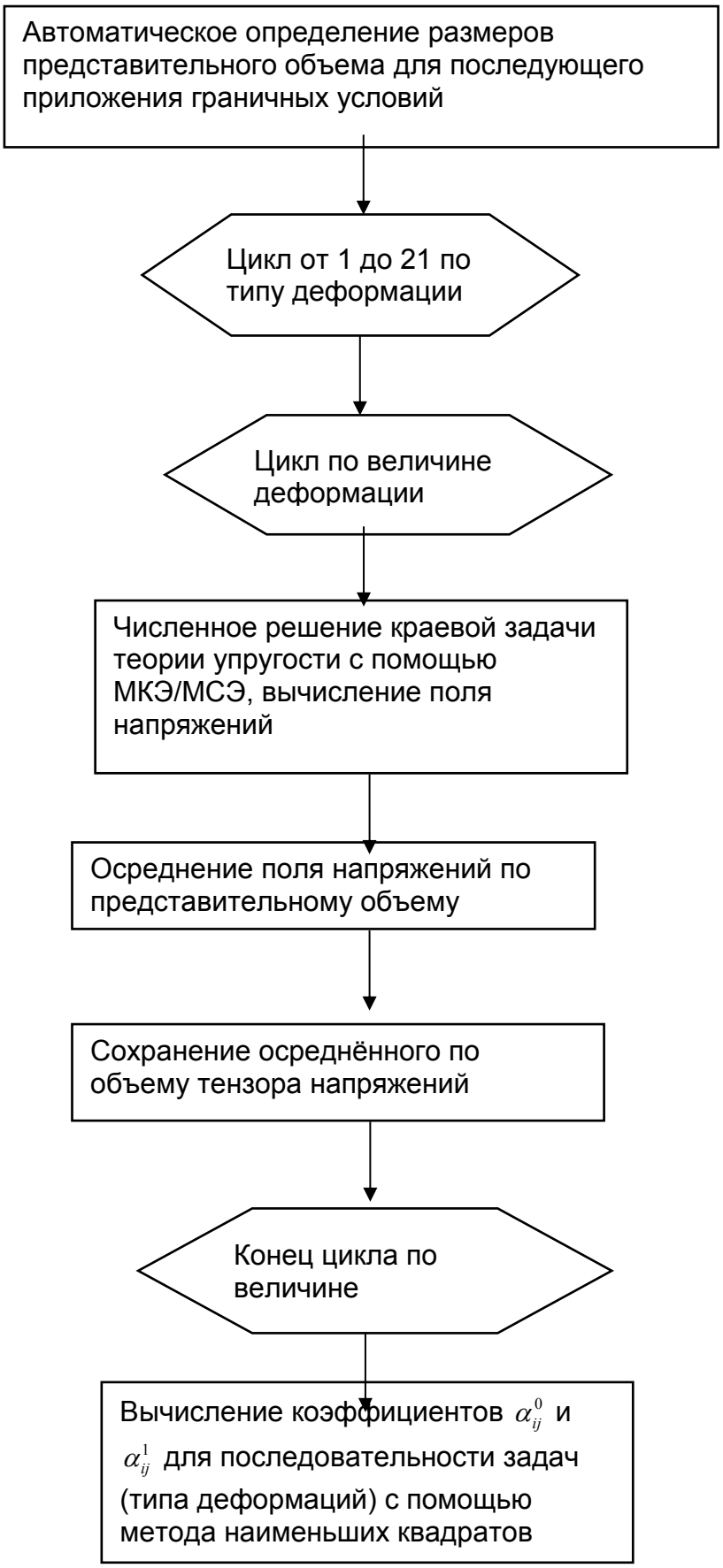
Расчетное ядро для вычисления эффективных характеристик неоднородных материалов

Алгоритм работы данного ядра [837, 839] подробно изложен в третьей главе применительно к задаче оценки эффективных свойств представительного объема горной породы. Представительным объёмом называется минимально возможный элемент неоднородного материала, микроструктура которого характерна для всего материала. Фактически это минимальный объём материала, на котором могут быть проведены некоторые эксперименты или измерения, на основе результатов которых можно сделать вывод о поведении материала в целом. Если материал имеет регулярную (периодическую) структуру, то вместо представительного объёма рассматривается ячейка периодичности (например, рассмотренная в главе 3 применительно к оценке эффективных свойств пористых и трещиноватых материалов). На границе представительного объёма задаются непериодические граничные условия, которые заключаются в жёстком ограничении на вектор перемещений в каждой точке границы. На границе же ячейки периодичности задаются периодические граничные условия, заключающиеся не в жёсткой фиксации вектора перемещений, а в наложении связей на значения компонент вектора перемещений в граничных точках.

Решение собственно краевых задач теории упругости при этом осуществляется рассмотренными ранее расчетными ядрами в составе CAE Fidesys, позволяющими рассчитать

напряженно-деформированное состояние в теле как функцию координат и времени на основе МКЭ или МСЭ.

Блок-схема алгоритма работы ядра для вычисления эффективных свойств приведена на Рисунок 234.



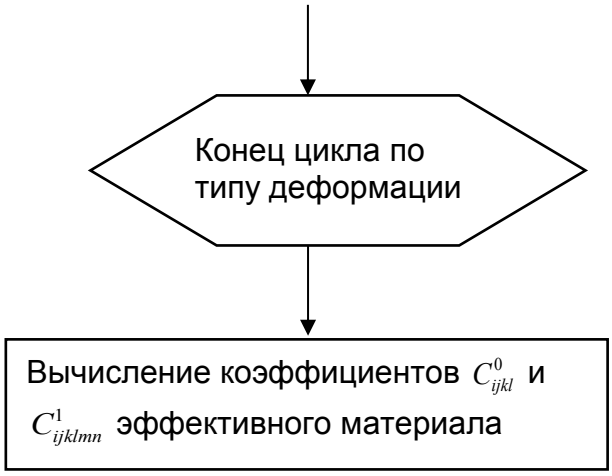


Рисунок 234 Блок-схема алгоритма численной оценки эффективных механических характеристик неоднородного материала

Опишем теперь алгоритм оценки эффективных коэффициентов температурного расширения неоднородных материалов. Для представительного объёма (либо ячейки периодичности) V_0 в виде прямоугольного параллелепипеда размера 2Ax2Bx2C будем решать краевую задачу теории упругости с учётом температурного расширения $\nabla \cdot \sigma^{el} = 0$, $\sigma^{el} = \sigma - \sigma^{th}$ с *непериодическими* граничными условиями, представляющими собой нулевое давление на границе представительного объёма, либо с *периодическими* граничными условиями вида $\bar{u}_i - \bar{u}_{-i} = \bar{u}_a - \bar{u}_{-a}$, здесь ($i$, -$i$) – пара соответствующих друг другу точек на противоположных гранях ячейки периодичности (т.е. точек, проекции которых на эти грани совпадают), и (a, -a) – пара соответствующих друг другу точек на этих же самых противоположных гранях. Отличие в том, что (a, -a) – фиксированная пара точек (для каждой пары противоположных граней), одна и та же для всех связей, а (i, -i) – варьируемая, пробегающая через все точки противоположных граней. Суть периодических условий такого вида заключается в том, что ячейка периодичности может деформироваться сколь угодно сильно, но при этом наложено ограничение, что она должна оставаться ячейкой периодичности.

После приложения граничных условий представительный объём (или ячейка периодичности) подвергаются нагреву на температуру ΔT. Под действием приложенной температуры объём деформируется (свободно расширяется). Осредняя по объёму (в конечном состоянии, после деформирования) полный тензор деформаций, получаем эффективный

(средний) тензор деформаций $\varepsilon^e = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon dV$. Эффективное определяющие соотношения для температурного расширения будем искать в виде $\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha_{ij}\Delta T$, где ε^{th} – тензор температурных деформаций. Величина ΔT, на которую была увеличена температура представительного объёма, была задана ранее; а эффективный тензор полных деформаций, возникших в результате этого нагревания, был вычислен. Соответственно эффективные коэффициенты температурного расширения вычисляются по формуле $\alpha_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^e}{\Delta T}$. Таким образом, в общем случае рассчитывается эффективный тензор температурного расширения исследуемого материала $\begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}$. Если матрица температурного расширения имеет диагональный вид – значит, эффективный материал получился ортотропным (по температурному расширению). В этом случае эффективные ортотропные коэффициенты температурного расширения материала имеют вид $\begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{pmatrix}$. Если при этом все диагональные компоненты равны между собой – значит, эффективный материал получился изотропным (по температурному расширению). В этом случае определяется эффективный коэффициент температурного расширения изотропного материала $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Решение собственно краевой задачи теории упругости (с учётом температурного расширения) осуществляется расчетным ядром для решения задач термоупругости в составе CAE Fidesys, позволяющим рассчитать напряженно-деформированное состояние в теле как функцию координат и времени на основе МКЭ или МСЭ.

Наконец, опишем алгоритм оценки эффективных коэффициентов теплопроводности неоднородных материалов. Для представительного объёма *V* в виде прямоугольного параллелепипеда размера 2*A*x2*B*x2*C* решим некоторое количество краевых задач теплопроводности: $\nabla \cdot q = 0$, где *q* – вектор плотности теплового потока, с *непериодическими*

граничными условиями в виде температуры, заданной на внешней границе представительного объёма $T\big|_{\Gamma} = \nabla T^e \cdot r$, где r – радиус-вектор, либо с *периодическими* граничными условиями в виде связей на температуру в точках противоположных граней ячейки периодичности, проекции которых на эти грани совпадают

$$T_i - T_{-i} = 2A \cdot (\nabla T^e)_1$$
$$T_j - T_{-j} = 2B \cdot (\nabla T^e)_2$$
$$T_k - T_{-k} = 2C \cdot (\nabla T^e)_3$$

В *периодических* граничных условиях (i, -i), (j, -j), (k, -k) – пары точек на противоположных гранях ячейки периодичности, проекции которых на эти грани совпадают. Здесь ∇T^e представляет собой некий эффективный градиент температуры на представительном объёме. Каждой краевой задаче теплопроводности соответствует свой эффективный градиент температуры, который и определяет, какие именно граничные условия будут приложены к представительному объёму. Таким образом, заданием эффективного градиента температуры и типа граничных условий (периодические или непериодические) полностью определяется краевая задача теплопроводности для представительного объёма. В *периодических* граничных условиях $(\nabla T^e)_1$, $(\nabla T^e)_2$, $(\nabla T^e)_3$ – компоненты данного градиента.

Чтобы вычислить эффективные коэффициенты теплопроводности, будем решать три краевых задачи теплопроводности, которым соответствуют следующие градиенты температуры:

1) $\nabla T^e = (\delta; 0; 0)$
2) $\nabla T^e = (0; \delta; 0)$
3) $\nabla T^e = (0; 0; \delta)$

В результате решения каждой из трёх краевых задач получим распределение вектора плотности теплового потока q на представительном объёме. Осредним его по объёму с помощью $q^e = \frac{1}{V}\int_V q dV$ и вычислим эффективный вектор плотности теплового потока q_e. Эффективную теплопроводность материала будем оценивать в виде связи q_e, полученного в результате расчёта, с эффективным градиентом температуры ∇T^e, который был задан в качестве входных данных – в виде закона теплопроводности Фурье $q_i^e = -\lambda_{ij}\left(\nabla T^e\right)_j$

Пользуясь результатами решения вышеуказанных трёх задач, вычислим эффективные коэффициенты теплопроводности:

$$\lambda_{i1} = -\frac{q_i^e}{\delta}, i = 1,2,3$$

$$\lambda_{i2} = -\frac{q_i^e}{\delta}, i = 1,2,3$$

$$\lambda_{i3} = -\frac{q_i^e}{\delta}, i = 1,2,3$$

В результате расчёта эффективных коэффициентов теплопроводности получаем эффективный тензор теплопроводности

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Если матрица является диагональной, то полученный эффективный материал является ортотропным. В этом случае элементы на диагонали являются коэффициентами теплопроводности ортотропного материала: λ_1, λ_2, λ_3.

Решение краевых задач теплопроводности при этом осуществляется расчетным ядром для решения задач теплопроводности в составе CAE Fidesys, позволяющим рассчитать распределение температуры в теле как функцию координат и времени на основе МКЭ или МСЭ.

Для численной оценки эффективных свойств необходима геометрическая модель представительного объема или ячейки периодичности неоднородного материала, «вырезанная» в форме параллелепипеда, грани которой параллельны координатным плоскостям. На данной геометрической модели строится конечноэлементная сетка, которую и принимает на вход расчетное ядро оценки эффективных свойств. Дальнейшие действия производятся в той декартовой системе координат, координатные плоскости которой параллельны граням модели. В этой же системе координат оцениваются эффективные механические характеристики. Конечноэлементная сетка представляет собой массив номеров узлов с их координатами и массив номеров конечных элементов с номерами входящих в них узлов. С целью определения габаритных размеров представительного объёма (либо ячейки периодичности) проводится цикл по всем узлам конечноэлементной сетки, в результате которого определяются максимальные и минимальные абсциссы, ординаты и аппликаты узлов сетки: Xmax, Xmin, Ymax, Ymin, Zmax, Zmin. Затем вычисляются координаты центра представительного объёма (ячейки периодичности):

$$X_{center} = \frac{1}{2}\left(X_{\max} + X_{\min}\right)$$

$$Y_{center} = \frac{1}{2}\left(Y_{\max} + Y_{\min}\right)$$

$$Z_{center} = \frac{1}{2}\left(Z_{\max} + Z_{\min}\right)$$

После этого модель сдвигается так, чтобы центр её сместился в начало координат (т.е. координаты всех узлов сетки уменьшаются на X_{center}, Y_{center}, Z_{center}. Также определяются габаритные размеры модели 2Ax2Bx2C по формулам:

$$A = \frac{1}{2}\left(X_{\max} - X_{\min}\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\left(Y_{\max} - Y_{\min}\right)$$

$$C = \frac{1}{2}\left(Z_{\max} - Z_{\min}\right)$$

Кроме того, в этом же блоке вычисляется точность определения граничных узлов и граней ε. Для этого проводится цикл по всем конечным элементам сетки, в результате которого определяется минимальный объём элемента V_{min}. Точность ε вычисляется по формуле: $\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{V_{\min}}}{100}$. Величина ε зависит от того, насколько мелкая сетка поступает для расчёта из препроцессора.

Для дальнейших расчётов необходимо сформировать списки узлов, находящихся на границе представительного объёма (либо ячейки периодичности), зависящие от типа прикладываемых граничных условий. Если задача решается для непериодических граничных условий, то все узлы, находящиеся на границе представительного объёма, записываются в один общий список. Для этого реализуется цикл по всем узлам сетки, на каждом шаге которого проверяются условия: $x - A < \varepsilon$ или $x + A < \varepsilon$ или $y - B < \varepsilon$ или $y + B < \varepsilon$ или $z - C < \varepsilon$ или $z + C < \varepsilon$

здесь x, y, z – координаты узла. Если условие выполняется – значит, узел находится на границе представительного объёма, и его номер добавляется к списку граничных узлов.

Если же задача решается для периодических граничных условий, создаётся шесть списков с номерами узлов – по числу граней. Аналогично осуществляется цикл по всем узлам сетки, на каждом шаге которого проверяются следующие условия:

1) $x - A < \varepsilon$
2) $x + A < \varepsilon$

3) $y - B < \varepsilon$

4) $y + B < \varepsilon$

5) $z - C < \varepsilon$

6) $z + C < \varepsilon$

Если для узла выполняется условие под номером n – номер узла добавляется в список под номером n. Далее составляются пары соответствующих друг другу узлов (т.е. тех, проекции которых ближе всех друг к другу) с противоположных граней ячейки периодичности. Пары записываются в три списка. С этой целью осуществляется проход по всем узлам грани $x = A$. Для каждого такого узла i находится узел $-i$ – наиболее близкий к противоположной узлу i точке на грани $x = -A$. Т.е. для узла i с координатами (A, y_i, z_i) (лежащего на грани $x = A$) ищется ближайший (из лежащих на грани $x = -A$) к точке с координатами $(-A, y_i, z_i)$. Когда такой узел найден, пара $(i, -i)$ добавляется в первый список пар узлов. Затем проводится цикл по всем узлам грани $x = -A$: если узел $-i$ этой грани уже является вторым элементом одной из пар, то можно переходить к следующему; а если не является – тогда нужно найти соответствующий ему узел i с грани $x = A$ и добавить в первый список пар.

Аналогично осуществляется проход по всем узлам грани $y = B$. Для каждого такого узла j находится узел $-j$ – наиболее близкий к противоположной узлу j точке на грани $y = -B$. Т.е. для узла j с координатами (x_j, B, z_j) (лежащего на грани $y = B$) ищется ближайший (из лежащих на грани $y = -B$) к точке с координатами $(x_j, -B, z_j)$. Когда такой узел найден, пара $(j, -j)$ добавляется во второй список пар узлов. Затем проводится цикл по всем узлам грани $y = -B$: если узел $-j$ этой грани уже является вторым элементом одной из пар, то можно переходить к следующему; а если не является – тогда нужно найти соответствующий ему узел j с грани $y = B$ и добавить во второй список пар.

Наконец, осуществляется проход по всем узлам грани $z = C$. Для каждого такого узла k находится узел $-k$ – наиболее близкий к противоположной узлу k точке на грани $z = -C$. Т.е. для узла k с координатами (x_j, y_i, C) (лежащего на грани $z = C$) ищется ближайший (из лежащих на грани $z = -C$) к точке с координатами $(x_j, y_i, -C)$. Когда такой узел найден, пара $(k, -k)$ добавляется в третий список пар узлов. Затем проводится цикл по всем узлам грани $z = -C$: если узел $-k$ этой грани уже является вторым элементом одной из пар, то можно переходить к следующему; а если не является – тогда нужно найти соответствующий ему узел k с грани $z = C$ и добавить в третий список пар.

Для последующего вычисления объёма модели в конечном состоянии также необходимо сформировать списки граней конечных элементов, находящихся на границе представительного

объёма. Данные о конечноэлементной сетке, поступающие из препроцессора, не содержат массива граней элементов, поэтому создаётся шесть списков из пар вида {глобальный номер элемента, локальный номер грани}. Для этого осуществляется цикл по всем конечным элементам сетки, а внутри него цикл по всем граням элемента. Если все узлы грани элемента (локальной) лежат на одной из граней представительного объёма (глобальной) – пара {глобальный номер элемента, локальный номер грани} добавляется в соответствующий список. При этом учитывается, что элементы бывают разной геометрической формы и разного порядка аппроксимации (например, в случае МСЭ) – т.е. у разных элементов разное число граней и разное число узлов на них.

Входными данными расчетного ядра являются:

- данные о конечноэлементной сетке (список номеров узлов с координатами и список номеров элементов с номерами входящих в них узлов и номерами материалов);
- данные о распределении свойств материала внутри модели неоднородного представительного объема/ячейки периодичности;
- тип граничных условий (периодические/непериодические).

Выходными данными расчетного ядра являются вычисленные эффективные упругие модули, эффективные коэффициенты температурного расширения и эффективные коэффициенты теплопроводности.

5.3 Интерфейс пользователя CAE Fidesys

CAE Fidesys имеет интуитивно понятный графический интерфейс, с помощью которого пользователь получает доступ к функционалу пакета и может поэтапно выполнять полный цикл проведения расчёта (Рисунок 235).



Рисунок 235 Составные части интерфейса пользователя CAE Fidesys

Рабочая область (1) представляет собой окно отображения модели и визуальных эффектов.

Главное меню (2) включает в себя стандартные операции работы с файлами и проектами, управление режимами визуализации моделей, настройки отображения панелей, справку и т.п. функционал, доступный в раскрывающихся пунктах меню.

Инструменты (3) включают в себя дерево объектов геометрии, а также инструменты для анализа геометрии и сетки.

Панель команд (4) содержит большинство команд для работы с программой. Кнопки отображения панелей расположены в логическом порядке, что позволяет поэтапно выполнять полный цикл проведения расчёта.

Панель инструментов (5) содержит кнопки для вызова команд, которые наиболее часто используются при работе с программой.

Страница свойств (6) служит для отображения свойств выделенного объекта в рабочей области экрана или в дереве объектов.

Консоль (7) используется для ввода команд CAE Fidesys и вывода сообщений пользователю.

Проведение расчёта с использованием CAE Fidesys подразумевает поэтапное выполнение следующих операций:

- задание геометрии;
- построение сетки;
- задание граничных условий;
- задание материала;
- запуск расчёта;
- просмотр и анализ результатов.

Все пункты, за исключением последнего, выполняются в препроцессоре. Последний пункт выполняется в постпроцессоре.

Отметим, что программа работает с безразмерными величинами, следовательно, размерности вводимых величин (геометрические размеры, свойства материалов, нагрузки) устанавливаются пользователем конкретно в пределах решаемой задачи.

Геометрия

CAE Fidesys позволяет пользователю самостоятельно создавать объёмную геометрию с помощью встроенного функционала, а также импортировать трёхмерные модели, созданные в различных CAD-системах. В качестве средств для создания геометрии CAE Fidesys предоставляет большое количество объёмных геометрических примитивов (параллелепипед, цилиндр, призма, конус, пирамида, шар, тор), а также возможность объединять поверхности в замкнутые объёмные тела. Для создания сложной геометрии используются булевы операции

(пересечение, вычитание, объединение объёмов) и различные трансформации объектов (вращение, перемещение, масштабирование, отражение). Весь описанный функционал доступен на панели команд в разделе Геометрия (Рисунок 236).

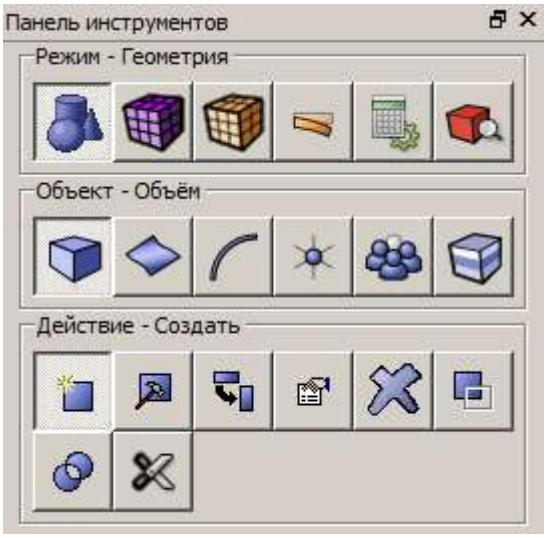


Рисунок 236 Панель инструментов для работы с геометричесими моделями

Построение сетки

Вид панели команд для построения сетки приведен на Рисунок 237.

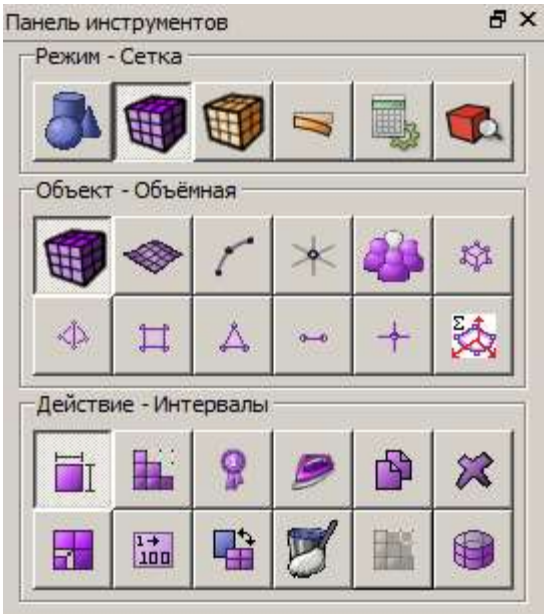


Рисунок 237 Панель инструментов для работы с сеточными моделями

С помощью функционала, доступного через панель команд, можно:

- провести построение неструктурированной сетки в объеме, на поверхностях и кривых с заданием шага сетки, количества интервалов разбиения, настроек для построения неравномерной адаптивной геометрии сетки

- проверить качество построенной сетки (включая проверку качества сетки отдельных элементов: объёмов, поверхностей, кривых);
- модифицировать уже построенную сетку (улучшить, сгладить, зачистить);
- перенумеровать элементы и удалить построенную сетку.

Группы материалов

CAE Fidesys поддерживает следующие модели материалов (Рисунок 238):

- Материал Гука;
- Ортотропный/Трансверсально изотропный материал;
- Материал Муни-Ривлина;
- Материал Мурнагана;
- Упругопластические материалы Мизеса и Друкера-Прагера;
- Пороупругие и термоупругие материалы;
- Материалы с демпфированием.

Для материалов Муни-Ривлина и Мурнагана используются определяющие соотношения, указанные ниже.

Потенциал Муни-Ривлина:

$$W = C_1(\bar{I}_1 - 3) + C_2(\bar{I}_2 - 3) - D(J-1)^2,$$

где D, C_1, C_2 - константы материала Муни-Ривлина.

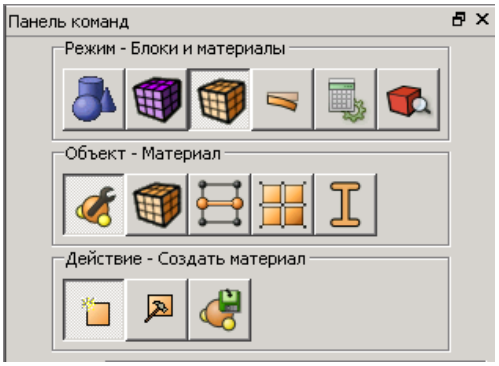
Связь D, C_1, C_2 и коэффициента Пуассона ν:

$$D = \frac{C_1 + C_2}{1 - 2\nu}.$$

Определяющее соотношение для материала Мурнагана:

$$\overset{0}{\Sigma}_{0,n} = \lambda(\overset{0}{\varepsilon}\cdot\cdot I)I + 2G\overset{0}{\varepsilon} + 3C_3(\overset{0}{\varepsilon}\cdot\cdot I)^2 I + C_4(\overset{0}{\varepsilon}{}^2\cdot\cdot I)I + 2C_4(\overset{0}{\varepsilon}\cdot\cdot I)\overset{0}{\varepsilon} + 3C_5\overset{0}{\varepsilon}{}^2$$

где λ, G, C_3, C_4, C_5 - константы материала Мурнагана.



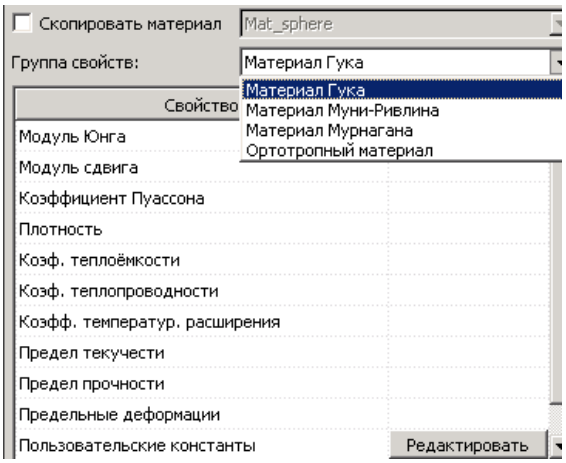
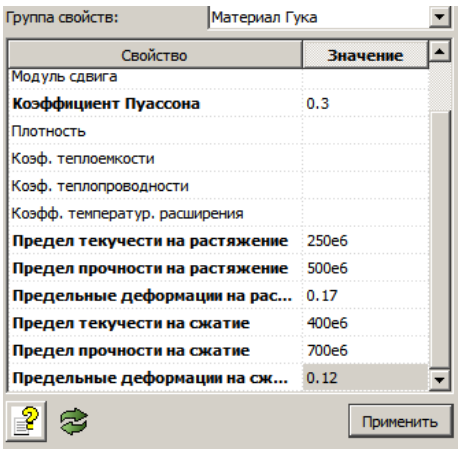


Рисунок 238 Панель команд для работы с материалами

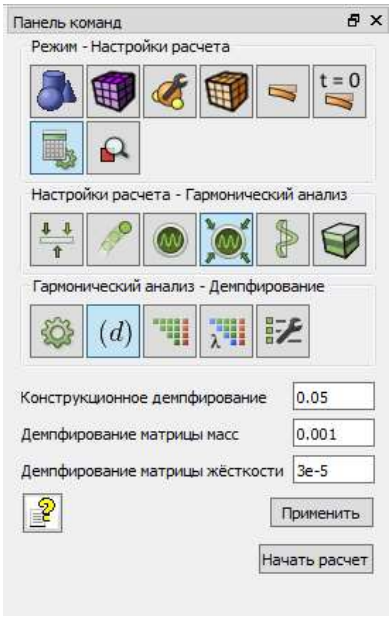
Задачи пластичности являются нелинейными, поэтому требуют значительных компьютерных ресурсов, а решение задач с большими пластическими деформациями может занимать продолжительное время. В системе прочностного анализа Fidesys для материала Гука реализованы два критерия перехода в пластичность: критерий Мизеса и критерий Друкера-Прагера. Задачи решаются как для идеально упругопластической модели, так и для модели с линейным упрочнением. Реализован подход с учётом конечных деформаций в зоне пластического течения.

Для задания модели пластичности по критерию Мизеса дополнительно к упругим свойствам материала Гука нужно также указать предел текучести на растяжение. Для задания линейного упрочнения необходимо также указать предел прочности на растяжение и предельные пластические деформации на растяжение.

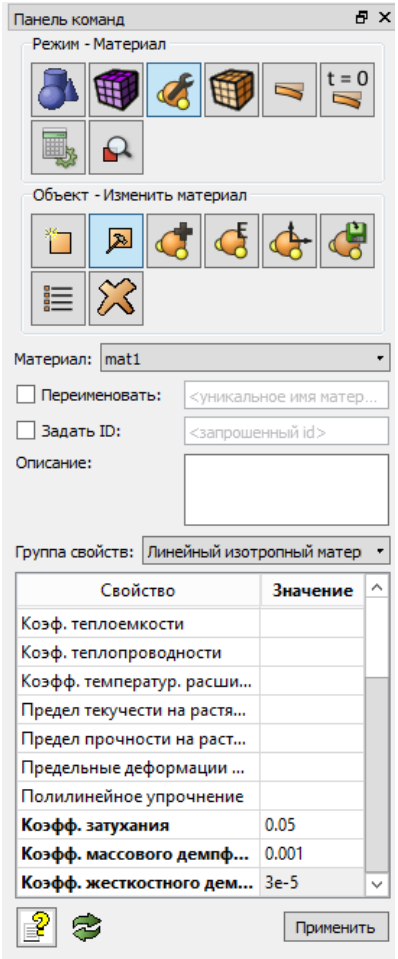
Для задания пластической модели Друкера-Прагера необходимо, помимо упругих свойств материала, указать пределы текучести на растяжение и на сжатие. Для задания модели пластичности Друкера-Прагера с упрочнением необходимо также указать пределы прочности и предельные пластические деформации на растяжение и на сжатие.



Общее демпфирование (Глава 1) в Fidesys задается из панели команд: Режим – Настройки расчета, Настройки расчета – Гармонический анализ, Гармонический анализ – Демпфирование.



Параметры демпфирования для отдельных материалов, можно задать через панель команд: Режим – Материал, Объект – Изменить материал.



Работа с блоками

Блоки содержат набор элементов с одинаковым набором свойств/параметров (свойства материала, параметры элементов, порядок схемы и т.п.). Блок должен содержать тип элемента, ID геометрической модели и название материала. Последовательность работы с блоками (Рисунок 239) можно схематично представить следующим образом:

- создать блок с указанием ID геометрического объекта;
- присвоить блоку материал;
- присвоить блоку тип элемента.

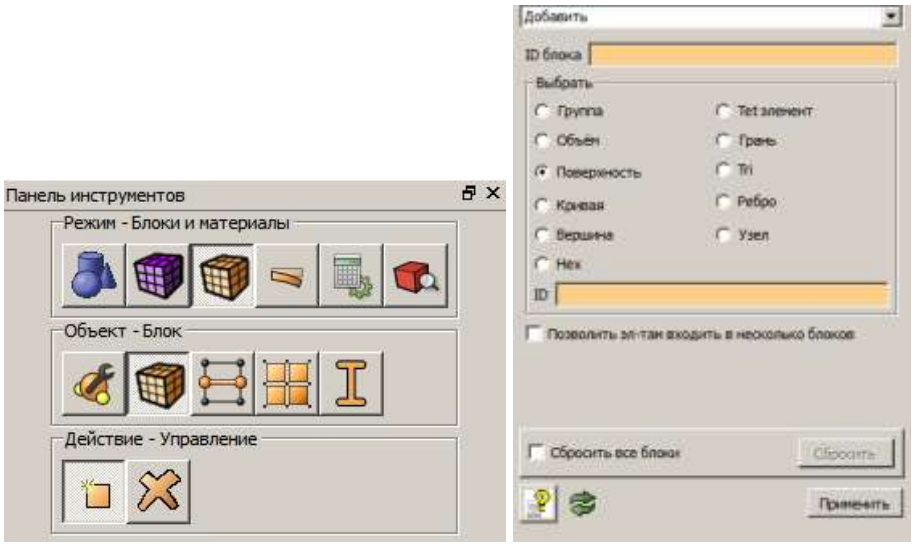
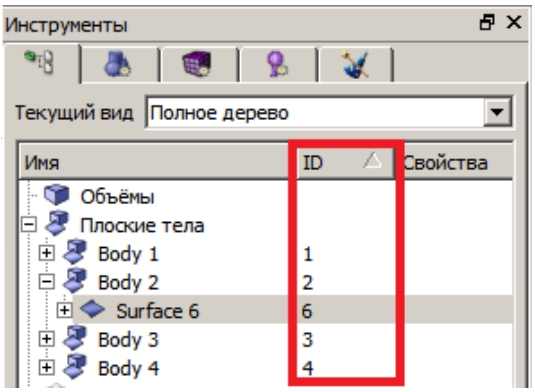


Рисунок 239 Панель инструментов для работы с блоками

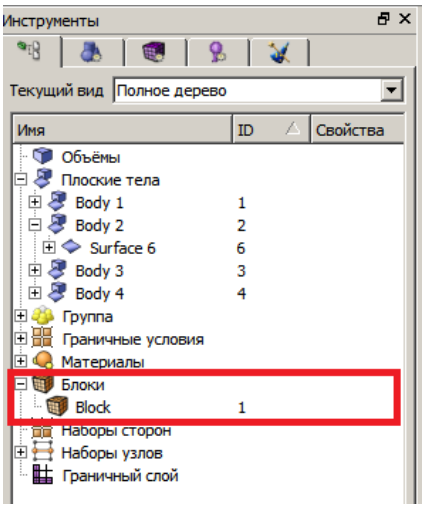
ID геометрических объектов, которые войдут в блок, можно узнать следующим образом:

- в дереве объектов;



- выделив интересующие геометрические объекты в рабочей области — их ID автоматически появится в соответствующем поле.

Созданный блок отобразится в Дереве объектов в разделе Блоки.

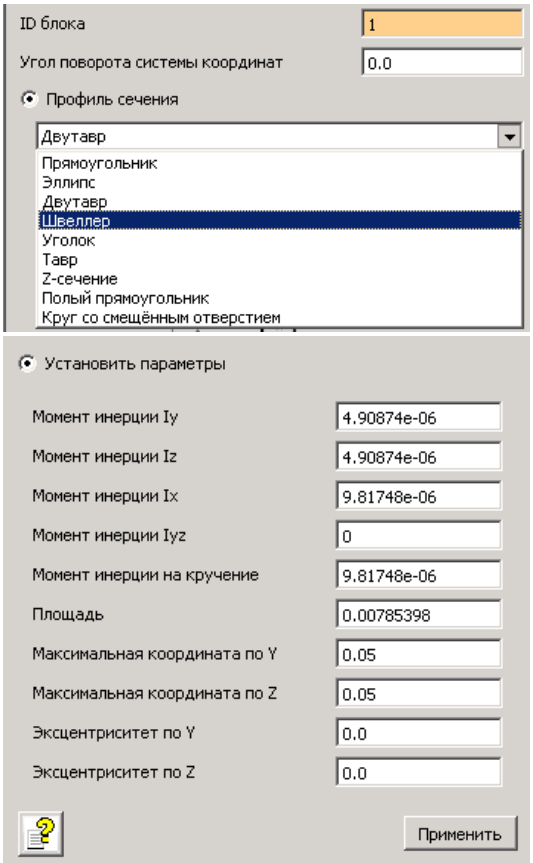


Тип элемента и свойства материала, ранее присвоенные блоку, можно изменить на Странице свойств.

Для блоков, содержащих оболочечные элементы, необходимо дополнительно указать:

- Толщину оболочки
- Коэффициент лофта

Коэффициент лофта по умолчанию равен 0.5, что соответствует симметричному расположению срединной поверхности относительно верхней и нижней поверхностей оболочечного элемента. Просмотр оболочечного элемента в трехмерном виде возможен в постпроцессоре Fidesys Viewer после выполнения расчета.



Для блоков, содержащих балочные элементы, необходимо дополнительно указать параметры сечения (профиля) балки. CAE Fidesys поддерживает сечения балок следующих типов:

- прямоугольник;
- эллипс;
- двутавр;
- швеллер;
- тавр;
- Z-сечение;
- полый прямоугольник;
- круг со смещенным отверстием.

Просмотр балочного элемента в трехмерном виде возможен в постпроцессоре Fidesys Viewer после

выполнения расчета.

Также возможно задание свойств балок с помощью моментов инерции.

Типы граничных условий

CAE Fidesys поддерживает граничные условия следующих типов:

- точечная сила
- давление
- перемещение
- тепловой поток
- конвекция
- температура
- ускорение
- скорость
- регионы контакта
- контактные пары

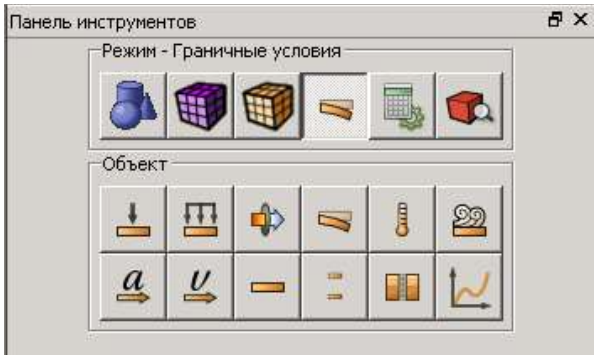
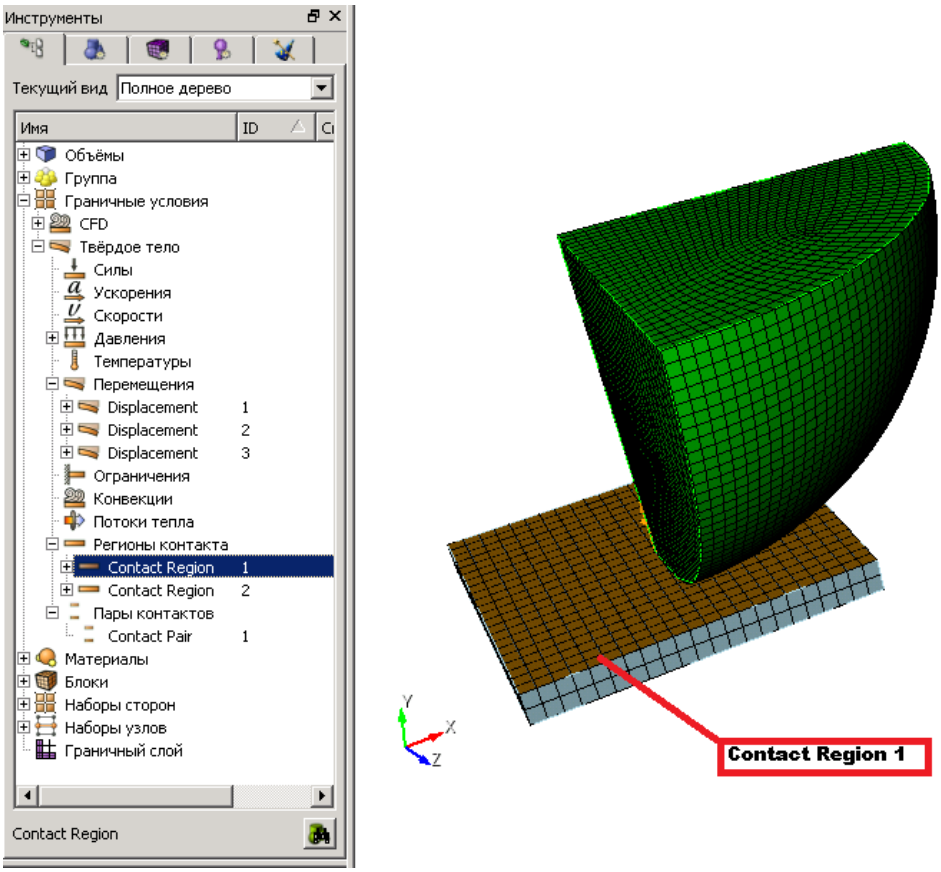


Рисунок 240 Панель инструментов для задания граничных условий

С помощью функционала, доступного через панель команд (Рисунок 240), можно также просмотреть список заданных граничных условий, изменить и удалить заданное ранее граничное условие. Кроме того, можно установить зависимость от времени или координат для каждого типа граничных условий с помощью табличных и формульных зависимостей. Доступна возможность экспорта табличных данных либо импорта новых таблиц.

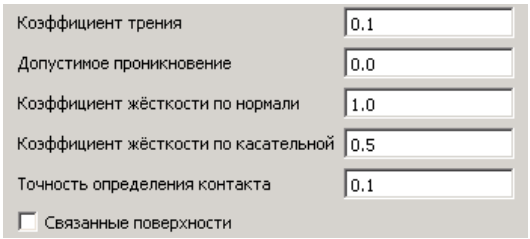
Для решения контактных задач необходимо задать контактные пары на границе между контактирующими телами. Контактные задачи являются существенно нелинейными и требуют значительных компьютерных ресурсов для решения. Область контакта, а, следовательно, граничные условия до являются неизвестными и переменными в процессе решения. Во ряде контактных задачах необходимо учитывать трение. Эффекты, связанные с трением, могут приводить к плохой сходимости итерационного процесса решения нелинейной задачи методом Ньютона.

Если контактные условия не были заданы, то тела друг с другом не взаимодействуют. Взаимодействие тел через заданные области контакта означает препятствие взаимному проникновению тел и передачу нагрузок по нормали. Области, для которых планируется задавать граничные условия для контакта, нужно выделить в отдельные поверхности для объемных тел или линии для двумерного случая. Регионы контактов должны быть достаточного размера, чтобы процесс контактного взаимодействия тел за них не выходил, но при этом для экономии компьютерных ресурсов эти регионы рекомендуется минимизировать. Регионы контакта и их номера отображаются в дереве объектов.



Каждой контактной паре приписывается индивидуальный номер (ID) и набор свойств. При задании контактной пары следует иметь в виду, что выбор ведущего и ведомого регионов может стать причиной получения различных результатов моделирования и влиять на точность решения.

В CAE Fidesys доступны следующие настройки контактной пары:



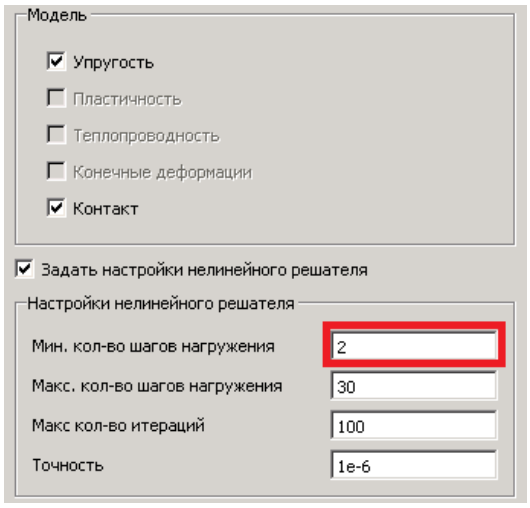
Связанные поверхности позволяют моделировать случай жесткого контакта между телами, для которого ведущий и ведомый регионы связываются по всем степеням свободы.

В ситуации, когда движение тела как абсолютно жесткого ограничивается лишь контактными условиями, важно обеспечить, чтобы в начальном состоянии элементы контактной пары находились во взаимодействии. Однако в ряде случаев определение данного взаимодействия может быть затруднительно. Это может происходить в следующих случаях:

- контуры тела могут быть достаточно сложными, и трудно точно определить точку, в которой произойдет первый контакт;
- ошибки дискретизации геометрической модели, возникающие при построении сеточной модели, могут приводить к появлению малых разрывов между элементами.

По этим же причинам может происходить слишком большое начальное проникновение ведущего региона в ведомый. В этих случаях в контактных элементах возможно появление чрезмерно больших сил реакции, что может привести к расходимости итерационного процесса решения нелинейной задачи. Поэтому определение начального контакта представляет собой, возможно, наиболее важный аспект построения модели для контактного анализа.

В CAE Fidesys реализован контактный алгоритм на основе метода штрафов (penalty). Этот метод требует настройки как для нормальной, так и для касательной жесткостей. Основным недостатком данного метода является то, что проникновение между двумя поверхностями, зависит от этих жесткостей. Более высокие значения жесткостей
могут уменьшить проникновение, но могут привести к плохой обусловленности глобальной матрицы жесткости и плохой сходимости. В идеале, необходимо подобрать достаточно высокие жесткости, чтобы контактное проникновение оставалось достаточно малым. В то же время, достаточно низкие жесткости обеспечивают лучшую сходимость задачи. Кроме того, при запуске задачи на расчет рекомендуется использовать, как минимум, 2 шага нагружения в настройках итерационного процесса решения нелинейной задачи.

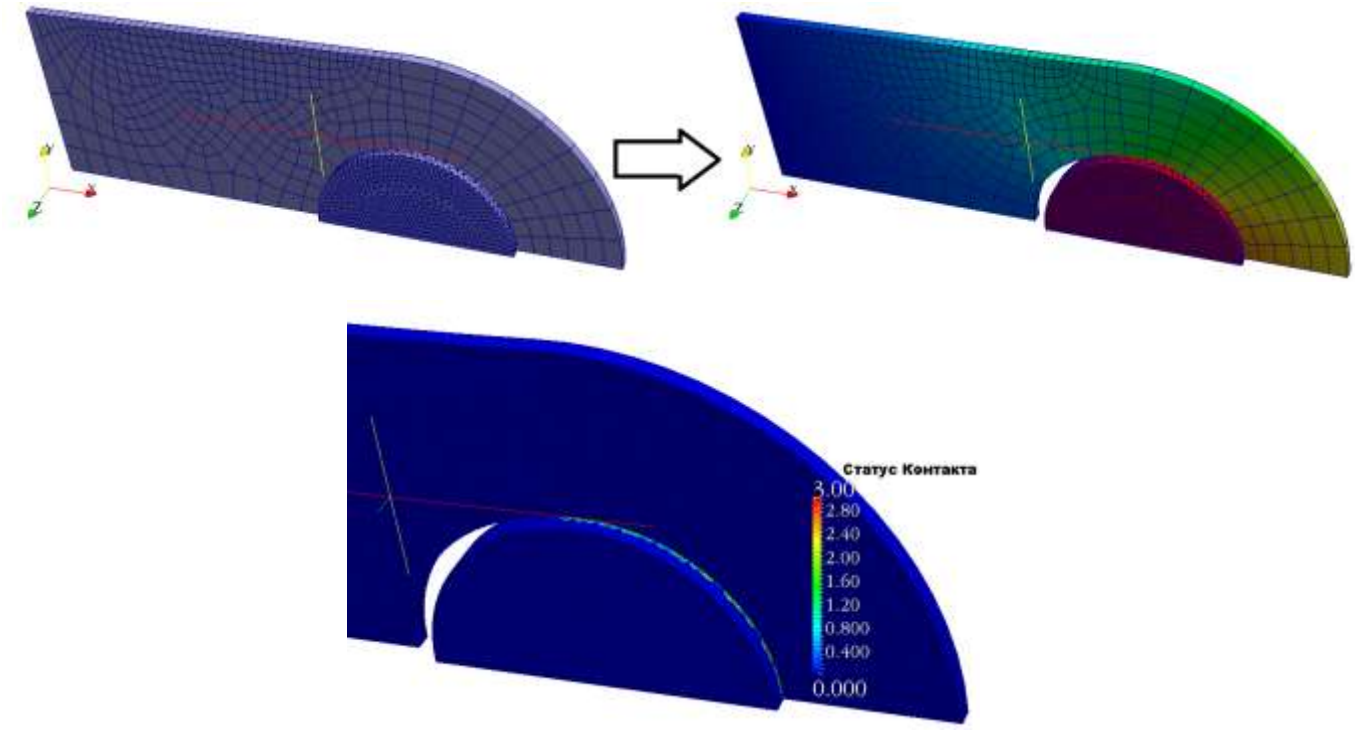


Расчетные алгоритмы CAE Fidesys позволяют моделировать контакт, не задавая точное совпадение узлов сетки на границе (неконформная сетка). При этом не требуется использование каких-либо специальных конечных элементов в области контакта для обеспечения контактного взаимодействия тел.

В Fidesys Viewer непосредственно после выполнения расчета можно оценить поведение каждого контактного элемента по присвоенному ему статусу в поле Статус Контакта (Contact Status).

Данное поле имеет одну компоненту, которая может принимать следующие значения:

- STATUS = 0 – отсутствие контакта;
- STATUS = 2 – контакт с проскальзыванием;
- STATUS = 3 – без проскальзывания (или без трения).



Запуск расчёта

CAE Fidesys позволяет выполнять следующие типы анализа (Рисунок 241):

- статическое нагружение (1);
- динамическое нагружение (2);
- анализ собственных частот (3);
- расчет на устойчивость (4);
- расчёт эффективных характеристик композитных материалов (5).

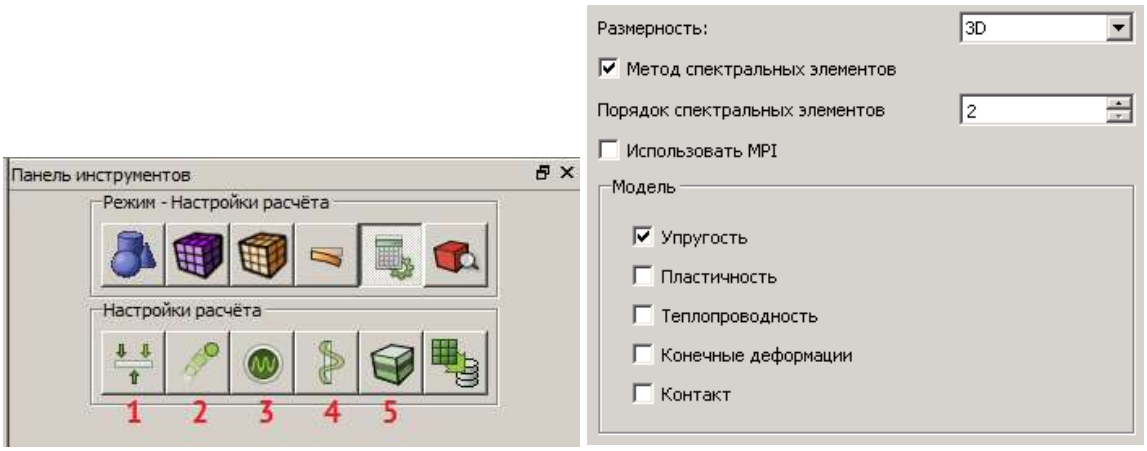


Рисунок 241 Панель инструментов для выбора типа анализа

После запуска расчёта в консоли будет отображаться его ход. В нее же будут выводиться сообщения пользователю, в том числе сообщения об ошибках в случае неуспешного или некорректного завершения расчётов. В случае успешного завершения расчёта в консоли появится сообщение: "*Calculation finished successfully at <date> <time>*".

Все вычисления производятся в декартовой системе координат. При необходимости после завершения расчёта можно дополнительно произвести пересчёт результатов в цилиндрическую и сферическую системы координат с помощью фильтров в постпроцессоре Fidesys Viewer.

Размерность решаемой модели: 2D – двумерная (плоская) или 3D - трехмерная. Для двумерного случая реализованы следующие типы плоской задачи:

- плоское напряженное состояние;
- плоское деформированное состояние.

В результате расчета определяются поля напряжений, деформаций и перемещений, включая главные напряжения, главные деформации и интенсивность напряжений по Мизесу.

Доступны следующие типы решателей систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в процессе дискретизации задачи:

- прямой (LU);
- итерационный.

Доступны следующие решатели для задач нахождения собственных значений у систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

- Крылова-Шура;
- Арнольди.

Для решения динамических задача может использоваться одна из двух схем интегрирования по времени:

- явная;

- неявная.

Для расчёта доступны следующие механические модели:

- упругость;
- пластичность;
- термоупругость/пороупругость;
- конечные деформации;
- контакт.

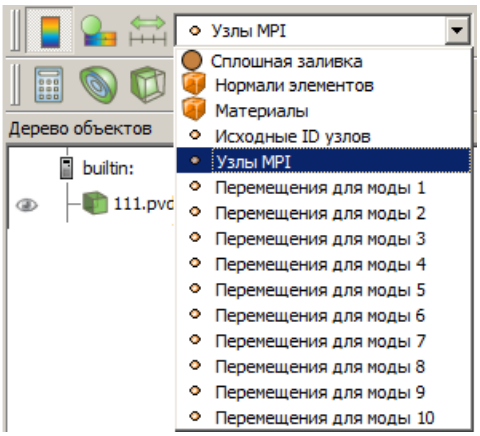
Для нелинейных задач сходимость итераций на каждом шаге по нагружению можно проверить в файле Convergence.txt. Файл выгружается в папку, которая создается рядом с файлом *.pvd, в котором сохраняются результаты расчёта.

CAE Fidesys позволяет проводить как отдельные расчёты, так и серию расчётов в рамках одного проекта.

Помимо используемого по умолчанию метода конечных элементов (МКЭ), CAE Fidesys позволяет проводить расчёты методом спектральных элементов (МСЭ), подробно рассмотренным во второй главе.

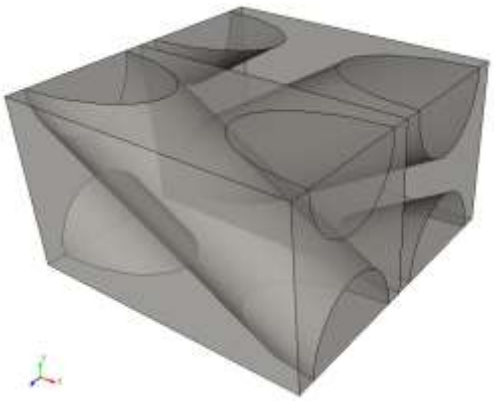
При наличии в локальной сети нескольких компьютеров с установленной CAE Fidesys технология MPI (рассмотренная в четвертой главе) позволяет объединить их вычислительные мощности для параллельного решения задачи. Технология MPI в настоящее время фактически представляет собой стандарт для параллельных вычислений в системах с распределенной памятью, т.е. таких, где каждый процессор имеет своё независимое адресное пространство и обменивается данными с другими процессорами посредством сообщений. Технология MPI наиболее эффективна при решении задач с большим числом степеней свободы, поскольку с одной стороны это позволяет решать задачи, не помещающиеся в память одного компьютера, а с другой – большие задачи МКЭ или МСЭ требуют относительно небольшой интенсивности обмена сообщениями между процессорами и таким образом меньше нагружают сетевое

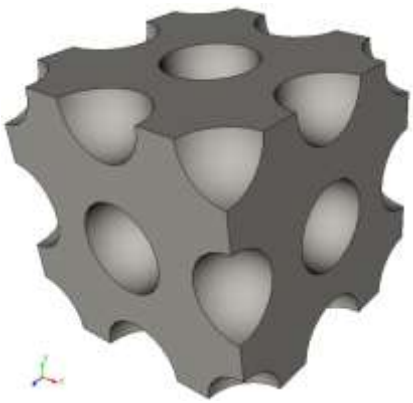
В постпроцессоре Fidesys Viewer после выполнения расчета с помощью MPI появляется новое поле Узлы MPI, которое характеризует разбиение модели по процессорам:



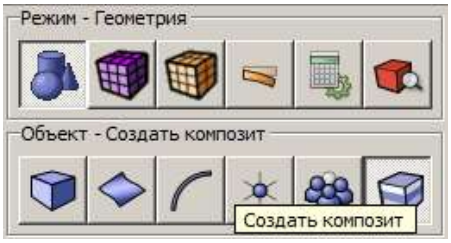
Расчёт эффективных свойств неоднородного материала позволяет оценить осредненные характеристики композита или пористого материала (например, керна, рассмотренного в третьей главе). Геометрической моделью для расчёта эффективных свойств материала непериодической структуры является представительный объём – т.е. объём, по поведению которого при деформации можно судить о поведении материала в целом. Обычно это означает, что размер представительного объёма должен быть примерно на порядок больше характерного размера пор или включений в материале. Геометрической моделью для расчёта эффективных свойств материала периодической структуры может являться ячейка периодичности. Важно, что геометрической моделью для расчёта эффективных свойств всегда должен являться фрагмент материала, «вырезанный» из него по форме прямоугольного параллелепипеда. При расчёте этот фрагмент следует располагать так, чтобы грани параллелепипеда были строго параллельны координатным плоскостям.

Примеры моделей для расчёта эффективных свойств показаны на рисунках ниже. Если исследуемый материал – сплошной (рисунок слева), то и модель для расчёта его эффективных свойств должна быть сплошным прямоугольным параллелепипедом с гранями, параллельными координатными плоскостями. Если же материал содержит полости или поры, то и модель для расчёта должна содержать эти полости, которые могут выходить на поверхность (как показано на рисунке справа).





Генерация геометрии ячеек периодичности некоторых композиционных материалов периодической структуры в CAE Fidesys может быть осуществлена автоматически. В режиме управления геометрией присутствует кнопка «Создать композит», как показано на рисунке ниже.

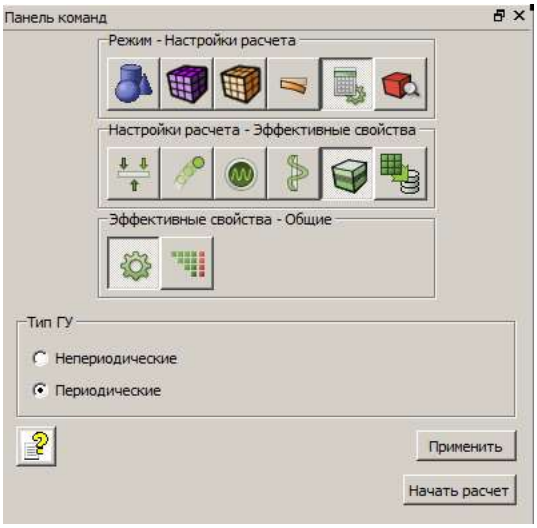


Доступно создание ячеек периодичности следующих видов композитов:

- слоисто-волокнистый (двуслойный) композит;
- однослойный волокнистый;
- однослойный волокнистый с оболочками;
- дисперсно армированный (сферическими включениями);
- дисперсно армированный с оболочками.

Для данных композитов необходимо только задать параметры материалов – геометрическая модель ячейки периодичности будет сгенерирована автоматически средствами препроцессора CAE Fidesys. Кроме того, можно также создать новую геометрическую модель ячейки периодичности с помощью средств интерфейса или же импортировать ее из CAD-системы.

После создания геометрической модели ячейки периодичности необходимо провести те же действия, что и при расчёте на статическое нагружение: создание блоков, генерация конечноэлементной сетки, задание свойств материалов и т.д. – за исключением приложения граничных условий. Для расчёта эффективных свойств граничные условия к модели прикладывать не нужно: при расчёте к модели автоматически последовательно прикладывается ряд типов граничных условий, для каждого типа решается задача статического нагружения, результаты всех задач осредняются – в результате осреднения и вычисляются эффективные свойства материала. Необходимо выбрать тип граничных условий: периодические или непериодические.



Периодические граничные условия предпочтительны в случае, если рассчитываются эффективные свойства материала периодической структуры, а моделью для расчёта служит ячейка периодичности. Если материал, к примеру, является композитом с матрицей и включениями, причём жёсткость включений намного выше жёсткости матрицы, а включения выходят на поверхность модели для расчёта – в этом случае нужно обязательно применять периодические условия. Если же исследуются эффективные свойства материала нерегулярной структуры, а моделью для расчёта является представительный объём – тогда предпочтительны непериодические граничные условия.

Как уже было сказано, для расчёта эффективных свойств модель подвергается ряду деформаций. Используются следующие виды деформаций:

- растяжения (вдоль каждой из координатных осей);
- сдвиги (в каждой из координатных плоскостей).

Величина деформации составляет 0,2% для всех типов.

Эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Результатом расчёта являются эффективные упругие модули C_{ijkl}, выводимые в командную строку и в файл с названием Cijkl.txt, находящийся в рабочей директории. Модули вычисляются в той системе координат, в которой проводился расчёт (координатным плоскостям которой параллельны грани расчётной модели). Модули C_{ijkl} содержат 21 независимую константу – зачастую это больше, чем необходимо для описания эффективных свойств исследуемого неоднородного материала. Поэтому предусмотрена возможность автоматического пересчёта полученных эффективных упругих модулей в константы ортотропного, трансверсально-изотропного или изотропного материала. После завершения

расчёта эффективных свойств появляется окно «Обработать данные по эффективным свойствам». В этом окне полученные эффективные упругие модули C_{ijkl} показаны внизу справа в виде симметричной матрицы размером 6x6. Для ортотропного материала эта матрица должна выглядеть следующим образом (здесь буквами *X* обозначены те компоненты тензора C_{ijkl}, которые могут быть ненулевыми).

$$\begin{pmatrix} X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ & X & X & 0 & 0 & 0 \\ & & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & X & 0 & 0 \\ & & & & X & 0 \\ & & & & & X \end{pmatrix}$$

Поскольку компоненты матрицы представляют собой результат численного расчёта эффективных свойств – они, как правило, содержат некоторую численную погрешность.

Если полученная матрица соответствует ортотропному материалу с приемлемой точностью, можно выбрать тип материала «Ортотропный», в результате чего будут рассчитаны девять констант ортотропного материала.

Если ортотропные константы в направлениях X и Y совпадают с приемлемой точностью, можно выбрать тип материала «Трансверсально-изотропный», в результате чего будут рассчитаны пять констант трансверсально-изотропного материала.

Если же ортотропные константы не зависят от направления, можно выбрать тип материала «Изотропный», в результате чего будут рассчитаны две константы изотропного материала – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Также доступна возможность экспорта параметров эффективного материала в файл в формате XML. Впоследствии можно импортировать данные материала из созданного файла.

Визуализация результатов и постпроцессинг

Программа Fidesys Viewer (Рисунок 242) предназначена для просмотра и анализа полученных результатов:

- визуализации векторных и тензорных полей;
- построения графиков и диаграмм;
- анализа временных зависимостей.

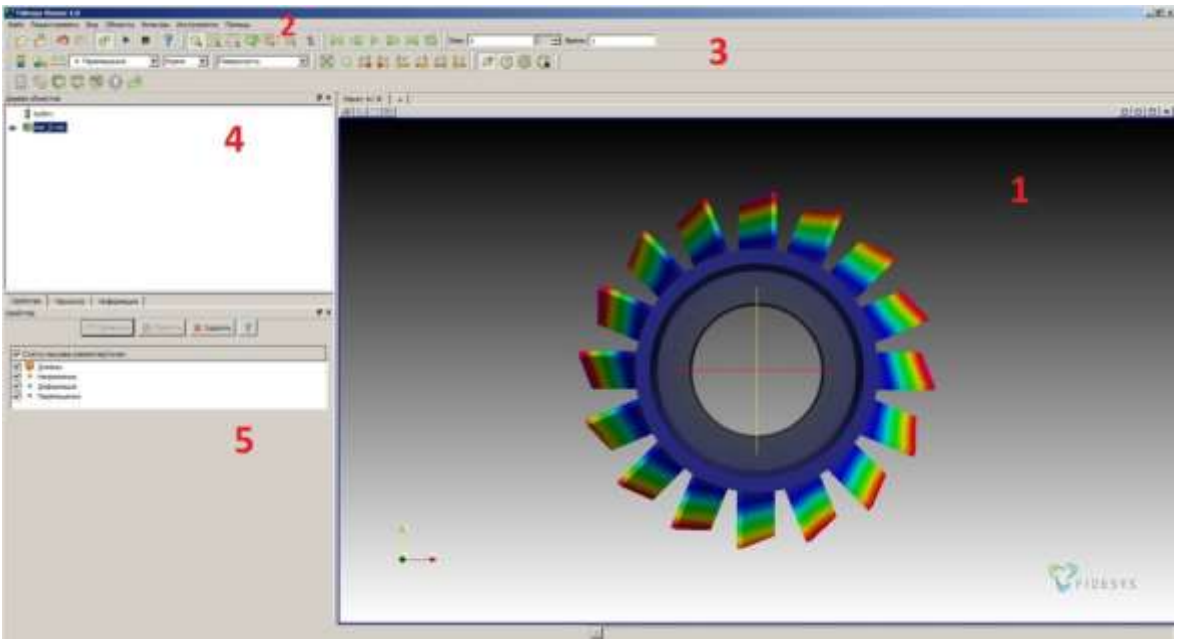


Рисунок 242 Составные части интерфейса пользователя FidesysViewer

Рабочая область (1) представляет собой окно отображения модели и визуальных эффектов.

Главное меню (2) включает в себя стандартные операции для работы с файлами, управление режимами визуализации моделей, настройки отображения панелей, фильтры, инструменты и справку. Всё вышеперечисленное доступно из раскрывающихся пунктов меню.

Панель инструментов (3) содержит кнопки для вызова команд, используемых в работе с программой наиболее часто.

Дерево объектов (4) включает в себя открытые модели и применённые к ним фильтры.

Страница свойств (5) служит для отображения свойств выделенного объекта в рабочей области экрана или в дереве объектов.

Дополнительные панели можно показать или скрыть в пункте меню Вид.

Fidesys Viewer позволяет просматривать и анализировать полученные результаты рачета. Просмотр и анализ осуществляется при помощи многочисленных фильтров, которые можно выбрать в пункте меню Вид**.** Ниже представлено описание некоторых из них.

Существуют три основных этапа визуализации данных: чтение, фильтрация и рендеринг. Сначала данные должны быть считаны приложением FidesysViewer. Затем можно наложить любое количество фильтров, обрабатывающих эти данные, чтобы сгенерировать, извлечь или вывести свойства из данных. Наконец, на основе этих данных создается отображаемое изображение, после чего можно изменять параметры просмотра или рендеринга для получения наилучшего визуального эффекта.

Поля с результатами и их компоненты для отображения можно выбрать на панели инструментов:



Также можно отобразить легенду раскраски, нажав на панели инструментов.

Для того, чтобы выделить точки или ячейки используются следующие кнопки на панели инструментов:



Численные результаты для полей данных можно посмотреть во вкладке Информация**.** Если в фокусе находится вся модель, то поля во вкладке Информация содержат диапазон данных – от минимального до максимального значения.

Значения в точках можно узнать при помощи фильтра “Проверить местоположение” (Фильтры → Алфавитный указатель → Проверить местоположение). Далее необходимо указать координаты просматриваемой точки. После применения фильтра во вкладке Информация отобразятся значения полей данных только для указанной точки.

Посмотреть численные результаты для выбранных точек также можно, нажав кнопку “Информация о точке” на панели инструментов.

Значения в точках/узлах/элементах можно выделить и просмотреть при помощи Инспектора выделения (Вид → Инспектор выделения).

Для просмотра модели в деформированном виде используется фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Деформировать по вектору. Во вкладке Свойства можно выбрать масштаб отображения.

Для того, чтобы отобразить данные в сферических или цилиндрических системах координат используется фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Системы координат.

Для построения графика вдоль прямой используется фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Построить график вдоль линии.

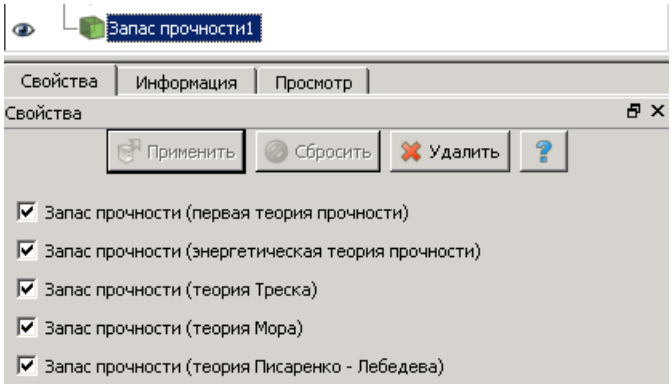
Для построения графика изменения решения в зависимости от времени, необходимо выделить интересующие точки через Инспектор выделения, а затем применить фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Построить выделенное в зависимости от времени.

Для просмотра среза модели используется фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Срез.

Для просмотра сечения модели используется фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Сечение.

Визуализация балочных и(ли) оболочечных элементов в трехмерном виде возможна в постпроцессоре Fidesys Viewer при нажатии кнопки 3D-вид на панели инструментов.

Для расчета коэффициентов запаса прочности используется фильтр Фильтры → Алфавитный указатель → Запас прочности. Если предел прочности и предел текучести не были заданы на этапе препроцессора, их следует задать во вкладке Свойства**.** Полученные значения запасов прочности можно просмотреть во вкладке Информация в поле “Запас прочности”.



Табличные значения полученных результатов можно сохранить в файл формате .csv. Сохранённый файл представляет собой обычную таблицу числовых данных, которую можно открыть текстовым редактором.

Для динамических задач доступна запись изменения модели во времени (Файл → Сохранить анимацию).

Автоматизация

CAE Fidesys поддерживает два способа автоматизации процессов работы с расчетной моделью:

- с использованием внутреннего языка команд (алгебраический препроцессор, APREPRO), надстройка для которого включает в себя простейшую автоматизацию;
- с использованием Python API.

Алгебраический препроцессор (APREPRO) — это расширение интерфейса командной строки, которое позволяет параметризировать и автоматизировать команды. APREPRO, строго говоря, не является языком программирования, поэтому реализовать на его основе полноценную программу затруднительно, Python позволяет это сделать. С другой стороны, APREPRO простой в изучении и не требует наличия навыков программирования, Python потребует отдельного изучения и наличия каких-то базовых навыков в программировании. APREPRO работает только в рамках интерфейса препроцессора, Python можно использовать отдельно от всех пользовательских интерфейсов пакета и выполнять программы с использованием его стандартного интерпретатора. FidesysViewer также поддерживает автоматизацию операций с использованием Python.

В интерфейсе препроцессора CAE Fidesys все действия выполняются командами, передаваемыми в интерпретатор («консольный интерфейс»). Графический интерфейс фактически служит визуальным инструментом для генерации этих команд. Историю

выполненных в течение сессии команд можно посмотреть в нижней части окна препроцессора на вкладке История (Рисунок 243).

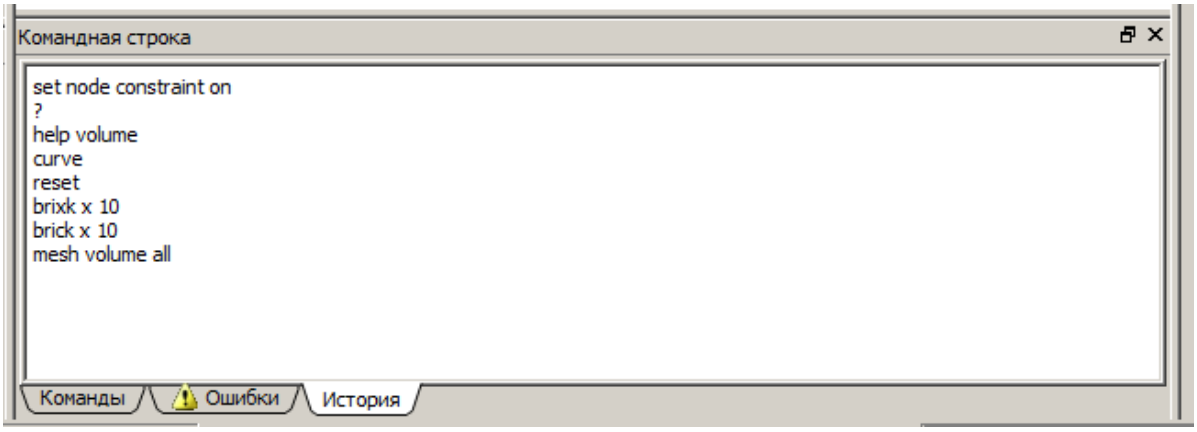


Рисунок 243 Командная строка позволяет выполнять автоматизацию рабочих процессов в CAE Fidesys

Историю команд можно сохранить в файл в формате *.jou и затем выполнить их заново. Для этого можно воспользоваться кнопкой “Выполнить файл журнала”  на панели инструментов. Также можно редактировать журнальный файл в редакторе журнала, который открывается кнопкой “Редактор журнала”  на панели инструментов.

Получить справку по командам и их синтаксису можно несколькими различными способами, в консоли и в контекстной справке.

В консоли**:**

1. С помощью команды help <имя команды>.
2. С помощью команды ? — дополняет команду, начинающуюся с набранной строки. Например, volume? выдаст все команды, которые начинаются со слова volume.
3. С помощью команды ! — то же самое, что и предыдущая команда, за единственным исключением: если справка выдается по нескольким словам, то ! выдает справку по командам, где эти слова встречаются в заданном порядке, а ? — в произвольном порядке.
4. С помощью команды & — показывает все команды, в которые входит данная строка, вне зависимости от того, в какой части команды она встречается. Например, volume& выдаст все команды, в которых встречается слово volume, которых будет значительно больше, чем в предыдущем случае.

В справке:

1. В каждом элементе панели инструментов, находящейся в правой части окна препроцессора, можно получить контекстную справку по командам, соответствующим действиям внутри этого элемента, нажав на кнопку контекстной справки  .
2. В системе справки (Помощь → Справка) имеется встроенный поиск. Можно набрать интересующую команду или ее часть в строке поиска и просмотреть найденные страницы.

5.4 Примеры решенных промышленных задач

В данном параграфе приведены примеры прикладных задач, решенных в CAE Fidesys, из различных отраслей промышленности.

Расчет фланца под опору

В данной задаче требуется рассчитать прочность фланцев под опору под действием приложенной к опоре нагрузки. Рассмотрим наиболее жесткий вариант эксплуатации фланцев под опору в форме трубы (Рисунок 244), когда труба не деформируется под действием приложенной к ней нагрузки на высоте 8,5 м и 11,5 м, а деформируется только закрепленный фланец. Следовательно, действующую нагрузку на фланец можно представить в виде силы, приложенной к незакрепленному торцу фланца. Исходя из исходных данных максимальную нагрузку, приложенную на высоте L=8,5 м и L=11,5 м для первого и второго фланцев, можно вычислить по формуле F = Fs * 0.4/L, где Fs – сила, приложенная к верхнему торцу фланца в направлении параллельном основанию фланца (Рисунок 245). Механические свойства материала фланцев: модуль Юнга 200000 Мпа, коэффициент Пуансона 0,3.

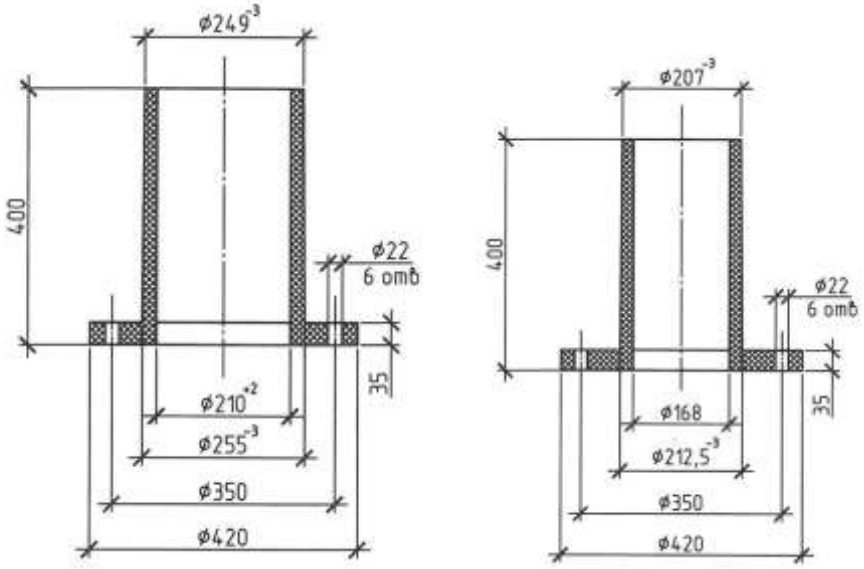


Рисунок 244 Параметры фланцев под 12-метровую (слева) и 9-метровую (справа) цилиндрическую опору

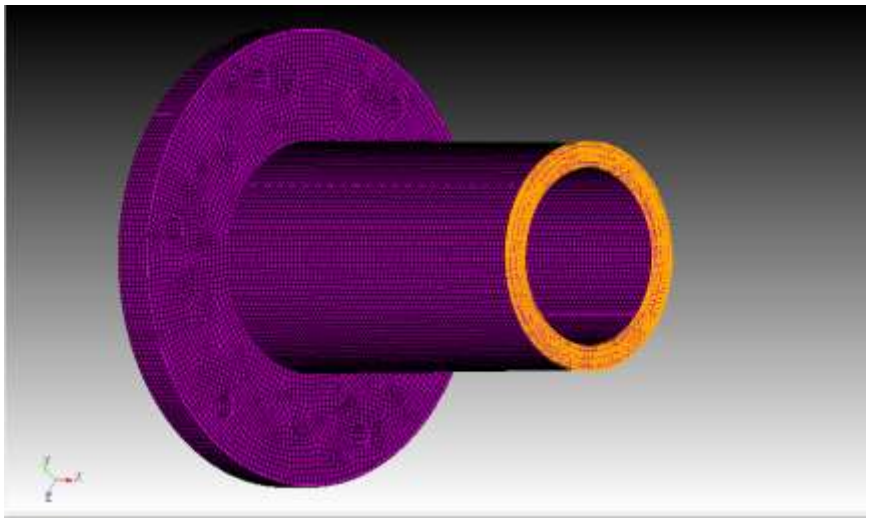


Рисунок 245 Конечноэлементная модель фланца в CAE Fidesys с приложенной нагрузкой на свободном торце (выделено желтым)

Результаты расчета, приведенные на рисунках ниже, представлены в таблице:

Результаты	Фланец под 9 м опору	Фланец под 12 м опору
Сила F_s приложенная к торцу фланца, Н	165000	230000
Высота приложения максимально допустимой нагрузки, м	8,5	11,5
Максимальное напряжение по графику, МПа (11752 элемента hex 8)	138	140
Максимальное напряжение по графику, МПа (11752 элемента hex 20)	157	155
Максимальное напряжение по графику, МПа (35021 элемента hex 8)	155	148
Максимальное напряжение по графику, МПа (35021 элемента hex 20)	174	175
Максимальное напряжение по графику, МПа (60113 элемента hex 8)	158	155
Максимальное напряжение по графику, МПа (60113 элемента hex 20)	177	178
Максимально допустимая нагрузка, Н	7764,7	8000

Результаты для фланца под 9 м опору:

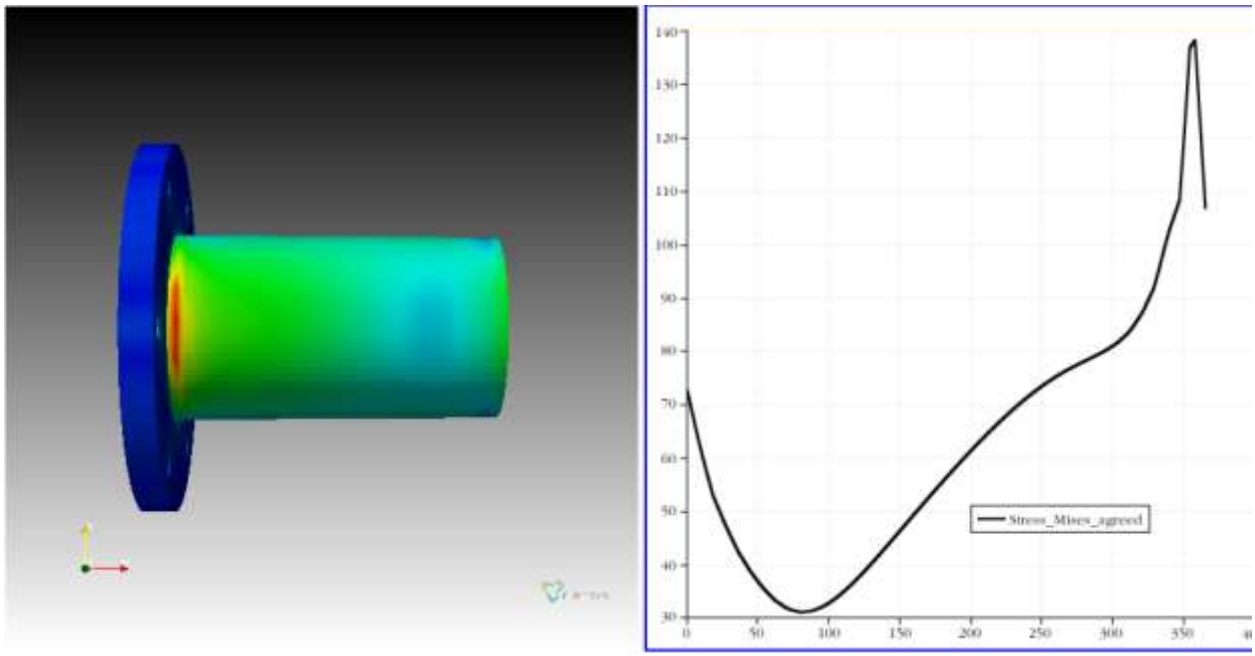


Рисунок 246 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX8, 11752 элементов.

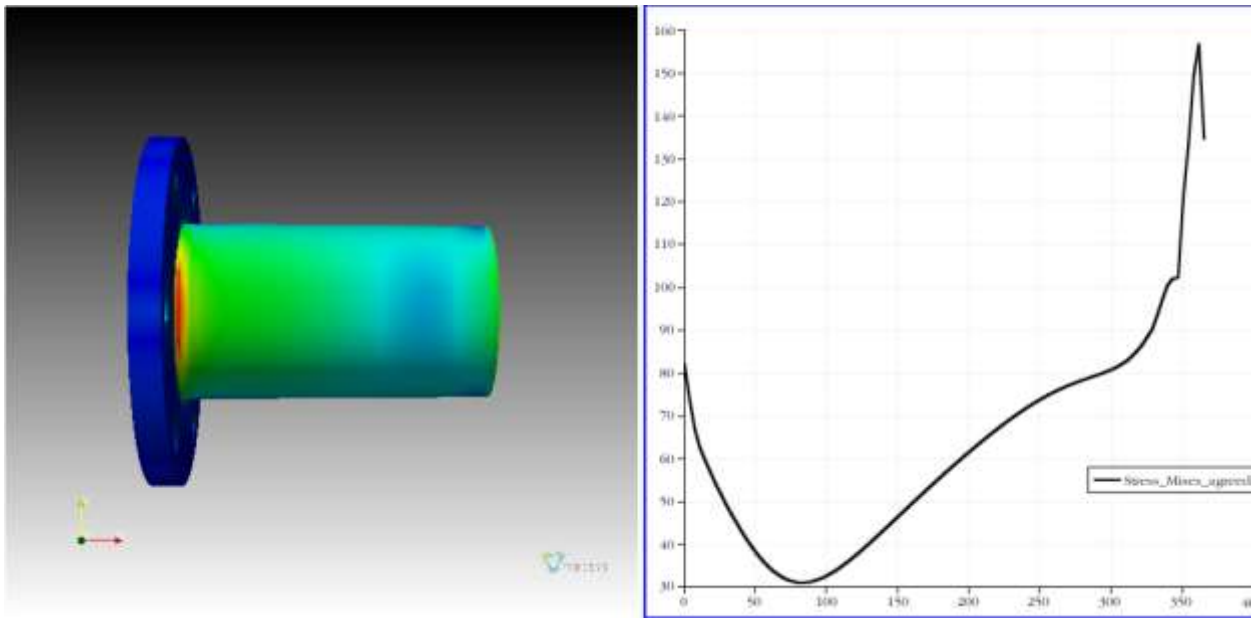


Рисунок 247 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX20, 11752 элементов.

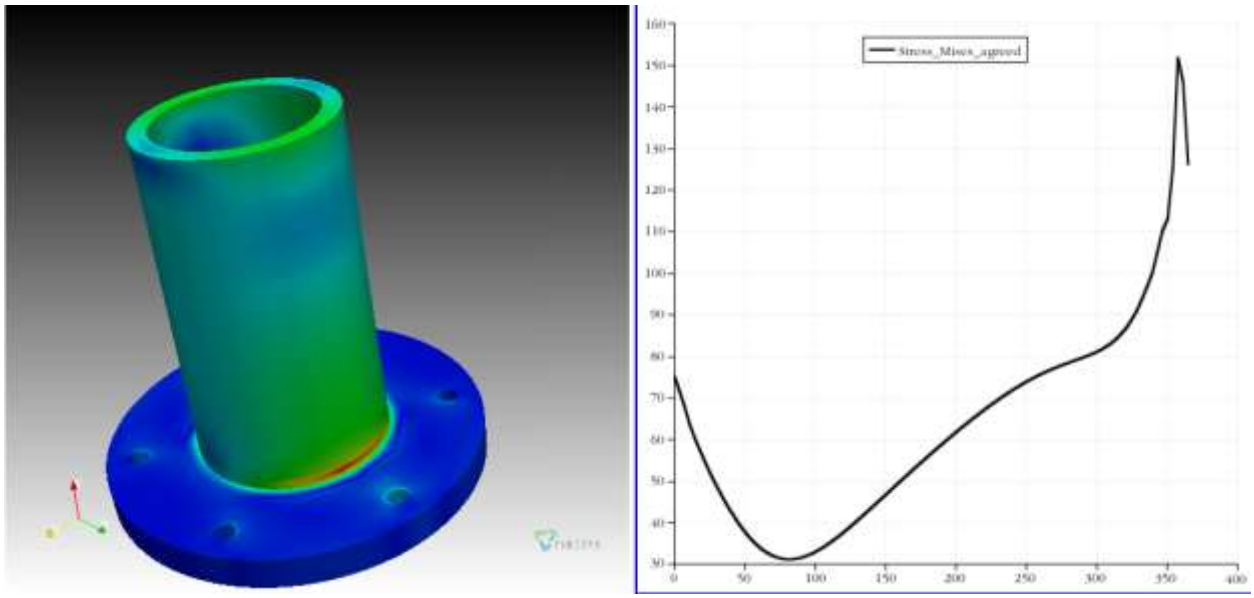


Рисунок 248 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX8, 35021 элементов.

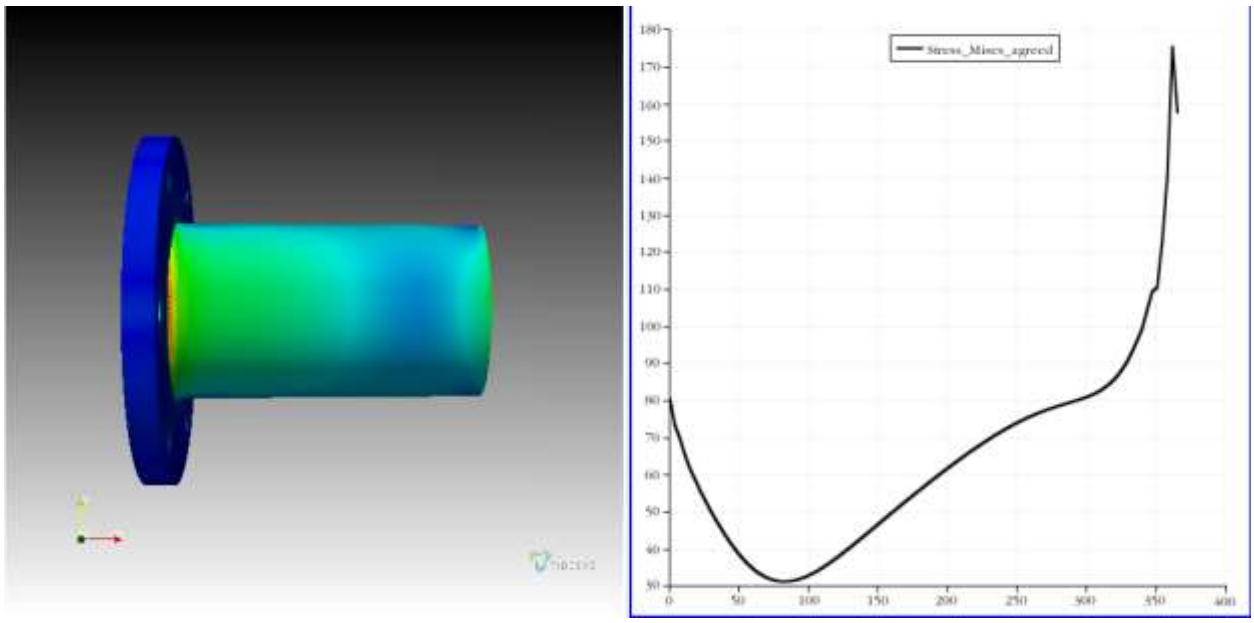


Рисунок 249 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX20, 35021 элементов.

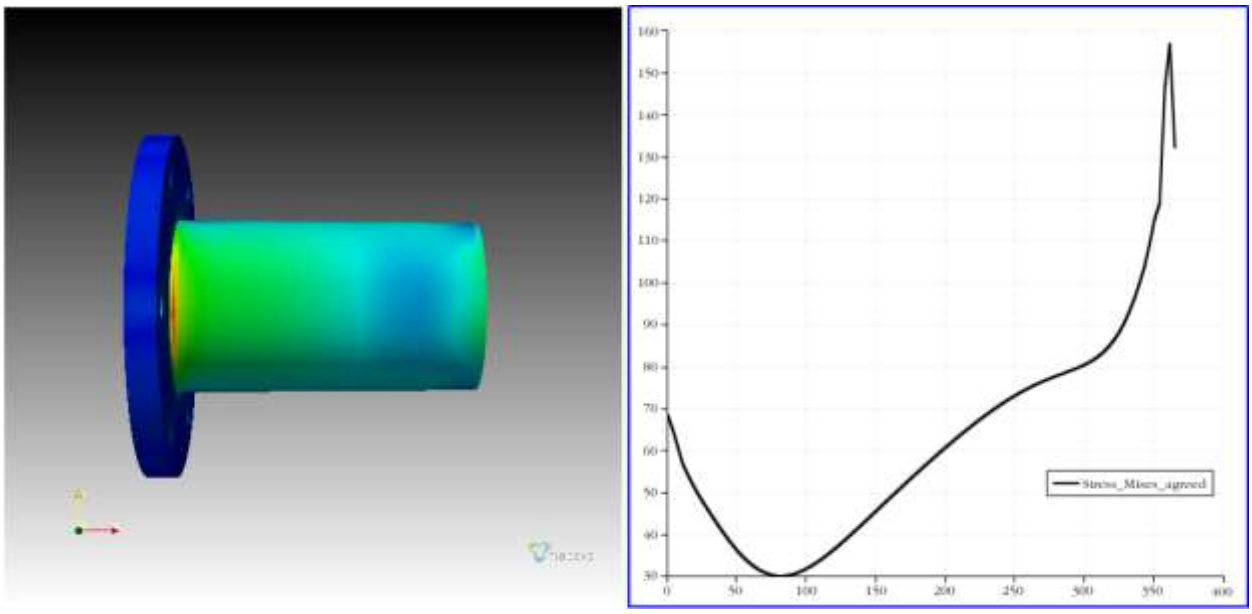


Рисунок 250 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX8, 60113 элементов.

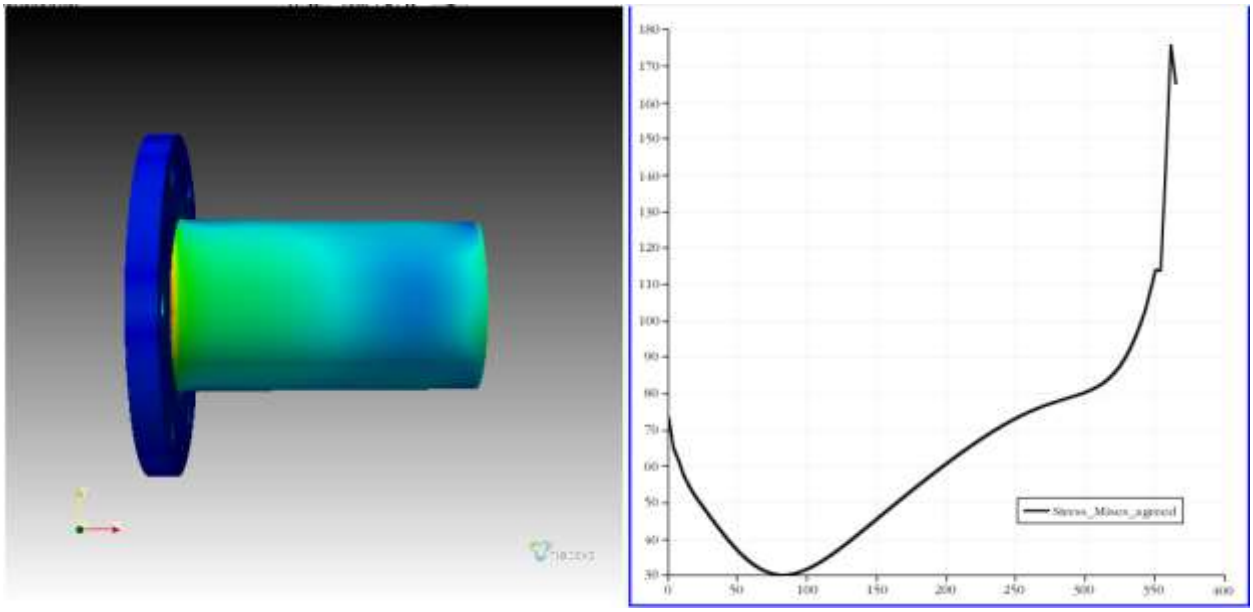


Рисунок 251 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX20, 60113 элементов

Для сравнения приведем результаты, полученные в Ansys для фланца под 9м опору.

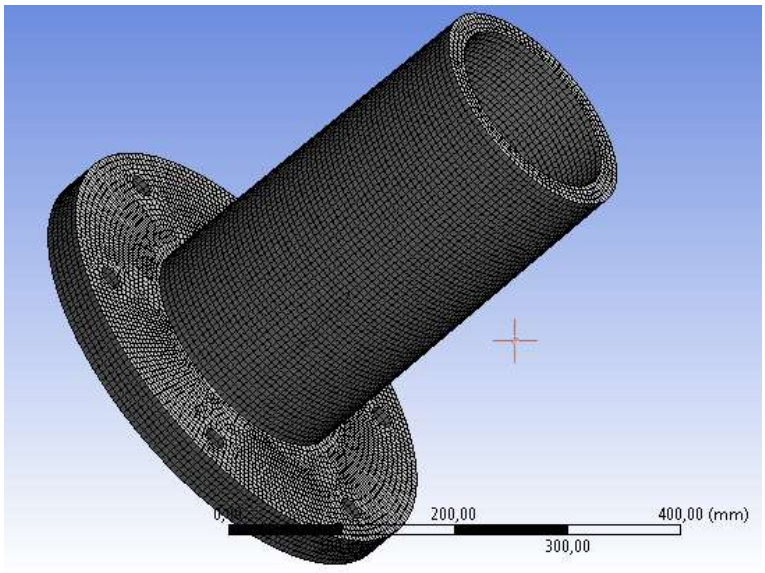


Рисунок 252 Конечноэлементная модель в Ansys. Сетка 59766 элементов, 255501 узлов.

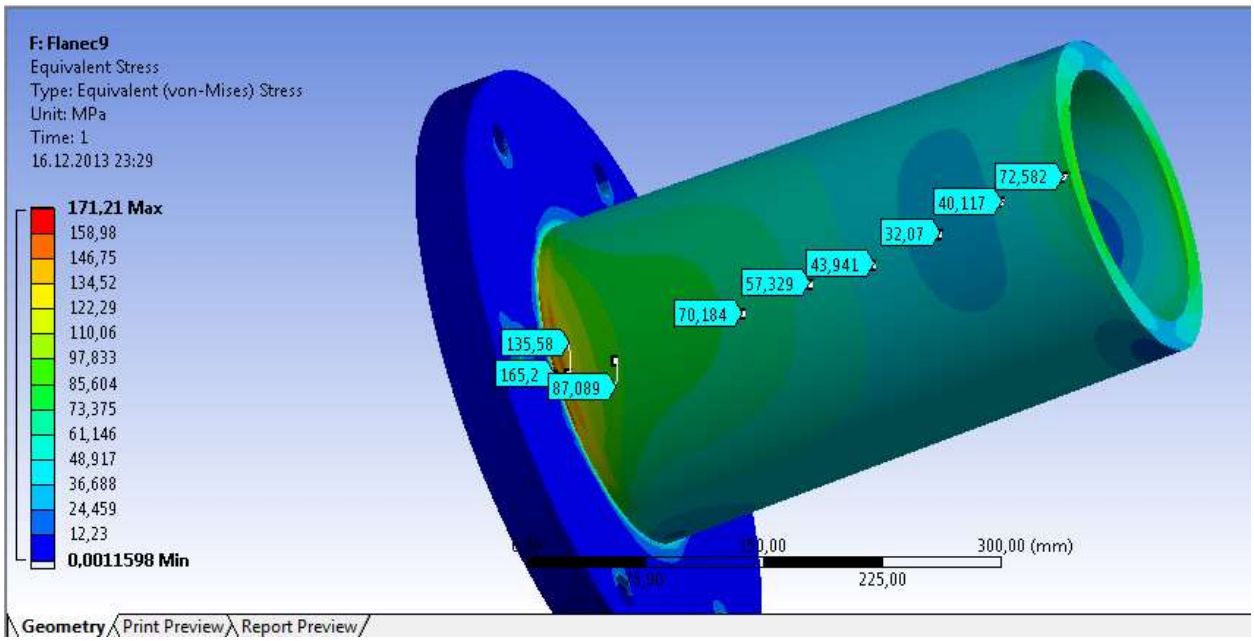


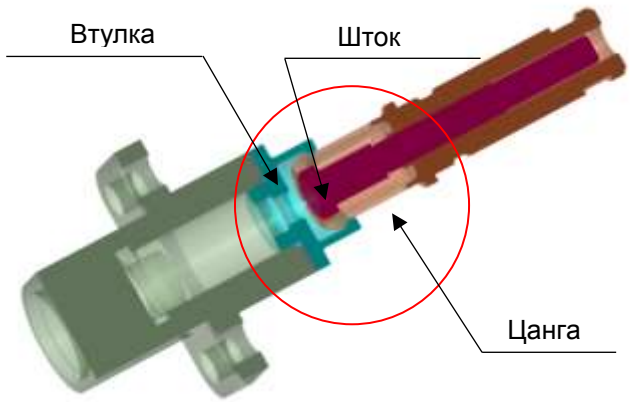
Рисунок 253 Интенсивность напряжений Мизеса, рассчитанная в Ansys.

Отметим хорошее качественное и количественное совпадение результатов в Ansys и Fidesys, а также присутствие сеточной сходимости в Fidesys.

Определение НДС в упругом элементе и усилия срабатывания цангового замка

Одной из наиболее востребованных задач, решаемых в процессе разработки конструкций, является определение НДС сборок или их фрагментов с учетом контактов, изменяющихся в процессе деформирования. В качестве такой тестовой задачи рассмотрено взаимодействие элементов типового цангового замка в процессе его раскрытия. Схема замка представлена на Рисунок 254а. При открытии замка шток смещается внутри цанги, после чего цанга

вытягивается из втулки. Определению подлежат усилие, необходимое для раскрытия замка и НДС в гибких элементах цанги. Элементы конструкции, участвующие в расчете показаны на Рисунок 254б. Задача решается в геометрически нелинейной постановке с учетом изменяемой области контакта в процессе решения. Для получения расчетной модели использовалась 3D модель, разработанная в ПК Pro/ENGINEER.



а) схема цангового замка



б) Расчетный фрагмент сборки

Рисунок 254 Геометрическая модель сборки цангового замка

Расчет был проведен в CAE Fidesys и в ANSYS. С учетом циклической симметрии конструкции расчету подвергался фрагмент сборки. КЭ модель фрагмента и схема распределения эквивалентных напряжений в момент возникновения максимальных напряжений, полученные в обоих пакетах показаны на Рисунок 255. В модели использованы объемные конечные элементы.

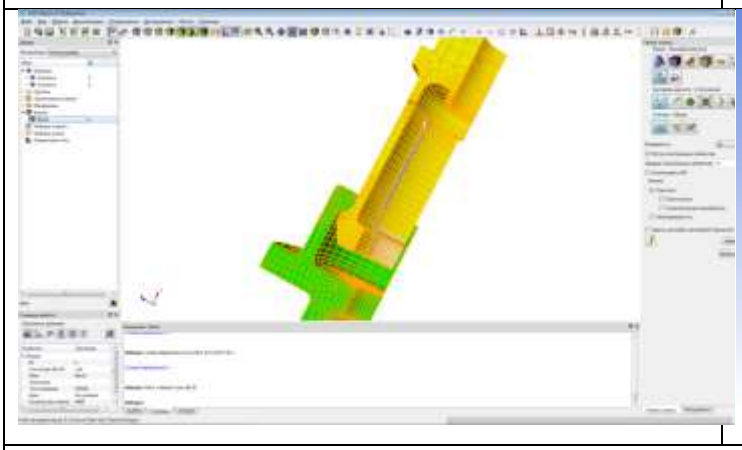
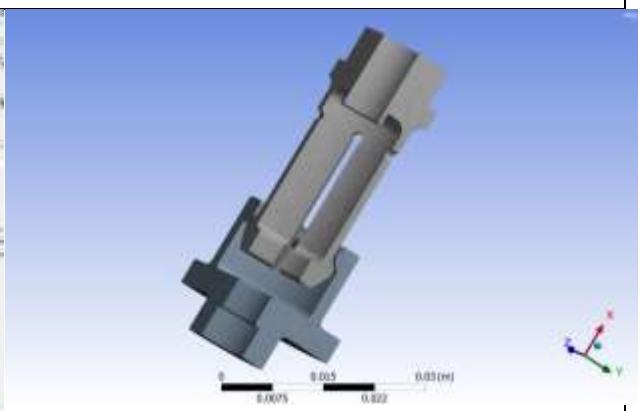
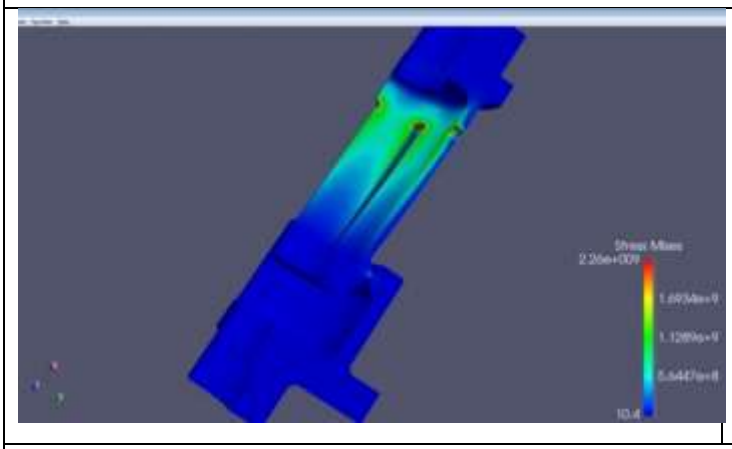
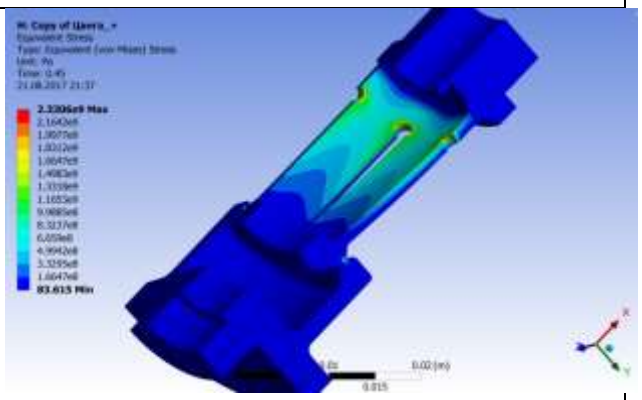
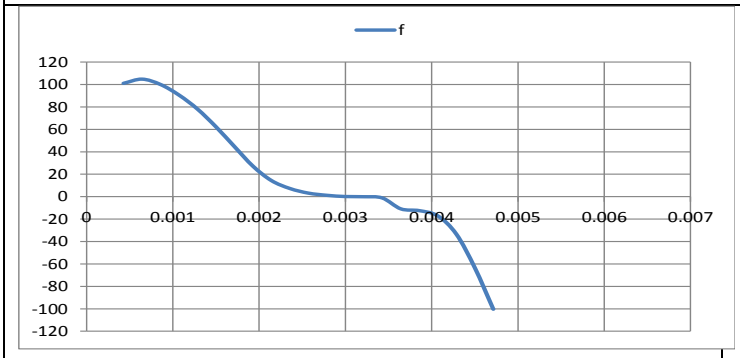
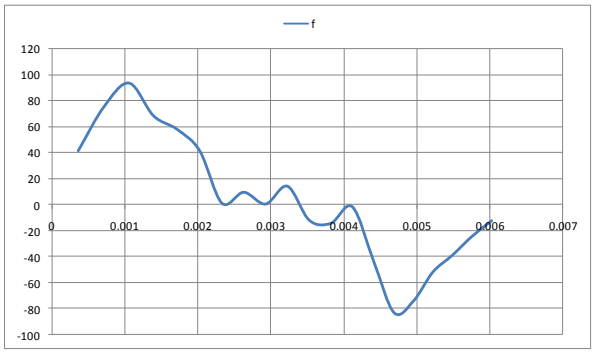
CAE Fidesys	ANSYS
	
а) конечноэлементная модель	
	
б) Схема распределения эквивалентных напряжений	
	
в) Изменения усилия в процессе вытягивания цанги	

Рисунок 255 Результаты расчета цангового замка в Fidesys и Ansys.

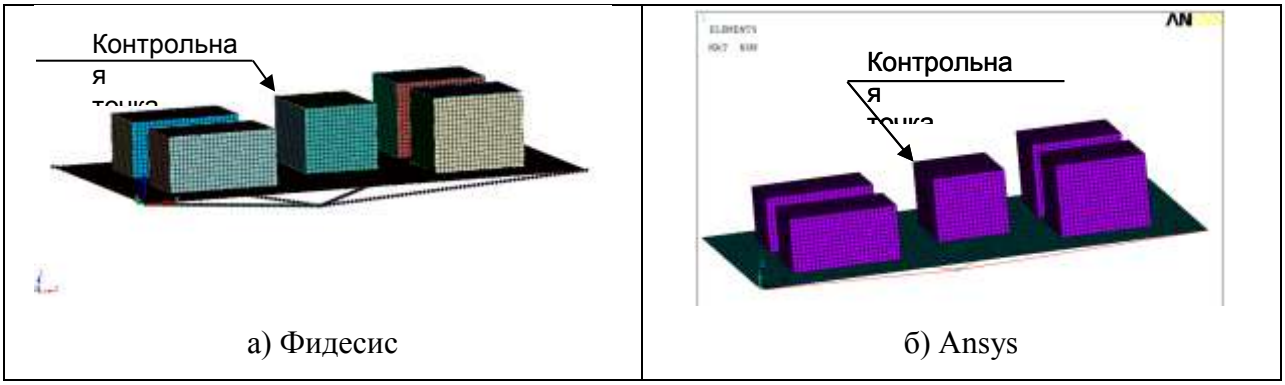
Различие результатов, полученных в CAE Fidesys и ANSYS составляет менее 5% по напряжениям и не превышает 10% по усилию, что в данном случае объясняется некоторым различием сетки конечных элементов. При этом следует отметить, что полученная в Fidesys кривая изменения усилия в зависимости от перемещения более гладкая, чем в Ansys, а в зоне прохождения цилиндрического участка втулки имеет практически нулевое значение, что является более корректным.

Динамический анализ панели с приборами

При создании и эксплуатации современных изделий большое значение имеет возможность расчета отклика конструкции на различные динамические воздействия, для чего необходимо наличие достоверной динамической модели изделия, параметры которой настроены по результатам динамических испытаний. Одним из таких испытаний, на основе результатов которых проводится настройка параметров модели, являются вибропрочностные испытания, при проведении которых конструкция нагружается синусоидальным воздействием с изменяемой в заданном диапазоне частотой. В программных комплексах, реализующих МКЭ, моделирование подобных испытаний базируется на решении задачи гармонического анализа. Настройка модели проводится на основе сравнения результатов моделирования испытаний (гармонического анализа) с результатами вибропрочностных испытаний путем варьирования жесткостных и диссипативных параметров.

К числу важнейших характеристик динамической модели, определяющих её достоверность, относятся демпфирующие свойства конструкции, закладываемые в модель. При этом в различных программных комплексах, реализующих технологию МКЭ, существует достаточно большое разнообразие типов параметров демпфирования, которые могут быть использованы при построении моделей. Это и общее конструкционное демпфирование, демпфирование по жесткости и по массе, демпфирование по частоте, демпфирующие свойства отдельных элементов и материалов. Общий вид матрицы демпфирования и параметров, ее задающих, приведен в Главе 1.

Для анализа возможности использования CAE Fidesys при моделировании вибропрочностных испытаний решена задача гармонического анализа тестовой модели – пластины с установленными на ней имитаторами приборов. МКЭ модели для обоих CAE систем представлены на Рисунок 256.



а) Фидесис б) Ansys

Рисунок 256 Расчетная модель в CAE Fidesys и Ansys

Параметры пластины: 1.5×2.5 м, толщина 0.005 м. Параметры материала приборов: модуль Юнга 2e11 Па, коэффициент Пуассона 0.3, плотность 400кг/м^3. Параметры материала пластины:

модуль Юнга 1e12 Па, коэффициент Пуассона 0.3, плотность 700кг/м^3. Угловые узлы пластины соединены с центральным узлом, отстоящим от пластины на 0.2 м, с помощью жестких балочных элементов (сечение балок: круг радиуса 0.05 м, материал балок: модуль Юнга 2e15 Па, коэффициент Пуассона 0.3, плотность 1e-10 кг/м^3).

Решение задачи гармонического анализа проводилось методом суперпозиции форм (Mode Superposition). При использовании метода суперпозиции форм задача решается в два этапа, первым из которых является модальный анализ.

Полученные в результаты модального анализа первые формы колебаний представлены на рисунке 257. Собственные частоты, полученные в CAE Fidesys и ANSYS, приведены в таблице 1. Расхождение значений собственных частот не превышает 1%. Практически полное совпадение амплитуд перемещений показывает, что в CAE Fidesys используются близкие к принятым в ANSYS подходы, включая нормирование перемещений при определении собственных форм колебаний.

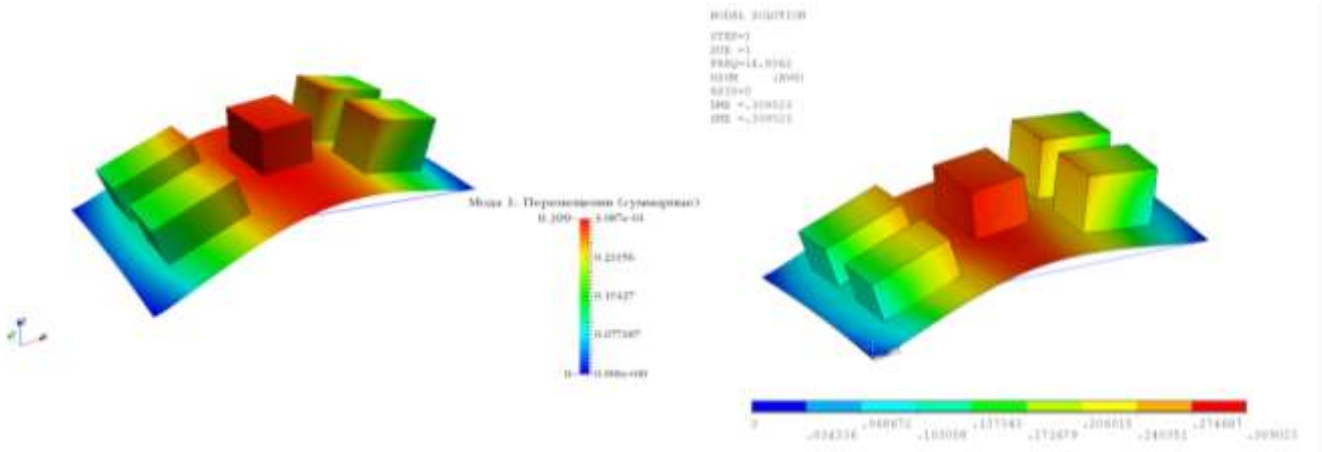


Рисунок 257 Первые формы колебаний в CAE Fidesys (слева) и ANSYS (справа)

Таблица1 – Сравнение собственных частот, полученных в Ansys и Fidesys.

Fidesys		**Ansys**
№	частота, Hz	частота, Hz
1	14.59	14.81
2	44.02	44.51
3	57.17	57.84
4	60.54	61.22
5	87.87	88.35
6	95.57	96.49
7	118.24	119.47
8	144.78	145.84

9	161.35	162.27
10	207.93	209.32

Ниже приводятся результаты расчета отклика (ускорения) в контрольной точке при воздействии синусоидальной вибрации, изменяющейся по закону g_z=-9.81*sin(t). Анализ проводился в диапазоне частот 0÷100 Гц. Приведены результаты расчета без демпфирования (рисунок 258а, 258б) и при заданных в таблице 2 параметрах демпфирования (рисунок 258в, 258г). Величины демпфирования были выбраны такими, чтобы при использовании любого одного типа демпфирования амплитуда перемещения по оси Z для верхнего левого угла центрального прибора была примерно 0.015м.

Таблица2. Используемые значения демпфирования.

вид демпфирования	ξ	α	β	ξ_j^m	α_j^m	ξ_j^m
значение	0.01	2	0.0001	0.01	2	0.0001

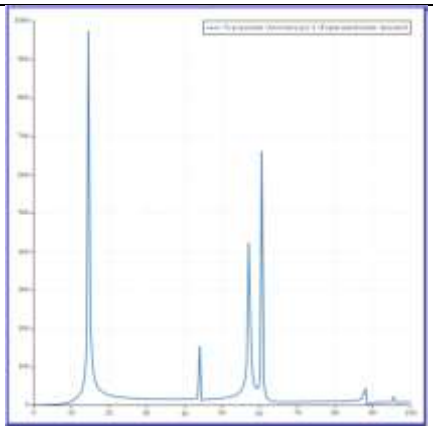
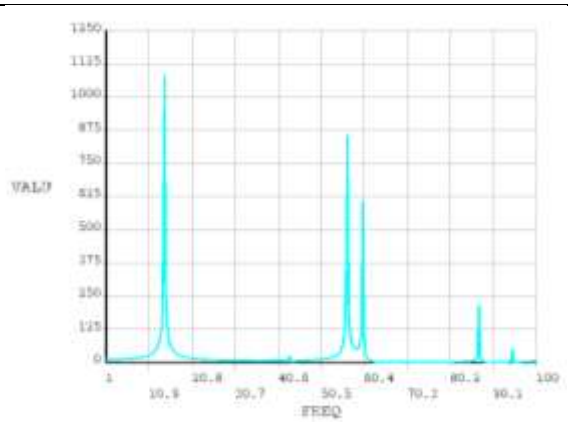
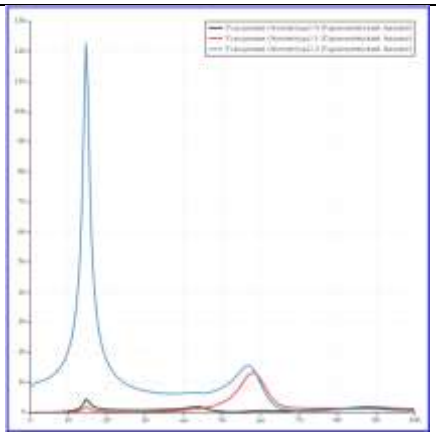
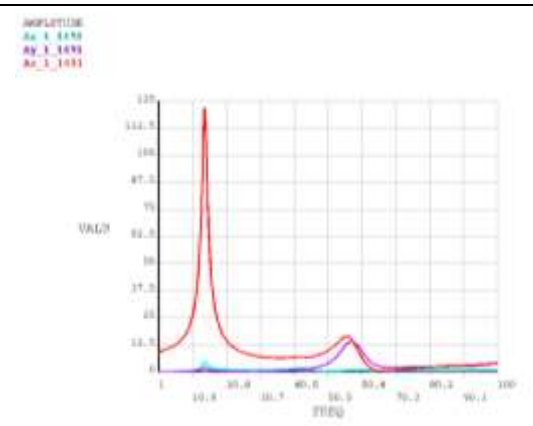
Fidesys	Ansys
	
а)	б)
	
в)	г)

Рисунок 258 Результаты гармонического анализа в CAE Fidesys (а, в) и ANSYS (б, г).

Как и ранее, отметим хорошее качественное и количественное совпадение результатов расчетов в обоих программных комплексах.

С использованием этой же модели был проведен расчет отклика конструкции на нестационарное кинематическое воздействие, заданное в виде ускорения по нормали в углах пластины. График воздействия представлен на рисунке 259.

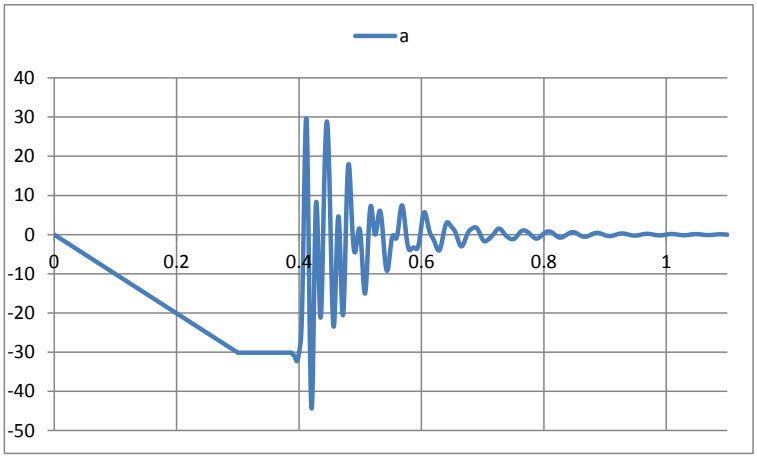


Рисунок 259 Нестационарное воздействие (м/с2) в углах пластины

Ниже приводятся результаты расчета отклика (ускорения) в контрольной точке (Рисунок 256) при указанном нестационарном воздействии и при заданных в таблице 2 параметрах демпфирования.

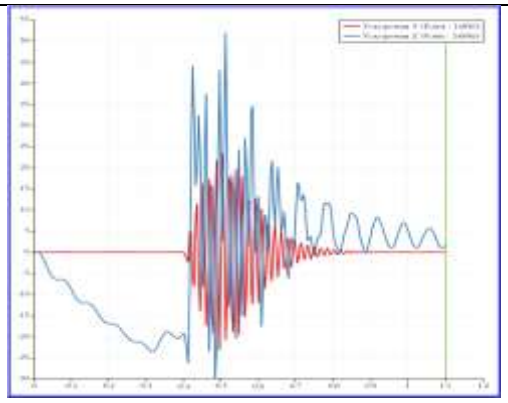
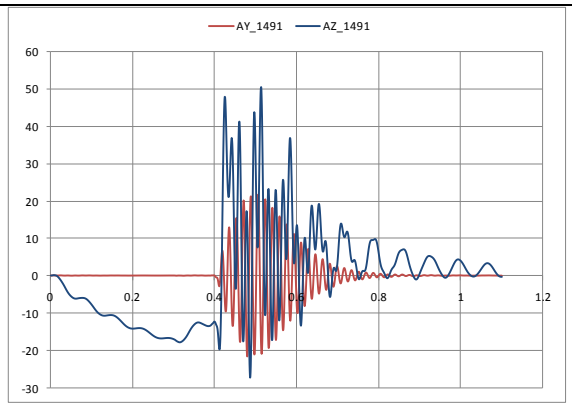
CAE Fidesys	Ansys
	

Рисунок 260 Ускорения при нестационарном воздействии

На основе анализа решения данной задачи в CAE Fidesys и сравнения полученных результатов с результатами расчетов в ANSYS (Рисунок 260) можно отметить, что наблюдается хорошее совпадение результатов (различие не превышает 1%).

Расчет элементов авиационных конструкций

В качестве примеров решения задач из авиационной отрасли приведём результаты статического анализа двух элементов конструкций: кессона крыла и лопатки авиационного двигателя под действием приложенного внешнего давления.

Расчет кессона крыла проводился в пакетах CAE Fidesys и Nastran для одного из полётных случаев нагружения [270]. На Рисунок 261 показаны конечноэлементная модель кессона и стенка лонжерона (желтым цветом) с приложенным внешним давлением 1000 Па. Свойства материала кессона: модуль Юнга 72 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3.

Сравнение максимальных перемещений на конце кессона показало, что их различия при расчётах по разным программным продуктам не превышают 2.7%. Максимальные эквивалентные напряжения наблюдаются в зоне излома кессона, они также весьма близки в двух программах (Рисунок 262).

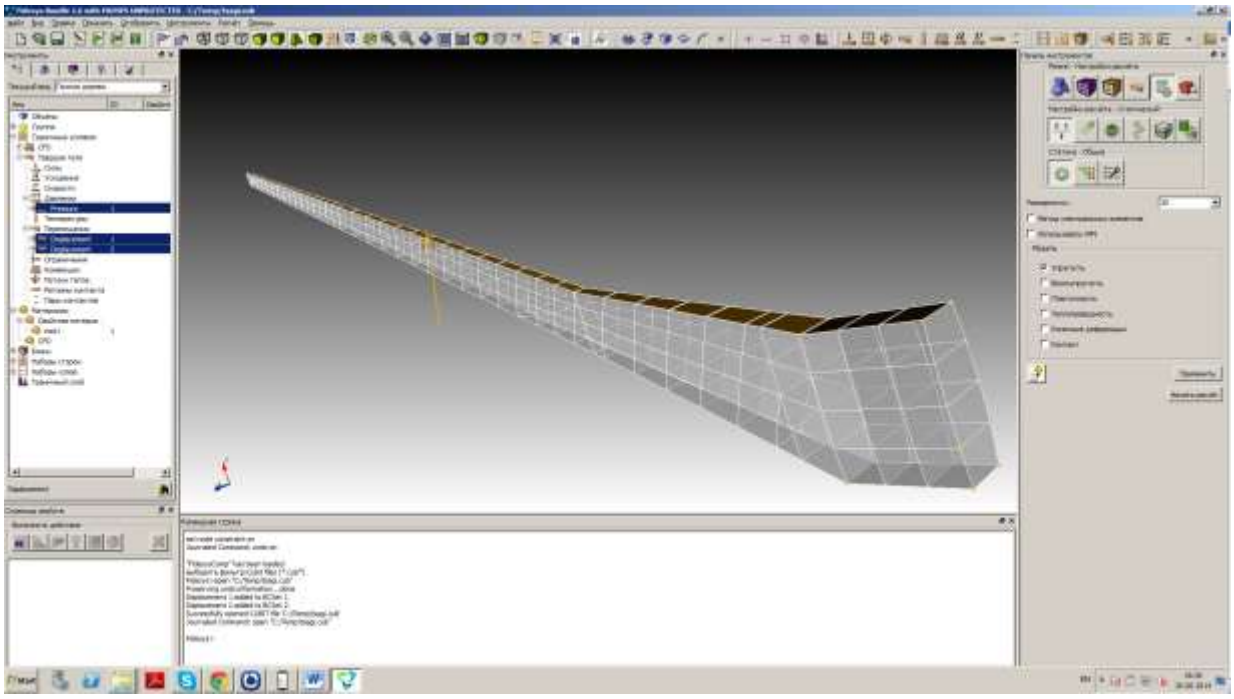


Рисунок 261 Конечноэлементная модель кессона крыла в препроцессоре CAE Fidesys. Желтым цветом выделен набор граней лонжерона, на которые приложено внешнее давление.

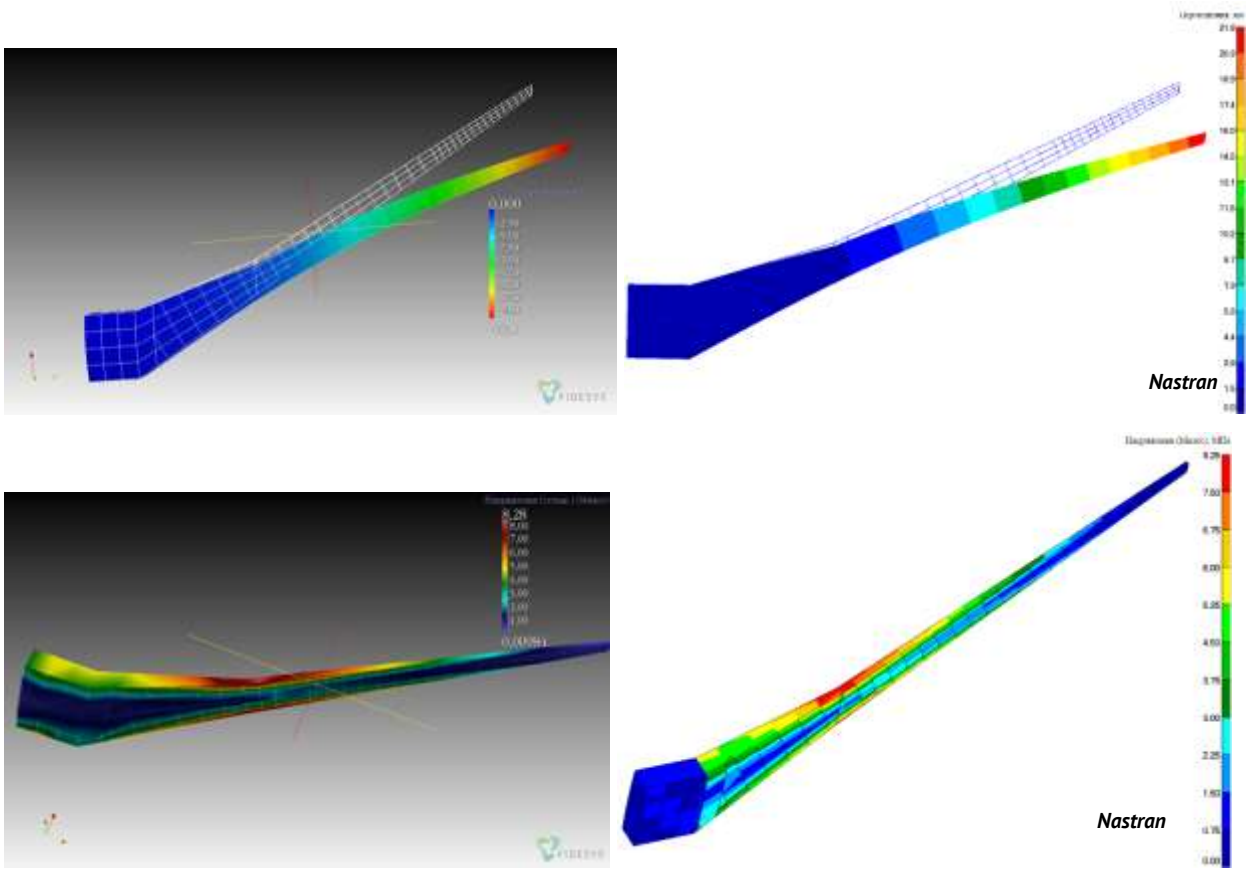


Рисунок 262 Расчёт кессона крыла в CAE Fidesys (слева) и Nastran (справа). Сверху приведено поле перемещений (начальная и деформированнѣ конфигурации) вдоль вертикальной оси (X), снизу – поле интенсивности напряжений Мизеса.

Перейдем к рассмотрению второй из заявленных задач – статический анализ лопатки авиационного двигателя. Расчет проводился в пакетах CAE Fidesys и Ansys. Конечноэлементные модели для обоих пакетов приведены на Рисунок 263.

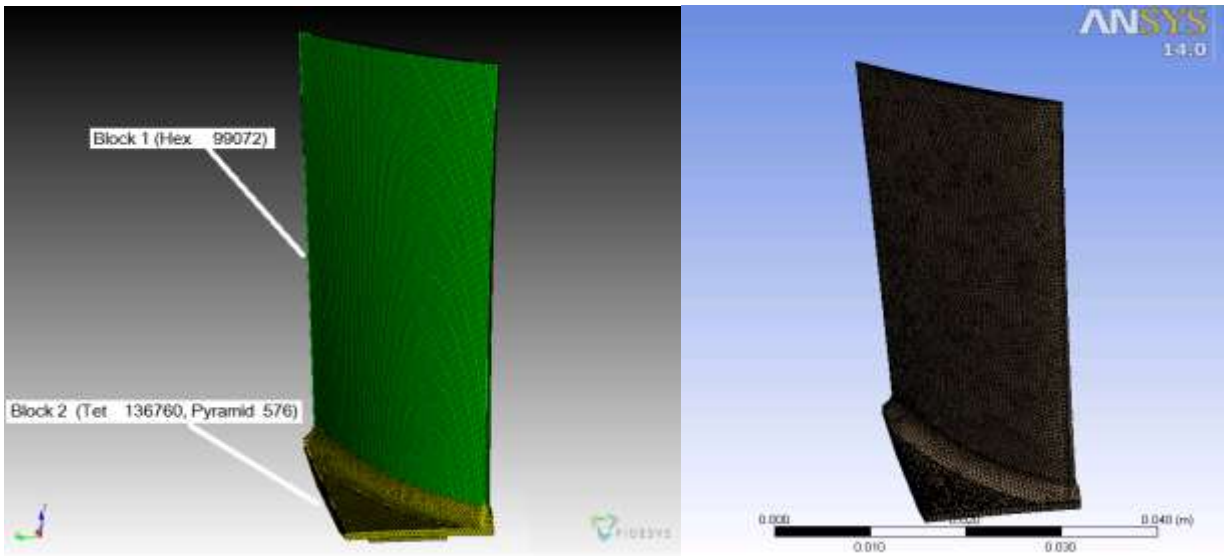


Рисунок 263 Конечноэлементные модели лопатки авиационного двигателя в пакетах CAE Fidesys (слева) и Ansys (справа).

Материал лопатки описывался изотропной моделью Гука со следующими параметрами: модуль Юнга 2e11 Па; коэффициент Пуассона 0.3; плотность 4500 кг/м^3. Нижняя грань лопатки закреплена по всем направлениям. На боковую грань приложено давление, имитирующей газодинамическое воздействие на лопатку.

Как и в случае первой задачи, отметим совпадение в распределениях полей перемещений и напряжений, рассчитанных в обоих пакетах, а также близкие макимальные значения данных полей (Рисунок 264).

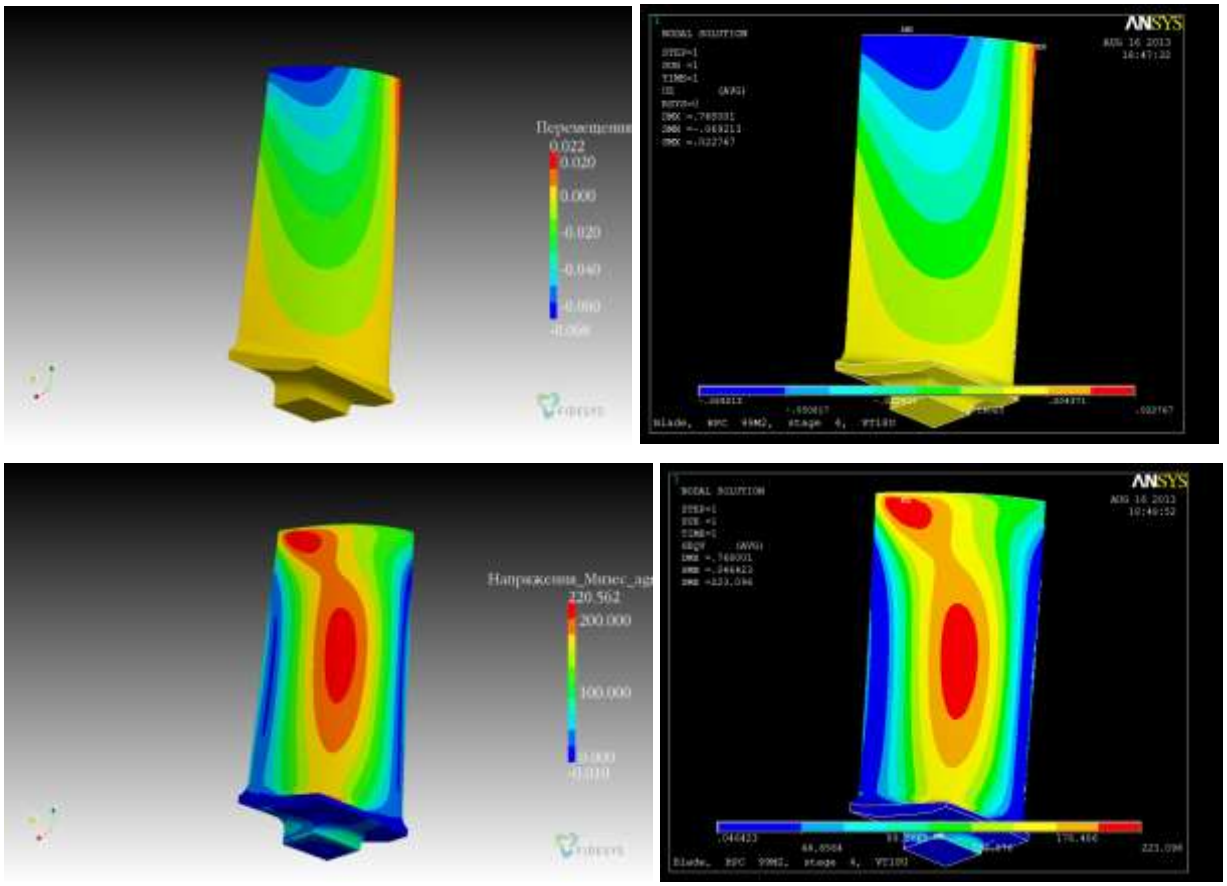


Рисунок 264 Расчёт лопатки авиационного двигателя в CAE Fidesys (слева) и Ansys (справа). Сверху приведено поле перемещений вдоль вертикальной оси (Z), снизу – поле интенсивности напряжений Мизеса.

Приведенные результаты свидетельствуют о достоверности получаемых результатов в системе Fidesys при расчёте элементов авиационных конструкций.

После проведенной верификации CAE Fidesys был применен для расчетов на прочность лопатки спрямляющего аппарата вентилятора. Необходимо было выполнить расчеты статического НДС и расчет первых 10-ти собственных форм и частот колебаний (модальный анализ) в условиях преднапряженного состояния.

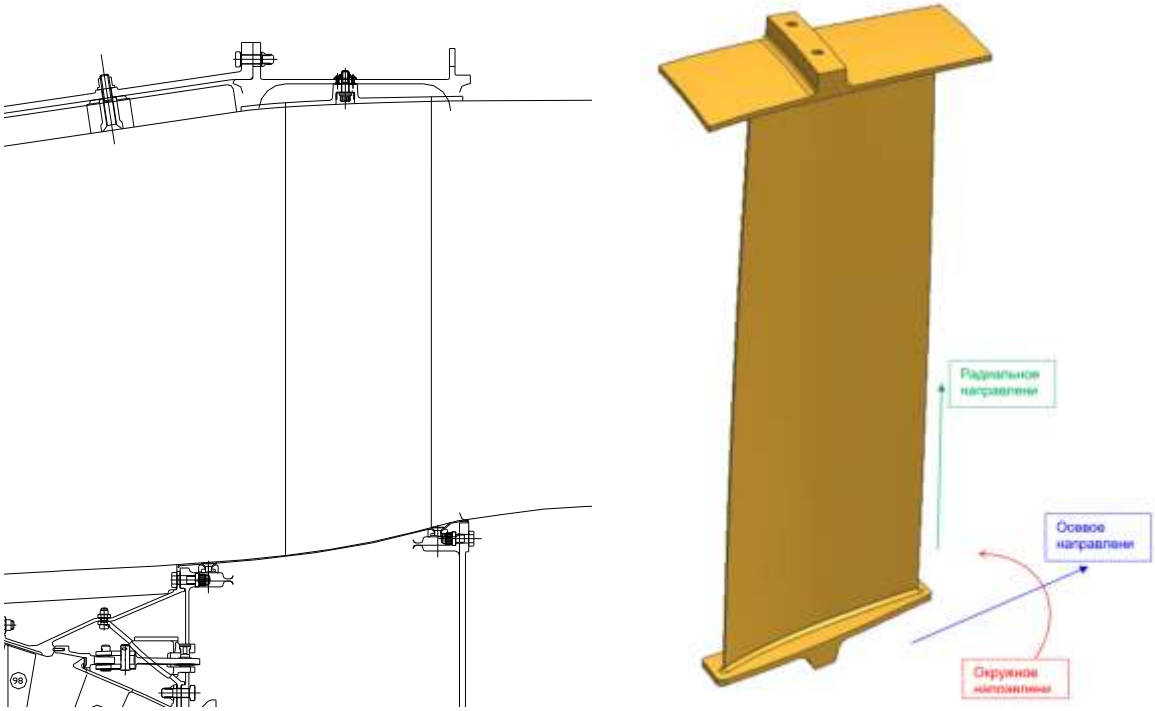


Рисунок 265 Конструктивная схема (слева) и трехмерная геометрическая модель лопатки спрямляющего аппарата вентилятора

Конструктивная схема и трехмерная геометрическая модель спрямляющего аппарата вентилятора в сборе представлены на Рисунок 265. Материал СА вентилятора – алюминиевый сплав АК4-1: модуль Юнга 72 ГПа, коэффициент Пуассона 0.34, плотность 2800 кг/м^3. Граничные условия для проведения расчета представлены на Рисунок 266.

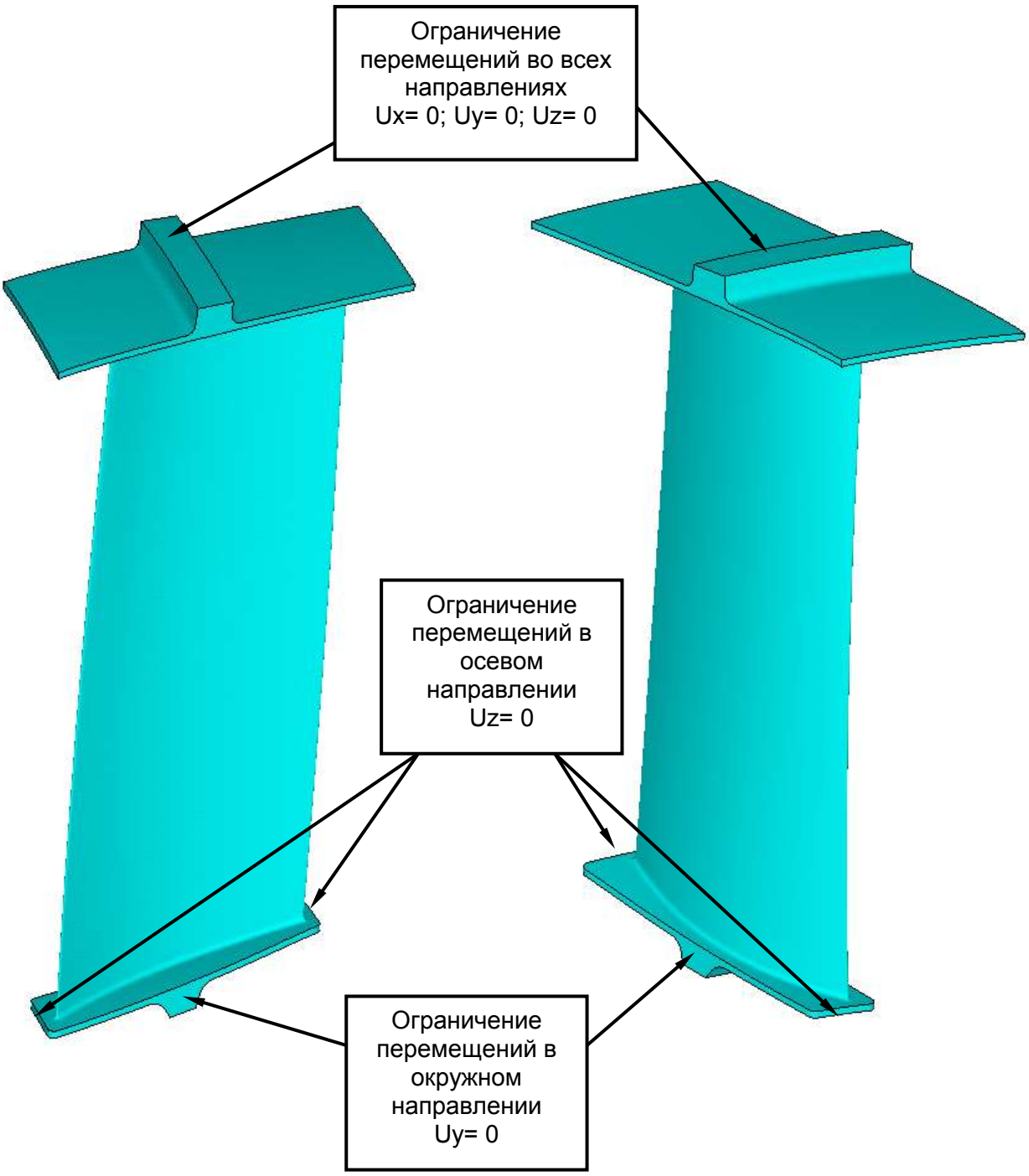


Рисунок 266 Граничные условия для проведения расчета СА вентилятора

Расчет СА вентилятора проводится в упругой постановке. Интегральные величины аэродинамической нагрузки на одну лопатку:

$R_{ос}$ = 347,4 Н (осевая составляющая);

$R_{окр}$ = 926,2 Н (окружная составляющая)

приложены равномерно ко всем узлам. Температура СА принята 51 ^{0}С.

Конечноэлементная модель лопатки, построенная в препроцессоре CAE Fidesys, приведена на Рисунок 267. На Рисунок 268 приведено распределение поля интенсивности напряжений Мизеса, полученное в результате статического анализа.

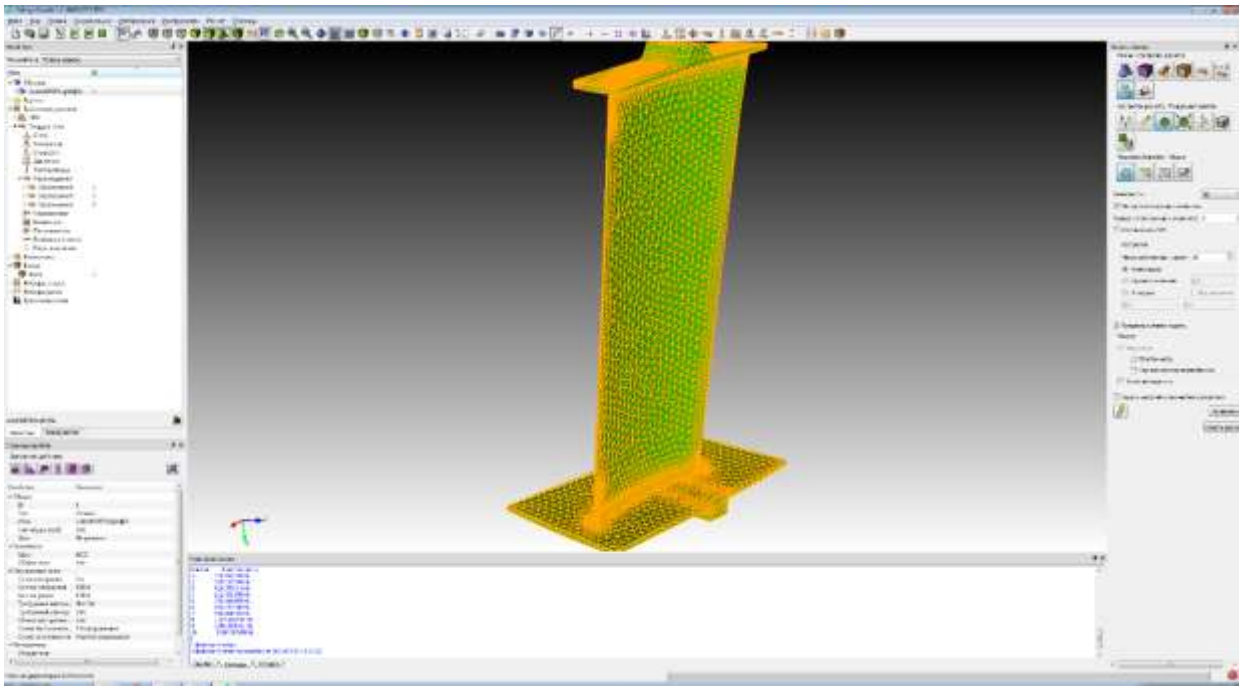


Рисунок 267 Конечноэлементная модель лопатки в CAE Fidesys

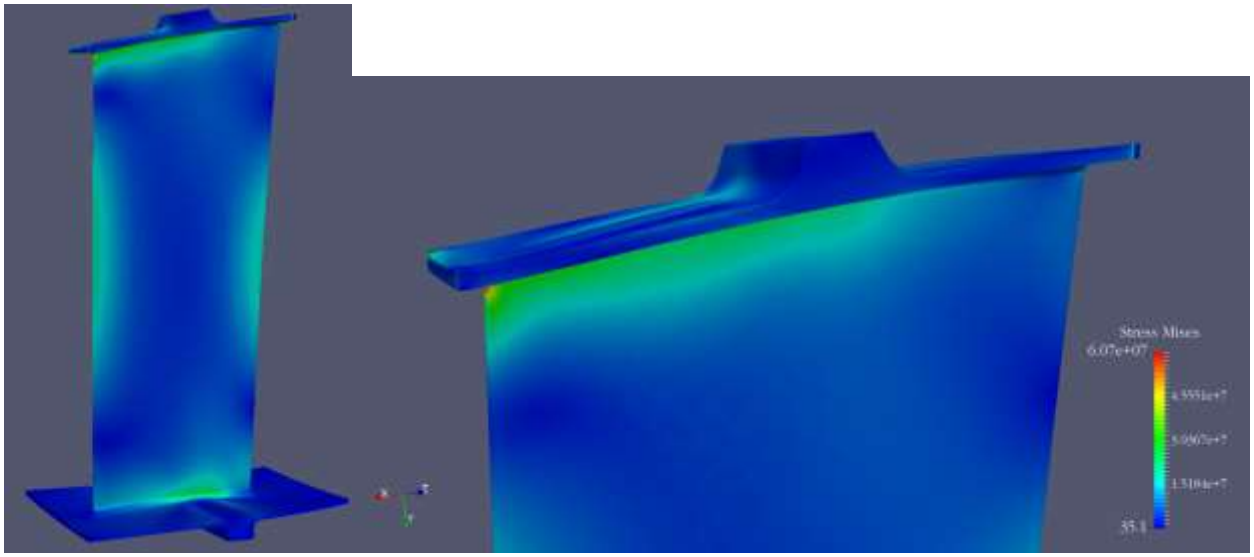


Рисунок 268 Интенсивность напряжений Мизеса в лопаке СА вентилятора (слева). Максимальное значение 60.7 МПа достигается на кромке лопатки (справа).

По результатам проведенного модального анализа лопатки СА вентилятора была найдены первые 10 собственных форм и частот колебаний в условиях преднапряженного состояния (Рисунок 269).

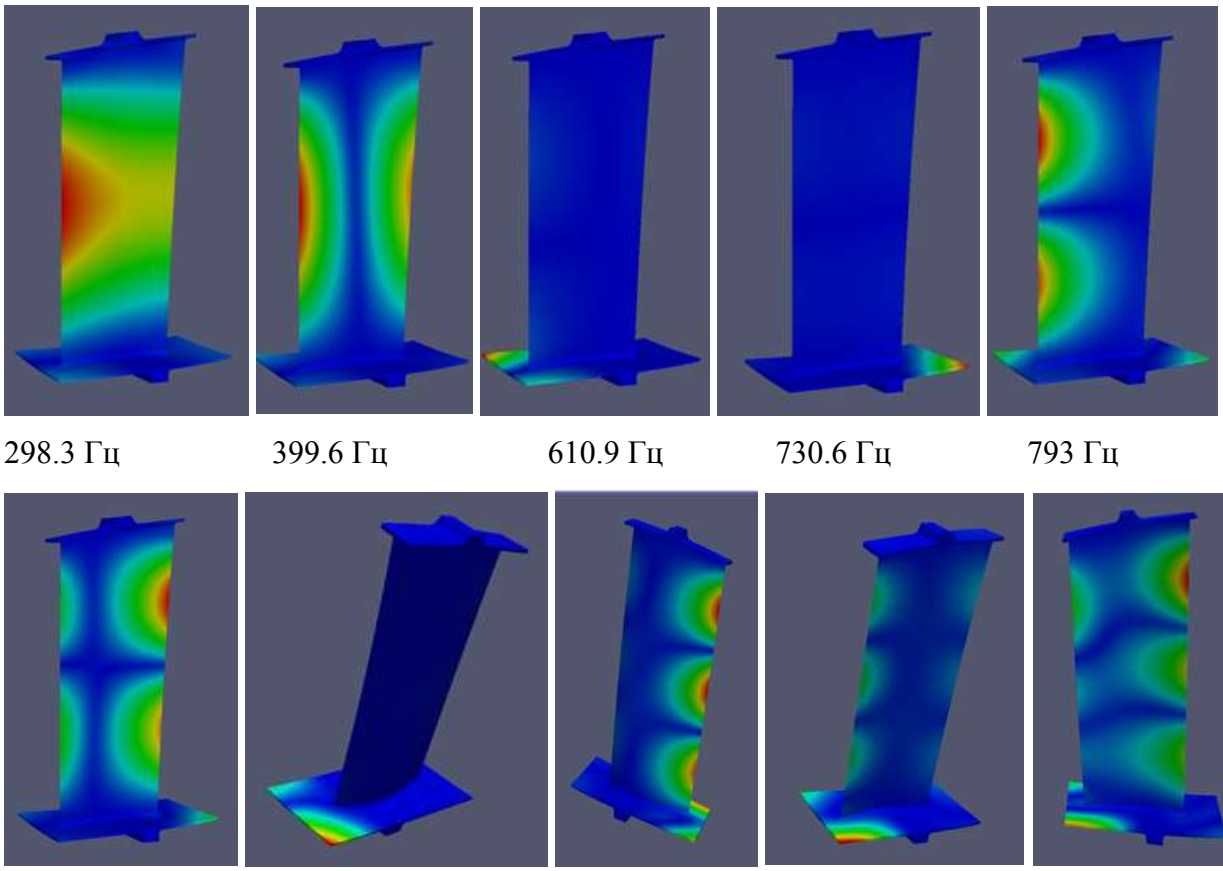


Рисунок 269 Собственные частоты и формы колебаний лопатки СА вентилятора

Следующим этапом был выполнен расчет НДС опоры подшипники (Рисунок 270) на нагрузки, возникающие при обрыве лопатки вентилятора (в упругопластической постановке), а также провести расчет потери устойчивости.



Рисунок 270 Геометрическая модель опоры подшипника

Материал корпуса опоры, принятый в расчете – титановый сплав ВТ6 с упругопластическими свойствами, приведенными на Рисунок 271 для различных температур. Свойства материала приняты по справочнику «Авиационные материалы, 1973г., п. ред. А.Т. Туманова, издание 6-е, том 5»: модуль Юнга 125000 МПа, коэффициент Пуассона 0.32, предел текучести 730 МПа, предел прочности 858 МПа, предельные деформации 0.098. Расчетная температура 150°С.

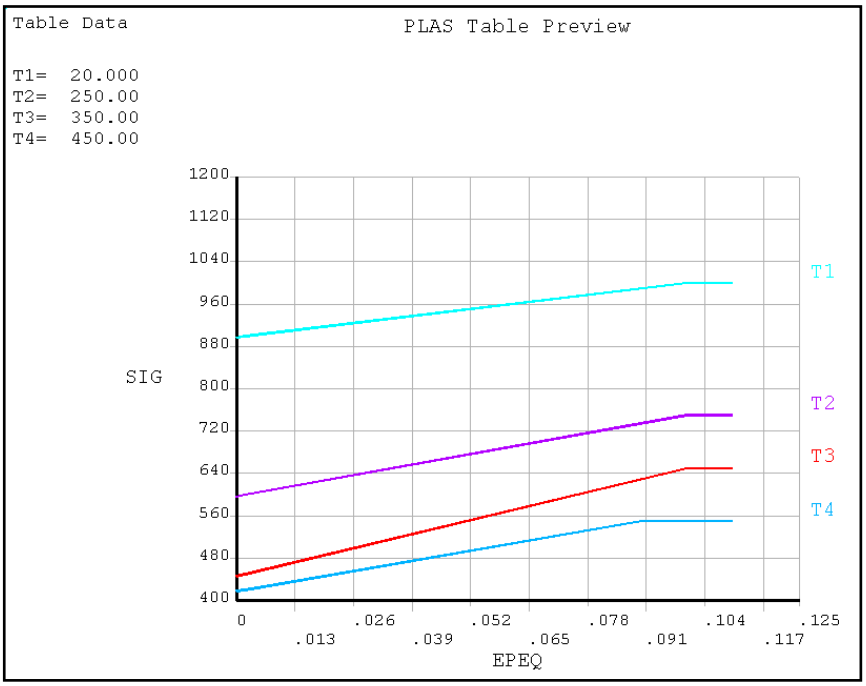


Рисунок 271 Кривые упругопластического деформирования при различных температурах

Схема нагружения опоры окружными и радиальными силами представлена на Рисунок 272:

- радиальное усилие от подшипника (80 000 кгс) распределяется по закону косинуса на дуге 180^{O} в зоне постановки шарикоподшипника;

- окружная составляющая (2 000 кгс) равна 2,5% от радиальной силы.

Закрепление модели выполнено за задний фланец крепления к опоре по всем степеням свободы.

Конечноэлементая модель опоры подшипника, построенная в препроцессоре CAE Fidesys, приведена на Рисунок 273.

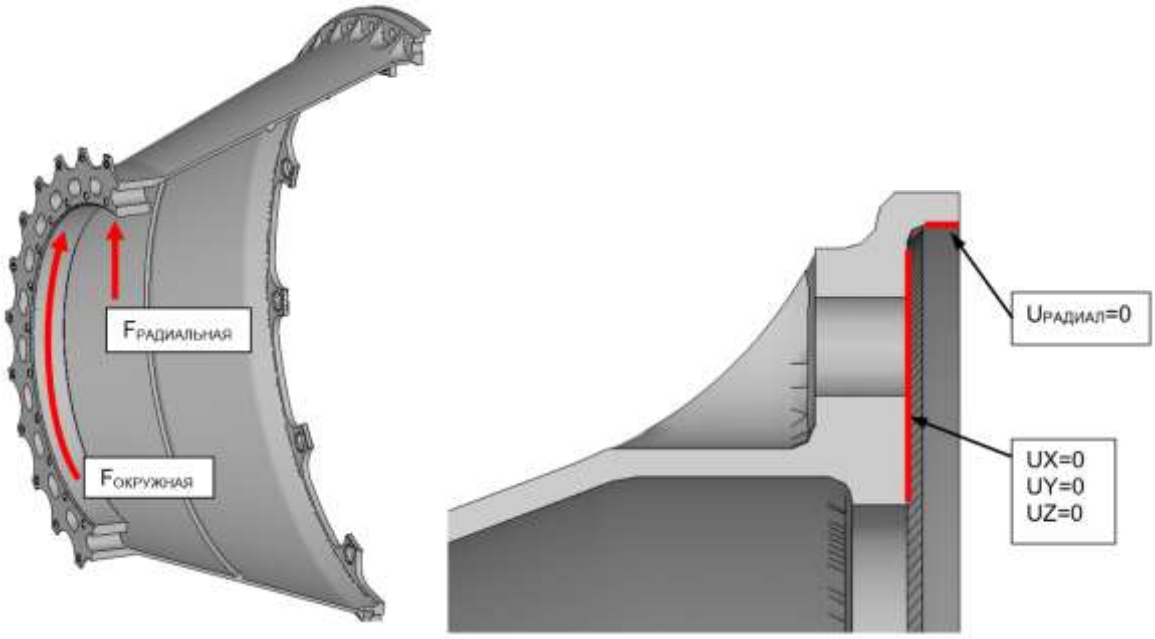


Рисунок 272 Схема приложения нагрузок (слева) и закреплений (справа) на опору подшипника

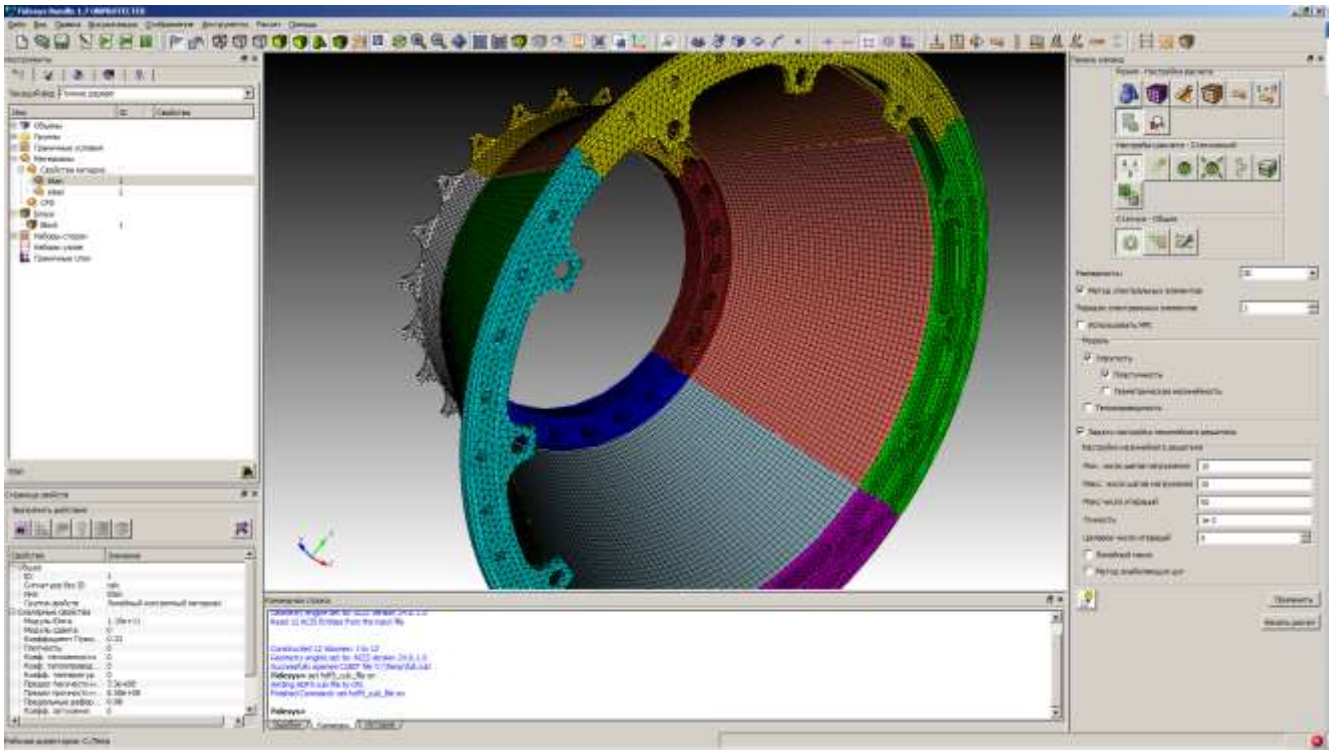


Рисунок 273 Конечноэлементная модель опоры подшипника в препроцессоре CAE Fidesys

На Рисунок 274 и Рисунок 275 приведены результаты расчета НДС в упругой и упругопластической постановках соответственно. Отметим ожидаемое уменьшение уровня максимальных напряжений в зоне максимальной концентрации ввиду развития пластических деформаций в данной области.

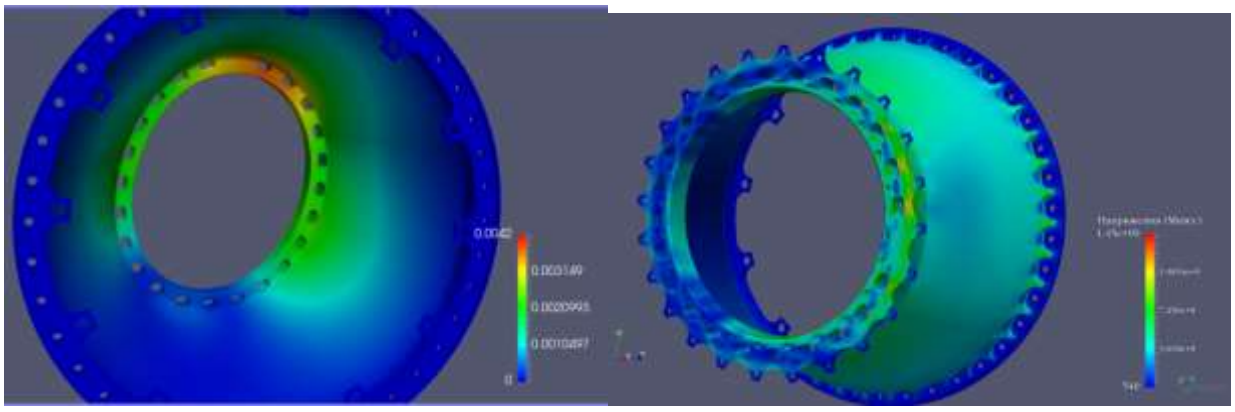


Рисунок 274 Поле перемещений на деформированной (деформации увеличены в 10 раз для наглядности) конфигурации (слева) и интенсивности напряжений (справа) в упругой постановке

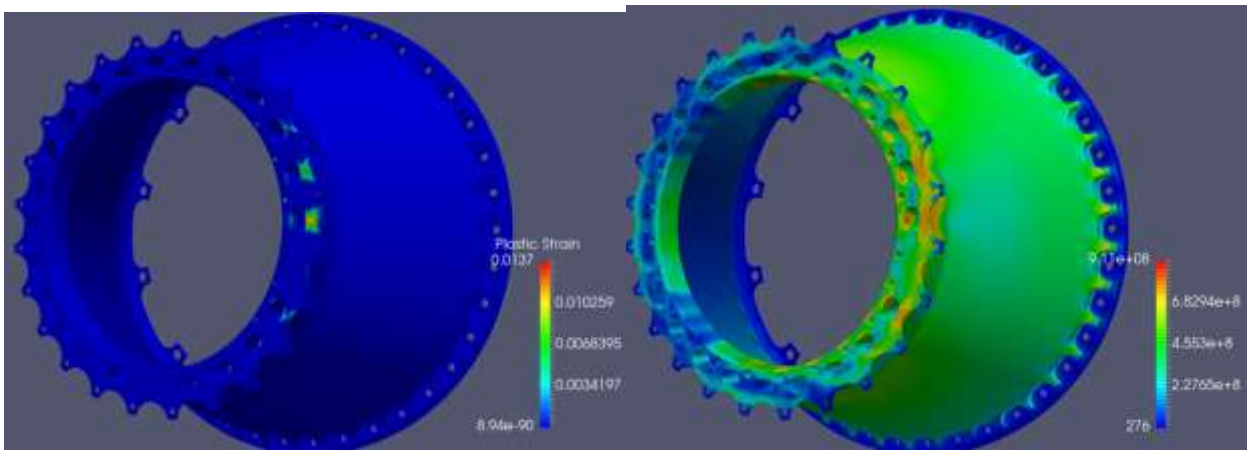
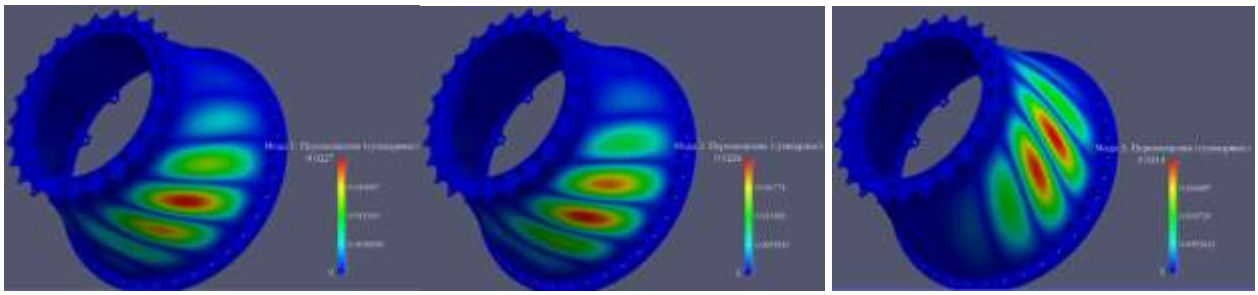


Рисунок 275 Поле пластических деформаций (слева) и интенсивности напряжений Мизеса (справа) в упругопластической постановке

Далее были рассчиты первые три формы и коэффициента запаса по потере устойчивости в условиях преднапряженного состояния (Рисунок 276).



К-т запаса = 1.93 К-т запаса = 1.93 К-т запаса = -1.99

Рисунок 276 Первые три формы и коэффициенты запаса по потери усточивости.

Расчет прочности решетки подруливающего устройства ледокола

В рамках данной задачи необходимо было провести расчет прочности защитной решетки подруливающего устройства ледокола при статическом давлении ледяного поля. Схема установки решетки приведена на Рисунок 277. Механические свойства материала решетки: модуль Юнга 2.06e+11 Па, коэффициент Пуассона 0.3, предел текучести 5e+08 Па. Расчётная интенсивность ледовой нагрузки 15000 кПа. Высота распределения ледовой нагрузки 0.8 м. Диаметр тоннеля подруливающего устройства 2.7 м.

Конечноэлементная модель решетки, построенная в препроцессоре CAE Fidesys, приведена на Рисунок 278. Для расчета использовались четырехугольные оболочечные элементы второго порядка точности.

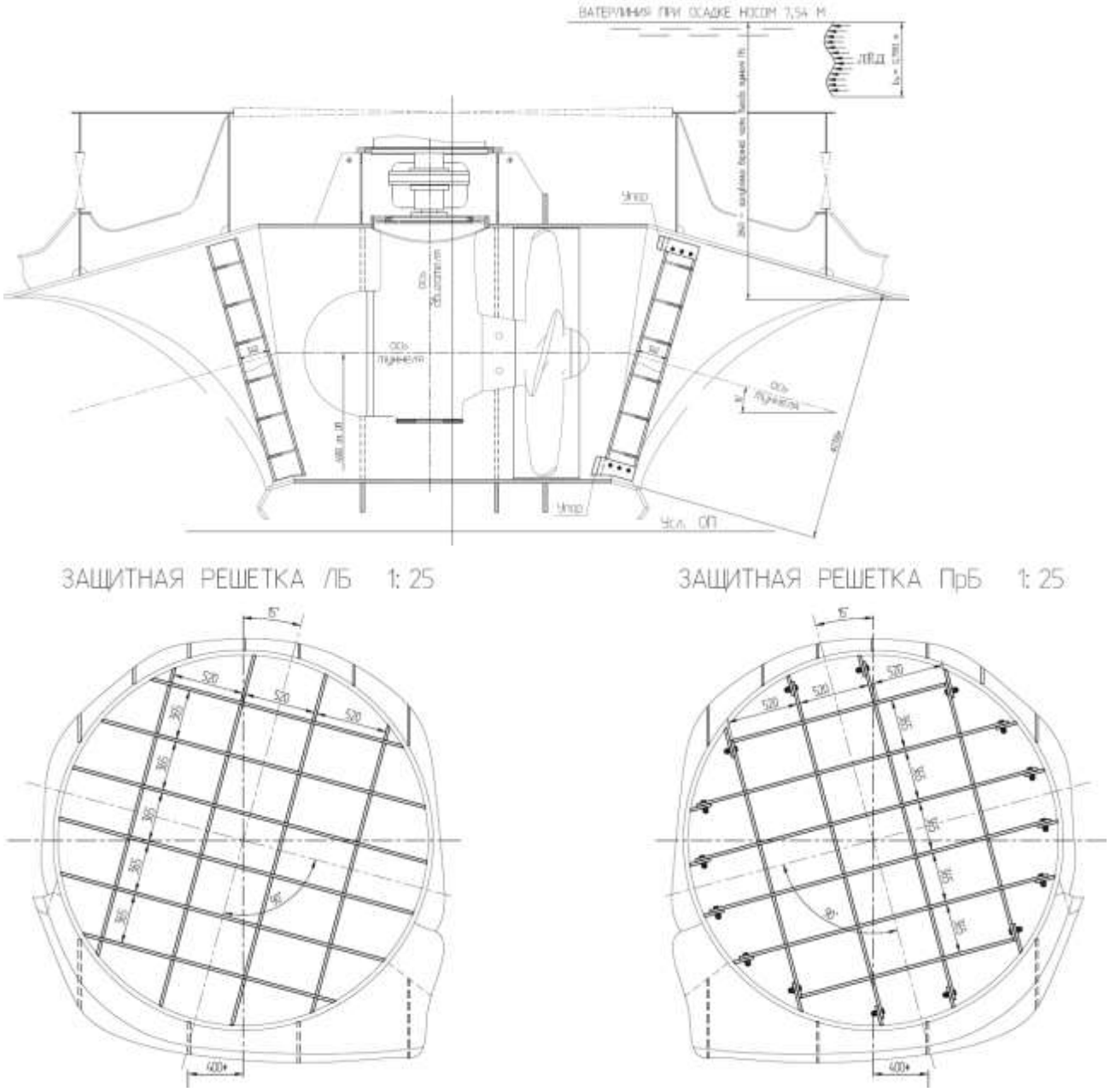


Рисунок 277 Схема установки защитной решетки в подруливающем устройстве ледокола

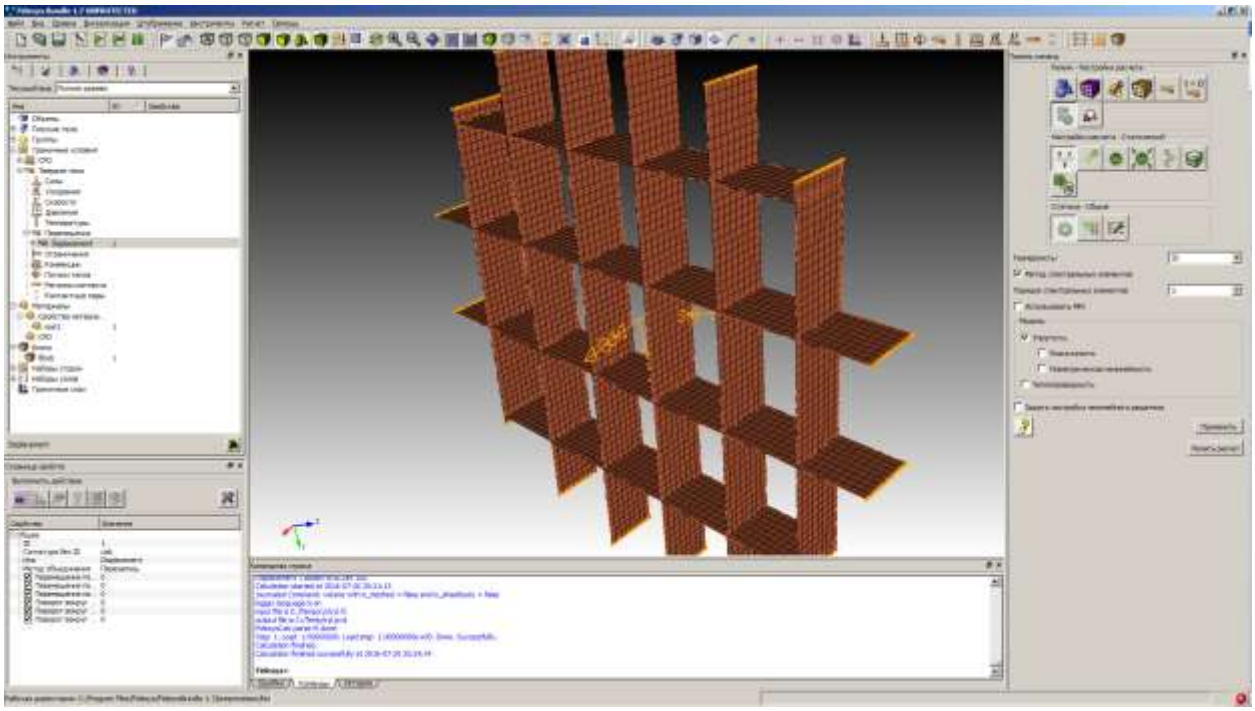


Рисунок 278 Конечноэлементная модель решетки (желтым подсвечены закрепленные по всем осям узлы)

На Рисунок 279 приведены результаты статического анализа решетки для случая жесткого закрепления узлов по краям решетки.

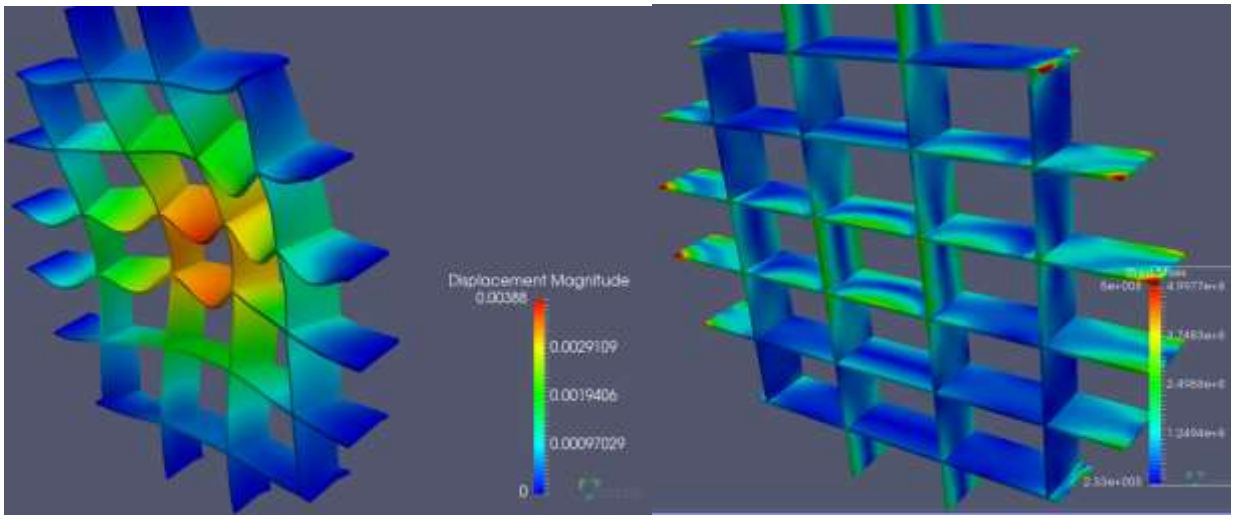


Рисунок 279 Деформированное состояние решетки (перемещения увеличены в 100 раз) (слева) и интенсивность напряжений Мизеса (справа).

Для сравнения в CAE Fidesys была построена также расширенная модель решетки с тоннелем (Рисунок 280).

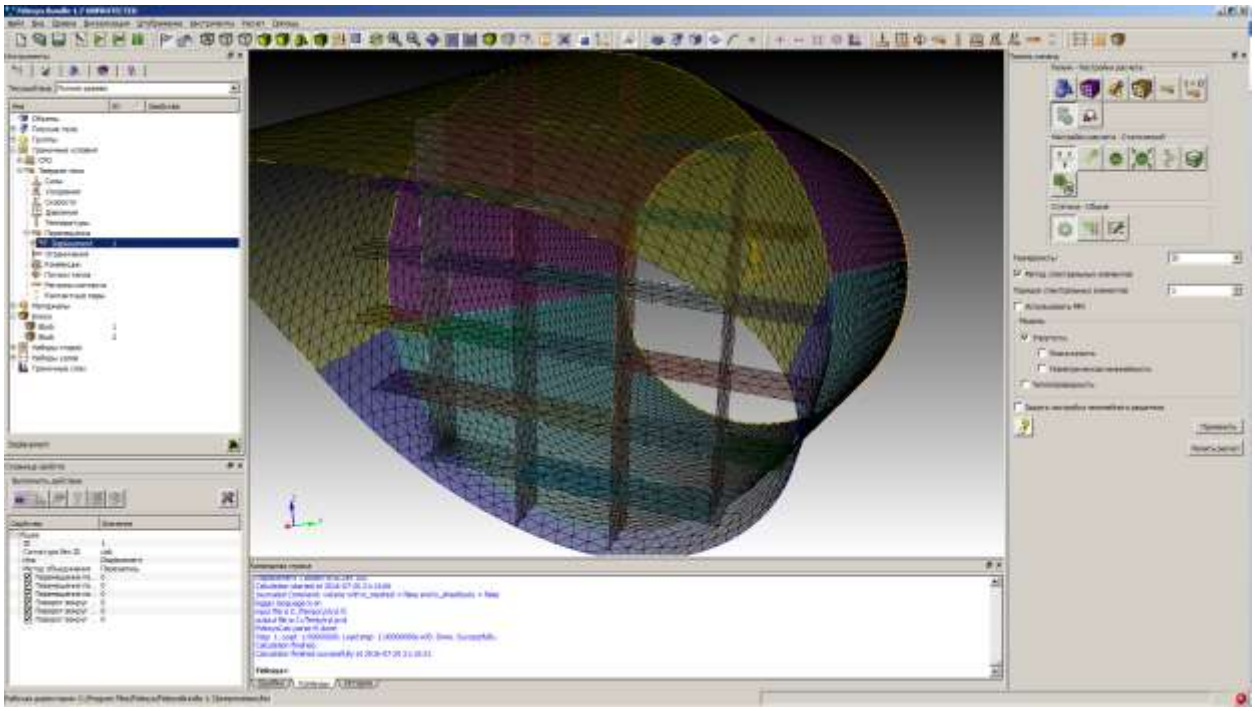


Рисунок 280 Конечноэлементная модель решетки с туннелем (желтым подсвечены закрепленные по всем осям узлы).

На Рисунок 281 приведены результаты статического анализа данной модели.

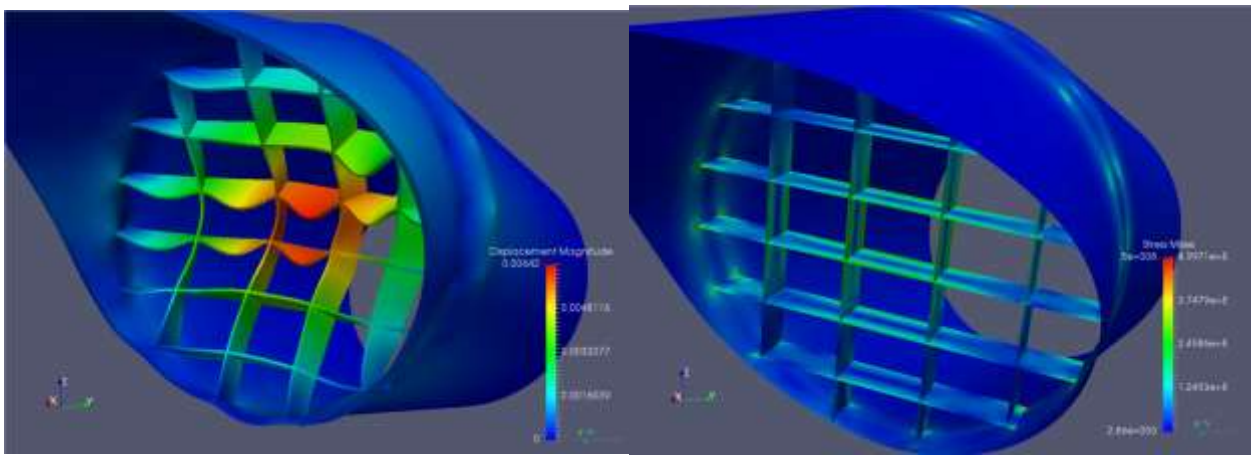


Рисунок 281 Деформированное состояние решетки с тоннелем (перемещения увеличены в 100 раз) (слева) и интенсивность напряжений Мизеса (справа).

Отметим увеличение уровня деформаций решетки в сравнении со случаем ее жесткой заделки, рассмотренным ранее.

Расчет боковой рамы тележки железнодорожного вагона

На железнодорожный вагон, находящийся в эксплуатации, постоянно действует множество сил, переменных как по величине, так и по месту приложения (это и продольные ударные силы, возникающие при соударении вагонов, и продольные силы сжатия или растяжения, действующие при трогании и торможении состава, поперечные составляющие этих сил,

вертикальные силы, возникающие при движении вагона по неровностям рельсового пути, боковые силы, нагрузки от груза (сыпучего, жидкого, газообразного) и др. Для оценки их влияния был произведен расчет напряженно-деформированного состояния боковины тележки железнодорожного вагона. Для расчета на прочность была использована трехмерная модель конструкции литой боковой рамы, представленная на Рисунок 282.

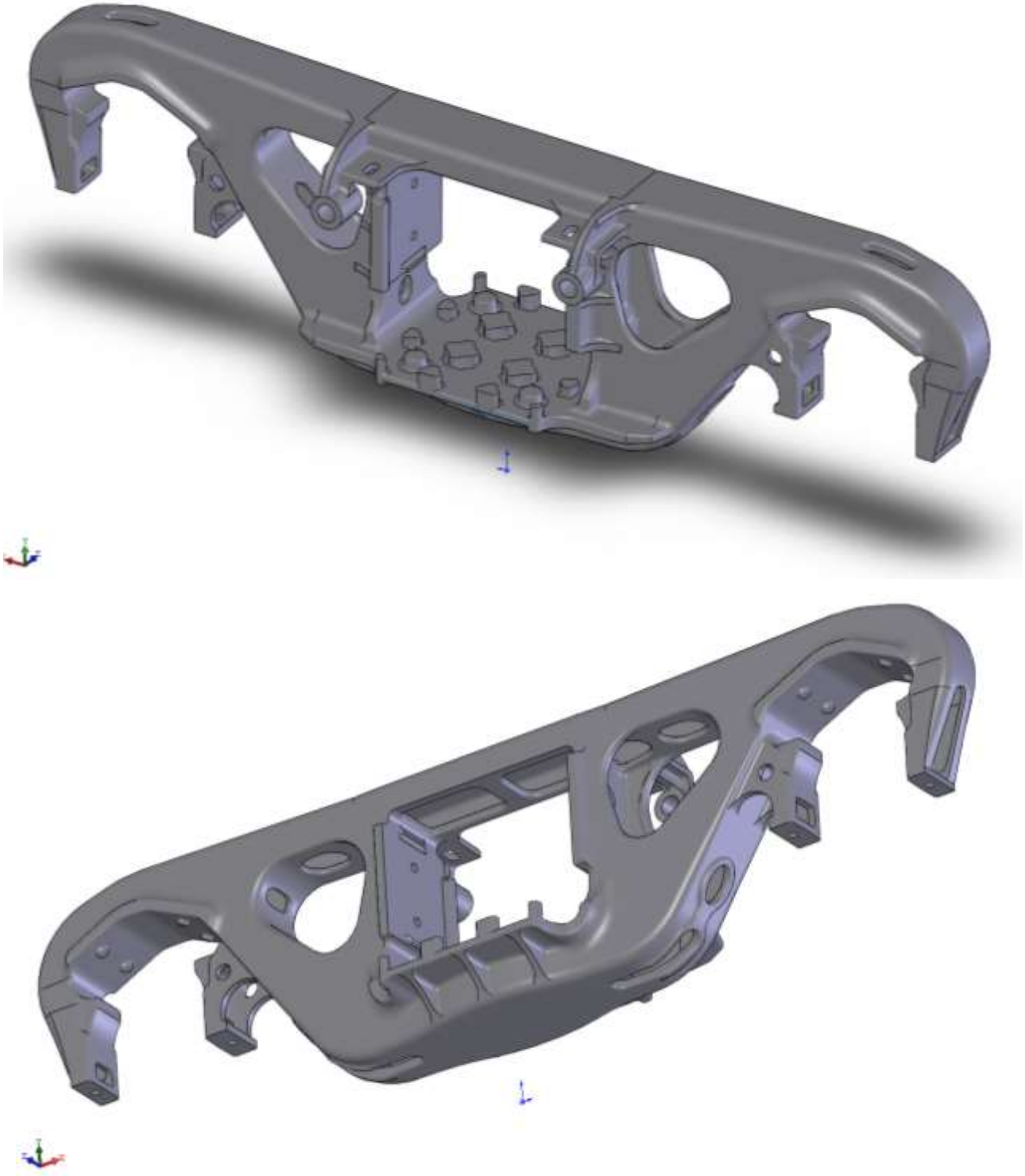


Рисунок 282 Объемная модель конструкции боковой рамы тележки железнодорожного вагона

Для расчета статической прочности боковой рамы тележки была разработана конечно-элементная модель в CAE Fidesys. Для расчета использовались объемные тетраэдральные конечные элементы (Рисунок 283). Несмотря на сложность геометрической модели боковой рамы, ее сеточная дискретизация была построена в автоматическом режиме с использованием встроенных в препроцессор CAE Fidesys алгоритмов генерации неструктурированных расчетных сеток, что существенно упрощает процесс построения конечноэлементной модели изделия и сокращает общее время, затрачиваемое на его расчет. Кроме того, возможность автоматического построения сетки обеспечивает автоматизацию процесса проверки сеточной сходимости численного решения к точному при измельчении сетки.

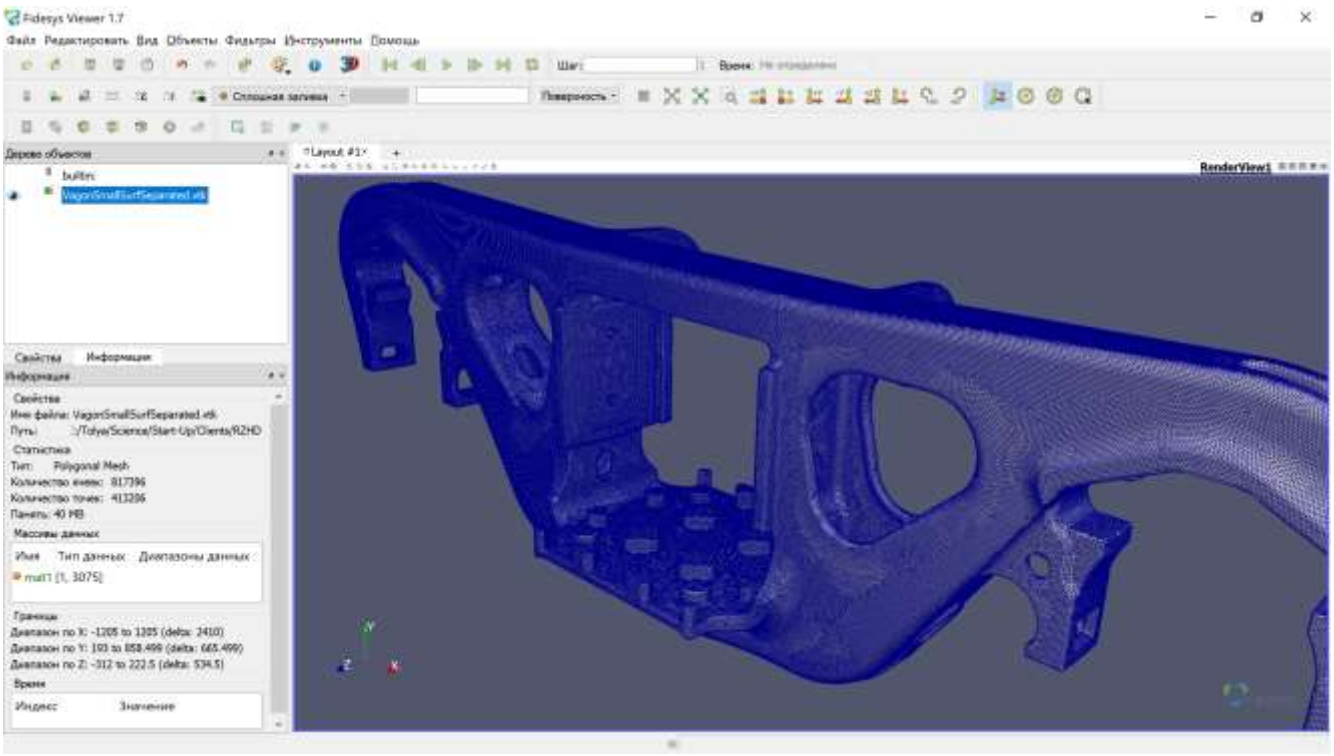


Рисунок 283 Разбиение модели боковой рамы на конечные элементы

Модуль упругости материала рамы $2{,}1*10^5$ МПа, коэффициент Пуассона 0,3.

Граничные условия и нагрузки, действующие на боковую раму, приведены на Рисунок 284, а величины нагрузок, прикладываемые к боковой раме при различных расчетных режимах – в таблице 1.

Таблица 1 – Величины сил, действующих на боковую раму, для расчета на статическую прочность

Режим	F_{1x},кН	F_{2x},кН	F_{3x},кН	F_{1y}, кН	F_{2y}, кН	F_{1Z}, кН	F_{2Z}, кН
I-1	0,00	0,00	62,53	0,00	0,00	531,80	0,00
I-2	24,38	0,00	48,86	56,80	48,86	387,54	0,00
I-3	120,00	0,00	35,19	0,00	0,00	243,29	0,00

III	6,97	19,42	45,79	18,25	0,00	355,13	6,8

В расчетной схеме вертикальные и поперечные перемещения ограничены элементами, имитирующими буксовые амортизаторы и упорами челюсти. Продольные перемещения ограничены на плоскости упора буксового проема боковой рамы. Вертикальные и поперечные нагрузки приложены к опорной поверхности центрального рессорного подвешивания.

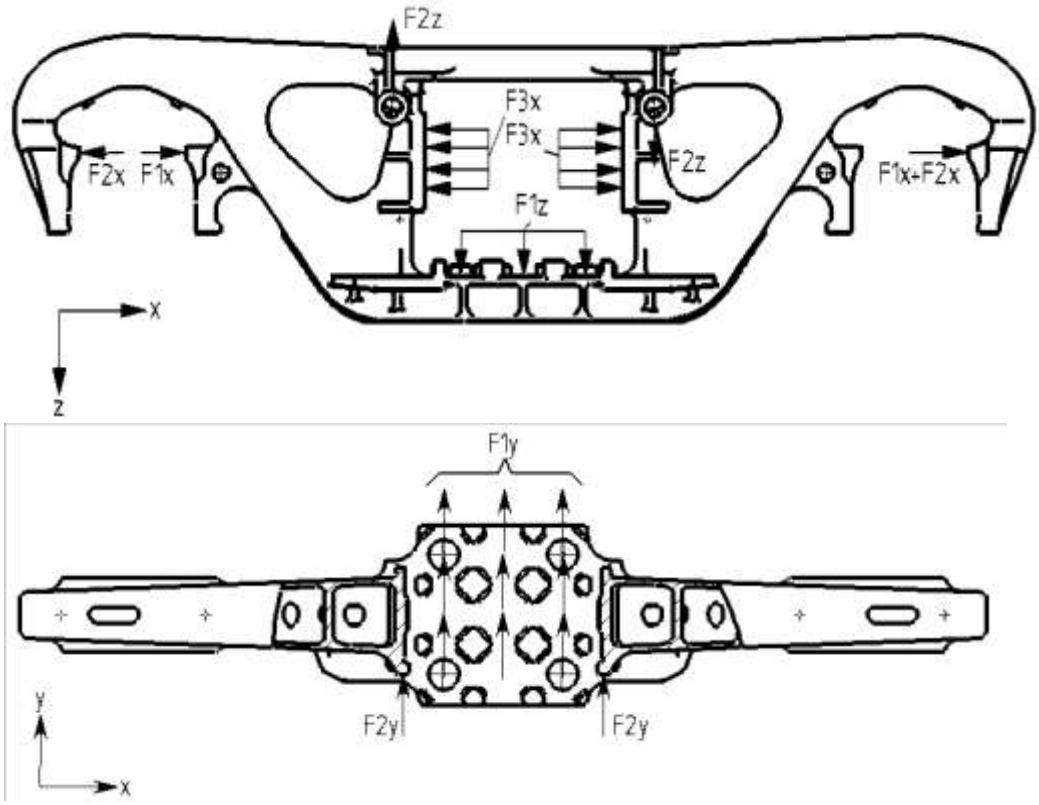


Рисунок 284 Схема задания кинематических и силовых граничных условий

В качестве результатов расчета методом конечных элементов были получены эпюры распределения эквивалентных напряжений в боковой раме, представленные на Рисунок 285. Концентраторы напряжений располагаются: в месте перехода опорной поверхности пружин в наклонную раму. При допустимой величине напряжений 250 МПа для стали 20 ГЛ конструкция рамы удовлетворяет условию прочности [177].

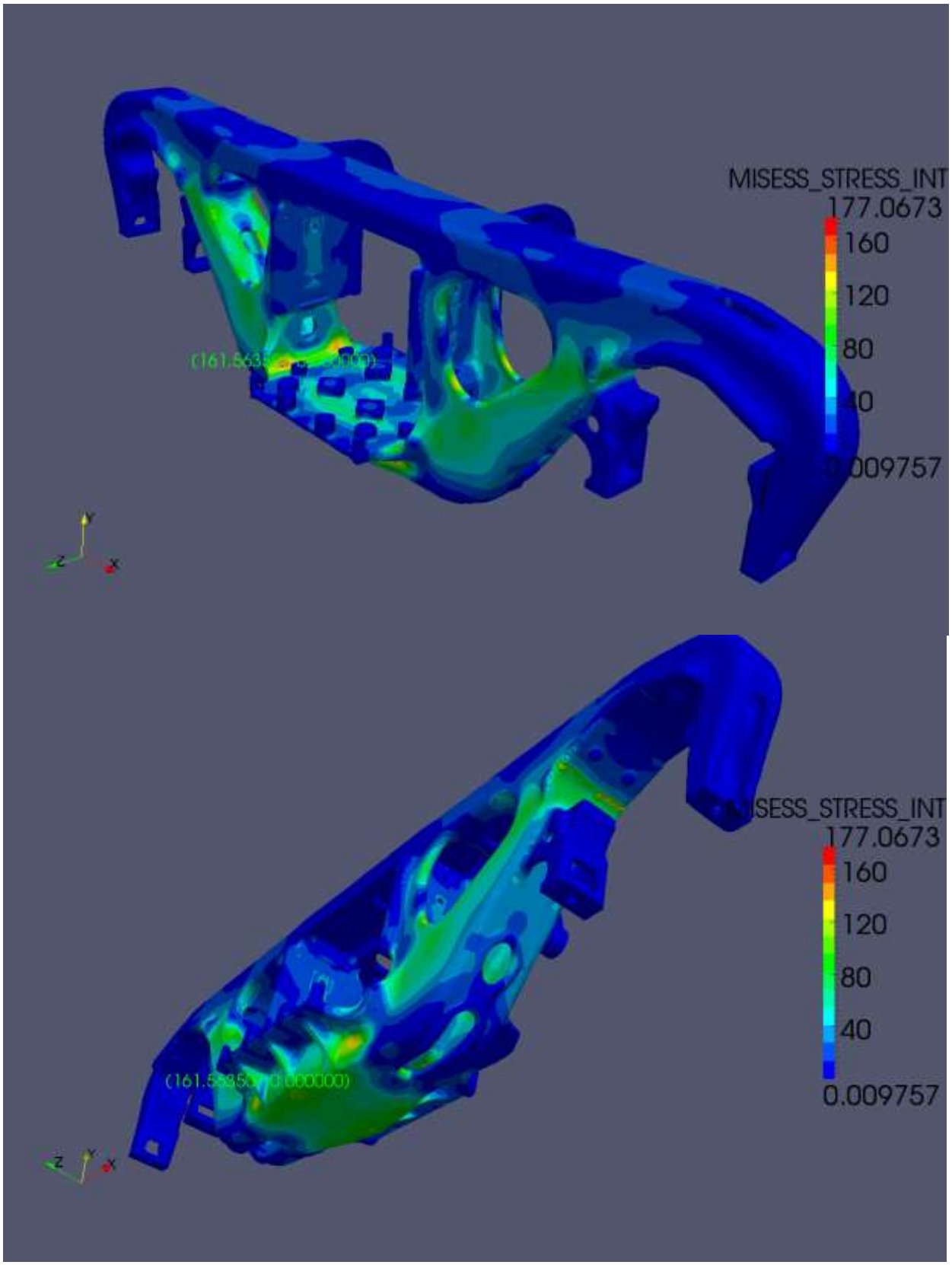


Рисунок 285 Интенсивность напряжений Мизеса в боковой раме

Расчёт цистерны

В рамках данной задачи необходимо было провести анализ цистерны (Рисунок 286) объемом 10 $м^3$ на прочность и устойчивость.

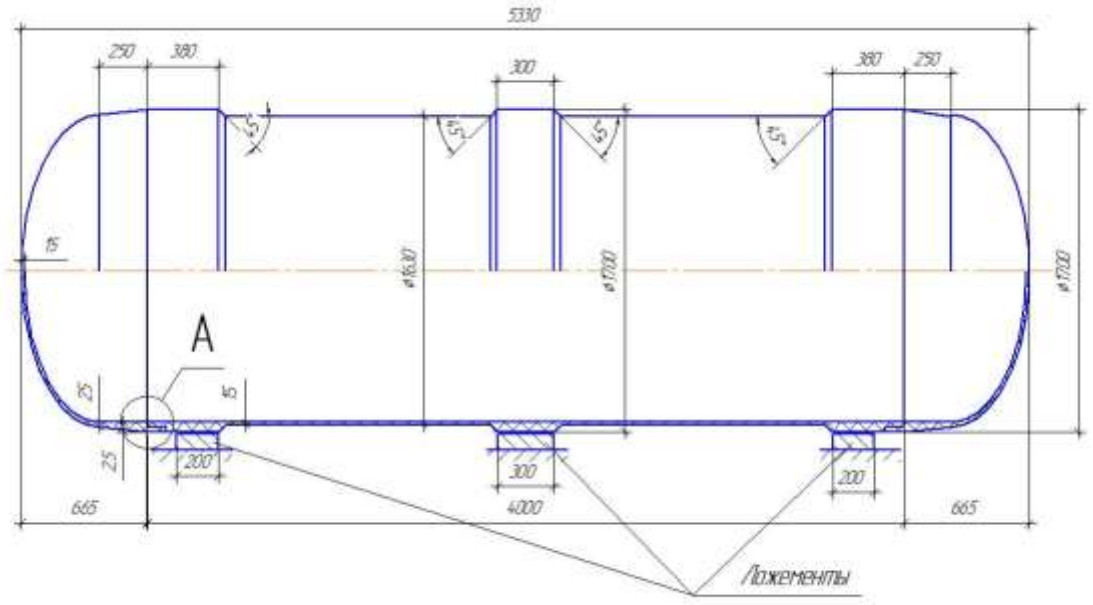


Рисунок 286 Геометрическая модель цистерны

Данные для расчета:

- Испытательное внутреннее давление 4 атм;
- лежит на 3-х ложементах (Рисунок 286);
- угол обхвата ложементов 120^0;
- емкость полностью заполнена водой ($\gamma = 10^{-5} Н / мм^3$);
- Цилиндрическая часть выполнена тканевой намоткой. Толщина слоя $\delta_1 = 1\,мм$;
- Эллиптические днища выполнены методом ручной выкладки и приформованы к цилиндру. Толщина слоя $\delta_2 = 0{,}8\,мм$;
- Внутренний диаметр цистерны равен 1.6 м.

Рассчитывалась четверть цистерны (Рисунок 287), прикладывались закрепления, исходя из условий симметрии.

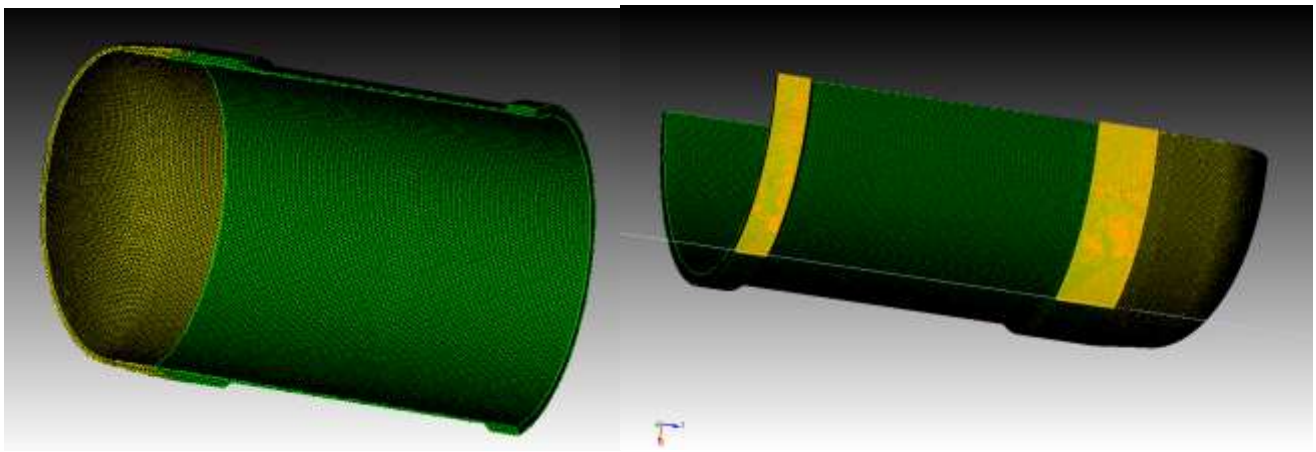


Рисунок 287 Конечоэлементная (1.7 млн. элементов) модель цистерны и граничные условия на ней.

Давление жидкости моделировалась неравномерным гидростатическим давлением по внутренней границе цистерны, плотность воды 10^3 кг/м^3, ускорение свободного падения 9,81 м/с^2.

Характеристики материала цистерны	Цилиндр	Днища
Модули Юнга, МПа		
в осевом E_x	$1{,}7 \cdot 10^4$	$1{,}3 \cdot 10^4$
в кольцевом E_y	$1{,}8 \cdot 10^4$	$1{,}3 \cdot 10^4$
в радиальном E_z	$0{,}3 \cdot 10^4$	$1{,}3 \cdot 10^4$
Модули сдвига, МПа		
в осевом G_x	$0{,}7 \cdot 10^4$	$0{,}5 \cdot 10^4$
в кольцевом G_y	$0{,}7 \cdot 10^4$	$0{,}5 \cdot 10^4$
в радиальном G_z	$0{,}7 \cdot 10^4$	$0{,}5 \cdot 10^4$
Коэффициенты Пуассона		
в осевом ν_x	0,11	0,3
в кольцевом ν_y	0,14	0,3
в радиальном ν_z	0,14	0,3

Результаты расчета приведены на рисунках ниже.

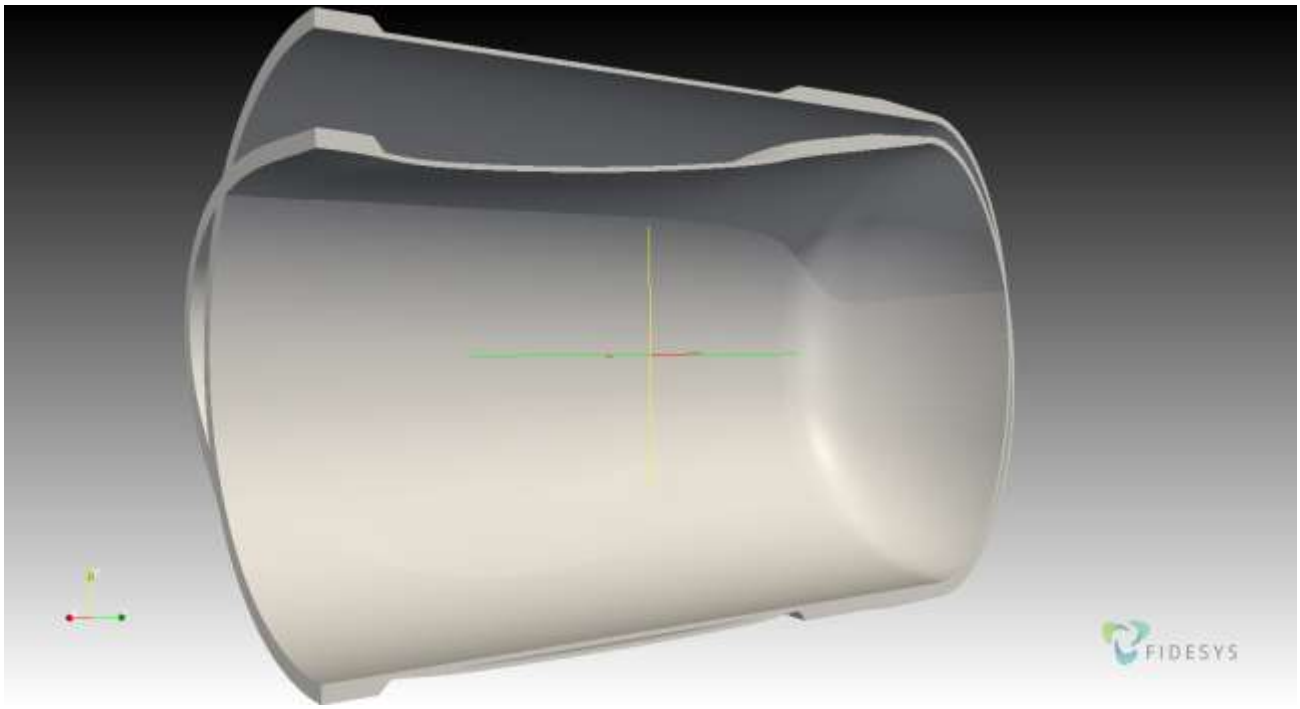


Рисунок 288 Исходная и деформированная цистерна в разрезе. Для наглядности перемещения увеличены в 300 раз.

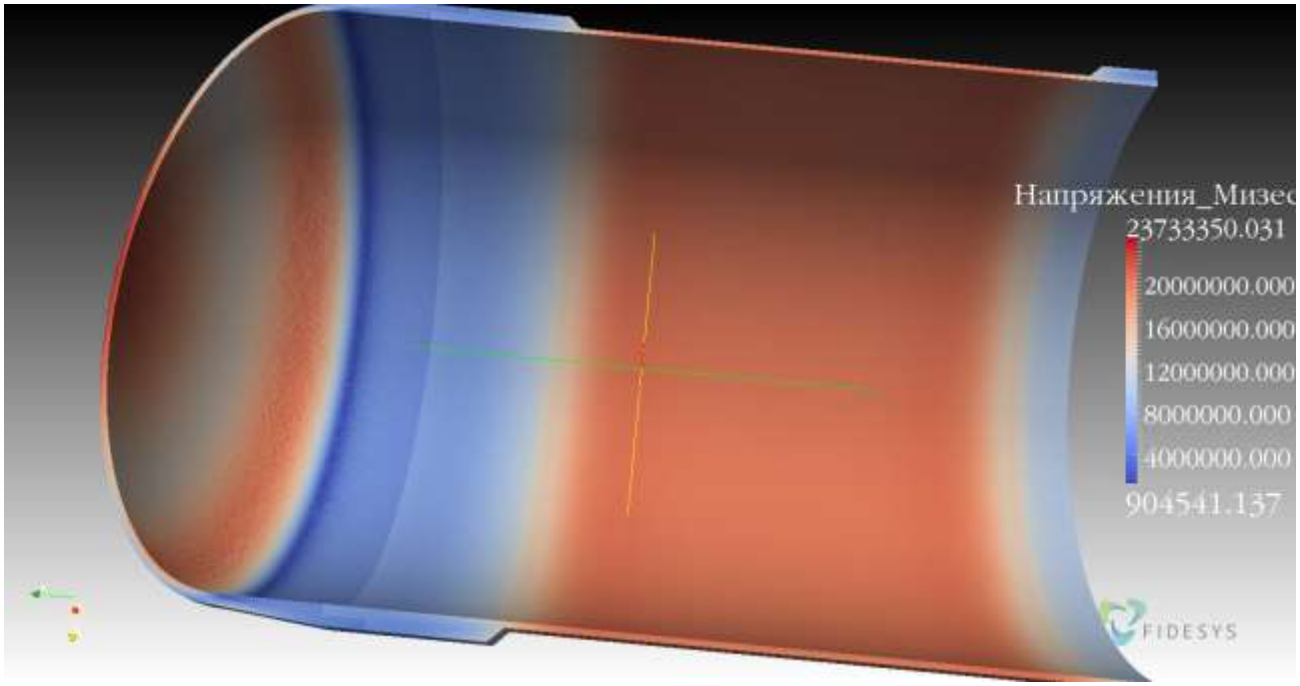


Рисунок 289 Интенсивность напряжений Мизеса на внутренней поверхности цистерны

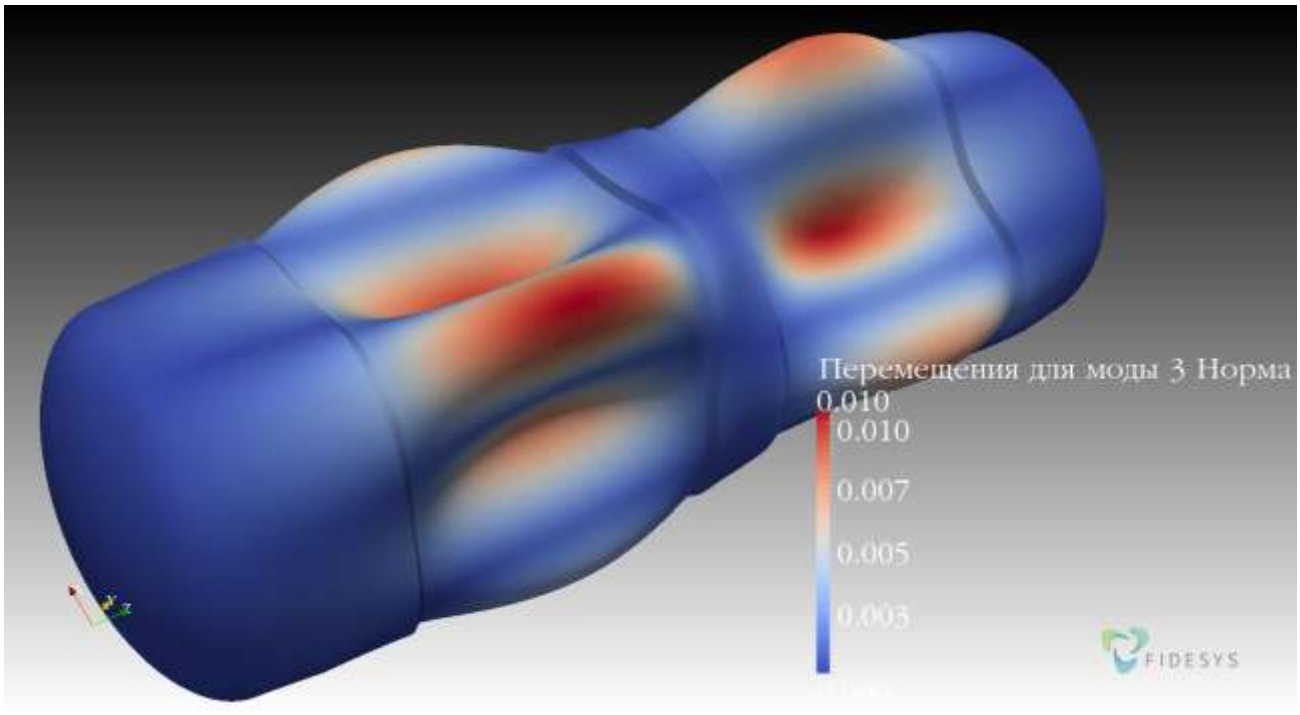


Рисунок 290 Третья форма потери устойчивости. Коэффициент критической нагрузки - 2.53116.

Расчет транспортировочной рамы

В данной задаче проводился прочностной анализ транспортировочной рамы, предназанченной для перевозки цистерны. Вес цистерны, транспортируемой на раме, составляет 4 тонны. Он распределяется равномерно по двум ложементам (по 2 тонны - соответствующее данному весу давление на ложемент равно 905107 Па) и направлен вертикально вниз. Рама закрепляется в двух точках, расположенных снизу рамы (Рисунок 291). Механические свойства материала рамы, листов ложемента, ложа, ребер ложемента: модуль Юнга - 205000 МПа, коэффициент Пуассона – 0.29. Механические свойства накладок на ложементы: модуль Юнга - 10 МПа, коэффициент Пуассона – 0.45.

Конечноэлементная модель рамы (Рисунок 292) состоит из треугольных оболочечных элементов, описывающих деформации тонкостенной рамы, и объемных тетраэдральных элементов внутри ложементов и накладок на них. Оболочечные элементы конформным образом примыкают к объемным, обеспечивания непрерывность передачи перемещений и напряжений.

Результаты расчета (поля перемещений и интенсивности напряжений Мизеса) приведены на Рисунок 293.

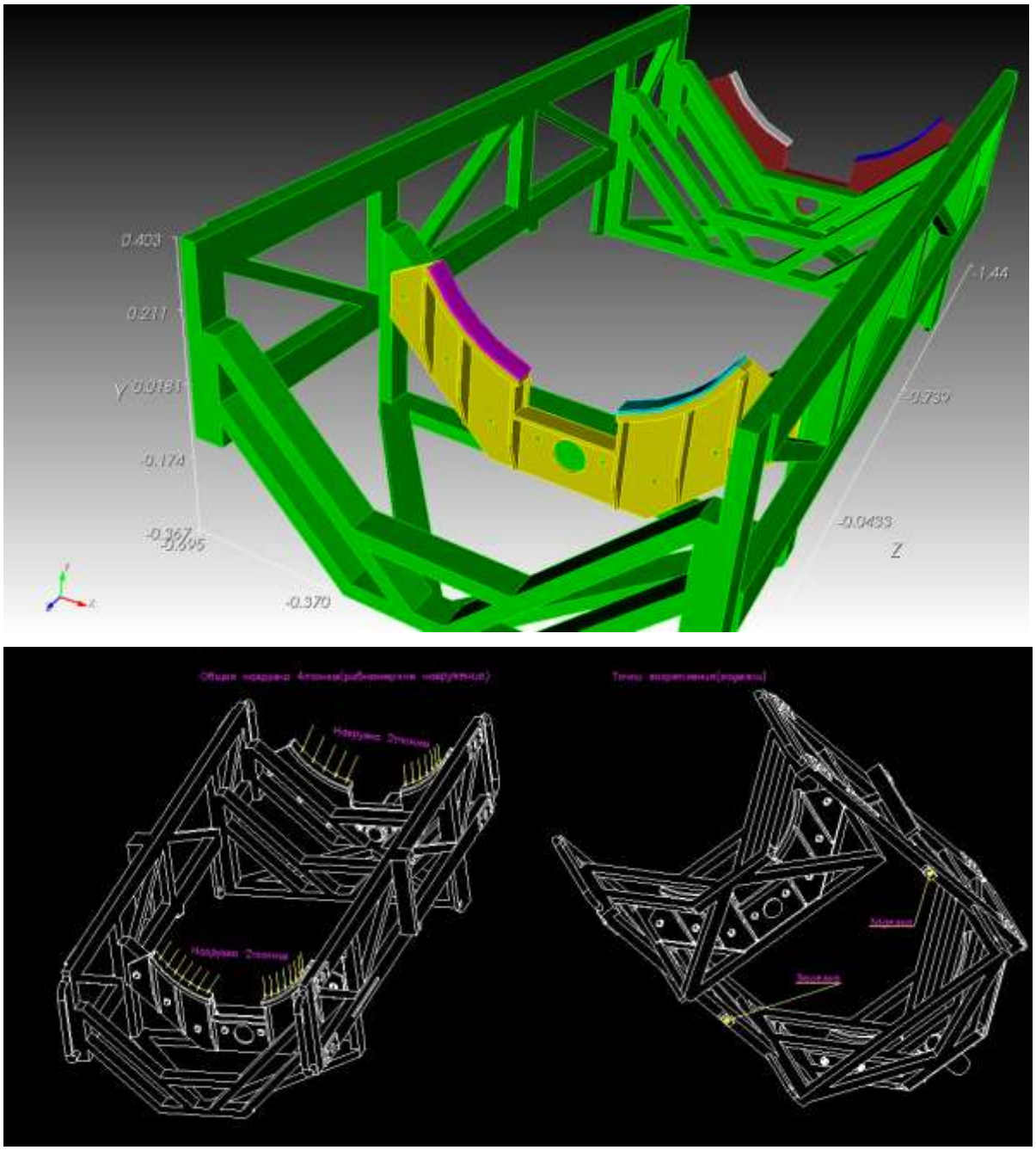


Рисунок 291 Геометрическая модель транспортировочной рамы, состоящая из тонкостенной рамы, ложементов и накладок на них. Снизу приведены действующие на раму нагрузки и места заделок.

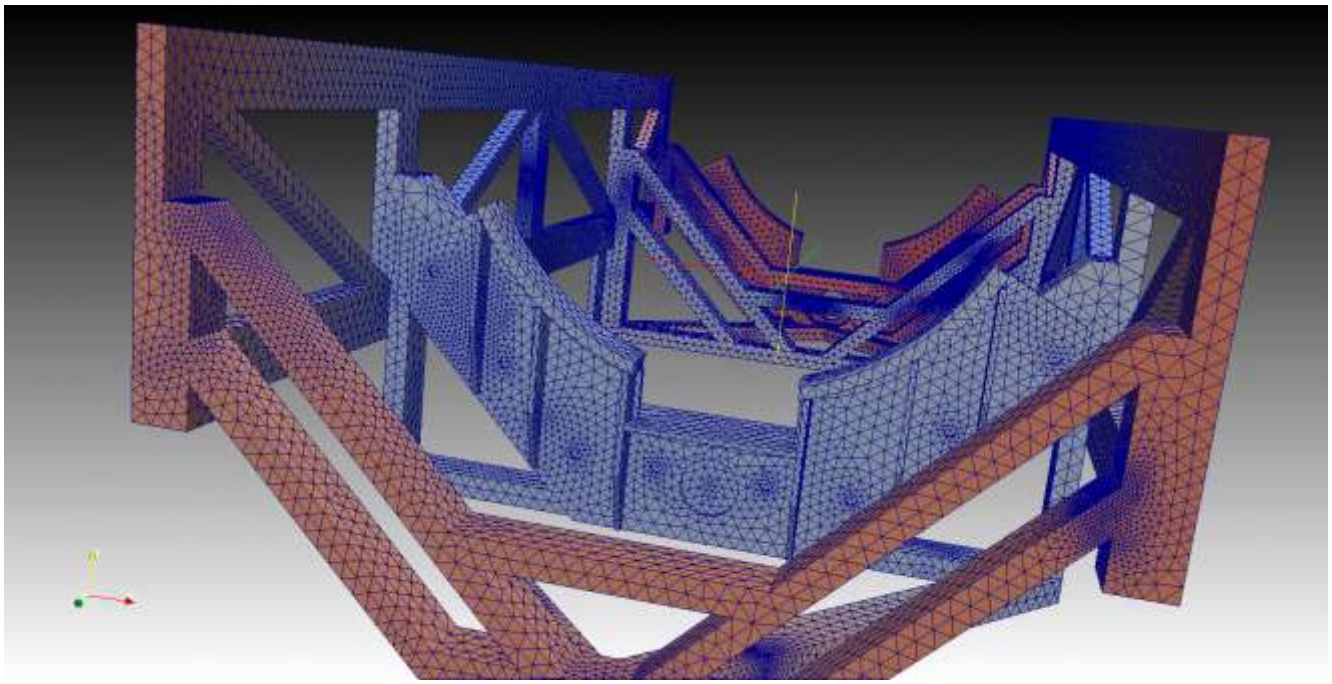
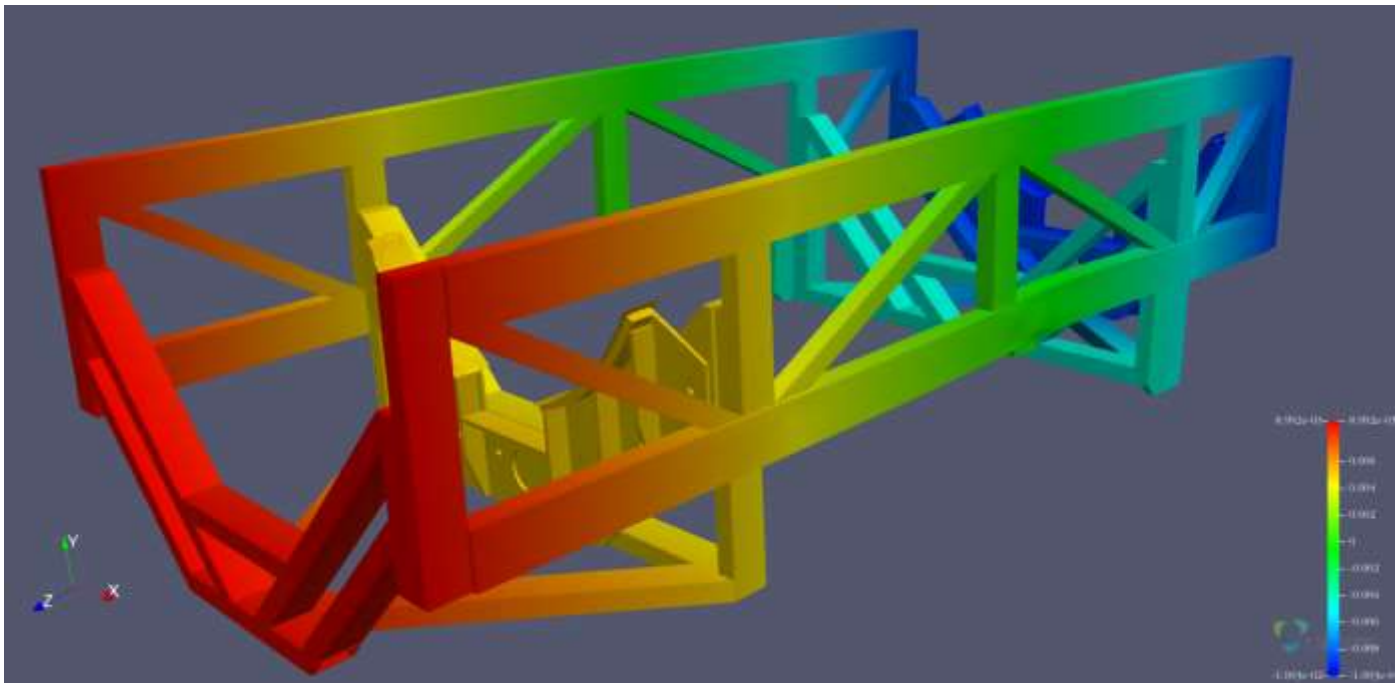


Рисунок 292 Конечноэлементная модель рамы, состоящая из оболочечных элементов рамы и объемных элементов ложементов и накладок на них.



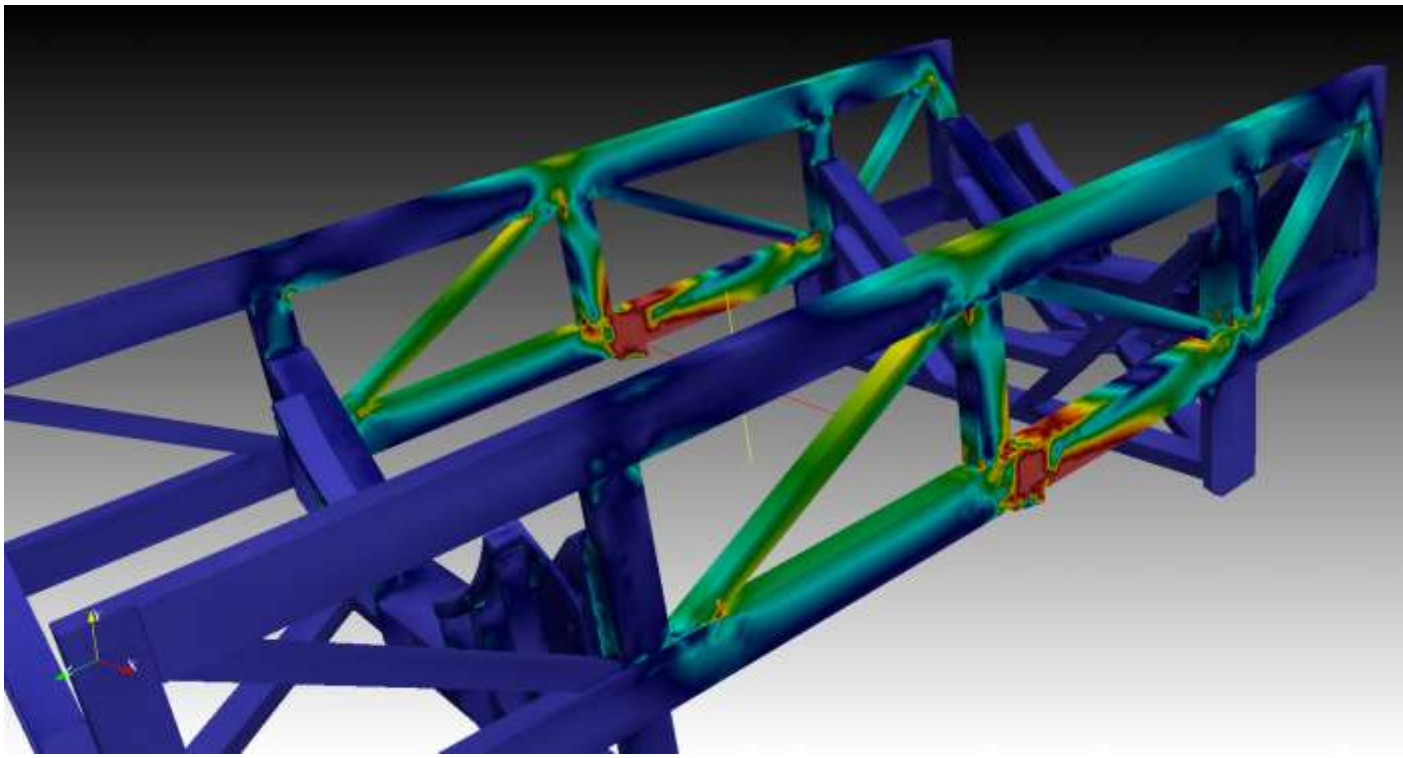


Рисунок 293 Результаты расчета напряженно-деформированного состояния. Поле вертикальных перемещений (сверху) и поле интенсивности напряжений Мизеса (снизу).

Расчет адаптера

Адаптер (Рисунок 294) представляет собой коническую конструкцию, состоящую из обшивки, 12 равномерно расположенных по окружности стрингеров и двух шпангоутов. Обшивка моделируется оболочечными конечными элементами, стрингеры и нижний шпангоут – балочными, верхний шпангоут – твердотельными. Действие оборудования, установленного на адаптер, имитируется массой, распределенной по стыковочной поверхности верхнего шпангоута. Толщина обшивки 3мм. Сечение нижнего шпангоута: прямоугольное с высотой (по OZ) 25 мм и шириной 40 мм.

Материал элементов конструкции – сплав АМг6 со следующими мехническими свойствами: коэффициент Пуассона 0,3, плотность 2770кг/м^3, модуль Юнга E=0,68e+10^{11} Па.

Закрепление осуществлено в 6 узлах по трем поступательным степеням свободы.

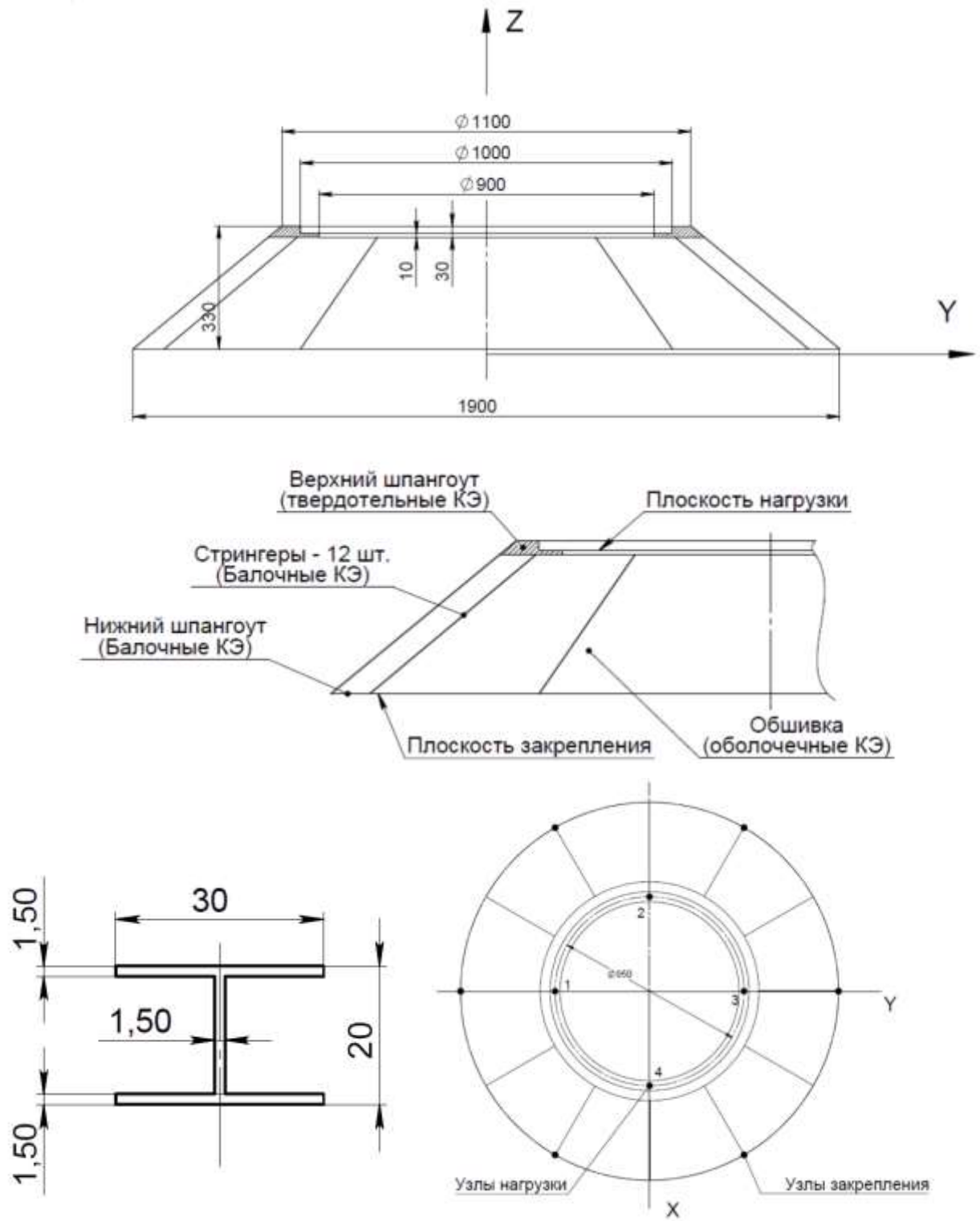


Рисунок 294 Геометрическая модель адаптера, сечение стрингера и места приложения нагрузок

Нагрузки, действующие в узлах, приведены в таблице ниже:

№ Узла	Fx, H	Fy, H	Fz, H
1	-4550	-3140	4600
2	-5790	-3770	750
3	-5520	-2790	-3640
4	-4010	-1510	-3900

Конечноэлементная модель адаптера приведена на Рисунок 295.

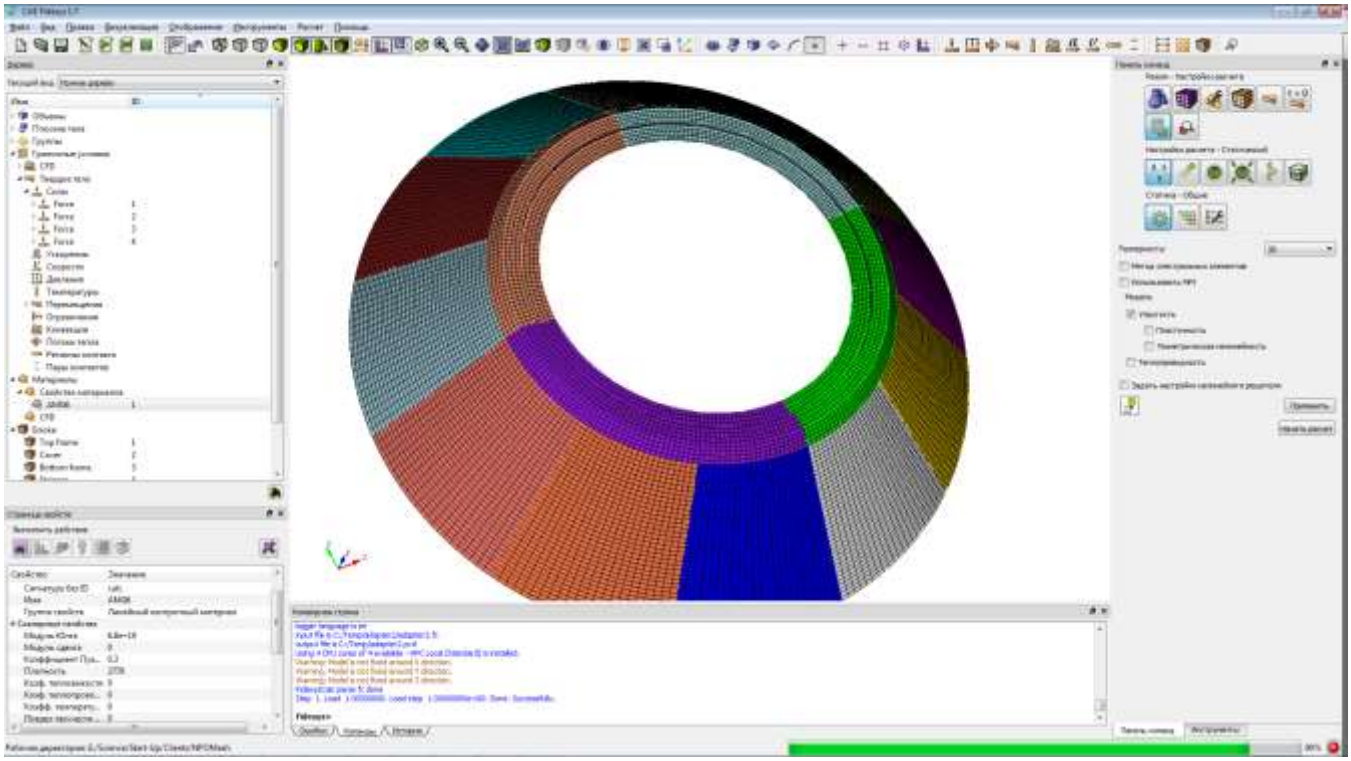


Рисунок 295 МКЭ-модель адаптера в CAE Fidesys

Результаты расчета на статический и модальный анализ адаптера приведены на рисунках ниже. Минимальные собственные частоты, определенные в результате модального анализа:

1) 206.131206 Hz

2) 213.219774 Hz

3) 218.802077 Hz

4) 218.802077 Hz

5) 226.467694 Hz

6) 226.467694 Hz

7) 229.394918 Hz

8) 231.303349 Hz

9) 231.303349 Hz

10) 232.835119 Hz

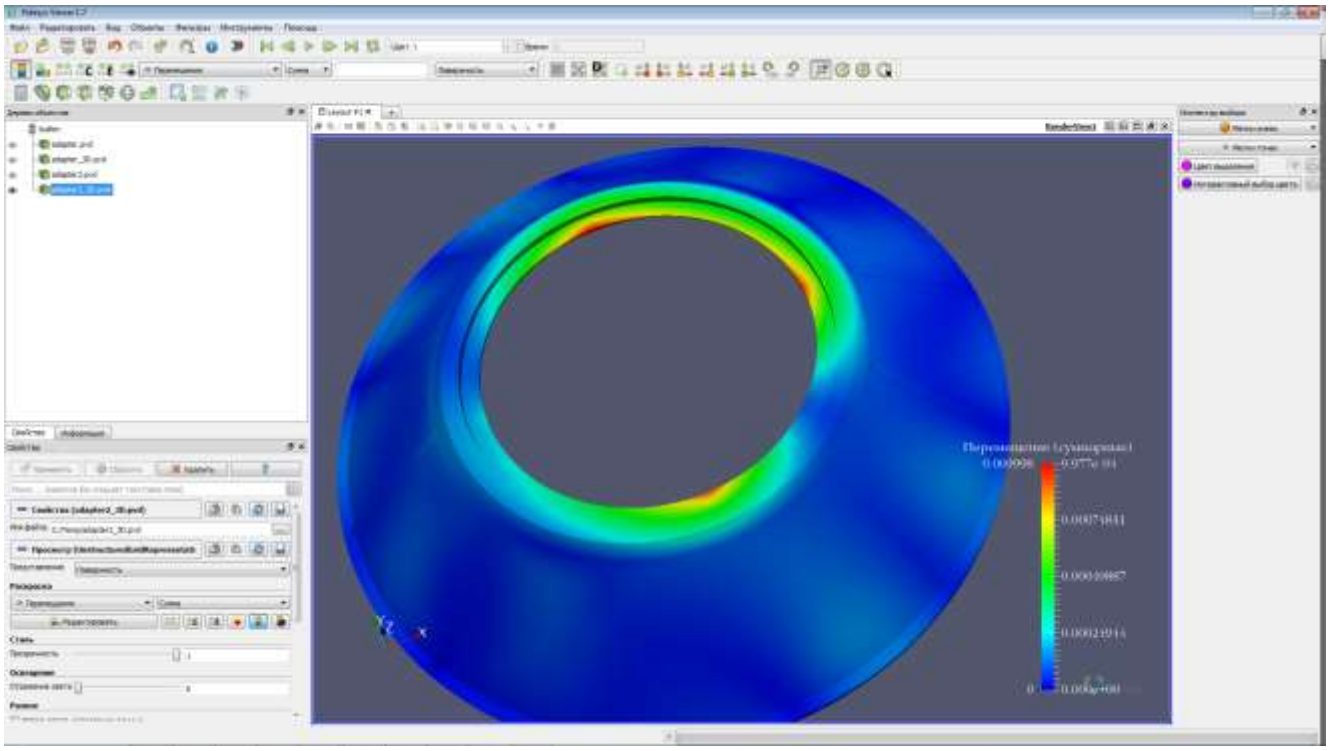


Рисунок 296 Поле перемещений

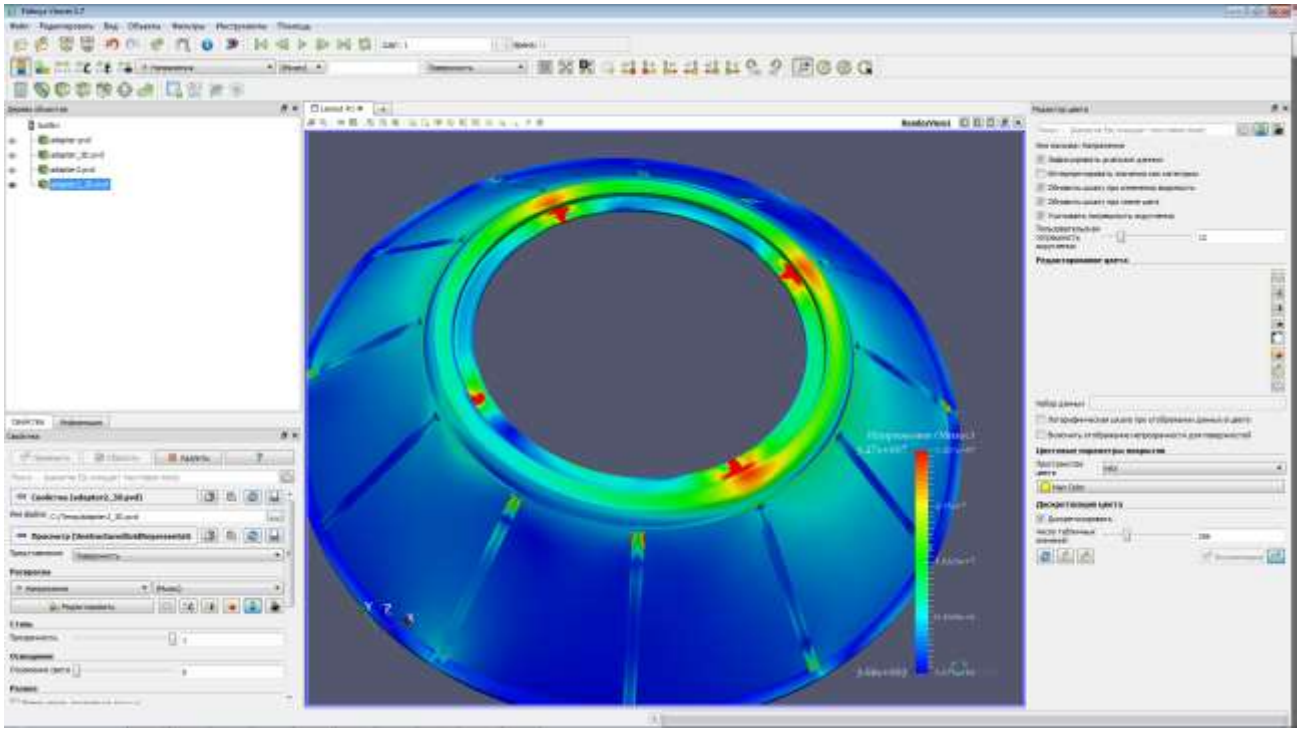
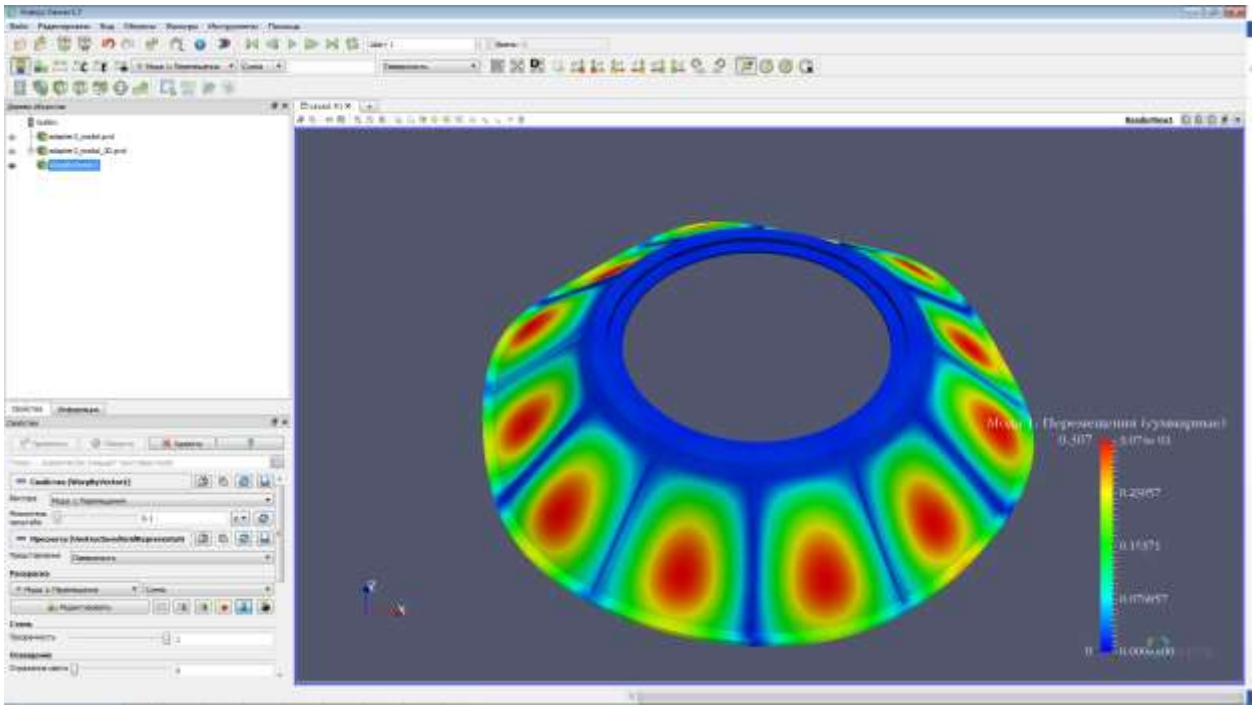
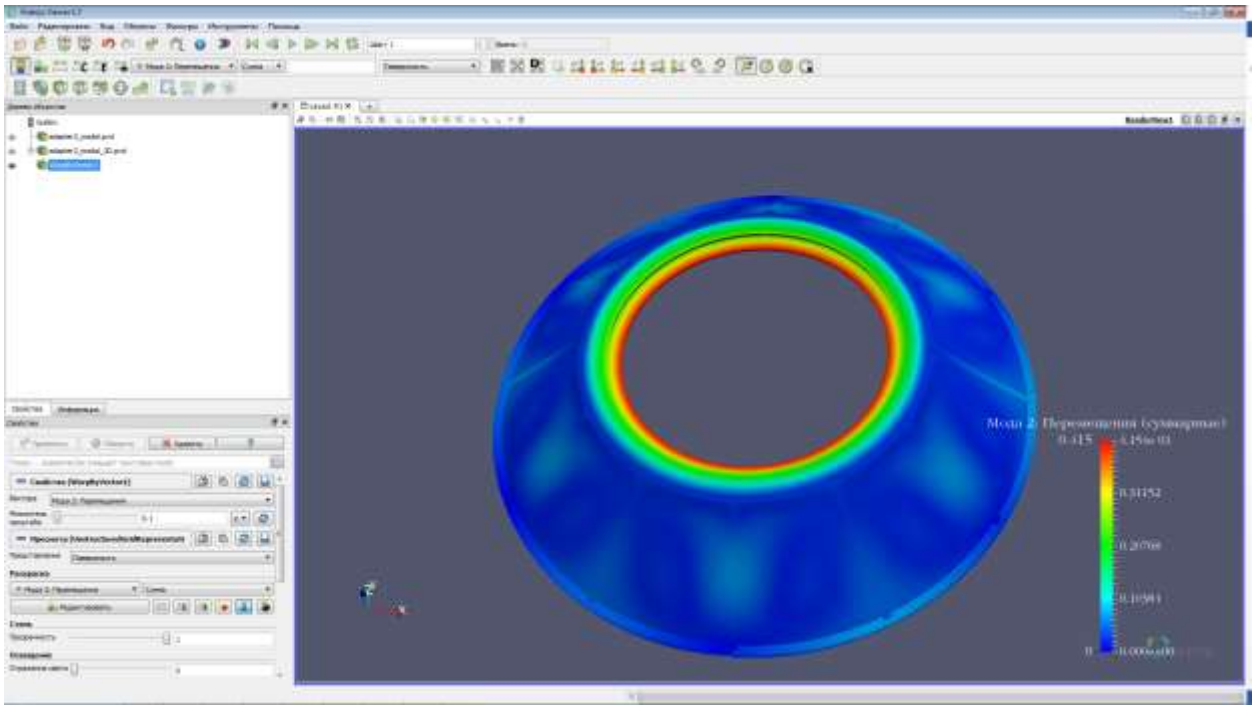
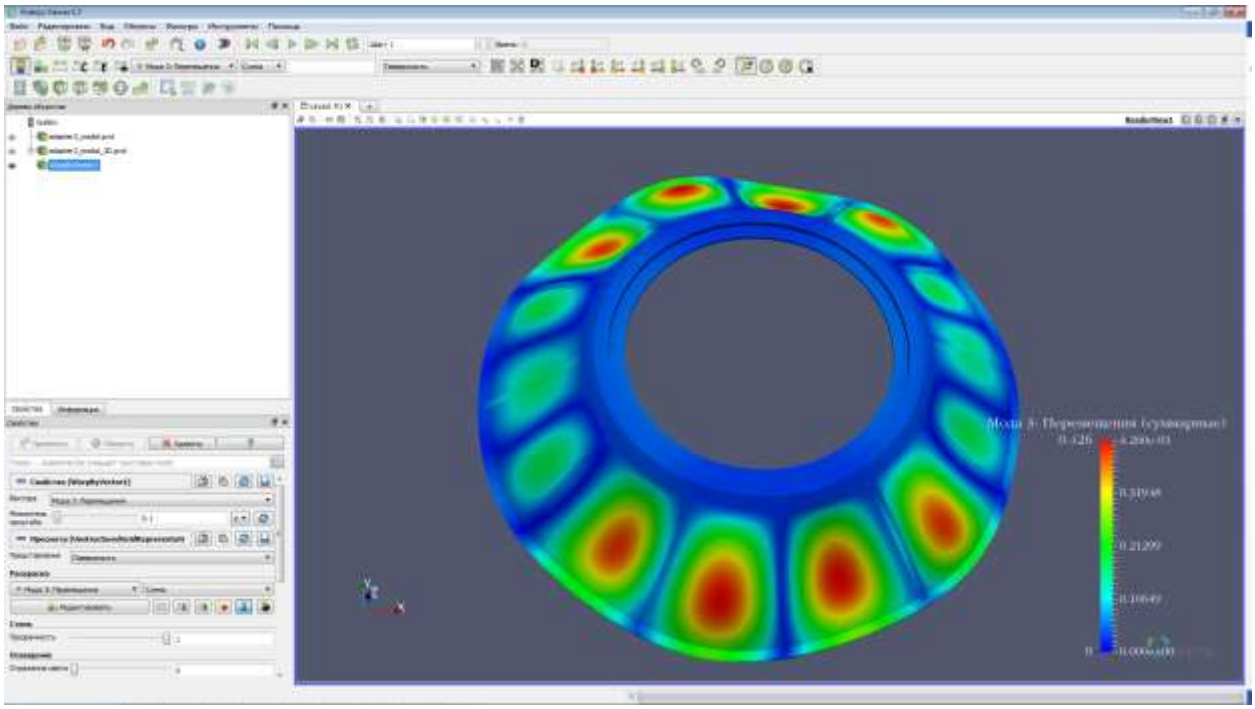


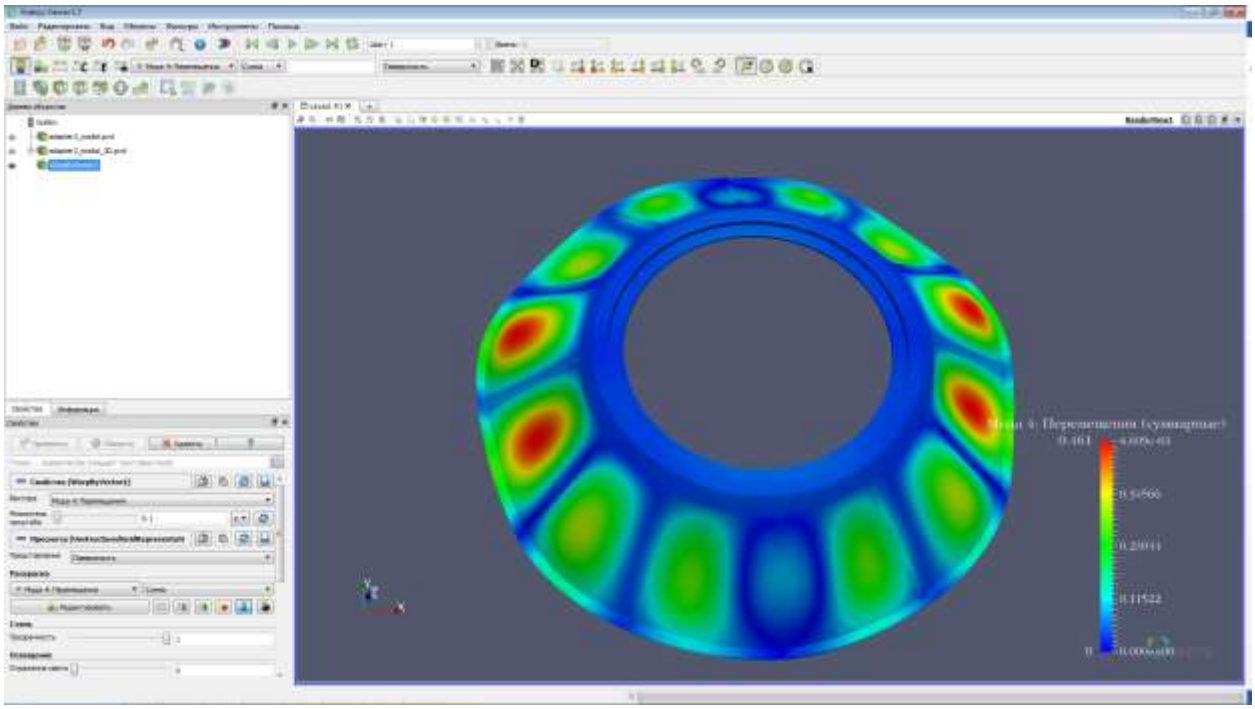
Рисунок 297 Поле интенсивности напряжений Мизеса (сингулярность в местах приложения точечных сил).

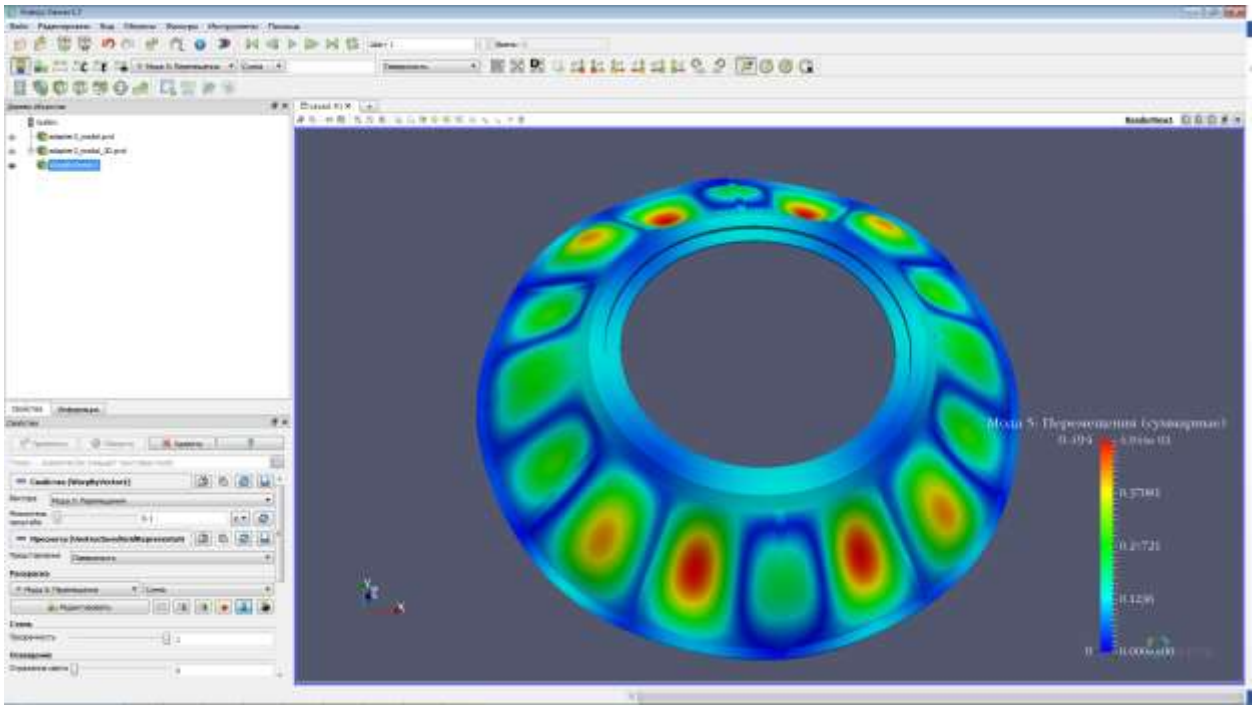
Собственные формы колебаний адаптера:

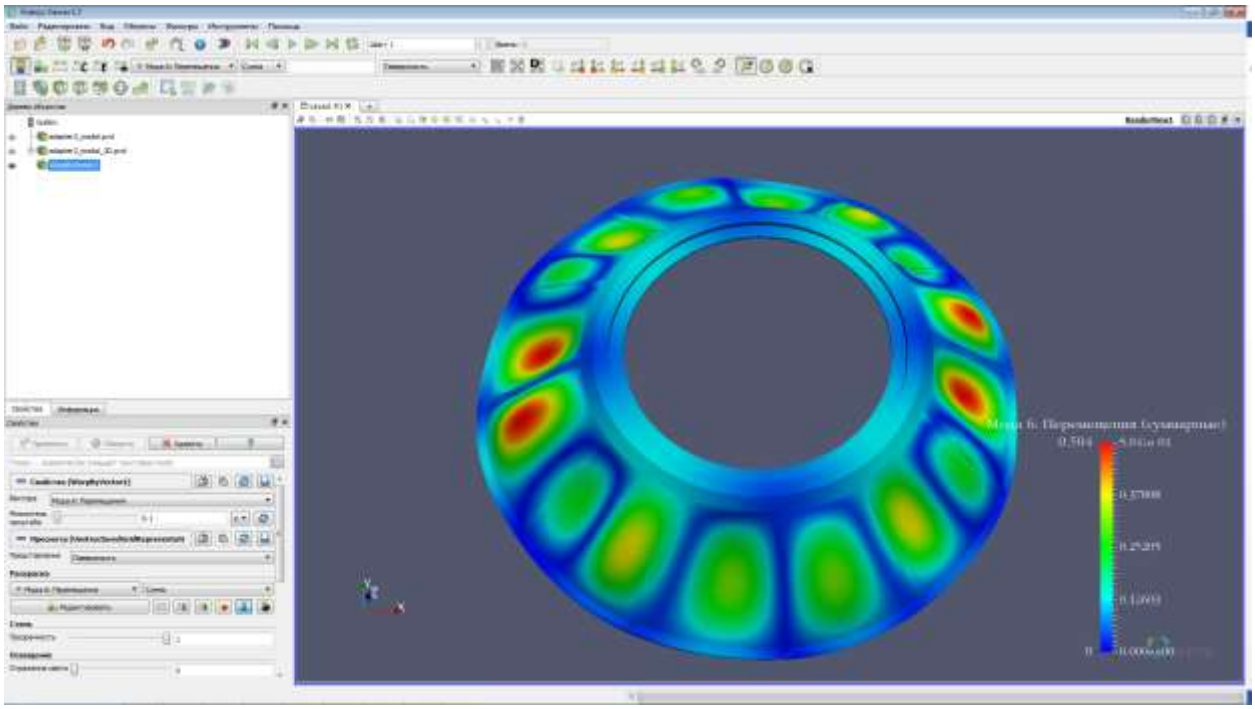


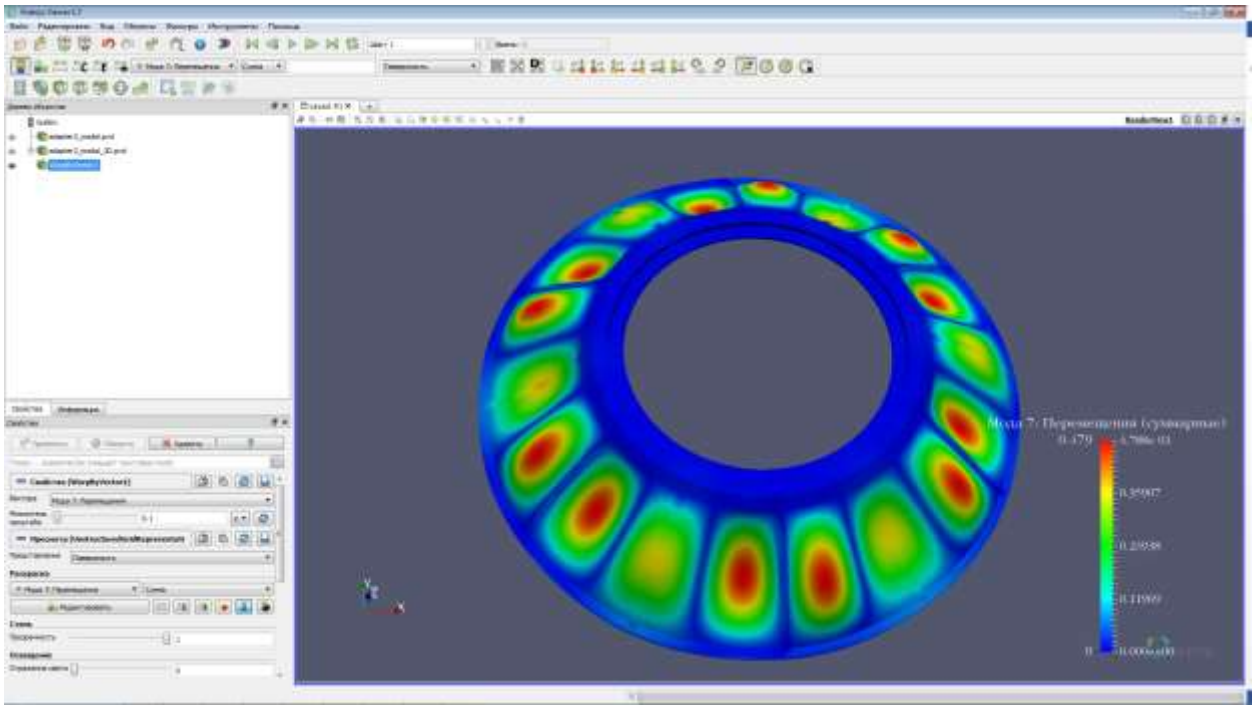


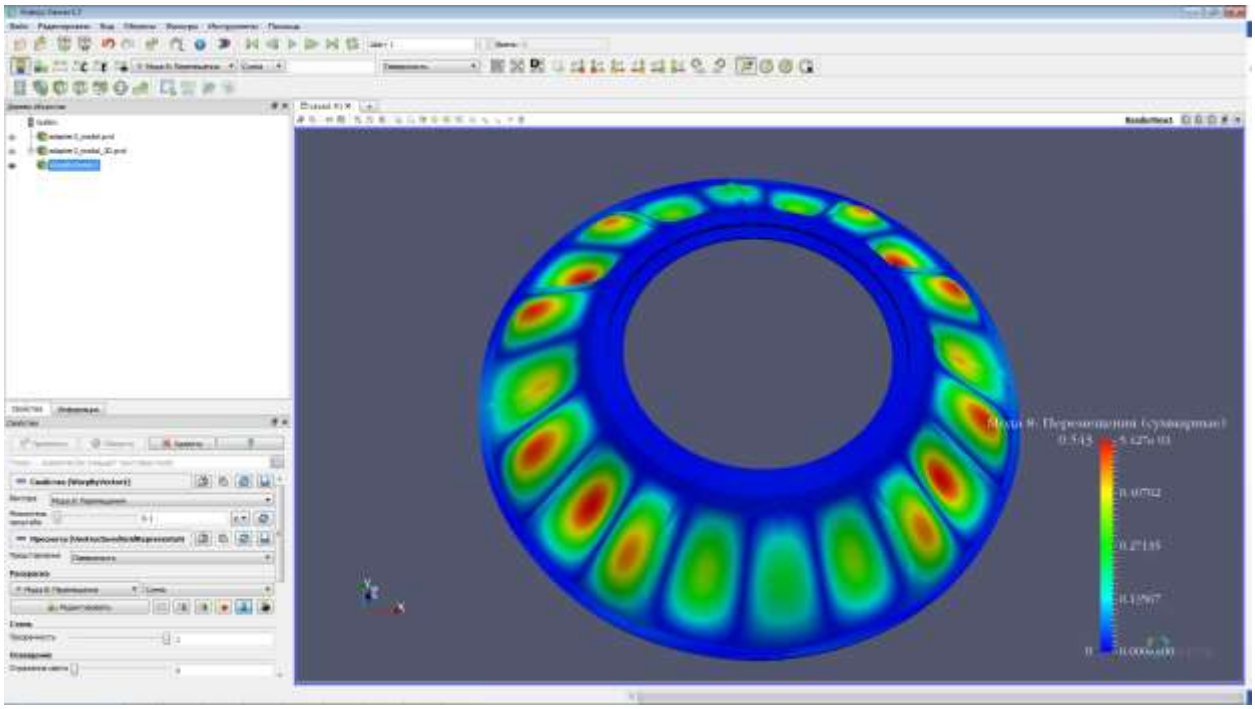












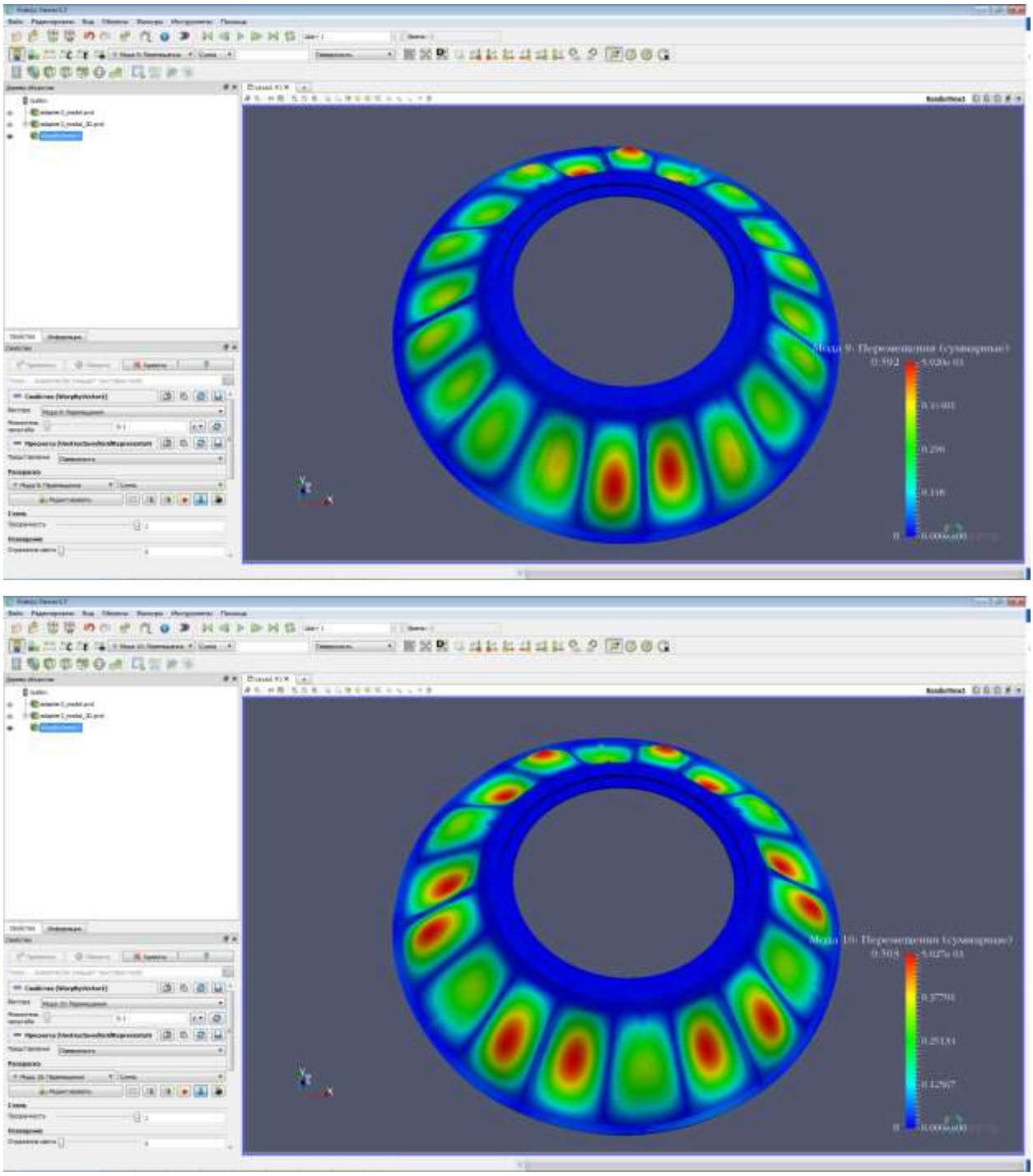


Рисунок 298 Собственные формы колебаний адаптера на 10 минимальных резонансных частотах (сверху вниз - с первой по десятую).

Определение напряжений в баке с жидкостью при сейсмическом воздействии

Бак выполнен из стали 12Х18Н10Т (модуль Юнга 1.98e11 Па, коэффициент Пуассона 0.3, плотность 7800 кг/м^3). Жидкость в баке имеет плотность 1000 кг/м^3. Расчетная модель бака приведена на Рисунок 299. В результате проведения расчета необходимо было определить:

1. Собственные частоты и формы колебаний бака с жидкостью

2. Напряжения в конструкции бака от действия сейсмического нагружения.

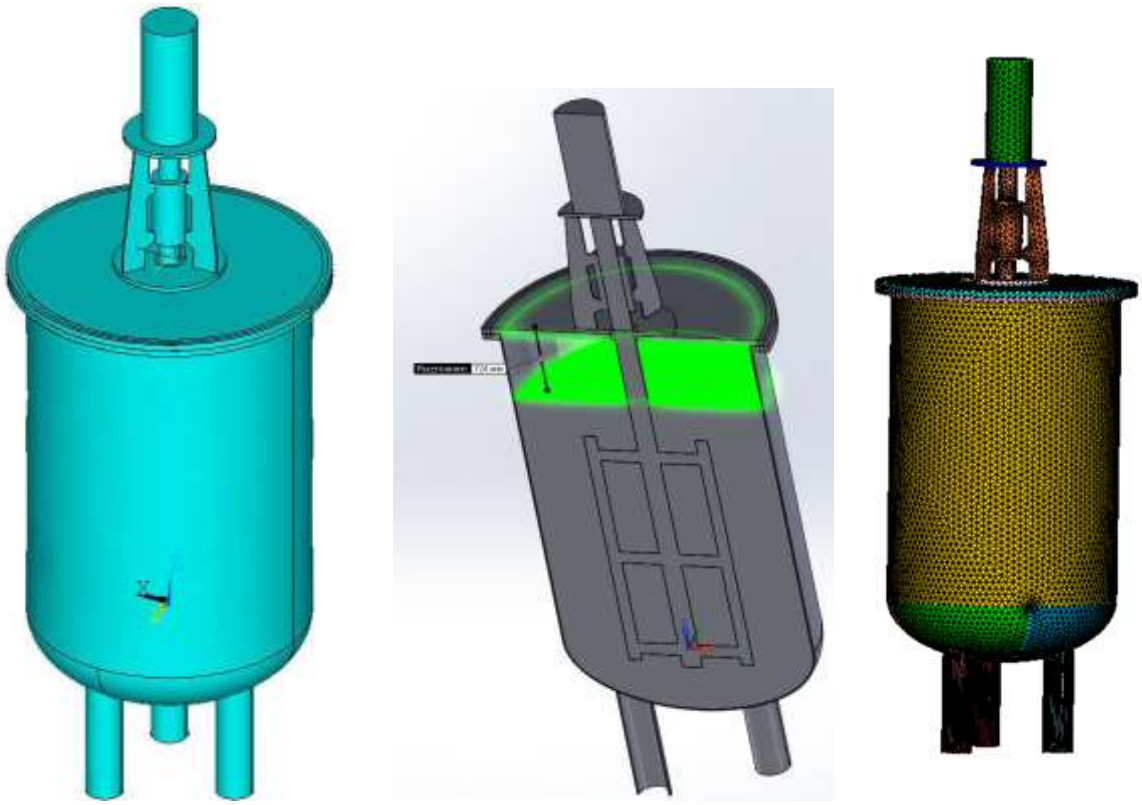


Рисунок 299 Геометрическая модель бака (слева), уровень заполения его жидкостью (в центре) и конечноэлементая модель

Собственные частоты и формы колебаний бака приведены на Рисунок 300:

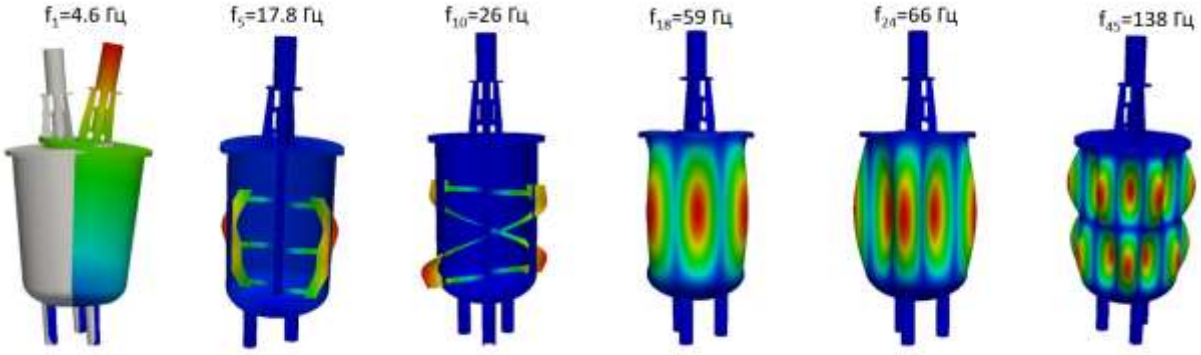


Рисунок 300 Собственные частоты и формы колебаний бака

Для расчета бака на сейсмическое воздействие использовались приведенные в таблице 1 спектры ускорений (Рисунок 301).

Таблица 1- Обобщенные спектры ответа для землетрясения амплитудой 6 баллов на отметках + 4 ÷ 5 метров

Частота	Горизонтальное направление	Оси *x* и *y* в горизонтальной	Вертикальное направление

f, Гц	(плоскость $x0y$)		плоскости		(ось z)	
	a_{xy}, м/с^2 (n_{xy}, g)		$a_x = a_y$, м/с^2 ($n_x = n_y$, g)		a_z, м/с^2 (n_z, g)	
0	0,565	(0,0576)	0,399	(0,0407)	0,331	(0,0338)
1	0,920	(0,0938)	0,662	(0,0675)	0,450	(0,0459)
2	2,25	(0,229)	1,59	(0,162)	1,242	(0,127)
3	2,81	(0,287)	1,99	(0,203)	1,463	(0,149)
4	3,20	(0,326)	2,26	(0,231)	1,546	(0,158)
8,4	3,00	(0,306)	2,12	(0,216)	1,13	(0,115)
12,5	1,698	(0,173)	1,20	(0,122)	0,863	(0,183)
16	1,58	(0,161)	1,117	(0,114)	0,709	(0,088)
24	1,13	(0,115)	0,799	(0,0815)	0,380	(0,0723)
50	1,13	(0,115)	0,799	(0,0815)	0,380	(0,0723)

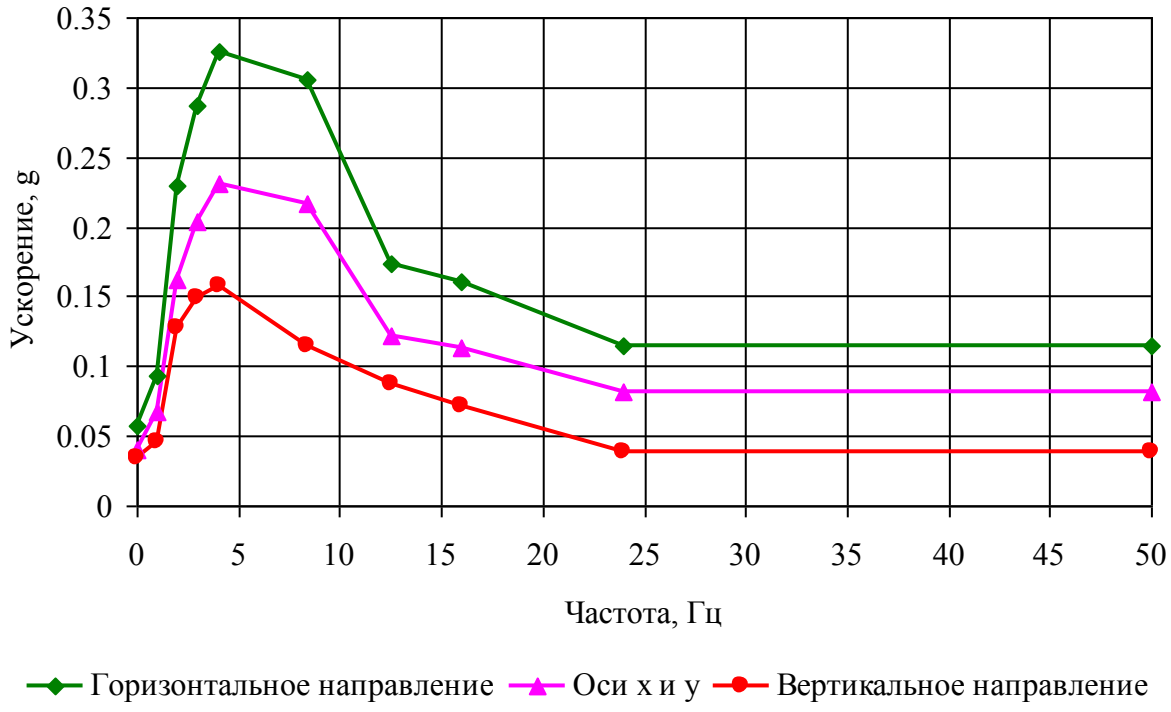


Рисунок 301 Обобщенные спектры ответа для землетрясения силой 6 баллов на отметках + 4- 5 метров

При заданных нагрузках максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу достигались в опорах бака (Рисунок 302).

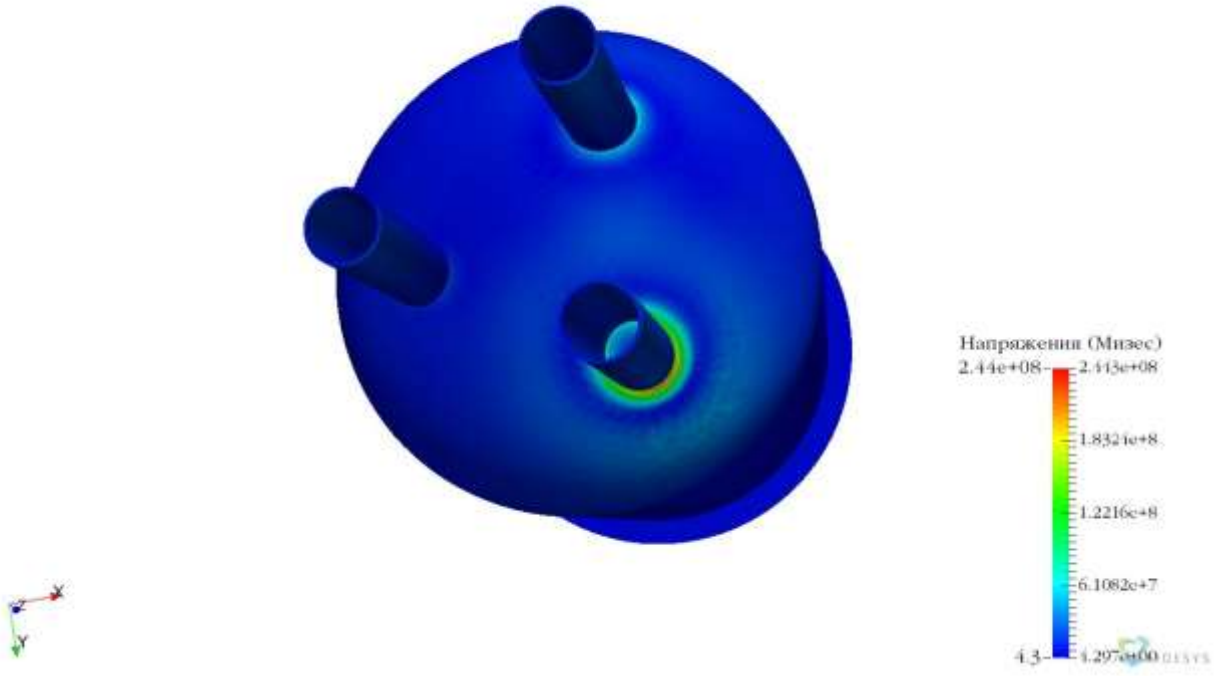


Рисунок 302 Эквивалентные напряжения по Мизесу (максимум напряжений)

Аналогичная задача решалась для конструкции, состоящей из бака на раме (Рисунок 303). Корпус бака представляет собой обечайку с плоскими эллиптическими днищами. Бак нагружен наружным расчетным давлением p = 0,2 МПа при расчетной температуре $t = 200^{o}$ С. Материал элементов корпуса бака и рамы – сталь (E=2e11МПа, плотность=7800кг/м^3, коэффициент линейного температурного расширения= 1.7e-5.). Масса бака на раме не более $M_б$ = 1655 кг. Элементы бака на раме должны выдерживать сейсмические воздействия при максимальном расчетном землетрясении (МРЗ) силой 7 баллов и проектном землетрясении (ПЗ) силой 6 баллов по шкале MSK- 64 на отметке 4 метра.

Необходимо было провести проверку прочности элементов конструкции на режимах:

- от действия наружного избыточного давления (прочность и устойчивость);
- при НЭ (нормальной эксплуатации) от действия весовых нагрузок,
- при транспортировке бака;
- от сейсмических воздействий при сочетании нагрузок НЭ+ПЗ.

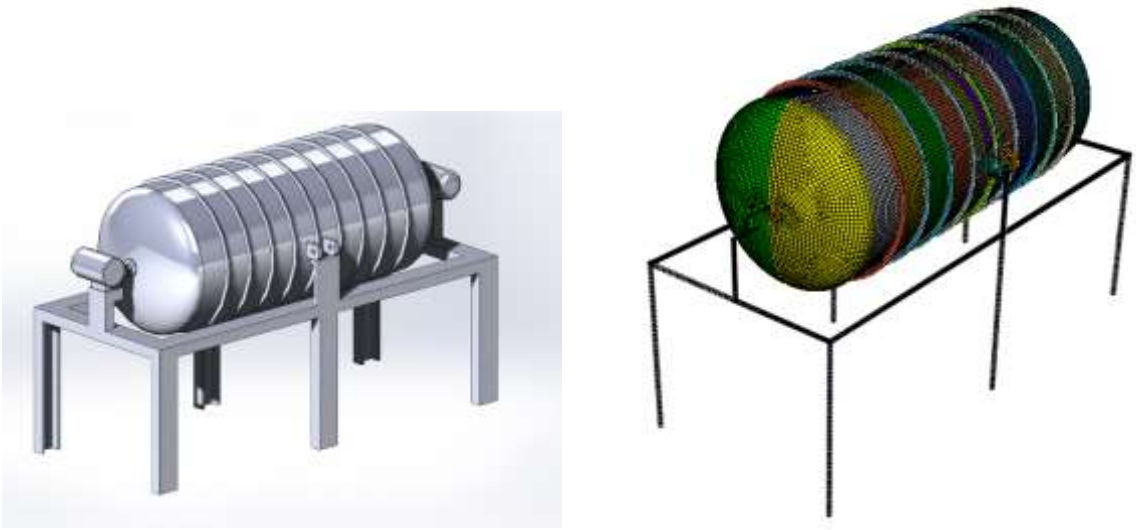


Рисунок 303 Геометрическая (слева) и конечноэлементая (справа) модели бака на раме

Представленная модель была смоделированная следующим образом:

- бак представлен в виде цилиндрической оболочки с ребрами жесткости (оболочечные элементы);
- рама – балочными элементами;
- ось, проходящая внутри бака, представлена в виде балочных элементов с дополнительными элементами точечных масс;
- двигатели также заменены точечными массами.

Были допущены следующие предположения:

- бак опирается на раму (запрещены перемещения бака по всем осям, повороты разрешены)
- в месте входа оси в бак, также связаны перемещения (точек отверстия в баке и узла на оси по плоскости), а повороты разрешены.

Результаты расчета на устойчивость при действии внешнего давления на бак (0.2МПа), температуры 200˚С и гравитационных нагрузок приведены приведены на Рисунок 304.

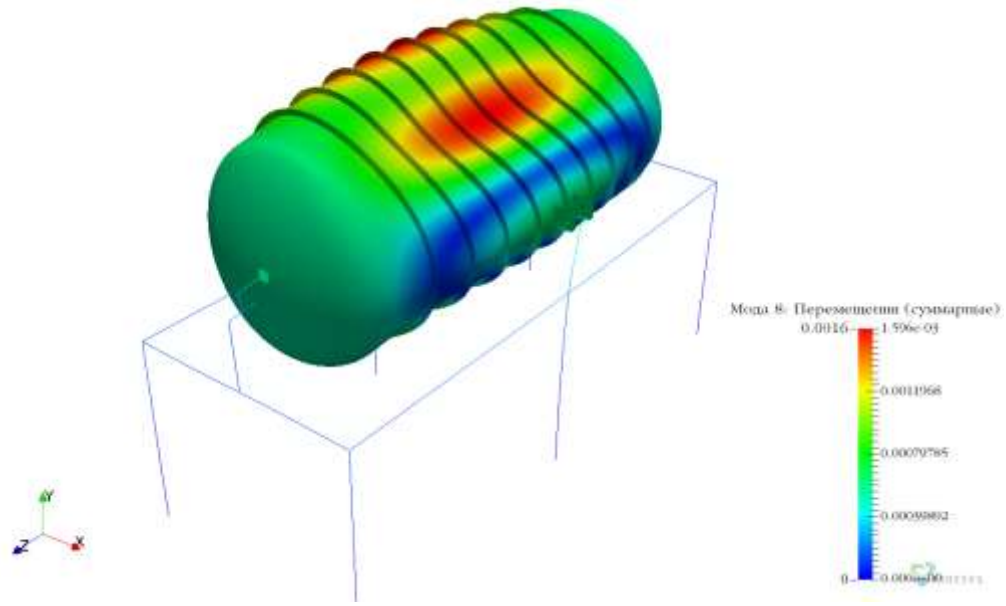


Рисунок 304 Форма потери устойчивости бака, соответствующая коэффициенту запаса 108.3

Результаты модального анализа бака приведены на Рисунок 305.

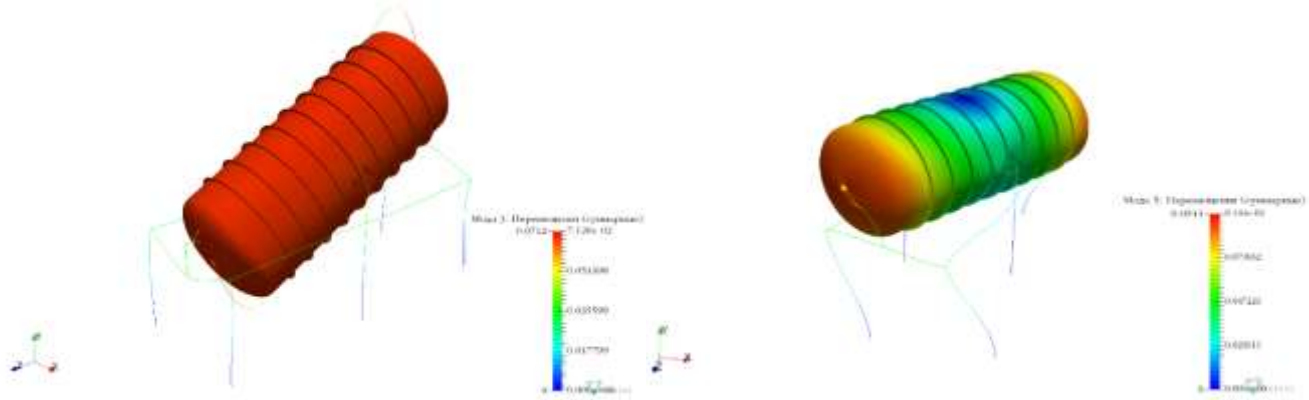


Рисунок 305 Формы собственных колебаний на резонансных частотах 25.7 Гц (слева) и 47.5 Гц (справа).

Результаты расчета при ПЗ 6 баллов по шкале MSK-64 на отметке 4 метра (прикладываются максимальные ускорения ax = az=2,26 м/с^2, ay=1,546 м/с^2) приведены на Рисунок 306.

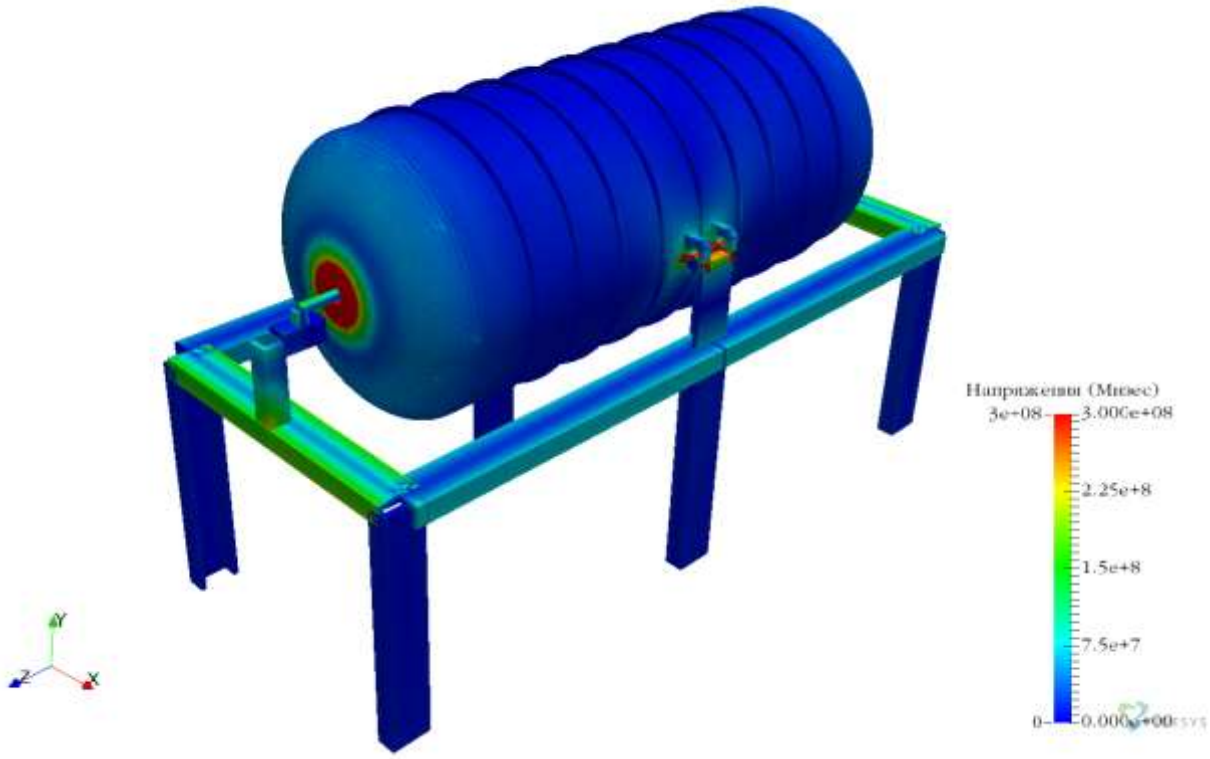


Рисунок 306 Распределение интенсивности напряжений Мизеса в баке

Максимальные напряжения (концентраторы), как и ранее, расположены в зонах крепления бака к раме. Непосредственно в элементах конструкции напряжения не превосходят 300МПа.

Анализ напряжений в механическом редукторе

В данной задаче рассматривается множественное контактное взаимодействие между составными элементами механического редуктора. Редуктор содержит волнообразователь, сепаратор, жесткое профилированное колесо и 28 роликов (Рисунок 307). Материал всех деталей редуктора: сталь 30ХГСА со следующими характеристиками: модуль Юнга 2.15e+011 Н/м^2, коэффициент Пуассона 0.29, плотность 7850 кг/м^3, предел текучести 8.3e+8 Н/м^2. Граничные условия: поверхности ЖК1 и Сеп1 – зафиксированы, к поверхности Волн1 приложен крутящий момент 10 Нм (относительно оси редуктора).

Конечноэлементая сетка редуктора, построенная в CAE Fidesys, приведена на Рисунок 308. Ввиду наличия контактного взаимодействия между элементами редуктора сетка на границе между ними в общем случае неконформная. Препроцессор CAE Fidesys позволил автоматически определить контактные поверхности между контактирующими элементами редуктора (Рисунок 307).

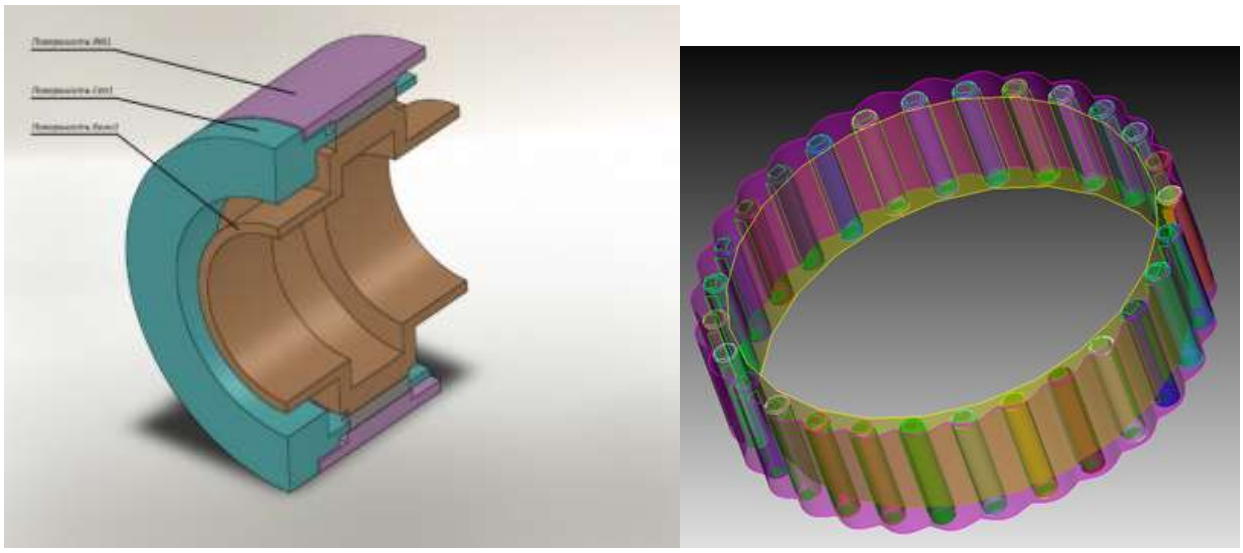


Рисунок 307 Геометрическая модель редуктора и контактные поверхности внутри него

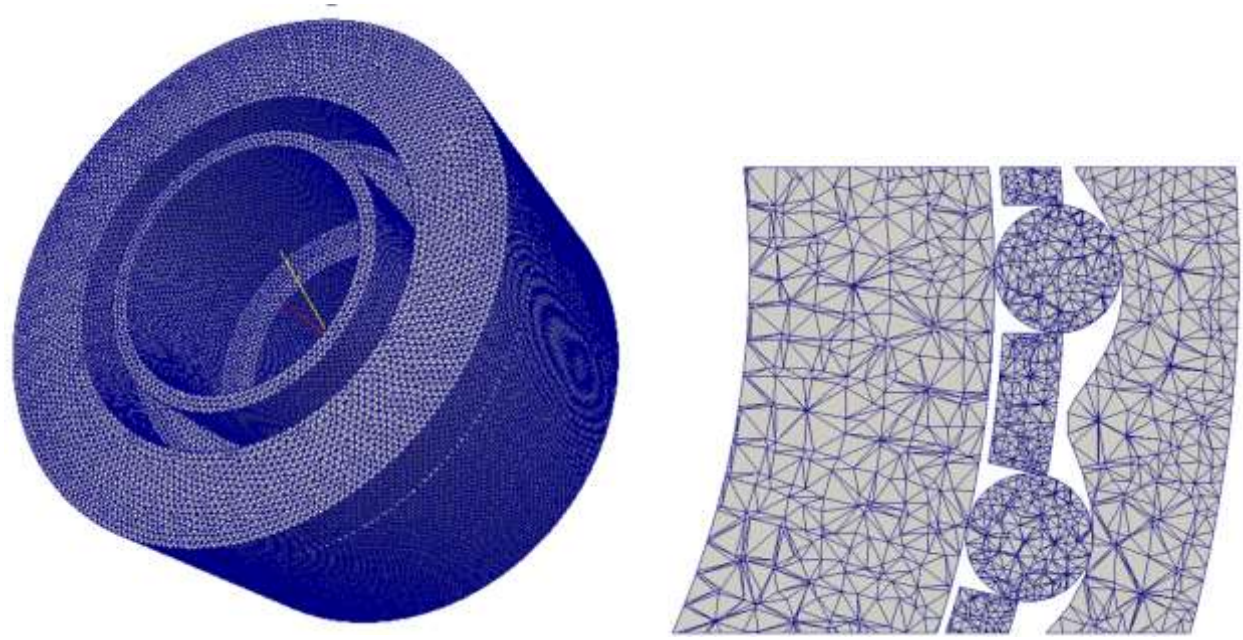


Рисунок 308 Конечноэлементная дискретизация редуктора в CAE Fidesys (слева) и сетка вблизи роликов (справа).

В результате решения задачи были определены напряжения и деформации при контактном взаимодействии деталей редуктора (Рисунок 309). Значения моментов на закрепленных поверхностях:

Поверхность Сеп1 MX = 6.12978 MY = -1.08858 MZ = -0.478583

Поверхность ЖК1 MX = 4.06516 MY = 1.1013 MZ = 0.475648

Максимальные и минимальные напряжения:

Sxx min = -3.59364e+006, max = 3.16708e+006

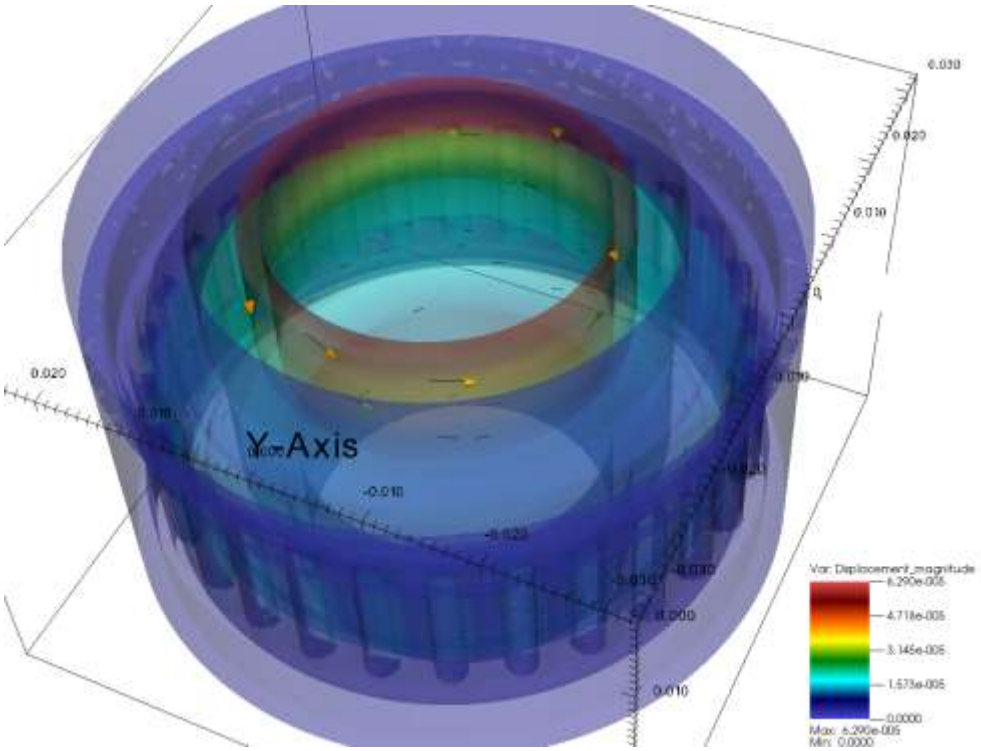
Syy min = -8.65265e+006, max = 9.0849e+006

Szz min = -7.83873e+006, max = 1.37907e+007

Sxy min = -7.31504e+006, max = 5.99111e+006

Syz min = -4.68428e+006, max = 5.24167e+006

Szx min = -5.84882e+006, max = 7.22948e+006



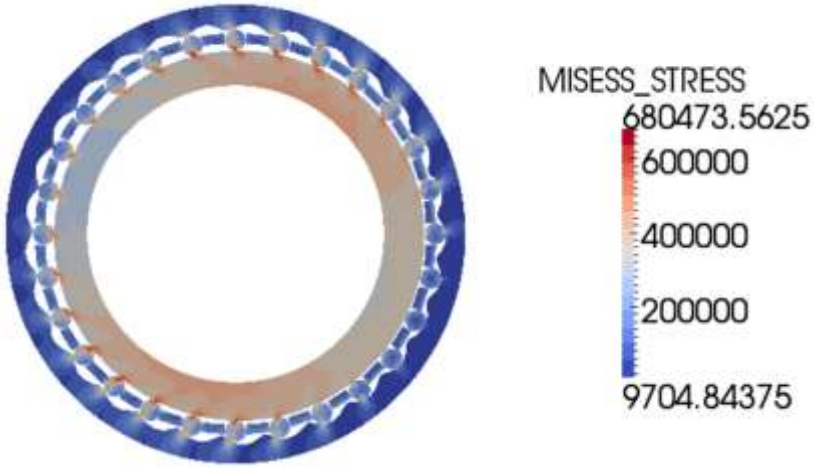


Рисунок 309 Векторное поле перемещений (сверху) и интенсивность напряжений Мизеса в сечении (снизу) редуктора.

Математическое моделирование деформаций ограничителей хлыстовых перемещений при разрывах трубопроводов

В высокоэнергетических трубопроводах с давлением транспортируемой среды p от 9,1 до 13,5 МПа и температурой T = 168°С возможно возникновение разрывов в местах изгиба. Для ограничения хлыстовых колебаний трубопровода используются ограничители (Рисунок 310)

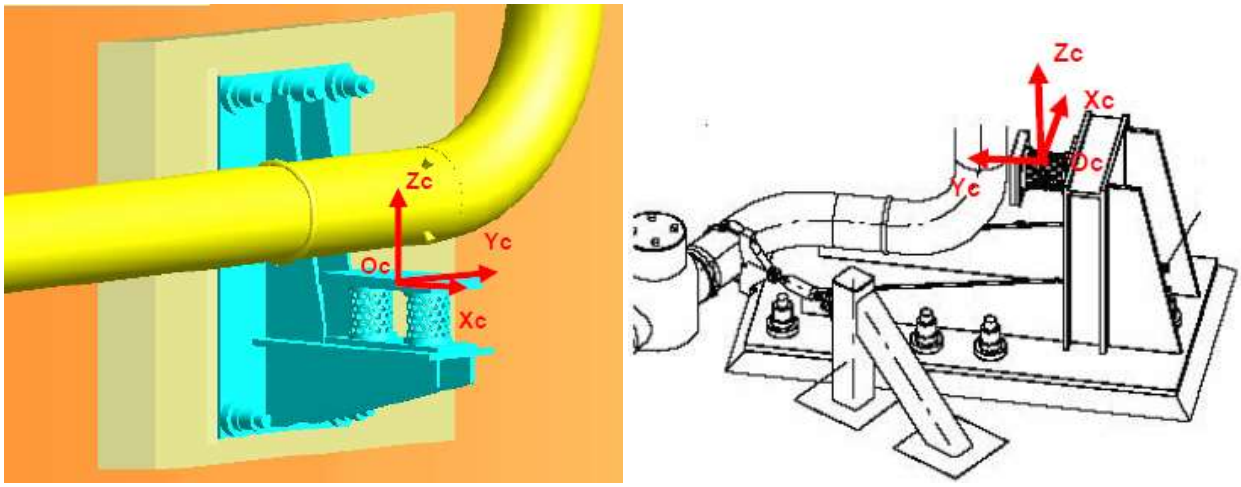


Рисунок 310 Схема установки ограничителей хлыстовых колебаний

Ограничители изготавливаются путем сверления отверстий в трубах диаметром 224 мм и толщиной 22 мм (Рисунок 311).

Для моделирования больших упругопластических деформаций в ограничителе использовалась модель Мизеса со следующими параметрами материала: предельные деформации A_5=50%, модуль Юнга $E = 2 \times 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона 0.3, предел текучести $R_{p0.2}$=160 МПа, предел прочности R_m =450 МПа, упрочнение описывалось следующей зависимостью между напряжениями и деформациями: $\sigma = R_m - \frac{R_m - R_{p0.2}}{\left(0.002 - \varepsilon_2\right)^n}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon\right)^n$, где ε_2 = 80% от предельных деформаций A5, n = 3.2.

Расчет ограничителя проводился на четверти модели с использованием спектральноэлементной сетки 5го порядка (Рисунок 312), позволившей, с одной стороны, использовать достаточно грубую начальную дискретизацию, а, с другой, обеспечить сходимость итерационного процесса решения высоконелинейной задачи (с одновременными физической, геометрической и контактной нелинейностями) до высоких уровней деформаций (более 100%) за счет описания деформирования дискретной модели ограничителя нелинейными базисными функциями МСЭ (Рисунок 313). При использовании МКЭ для решения данной задачи наблюдается возникновение эффекта блокировки (locking) [788, 789] конечноэлементной дискретизации при значительно более низких уровнях деформации.

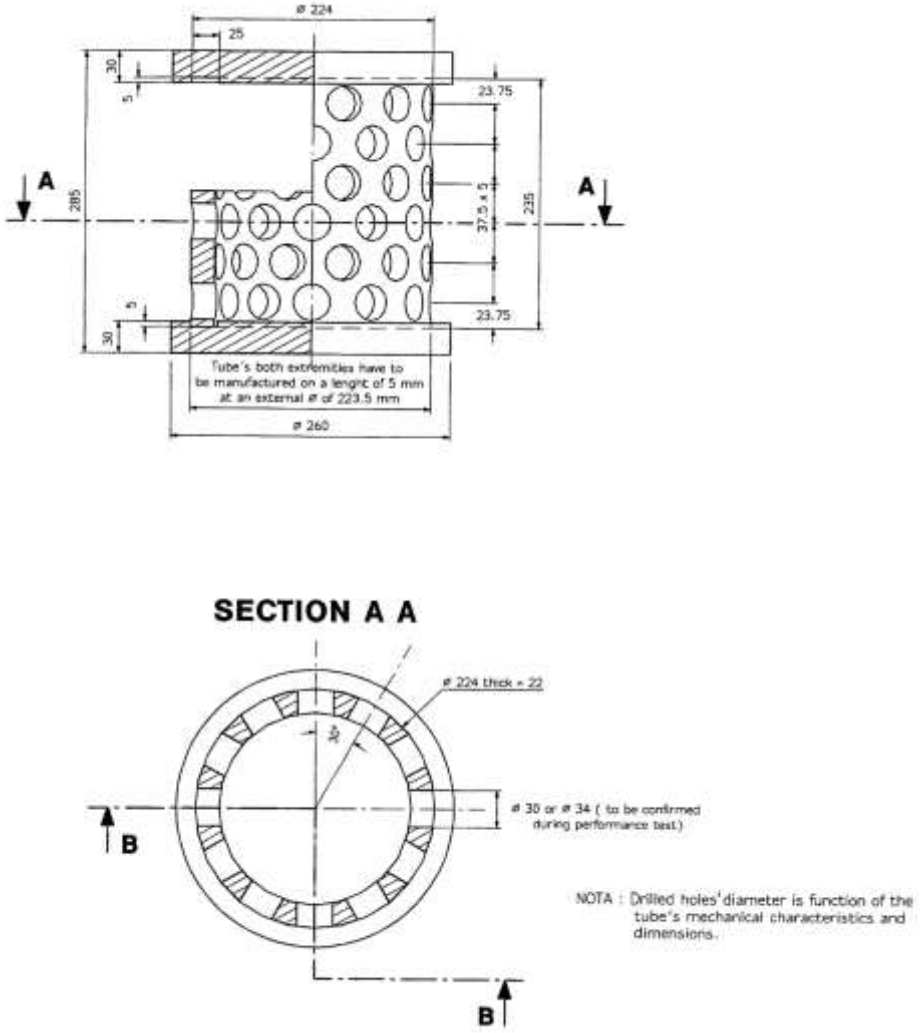


Рисунок 311 Параметры геометрической модели ограничителя

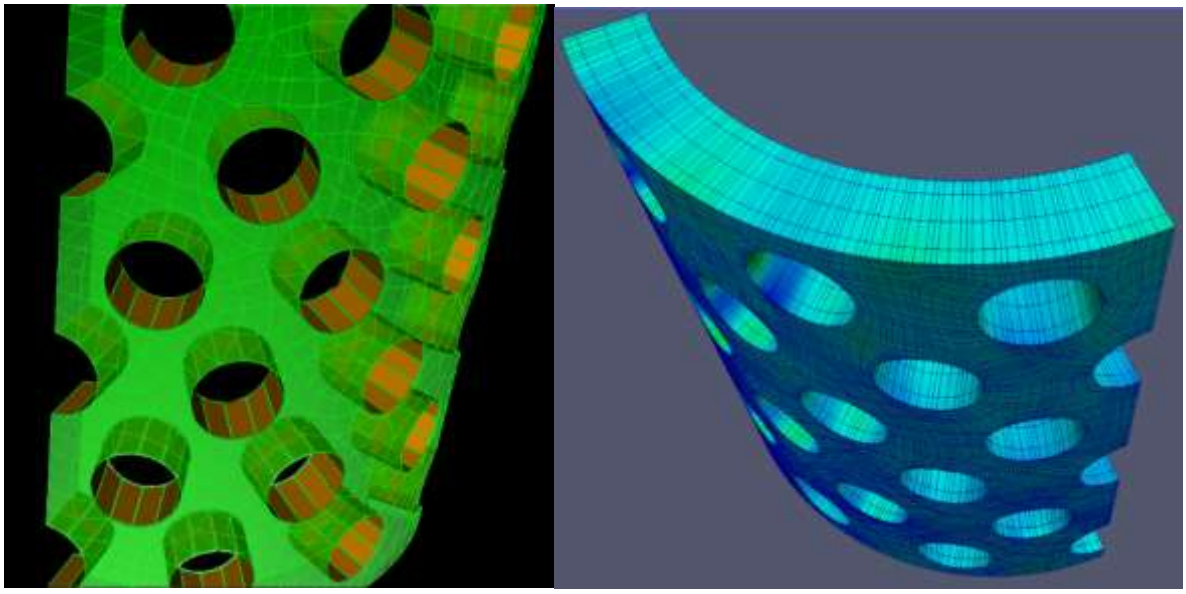


Рисунок 312 Дискретизация ограничителя спектральными элементами

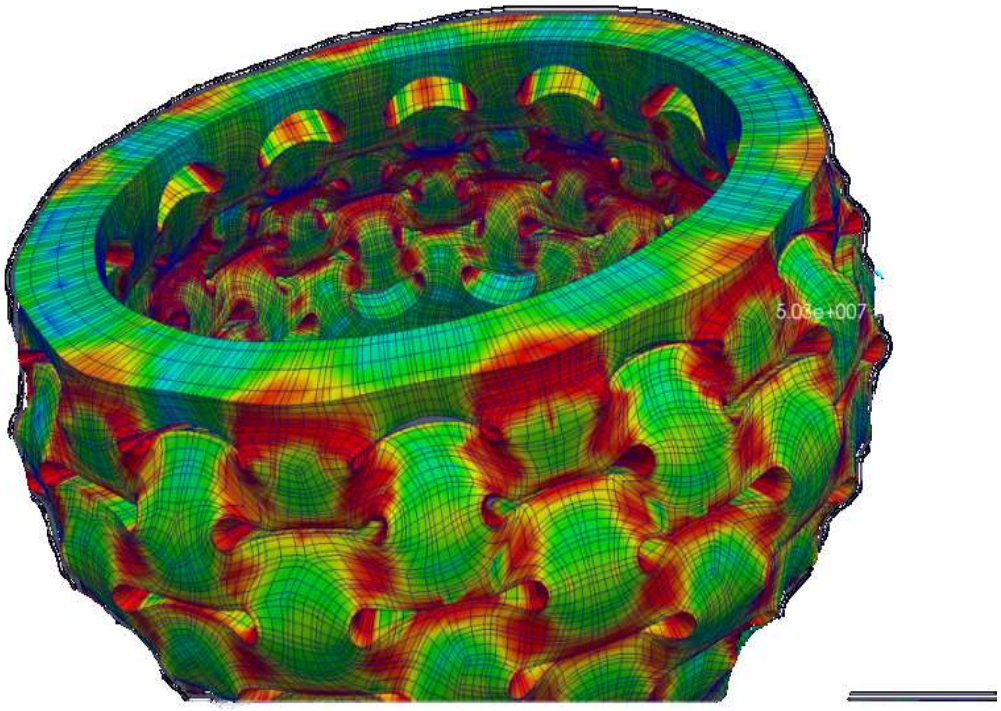


Рисунок 313 Высоконелинейное деформирование ограничителя с учетом контактной, физической и геометрической нелинейностей.

Геомеханический анализ горных выработок

Осуществляя отработку запасов в горных выработках, предприятия горнодобывающей отрасли имеют достаточно широкие возможности по оперативной корректировке направлений, темпов и последовательности ведения горных работ в пределах определенных локальных зон (участков) [209, 210, 241, 254, 670]. Однако, любые альтернативные варианты могут иметь весьма разные последствия с позиций геомеханики. При благоприятном варианте, ведение горных работ будет вестись ритмично, без инцидентов и осложнений. При неблагоприятном варианте, последствия могут меняться от увеличения затрат на крепление и перекрепление горных выработок, до полного обрушения и потери одного или нескольких объектов. Поэтому, прогнозирование изменения напряженно-деформированного состояния массива горных пород, является весьма актуальной задачей при краткосрочном планировании ведения горных работ.

При выборе оптимального решения необходимо учитывать комплекс вопросов по обеспечению геомеханически безопасного функционирования стационарного объекта вблизи потенциальных зон концентрации напряжений. Во избежание негативных последствий решение необходимо принимать на основе геомеханических расчетов и моделирования с применением специализированного программного обеспечения – систем прочностного анализа (подробно вопросы геомеханического моделирования рассмотрены в Главе 3). Отсутствие детальной проработки геомеханической ситуации в исследуемом объекте, без учета этапов отработки

залежи, с высокой вероятностью, может приводить к возникновению критических напряжений в элементах конструкций и последующим разрушениям, и пластическим деформациям. Подобные проявления горного давления исключают возможность безопасной эксплуатации объекта.

Рассмотрим подобную ситуацию на основе подземного, капитального сооружения, расположенного на глубине более 1 км. Сложная геомеханическая обстановка связана со многими факторами, а сам механизм поведения пород в окрестности подземной выработки основан на законах механики сплошных сред. Смещения пород и нагрузка на крепь вызваны процессами образования вокруг выработок зоны пластических деформаций. Поскольку в зоне пластических деформаций напряжения в массиве пород понижены, а на границе этой зоны напряжения повышены, то под воздействием этого повышенного напряжения, а также за счет расширения трещин, происходит выдавливание пород в выработки.

На Рисунок 314 приведена трехмерная модель гоных выработок и зона разгрузки вокруг них.

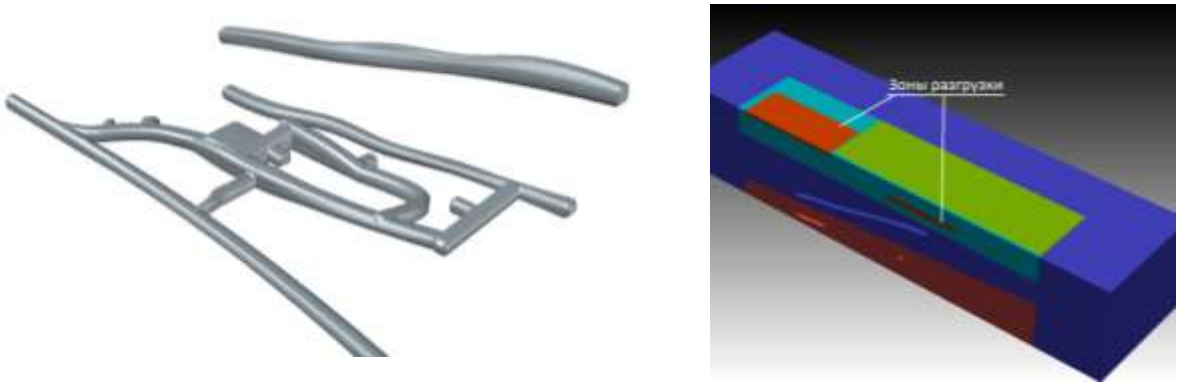


Рисунок 314 Трехмерная модель горных выработок (слева) и зона разгрузки вокруг них, построенная в CAE Fidesys.

Результат дискретизации данной модели конечными элементами представлен на Рисунок 315. Далее сеточная модель разбивается на 5 блоков, различающихся по своим физико-механическим свойствам (выделены различными цветами на Рисунок 315):

- блок №1 - это безрудные горные породы, представляет собой основную часть массива до рудного тела, вокруг рудного тела и продолжается после рудного тела до слабых пород в которых расположен рассматриваемый объект;
- блок №2 – это самый нижний блок в модели, в котором располагается основная часть сооружения;
- блок №3 представляет собой рудное тело;
- блок №4 представляет собой заложенное пространство в рудном теле;
- блок №5 часть разгруженного массива в рудном теле.

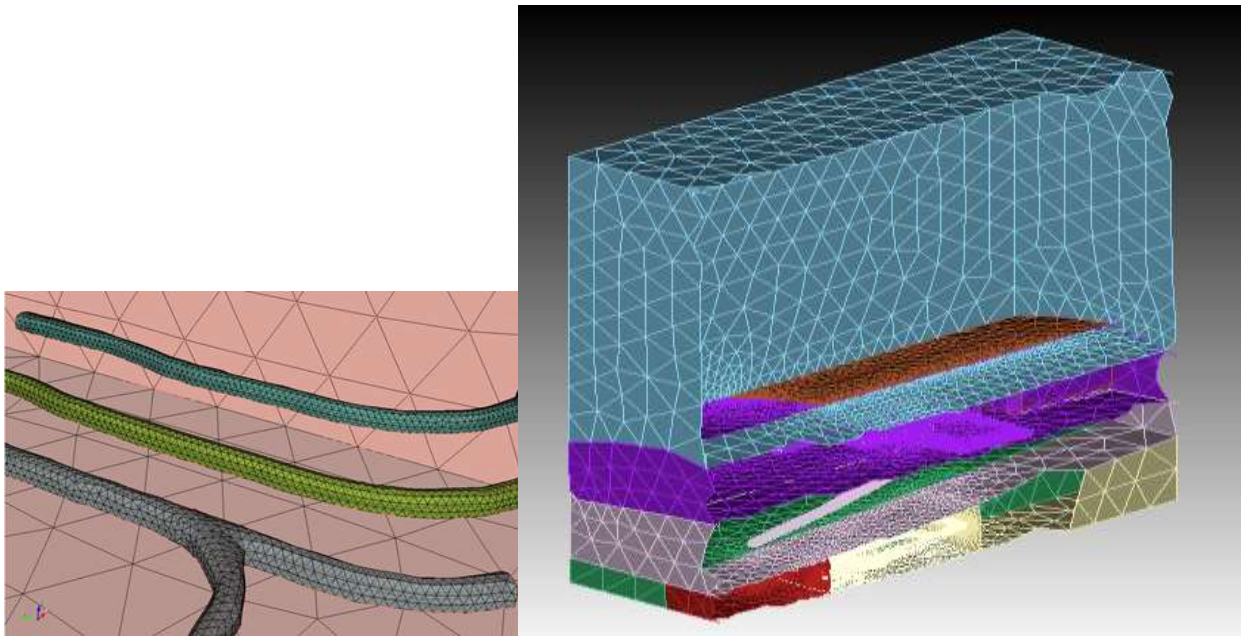


Рисунок 315 Конечноэлементные модели горных выработок в CAE Fidesys

В таблице ниже приведены физико-механические свойства блоков горных пород, участвующих в расчетной модели.

Таблица 1 – Физико-механические свойства блоков в модели

Физ.мех. параметр	Порода блок №1	Мергель блок №2	Руда блок №3	Закладка блок №4	Разгрузка блок №5
Модуль Юнга, ГПа	10	1	8	1	1
Коэффициент Пуассона	0,22	0,49	0,3	0,4	0,45
Плотность, кг/м^3	2700	2700	4300	2100	4000
Предел текучести на растяжение, Мпа	7,9	1,9	3,9	0,39	1,9
Предел прочности на растяжение, Мпа	8	2	4	0,4	2
Предельные деформации на растяжение	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Предел текучести на сжатие, МПа	90	25	64	2,9	29
Предел прочности на сжатие, МПа	100	27	65	3	30
Предельные деформации на сжатие	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02

Далее на модели задаются граничные условия, которые включают в себя:

- запрещение перемещений по всем направлениям для нижней грани модели;
- запрещение перемещений для боковых граней модели вдоль осей, перпендикулярных граням;
- для всей модели задается действие гравитации;
- на верхнюю грань модели прикладывается давление, равное глубине расположения этой грани, в данном случае 24 МПа.

После проделанных подготовительных работ по построению дискретной модели горных выработок запускается расчет модели. Расчет производился в рамках модели пластичности Друкера-Прагера (Глава 3) с упрочнением.

На Рисунок 316 представлены результаты расчета модели CAE Fidesys с распределением напряжений и пластических деформаций для исходной модели и с увеличенной зоной разгрузки.

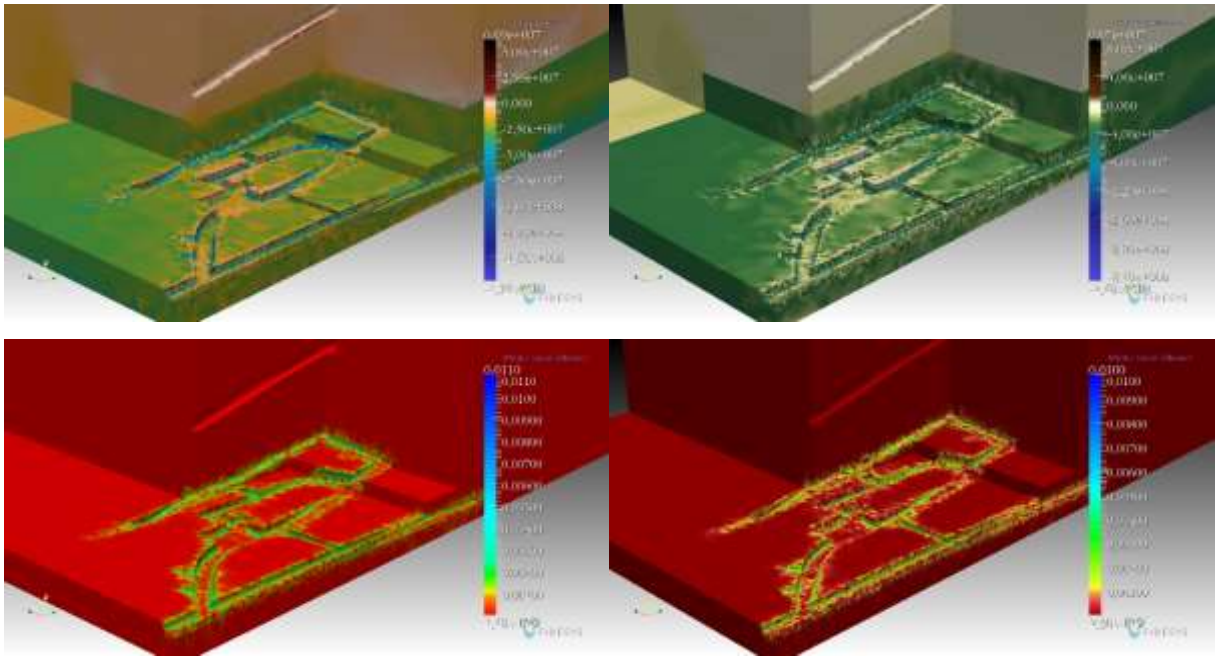


Рисунок 316 Горизонтальные напряжения (сверху) и интенсивность пластических деформаций (снизу) для исходной модели (слева) и с увеличенной зоной разгрузки (справа).

На основе полученных результатов расчета можно сделать следующие выводы:

- горизонтальные напряжения в окрестности горных выработок превышают предел текучести горной породы, что подтверждается наличием значительных пластических деформаций на контурах выработок;
- в результате моделирования с увеличенной зоной разгрузки, ожидаемое улучшение геомеханической обстановки в выработках не произошло, следует

отметить увеличение площадей, вовлеченных в процесс пластического деформирования;

- выработка, находящаяся над выработками капитального сооружения, пройденная в крепких горных породах (блок №1), не испытывает пластических деформаций.

Полученные результаты подтверждают, что состояние капитального сооружения со временем будет только ухудшаться, т.к. по большинству выработок в модели имеются пластические деформации и даже после ухода фронта работ (расчет с увеличенной зоной разгрузки) деформации продолжат развиваться, так как выработки построены в сильно нарушенных и слабых по своим физико-механическим параметрам горных породах.

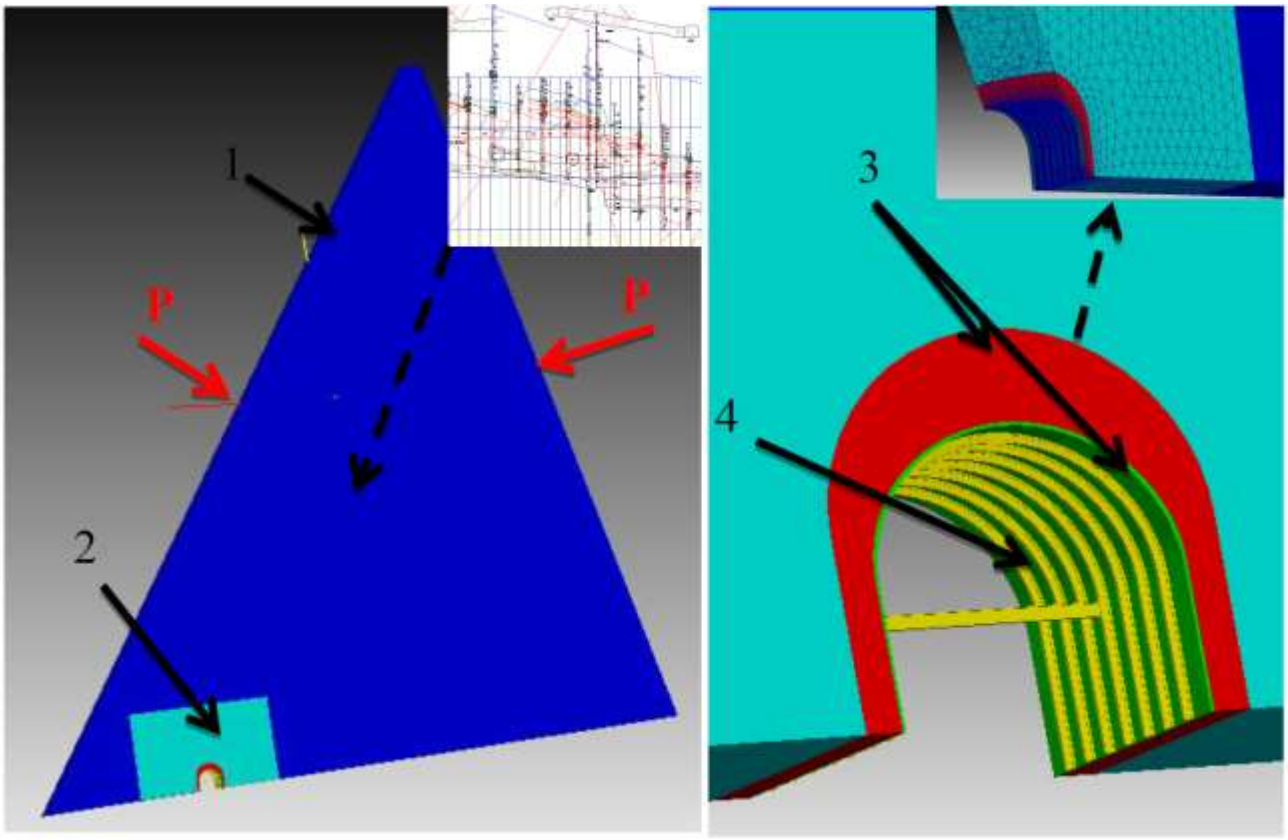


Рисунок 317 Конечноэлементная модель выработки с крепями в CAE Fidesys

Помимо рассмотренной выше задачи, стоит отметить, что применение CAE Fidesys при проведении геомеханического анализа горных выработок позволяет значительно повысить эффективность работ по оптимизации формы и расположения крепей при проектировании геометрии подземных сооружений горных выработок [254] за счёт возможности учета конечных деформаций горного массива, повышения точности дискретизации геометрических моделей горного массива и крепей в выработке, расширения функциональных возможностей

исследования напряженно-деформированного состояния, уменьшения затрат на экспериментальные исследования, снижения числа аварий в шахтах и горных выработках. Для проведения данных расчетов в CAE Fidesys была построена трехмерная модель участка выработки. Модель, представленная на Рисунок 317, включает в себя:

1) массивный блок горных пород, который ограничен тектоническими нарушениями.
2) блок горных пород с интенсивными нарушениями и трещиноватостью.
3) блок горных пород, которыми заполняют пустоты между затяжкой и стенками выработки.
4) блок стальных крепей – арочная податливая крепь с заданным шагом крепления 0,5м между рамами. На одной из центральных рам жестко закреплена двутавровая балка для монтажа трубопроводов.

На данной модели была сгенерирована тетраэдральная конечноэлементная сетка, сгущающаяся вблизи крепей. В силу симметрии из модели выделялась представительная часть толщиной 4 метра, вмещающая в себя 7 крепей, одна из которых расперта двутавровой балкой. Было произведено закрепление торцевых граней модели по оси z, нижней грани модели - по оси y, основания арочных крепей - по всем осям. К боковым граням модели прикладывалось распределенное давление 120 Мпа для достижения необходимых деформаций крепи, соответствующих смещениям, наблюдаемым в реальной выработке (Рисунок 318).

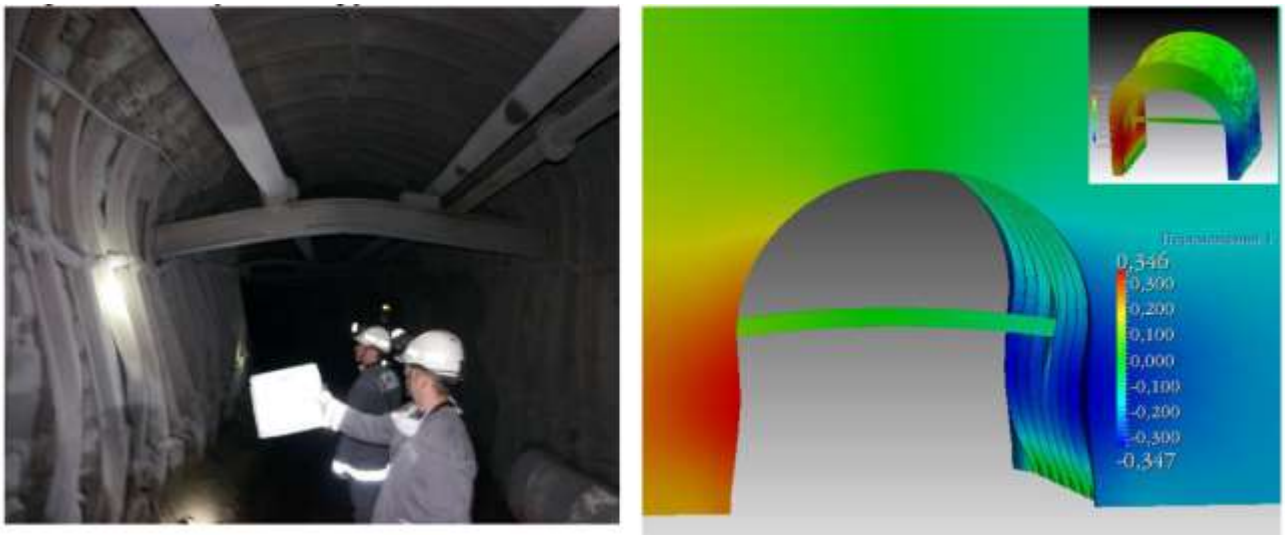
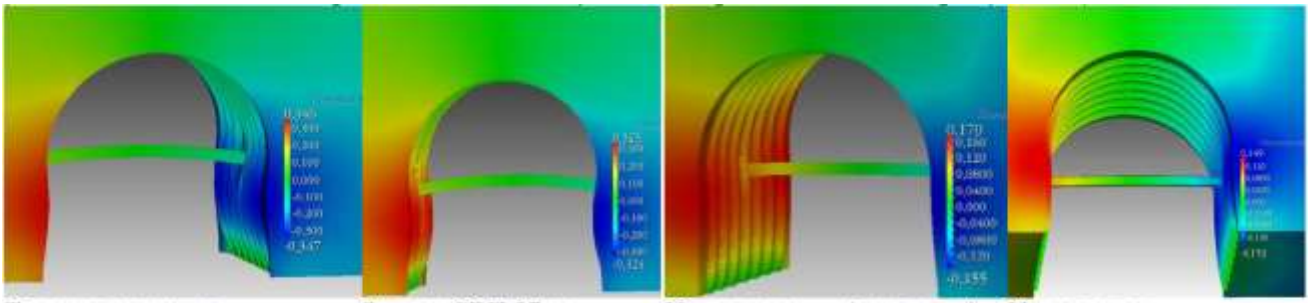


Рисунок 318 Реальные (слева) и смоделированные (справа) деформации в горной выработке

Стоит отметить, что полученная величина давления условно может считаться значением главного напряжения на данной площадке. С учетом глубины рассматриваемого участка выработки - 950м, полученное значение в 120МПа превосходит напряжения, обусловленные

действием гравитационных сил почти в 4 раза, что свидетельствует о локальном влиянии тектонических компонент, обусловленных сложной геологической структурой, влиянием горных работ и отработанной зоной, контактирующей с проблемным участком рудника.

Дополнительно был проведен расчет модели с физико-механическими характеристиками блока 3, получаемыми в результате укрепления горной массы за затяжкой. Аналогично были проведены расчеты для более прочной крепи СВП 33. Результаты представлены на Рисунок 319.



Текущая ситуация горизонтальная конвергенция 70см

Замена СВП 27 на СВП 33 Горизонтальная конвергенция 64 см

Укрепление (тампонаж) Горизонтальная конвергенция 32 см

Укрепление (тампонаж) + Замена СВП 27 на СВП 33 Горизонтальная конвергенция 30 см

Рисунок 319 Результаты моделирования технических решений по укреплению горных выработок с крепями.

Анализируя приведенные результаты расчета, можно сделать вывод, что горизонтальная конвергенция выработки при расчете текущей ситуации в выработке составила 70 см, в случае укрепления (тампонаже) “закрепного” пространства и формировании условного свода с повышенными механическими характеристиками горизонтальная конвергенция составила 32 см, что свидетельствует о том, что укрепление сыпучего горного материала за затяжкой повышает устойчивость выработки. Применение крепи типа СВП 33 не способно при прочих равных условиях обеспечить лучшую устойчивость выработки, а лишь незначительно уменьшает деформации, горизонтальная конвергенция боков выработки составляет 70 см для профиля СВП 27 и 64 см для СВП 33.

На основании проведенного исследования и полученным результатам моделирования в пакете прочностного анализа CAE Fidesys, основным мероприятием, позволяющим повысить устойчивость выработки в условиях повышенных горизонтальных напряжений, является укрепление горной массы за затяжкой крепи.

5.5 Заключение

В данной главе дан обзор системы инженерного анализа CAE Fidesys – российского программного пакета, нашедшего применение в ряде отраслей промышленности. Наряду с описанием структуры и функционала отдельных модулей, отмечаются ключевые особенности CAE Fidesys: полное распараллеливание расчетного кода; заложенные в пакет модифицированные механические и математические модели, позволяющие решать задачи о перераспределении конечных деформаций; наличие двух расчетных ядер – ядра, основанного на методе конечных элементов, и ядра, использующего метод спектральных элементов.

Пакет CAE Fidesys является промышленной программной системой, которая обеспечивает проведение инженерного анализа прочности на всех этапах жизненного цикла изделий и является, таким образом, цифровым средством производства. Промышленная программная система, в отличие от программ, предназначенных для исследовательских целей, является «отчуждаемым» от разработчика интеллектуальным продуктом. Применительно к пакету прочностного анализа это, означает, в частности, что при использовании пакета не должны требоваться ни постоянное участие разработчика, ни углубленные знания пользователя в области механики деформируемого твердого тела; тем не менее, продукт должен технически поддерживаться разработчиком (вендором) и развиваться.

CAE Fidesys состоит из препроцессора (включающего блок генерации расчетных сеток), расчетного ядра (блока расчетных модулей) и постпроцессора.

Препроцессор CAE Fidesys поддерживает работу со всеми основными форматами данных, используемыми современными CAD-системами (системами инженерного проектирования) и пакетами инженерного анализа. Встроенный генератор сеток обеспечивает автоматическое создание трехмерных конечноэлементных моделей с использованием тетраэдральных, гексаэдральных, пирамидальных, призматических элементов и их комбинаций. Для двумерных, а также тонкостенных пространственных конструкций (оболочек) реализуется генерация неструктурированных конформных сеток из треугольных и четырехугольных элементов. Кроме этого, поддерживается построение балочных конечноэлементных моделей и моделей, содержащих комбинации объемных, оболочечных и балочных элементов. Предусмотрена возможность адаптации сетки к локальным особенностям геометрии и возможность сглаживания сетки с использованием различных метрик. Графический интерфейс пользователя CAE Fidesys позволяет задавать различные типы внешних воздействий, включая динамические и температурные нагрузки, а также физические свойства материалов, специфичные для разных частей изделия. Для многократно повторяющихся однотипных расчетов, например, при варьируемых размерах и расположении концентраторов напряжений, предусмотрена

возможность автоматизации вычислений путем использования журнальных файлов, которые содержат параметрическую модель тела, описанную на встроенном языке сценариев (скриптов).

Постпроцессор CAE Fidesys позволяет строить графики изменения основных параметров напряженно-деформированного состояния, а также комбинаций этих параметров в зависимости от координат или времени, визуализировать параметры в любых сечениях конструкции и отображать поля их распределения по всей конструкции. Пользователь (расчетчик, конструктор, исследователь) имеет возможность выбирать в рамках графического интерфейса определенные варианты теории прочности и получать в результате расчета, наряду с напряжениями и деформациями, коэффициенты запаса прочности. Для кусочно-непрерывных полей расчетных напряжений и деформаций (характерных для непосредственных результатов конечноэлементных расчетов) выполняется «сглаживание» с использованием теории согласованных результатов.

Одним из конкурентных преимуществ CAE Fidesys, заложенных при создании пакета, является использование двух методов численной дискретизации: метода конечных элементов, который является основой большинства CAE-систем, и метода спектральных элементов; последний применяется в настоящее время только в CAE Fidesys. Метод спектральных элементов позволяет значительно ускорить решение больших нестационарных задач, характеризуемых быстропротекающими процессами, например, моделирование сейсмического воздействия или неразрушающего контроля, за счет реализации полностью явной схемы дискретизации по времени. Данный метод дает возможность не перестраивать расчетную сетку в случае обнаруженной недостаточной точности решения/проведения анализа на сеточную сходимость, а лишь менять порядок точности в настройках расчетной схемы.

В параграфе 5.4 приведены примеры решенных в CAE Fidesys промышленных задач, демонстрирующие перечисленные отличительные особенности пакета на реальных задачах. Результаты решения ряда задач сопоставляются с расчетами в других CAE-пакетах.

Выводы:

1. Разработана программная архитектура, состав функциональных модулей и их структура для пакета прочностного инженерного анализа CAE Fidesys.
2. Выполнена верификация разработанных численных методов и комплексов программ на основе международных тестов NAFEMS и тестовых примеров с аналитическими решениями.
3. Решены прикладные задачи инженерного прочностного анализа с использованием разработанного комплекса программ. Проанализированы результаты проведенных расчетов.

Заключение

В диссертационной работе изложены математические модели, численные методы и особенности их программной реализации на современных массивно-параллельных системах, использовавшиеся при разработке программных модулей в составе полнофункциональной системы прочностного инженерного анализа CAE Fidesys. Приведены функциональная структура и состав CAE Fidesys. Получены результаты решения как тестовых задач для верификации разработанного комплекса программ, так и прикладных задач прочностного инженерного анализа. Проанализированы результаты численного моделирования в задачах геофизики и геомеханики.

В первой главе приведены математические модели статических и динамических задач теории многократного наложения больших деформаций, предложены алгоритмы их численной дискретизации на основе метода конечных элементов, рассмотрены примеры решенных модельных задач о последовательном образовании полостей и включений в нагруженном теле с использованием разработанного алгоритма. Учитывается, что образование концентраторов напряжений приводит к перераспределению в теле больших деформаций (возникновению в теле дополнительных больших, по крайней мере, в окрестности концентратора деформаций), которые физически накладываются на уже имеющиеся в теле деформации. При малых деформациях возможна суперпозиция деформаций, то есть параметры напряженно-деформированного состояния тела от суммарного внешнего воздействия на тело определяются как сложение параметров напряженно-деформированного состояния тела от каждого воздействия на тело. При конечности деформаций это не так. При наложении конечных деформаций меняется и форма образованных концентраторов напряжений. В рассмотренных в главе модельных задачах считается, что форма концентраторов напряжений задана в момент образования. Рассмотрены постановка и решение динамических задач распространения волновых процессов в нелинейно упругих телах с начальными, вообще говоря, конечными деформациями. Учитывается, что распространение упругих волн приводит к возникновению больших дополнительных деформаций, которые физически накладываются на уже имеющиеся в теле деформации. Приведены поля напряжений в различные моменты времени и изменение максимальных напряжений во времени. Рассмотрена модель и результаты численного моделирования роста дефектов в нагруженных телах с возникновением и развитием зон предразрушения в рамках механики деформируемого твердого тела. Предполагается, что начальная трещина существует в сплошной упругой среде и растет при увеличении внешнего воздействия (нагрузки).

Во второй главе разработан алгоритм дискретизации краевых задач нестационарной теории упругости в областях со сложными криволинейными граничными поверхностями на основе изопараметрического метода спектральных элементов и построения оптимальных спектральноэлементных сеток для данных областей. Разработанный специализированный комплекс программ на его основе был применен для моделирования распространения сейсмических волн в трехмерных неоднородных анизотропных (с возможным наличием анизотропной вязкоупругости) геофизических пластах, в том числе содержащих системы трещин и трещиноватостей, в которых наблюдаются значительные локальные концентрации напряжений и конечные деформации. На ряде модельных задач была продемонстрирована точность и гибкость в использовании метода на неструктурированных гексаэдральных сетках в сравнении с аналитическими решениями. В реальных задачах сейсмического анализа и акустического каротажа среда является механически анизотропной, вязко- и(ли) пороупругой. Были рассмотрены случаи моделирования распространения волновых процессов в средах с наклонной трансверсальной изотропией (TTI), пористых средах, насыщенных жидкостью (модель Био), а также вязкоупругих средах, описываемых моделью обобщенного стандартного линейного твердого тела. Получено решение задачи о полноволновом моделировании в неоднородной преднапряженной среде с наведенной анизотропией, вызванной концентрацией напряжений вблизи полостей и включений в твердом теле. Разработана математическая модель процесса акустического каротажа на основе системы трехмерных неоднородных уравнений Био с переменными коэффициентами и комбинированных неотражающих граничных условий, препятствующих отражению волн от границ расчетной области. Предложена методология тестирования программных комплексов на основе МСЭ для моделирования распространения волновых процессов в неоднородных средах.

В третьей главе разработан универсальный алгоритм расчета эффективных механических характеристик пористо-трещиноватой среды на основе конечноэлементного осреднения параметров напряженно-деформированного состояния ячейки периодичности, который может быть применен для произвольной структуры периодических трещиноватых пористых сред. Данный алгоритм реализован в промышленной системе конечноэлментного анализа CAE Fidesys на основе численного осреднения ячейки периодичности заданной геометрии. В качестве примера рассмотрена модель ячейки периодичности для расчета эффективных свойств элемента горной породы из упругого материала, рассеченного группами плоскопараллельных трещин. Рассмотрен общий случай связи между перемещениями и усилиями по берегам трещины (нормальные напряжения связаны с тангенциальным ненулевым коэффициентом Пуассона), и дополнительно геометрия ячейки усложнена наличием пор в

материале матрицы, суммарный объем которых соответствует заданному коэффициенту пористости. В параграфе 3.3 разработана математическая модель и численный алгоритм на ее основе, позволяющие рассчитать в системе инженерного анализа CAE Fidesys напряженно-деформированное состояние вокруг наклонного ствола скважины в слоистой неоднородной среде. Численное решение поставленной задачи получено с помощью метода спектральных элементов (МСЭ) в совокупности с методом Галеркина. Рассмотрены примеры решенных практически важных задач о скважине с боковым ответвлением, загибающейся скважине с горизонтальным участком, скважине в слоистой среде. Для построения дискретной МСЭ-модели и задания механических свойств материала использованы данные о геометрии скважины, включающие азимутальный угол и инклинометрию на рассматриваемом участке, а также данные о траектории скважины, пакеты данных материала, а также наборы данных напряжений (максимальных/минимальных горизонтальных, вертикальных) полученных при построении 1D геомеханичекой модели. Продемонстрировано влияние плотности бурового раствора на уровень и размер зоны пластических деформаций, исследован механизм возникновения и развития нелинейных упругопластических полос скольжения в зависимости от величины и вида внешних нагрузок. Продемонстрирована эффективность использования метода спектральных элементов в данных задачах. В параграфе 3.4 разработан алгоритм внешнего итерационного сопряжения гидродинамических и геомеханических симуляторов, позволяющих моделировать связанные процессы деформирования трещиноватых пород и фильтрации жидкости в них с учетом динамического изменения параметров среды: пористость, проницаемость, упругие модули породы и раскрытие трещин. В сочетании с методикой расчета эффективных свойств, рассмотренной в параграфе 3.2, данный алгоритм сопряжения позволяет обойтись без явного вывода уравнения для пористости и определять в процессе расчета эффективные упруго-прочностные параметры среды, меняющиеся в процессе разработки. Проведены исследования зависимости степени сопряжения на результаты расчетов, наглядно продемонстрировавшие на конретном примере, что степень сопряжения влияет на характеристики добычи, что может критически сказаться на эффективности применения новых технологий разработки нетрадиционных коллекторов.

В четвертой главе изложены алгоритмы распараллеливания основных этапов решения краевых задач МКЭ/МСЭ с использованием технологий OpenMP, CUDA, MPI на многоядерных и многопроцессорных системах, включая гибридные, проведена оценка производительности их программной реализации, разработаны подходы к ее оптимизации и повышению эффективности распараллеливания с учетом особенностей архитектуры рассматриваемых программно-аппаратных комплексов, сделаны выводы и рекомендации по применению

разработанного комплекса программ для решения прикладных задач. Разработанный комплекс программ является многоплатформенным, т.к. поддерживает платформы PC, GPU, MultiGPU, гибридные СуперЭВМ. В нем реализованы эффективные алгоритмы параллельных вычислений, которые позволяют многократно увеличить скорость расчётов при использовании PC с графическими процессорами (GPU, MultiGPU), гибридных СуперЭВМ по сравнению с однопроцессорными PC.

В пятой главе дан обзор системы инженерного анализа CAE Fidesys – российского программного пакета, нашедшего применение в ряде отраслей промышленности. Наряду с описанием структуры и функционала отдельных модулей, отмечаются ключевые особенности CAE Fidesys: полное распараллеливание расчетного кода; заложенные в пакет модифицированные механические и математические модели, позволяющие решать задачи о перераспределении конечных деформаций; наличие двух расчетных ядер – ядра, основанного на методе конечных элементов, и ядра, использующего метод спектральных элементов. Пакет CAE Fidesys является промышленной программной системой, которая обеспечивает проведение инженерного анализа прочности на всех этапах жизненного цикла изделий и является, таким образом, цифровым средством производства. Промышленная программная система, в отличие от программ, предназначенных для исследовательских целей, является «отчуждаемым» от разработчика интеллектуальным продуктом. Применительно к пакету прочностного анализа это, означает, в частности, что при использовании пакета не должны требоваться ни постоянное участие разработчика, ни углубленные знания пользователя в области механики деформируемого твердого тела; тем не менее, продукт должен технически поддерживаться разработчиком (вендором) и развиваться. CAE Fidesys состоит из препроцессора (включающего блок генерации расчетных сеток), расчетного ядра (блока расчетных модулей) и постпроцессора. Одним из конкурентных преимуществ CAE Fidesys, заложенных при создании пакета, является использование двух методов численной дискретизации: метода конечных элементов, который является основой большинства CAE-систем, и метода спектральных элементов; последний применяется в настоящее время только в CAE Fidesys. Метод спектральных элементов позволяет значительно ускорить решение больших нестационарных задач, характеризуемых быстропротекающими процессами, например, моделирование сейсмического воздействия или неразрушающего контроля, за счет реализации полностью явной схемы дискретизации по времени. Данный метод дает возможность не перестраивать расчетную сетку в случае обнаруженной недостаточной точности решения/проведения анализа на сеточную сходимость, а лишь менять порядок точности в настройках расчетной схемы. В параграфе 5.4 приведены примеры решенных в CAE Fidesys промышленных задач,

демонстрирующие перечисленные отличительные особенности пакета на реальных задачах. Результаты решения ряда задач сопоставляются с расчетами в других CAE-пакетах.

Основные выводы диссертационной работы:

1. Разработан алгоритм численного решения краевых задач теории многократного наложения больших деформаций на основе методов конечных и спектральных элементов в областях с криволинейными граничными поверхностями.
2. Решена серия задач о математическом моделировании перераспределения конечных деформаций при изменении связности области, занимаемой телом, в процессе нагружения.
3. Реализован изопараметрический метод спектральных элементов в виде комплекса программ на гибридной MultiGPU системе с использованием технологий OpenMP/CUDA.
4. Проведена серия вычислительных экспериментов в задачах сейсмического и геомеханического моделирования.
5. Разработана программная архитектура, состав функциональных модулей и их структура для пакета прочностного инженерного анализа.
6. Выполнена верификация разработанных численных методов и комплексов программ на основе международных тестов NAFEMS и тестовых примеров с аналитическими решениями.
7. Решены прикладные задачи инженерного прочностного анализа с использованием разработанного комплекса программ. Проанализированы результаты проведенных расчетов.

Автор выражает благодарность академику РАН В.А. Левину, заслуженному деятелю науки РФ, профессору В.Ан. Левину и всем сотрудникам кафедры вычислительной механики МГУ имени М.В. Ломоносова за внимание и поддержку при работе над диссертацией.

Список литературы

1. Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411с.
2. Аки К., Ричардс П., Количественная сейсмология. Теория и методы. Т. 1. М.:Мир, 1983, 520 с.
3. Алтури С. и др. Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир, 1990. 392с.
4. Алхименков Ю.А., Баюк И.О., Тихоцкий С.А. Влияние пространственного взаимодействия включений на эффективный тензор упругости порово-трещиноватых сред // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 3. — С. 44–54
5. Ампилов Ю.П. Методы определения поглощающих свойств неоднородных сред. — Изд-во Кольского филиала АН СССР Апатиты, 1983. — 110 с.
6. Ампилов Ю.П. Поглощение и рассеяние сейсмических волн в неоднородных средах. — Недра М, 1992. — 160 с.
7. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – 77 с. ISBN 978-5-211-05702-9
8. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. Учебное пособие. - М.: Изд-во МГУ, 2004. - 71 с.
9. С.А. Арсеньев и В.Н. Николаевский. Уравнения упругих волн в пористых средах. Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия, 46(1):69–72, 2006.
10. Арушанян И. О., Кобельков Г. М. Метод конечных элементов-наименьших квадратов для системы уравнений теории упругости // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал). — 2001. — Т. 2. — С. 87–95.
11. Астафуров С.В., Шилько Е.В., Псахье С.Г. Влияние параметра прочности функции отклика подвижного клеточного автомата на прочностные характеристики и особенности разрушения хрупких материалов. // Физ. мезомех. -2002, Т.5, №4, С.23-27. (S, Y)
12. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н. Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского университета, 2001. 632 с.
13. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) //Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5-9
14. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих

сред. М.: Наука. 1989.344 с.

15. Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. Анизотропные тела с неоднородностями. Случай совокупности трещин // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 5. С. 49-59.
16. М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. Методы решения СЛАУ большой размерности /– Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
17. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва пласта // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С.475–486.
18. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // Прикл. матем. и технич. физика. 1961. №4 с. 3-56
19. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Салганик Р.Я. О кинетике распространения трещин. Общие представления. Трещины, близкие к равновесным /Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1966. X* 5. С. 82-92.
20. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М., 1984. Движение жидкостей и газов в природных пластах. “Недра”, Москва.
21. Бартенев Г. М., Френкель С. Я. Физика полимеров. — Л.: Химия, 1990. — 433 с
22. Бартенев Г.М - Прочность и механизм разрушения полимеров. М.: Химия, 1984.280 с.
23. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2, № 1. С.20-28.
24. Бате К. Ю. Методы конечных элементов / В.П.Шидловский (пер. с англ.) Л.И.Турчак (ред).-М.:ФИЗМАТЛИТ,2010.-1022 с.
25. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов М.: Стройиздат, 1982, 448 с.
26. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.Численные методы/ Москва, 2003 г.
27. Баюк И.О., Белобородов Д.Е., Березина И.А., Вдовиченко И.И., Вершинин А.В., Гилязетдинова Д.Р., Горбунов В.Н., Зингерман К.М., Корост Д.В.,Краснова М.А., Тихоцкий С.А., Улькин Д.А., Фокин И.В., Яковлев М.Я., Ялаев Т.Р. Проблемы апскейлинга упругих свойств пород-коллекторов // Материалы конференции Сейсмические технологии - 2016. — Москва, 2016. — С. 27–30.
28. И. О. Баюк, Д. Е. Белобородов, И. А. Березина, Д. Р. Гафурова, Н. В. Дубиня, Д. В. Корост, М. А. Краснова, А. А. Макарова, А. В. Патонин, С. А. Тихоцкий, and И. В. Фокин. Разномасштабные математические модели эффективных упругих свойств пород доманиковой и баженовской свит, построенные на основе подходов rock physics.

In EAGE/SPE Joint Workshop 2017. Shale Science: Prospecting & Development 10-11 April 2017, Moscow, Russia. EAGE Publications, 2017.

29. И. М. Безмозгий, О. И. Казакова, Р. М. Магжанов, А. А. Смердов, А. Г. Чернявский, А. Г. Чернягин РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ И ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА НА БАЗЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ФИДЕСИС. Чебышевский сборник, Том 18, № 3, стр.88–108, 2017.
30. Бидерман В. Л. Вопросы расчета резиновых деталей. — В кн.: Расчеты на прочность. М.: ГНТИ, 1958, вып. 3.
31. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. -М.: Машиностроение, 1968
32. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972
33. Блох В.И. Теория упругости. Изд-во Харьк. ун-та, 1964. - 483 с.
34. Богачёв, К.Ю. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений/ М.: Изд-во механико-математического ф-та Моск. ун-та, 1998. – 79 с.
35. Боли Б., Дж.Уэйнер. Теория температурных напряжений. М., Наука, 1974 г. – 249 стр., 259 стр.
36. Бондарь В.Д. О тензорных характеристиках конечных деформаций сплошной среды.ПММ т.XXV, в.3, 1961
37. А.В. Боресков, А.А. Харламов. Основы работы с технологией CUDA / ДМК Пресс, 2010 г. 232 с.
38. В. Е. Борисов, А. А. Давыдов, И. Ю. Кудряшов, А. Е. Луцкий, И. С. Меньшов. Параллельная реализация неявной схемы на основе метода lu-sgs для моделирования трехмерных турбулентных течений. Математическое моделирование, 26(10):64–78, 2014.
39. Боровков А.И., Клявин О.И., Клявин О.В., Никифоров А.В., Пальмов В.А. Прогнозирование прочностных свойств композитов на основе изучения механофизических процессов пластической деформации модельных слоистых монокристаллов. Часть 2. Вычислительный эксперимент // Физическая мезомеханика. 2007. т.10. № 6. 89 - 94.
40. Бубнов И.Г. Отзыв о сочинениях проф. Тимошенко, удостоенных премии Д.И.Журавского. Сб. Института инженеров путей сообщения, вып. 81, Петербург, 1913
41. Бураго Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислительная механика сплошных сред, 2008. Т. 1, N. 4, С. 5-20.

42. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. К возможности установления упругопластического процесса по итоговому разгрузочному состоянию// Известия РАН. МТТ, 2006, №3с.130-134.
43. Бухина М.Ф. Техническая физика эластомеров. --- М.: Химия, 1984. 224 с.
44. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106-116.
45. Вавакин Л.С, Салганик Р.Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела 1975, № 3. С. 65-75.
46. Вакуленко А.А, Качанов М.Л. Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР МТТ. 1971. № 4. С. 159-166.
47. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. 542 с.
48. Василевский Ю., Вершинин А., Данилов А., Плёнкин А. Технология построения тетраэдральных сеток для областей, заданных в САПР // Матричные методы и технологии решения больших задач (под ред. Е. Е. Тыртышникова). М: ИВМ РАН. – 2005. – С. 21–32.
49. INMOST - программная платформа и графическая среда для разработки параллельных численных моделей на сетках общего вида / Ю. В. Василевский, И. Н. Коньшин, Г. В. Копытов, К. М. Терехов. — Издательство Московского университета, 2013. — 144 с.
50. Векуа И.Н., Мусхелишвили Н.И. Методы теории аналитических функций в теории упругости// Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. - М.-Л., 1962. - С. 310-338.
51. А. В. Вершинин, Д. И. Сабитов, С. Ю. Ишбулатов, А. В. Мясников. Моделирование гидрогеомеханических пластовых процессов путем внешнего сопряжения специализированных вычислительных пакетов и универсальной CAE Fidesys. Чебышевский сборник, Том 18, № 3, стр.154–186, 2017. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-154-186
52. А.В. Вершинин, Д.А. Улькин, М.Я. Яковлев “Вариант численной оценки эффективных механических характеристик керна с помощью CAE-системы Fidesys” // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, 2015. — С. 744–746.

53. В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин. Параллельные вычисления. -СПб.: БХВ-Петербург, 2002.-608 с.
54. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 182-192.
55. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
56. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
57. Вычислительные методы в механике разрушения/ Под ред. С. Атлури. -— М.: Мир, 1990. — 392 с.
58. Гадолин А.В. Теория орудий, скрепленных обручами. Артиллерийский журнал. 1861, № 12.
59. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестник инженеров, 1915, т. 1, с. 897-908.
60. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
61. Галин Л.А. Упругопластические задачи. Москва «Наука» 1984г. 232с.,
62. Гамлицкий Ю.А., Басе Ю.П. К описанию явления усиления наполненных эластомеров // Инж.-физ. журнал. 2003. Т. 76, № 5 С. 101-105.
63. И. М. Гарагаш, А. В. Дубовская, И. О. Баюк, С. А. Тихоцкий, С. Глубоковских, Д. А. Корнева, and И. А. Березина. Построение 3d геомеханической модели нефтяного месторождения с построением модели механических свойств (ММС) пород под задачи строительства эксплуатационных скважин. In SPE Russian Petroleum Technical Conference 2015, 2015.
64. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. 271 стр. М.: Наука,1971
65. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений (ZAMM, 1924) // Теория пластичности. М.: Изд. иностр. лит. 1948. С. 114-135.
66. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978, 304 с.
67. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга. 1998. 267с.
68. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Напряженное состояние в упругом пространстве, определяемое фазовыми превращениями во включении // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 48-64.

69. А. В. Горобец, С. А. Суков, А. О. Железняков, П. Б. Богданов, Б. Н. Четверушкин. Расширение двухуровневого распараллеливания mpi+openmp посредством opencl для газодинамических расчетов на гетерогенных системах. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование, (9):76–86, 2011.
70. А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров Компьютерные модели конструкций - Киев: Факт, 2005 г. – 344 стр.
71. Гриняев Ю.В., Чертова Н.В. Закономерность распространения плоских волн дефектов в вязкопластической среде // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 18. С. 91-94.
72. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 272 с.
73. Гузь А.Н., Дышель Л.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 184 с.
74. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1983. 296 с.
75. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И., Лебедев В.К. К теории распространения волн в упругом изотропном теле с начальными деформациями // Прикладная механика. —т.6, №12—С.42-49
76. Гузь А.Н., Роджер А.А., И.А. Гузь О построении теории разрушения нанокомпозитов при сжатии. //Прикладная механика, 2005. т41, №3 с.3--29
77. Данилов А. Способы построения трёхмерных поверхностных триангуляций и тетраэдральных сеток. // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – Т. 65. – №1. – С.87–92.
78. Б. Делоне: "О пустом шаре", Известия Академии Наук СССР, отделение Математических и Естественных Наук, 7:793–800, 1934.
79. Забродин А.В. Параллельные вычислительные технологии. Состояние и перспективы. Препринт ИПМ РАН им. М.В. Келдыша № 71, Москва, 1999 г.
80. Зайцев Н. А., Винниченко А. А. Прозрачные граничные условия для численного моделирования волновых процессов в квадратной области //Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 11. — С. 5–20.
81. Зеленина А.А., Зубов Л.М. Первые интегралы уравнений равновесия в одномерных задачах нелинейной теории упругости // Доклады РАН. 2008. Т. 421. № 1. С. 45-48.
82. Зенкевич.О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
83. Зингерман К.М. О решении плоской задачи теории упругости для тела с несколькими

круговыми упругими включениями при конечных деформациях // Известия Тульского гос. ун-та. Серия Математика, Механика Информатика 2006. Т. 12, вып. 2 (Мех.) С. 40-53

84. Зингерман К.М.. Левин В.А Перераспределение конечных упругих деформации после образования включений. Приближенное аналитическое решение// Прикладная математика и механика 2009. Т 73, выпуск 6. С 983-1001.
85. Зингерман К.М., Левин В.А. Последовательное образование двух неравных эллиптических отверстий в теле из вязкоупругого несжимаемого материала. Конечные деформации// Известия АН. Механика твердого тела. - 1999. - № 4. - С. 162-169.
86. Зингерман К.М., Яковлев М.Я. Расчёт эффективных характеристик нелинейно-упругих композитов при конечных деформациях // Материалы IX Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», 15-22 сентября 2012 года, Казань. – С. 168–172.
87. Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2007. № 1. С. 45-63.
88. Зубов Л.М., Рудев А.Н. О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов.// Изв. АН. Мех. тверд. тела. 1994. № 6. С. 21-31.
89. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
90. Индейцев Д.А., Наумов В.Н., Семенов Б.Н. Динамические эффекты в материалах со сложной структурой // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 5. С. 17-39.
91. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск. Издательство Петрозаводского университета,1993.—600с.
92. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - Л.-М.: Гостехиздат, 1949. - 695 с.
93. А.А. Кауфман, А.Л. Левшин. Введение в теорию геофизических методов. Часть 5. Акустические и упругие волновые поля в геофизике: Пер. с англ. А.В. Кирюшина, А.Е. Соловченко. - М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 2006.-663 с.: ил.
94. Качанов Л.М. Основы теории пластичности – М.: Наука, 1969 г. 420 стр.
95. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
96. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматлит, 1960. 456 с.
97. И. Е. Квасов, В. Б. Левянт, И. Б. Петров Численное исследование волновых процессов в пористой среде с использованием сеточно-характеристического метода. Ж. вычисл.

матем. и матем. физ., 56:9 (2016), 1645–1656.

98. Келдыш М.В. “О методе Галеркина решения краевых задач”, Известия АН СССР, 1942 г.

99. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров—Киев, Наукова думка ,2002, 655с.

100. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 214 с.

101. Клюшников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд--во МГУ, 1994. 189 с.

102. Кобельков Г. М. Об одном итерационном методе решения разностных задач теории упругости // Доклады Академии наук. — 1977. — Т. 233, № 5. — С. 776–779.

103. Кобельков Г. М. Решение задачи о жестком контакте для несжимаемого материала // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1976. — Т. 16, № 4. — С. 987–995.

104. Кобельков Г. М. О теоремах существования для некоторых задач теории упругости // Математические заметки. — 1975. — Т. 17, № 4. — С. 599–609.

105. Койфман Ю.И., Решение плоской задачи нелинейной теории упругости для бесконечной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. высш. учебн. заведений, Строительство и архитектура, № 1, стр. 44—51, Новосибирск 1961.

106. Кондауров В.И., Фортов В.Е. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: МФТИ, 2007. 310 с.

107. Коноваленко И.С., Смолин А.Ю., Никонов А.Ю., Псахье С.Г. Многоуровневое моделирование деформации и разрушения хрупких пористых материалов на основе метода подвижных клеточных автоматов. Физическая мезомеханика. Выпуск № 5 / том 12 / 2009.

108. И.С. Коноваленко, К.П. Зольников, С.Г. Псахье О нарушении кристаллического порядка в зоне локализации деформации в кристаллических материалах при высокоэнергетическом воздействии // Физ. мезомех. -2002, Т.5, №6 С. 109-111. (S)

109. Копысов С.П., Новиков А.К. Параллельные алгоритмы адаптивного перестроения и разделения неструктурированных сеток// Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 9. С. 91-96

110. Копысов С.П., Новиков А.К., Сагдеева Ю.А. Параллельные схемы разрывного метода Галеркина // Ижевск: Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования, 2009, т. 1, с. 144-147

111. Кошелев А.И. Метод Ньютона и обобщенные решения нелинейных уравнений

эллиптического типа// Доклады АН СССР. - 1953. - Т.91, № 6. - С. 1263-1266.

112. Кошелев А.И. Регулярность решения эллиптических уравнений и систем. - М.: Наука, 1986. - 240 с.

113. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с. англ. М.:Мир, 1987.328 с.

114. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М: Мир, 1974. 338 с.

115. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М., Мир, 1982.

116. И. Ю. Кудряшов, А. Е. Луцкий. Адаптация кода для расчета течений вязких жидкостей под гибридные вычислительные системы на базе cuda-mpi.Математическое моделирование, (7):31–44, 2012.

117. Куликовский А. Г., Чугайнова А.П., “О стационарной структуре ударных волн в упругих средах и диэлектриках”, Журнал экспериментальной и теоретической физики, 137:4 (2010), 973–985

118. Куликовский А. Г., Свешникова Е.И., Нелинейные волны в упругих средах, Изд. «Московский Лицей», М., 1998, 412 с.

119. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.

120. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, 9 изд., М., 1968

121. Кутилин Л.М. Теория конечных деформаций. М: Гостехиздат , 1947. 275 с.

122. Лавит И.М. Об асимптотике полей напряжений и деформаций в окрестности кончика трещины // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 66-78.

123. Ланда Е.И., Неклюдов Д.А., Протасов М.И., Решетова Г.В., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А.Особенности распространения сейсмических волн в транзитных зонах при наличии ледового покрова и подавление шумов // Технологии сейсморазведки. – 2016. – № 2. – С. 57-68

124. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. - Теоретическая физика, Т. 7 - Теория упругости, 1987, 247с

125. Левин В.А. К использованию метода последовательных приближений в задачах наложения конечных деформаций // Прикладная механика. 1987. Т. 23. № 5.

126. Левин В.А. К построению модели развития дефекта при конечных деформациях. Нелокальные критерии. ПММ, т.73, Вып. 3. 2008

127. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. (с предисловием академика Л.И. Седова) М.: Наука, Физматлит, 1999. --223с.

128. Левин В.А. Моделирование роста повреждения при конечных деформациях , Вестник МГУ. Сер. Математика, механика Серия 1. 2006, №3 . стр 38-41

129. Левин В.А. О "физическом разрезе", привнесенном в предварительно нагруженное упругое тело. Конечные деформации // Доклады РАН. 2001. Т. 343. №5.

130. Левин В.А. О концентрации напряжений вблизи отверстия, образованного в предварительно напряженном теле из вязко упругого материала // Доклады АН СССР. 1988. Т.299. № 5.

131. Левин В. А., Вершинин А. В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — Издательство Физматлит, Москва, 2015. — 544 с.

132. В. А. Левин, А. В. Вершинин “О приближенном аналитическом решении плоской задачи о жестком эллиптическом включении, возникающем в нагруженном теле. Конечные деформации”, Известия ТулГУ, серия “Дифференциальные уравнения и прикладные задачи”, 2004, с. 151-157.

133. В. А. Левин, А. В. Вершинин, И. А. Мишин, А. М. Сбойчаков, К. А. Петровский. Распространение линейных волн в нелинейно-упругих средах с начальными деформациями. Компьютерное моделирование с использованием программного комплекса прочностного инженерного анализа Fidesys. Технологии сейсморазведки, № 4, стр. 29–32, 2012.

134. Левин В.А., Вершинин А.В., Сабитов Д.И., Никифоров И.В., Пендюр Д.А. Использование суперкомпьютерных технологий в задачах прочности. Пакет Fidesys. В кн. "Суперкомпьютерные технологии в образовании и промышленности" 2 издание, Москва, 2010

135. В.А. Левин, А.В. Вершинин, А.В. Янгирова, А.С. Прокопенко “О решении задач прочности на графических процессорах TESLA”. Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности/Под редакцией: академика В.А. Садовничего, академика Г.И. Савина, чл.-корр. РАН Вл.В. Воеводина. - Издательство Московского университета, Москва, 2012. — С. 170–174.

136. Левин В.А., Зингерман К.М. О влиянии малых дефектов на концентрацию напряжений около отверстия, образованного в предварительно нагруженном упругом теле, при конечных деформациях // Доклады РАН. 2002. Т. 386. № 4.

137. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН 2002,Т. 382, № 4С.482-487.

138. Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272с.

139. Левин В. А., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Геомеханическое моделирование роста трещин при конечных деформациях. Зоны предразрушения //Технологии сейсморазведки. — 2014. — № 4. — С. 34–39.

140. Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. (Под редакцией В.А. Левина) Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. – М.: Физматлит, 2007. – 392 с.

141. Левин В.А., Левитас В.И., Лохин В.В., Зингерман К.М. Фазовые переходы в твердых телах с наноразмерными полостями при конечных деформациях// Современные проблемы математики и механики. Т.2. Механика. Вып. 2. М.: МГУ, 2009. С. 49-57.

142. Левин В.А., Левитас В.И., Лохин В.В., Зингерман К.М., Саяхова Л.Ф., Фрейман Е.И. Твердотельные фазовые переходы, вызванные действием механических напряжений в материале с наноразмерными неоднородностями: модель и вычислительный эксперимент// Доклады РАН, 2010, том 434, № 4, с. 481–485.

143. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Рост узкой щели, образованной в предварительно нагруженном нелинейно-упругом теле. Анализ с помощью теории многократного наложения больших деформаций // Доклады РАН. 1995. Т. 343. №6. С. 764-766.

144. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об оценке эффективных характеристик пористых материалов при больших деформациях // Вестник МГУ. Серия Математика, механика 1996, № 6. С. 48-50

145. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Известия РАН Механика твердого тела. 1997. № 4. С 45-50.

146. Левин В. А., Мишин И. А., Вершинин А. В. Плоская задача об образовании включения в упругом нагруженном теле. Конечные деформации // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2006. — № 1. — С. 56–59.

147. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады РАН. Физика. 2007. Т. 415, № 7. С. 52–54.

148. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальный критерий прочности. Конечные деформации // Доклады РАН. 2002. Т. 346, №1. С. 62—67.

149. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. (Под редакцией В.А. Левина) Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит . 2004. — 407с

150. Левин В.А., Тарасьев Г.С. Наложение больших упругих деформаций в пространстве конечных состояний. //Доклады АН СССР. 1980. Т.215. № 1.

151. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987.

152. В. Б. Левянт, И. Ю. Хромова, Е. А. Козлов, И. Н. Керусов, Д. Е. Кащеев, В. В. Колесов, and Н. Я. Мармалевский. Методические рекомендации по использованию данных сейсморазведки для подсчета запасов углеводородов в условиях карбонатных пород с пористостью трещинно-кавернового типа. Федеральное агенство по недропользованию Москва, 2010.

153. Леонов М.Я. Механика деформаций и разрушения. Фрунзе: Ильм, 1981. 236 с.

154. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

155. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука 1970, 139с.

156. Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // Прикл. матем. и мех. 1963. Т. 27. Вып. 3.

157. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука, 1970. – 940 с.

158. Лурье А.И Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512с.

159. Лурье С.А., Белов П.А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М.: ВЦ РАН, 2000.

160. Лутц, М. Программирование на Python / Пер. с англ. — 4-е изд. — СПб.: Символ-Плюс, 2011. — Т. I. — 992 с.

161. Лутц, М. Программирование на Python / Пер. с англ. — 4-е изд. — СПб.: Символ-Плюс, 2011. — Т. II. – 980 с.

162. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935. 676 с.

163. Маркин А.А. Об изменении упругих и пластических свойств при конечном деформировании // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. № 2. С. 120-126.

164. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», Л1, 1977, 456 стр.

165. Марчук Г.И. Методы расщепления. - М.: Наука, 1988. - 263 с.

166. Маслов Б.П. Эффективные постоянные в теории геометрически нелинейных твердых тел.// Прикладная механика.1981. Т. 17, № 5. С. 45-50.

167. Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.

Метод геометрического погружения и его численная реализация для решения задач теории упругости Матем. моделирование, 2000, 12:5, 49–54

168. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. - М.: Машиностроение. - 1981. - 272 с.

169. Махутов Н.А. Сопротивление элементов конструкций хрупкому разрушению. - М.: Машиностроение. - 1973. – 201 с.

170. Махутов Н.А., Бурак М.И., Гаденин М.М. и др. Механика малоциклового разрушения. – М.: Наука. - 1986. - 264 с.

171. В. А. Миряха, А. В. Санников, И. Б. Петров Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина. Матем. моделирование, 27:3 (2015), 96–108.

172. Р. Ф. Мифтахов, А. В. Мясников, А. В. Вершинин, С. С. Чугунов, К. М. Зингерман. О ПОСТРОЕНИИ ГИДРОГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛАНЦЕВЫХ ФОРМАЦИЙ. Технологии сейсморазведки, №4, стр. 97–108, 2015. DOI: 10.18303/1813-4254-2015-4-97-108

173. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.

174. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. - М.;Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. - 304 с.

175. Морозов Е.М., Зернин М.В. Контактные задачи механики разрушения. М.: Машиностроение, 1999. 544 с.

176. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 256 с.

177. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS Москва, 2015. — 408 с.

178. Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения/М.: URSS. 2008 456с.

179. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.256с.

180. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. О концепции структурного времени в теории динамического разрушения хрупких материалов // Доклады РАН. 1992. Т. 324. № 5. С. 964-967.

181. Морозов Н.Ф., Фрейдин А.Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. мат. ин-та им. В.А.

Стеклова. 1998. Т. 223. С. 220-232.

182. М. В. Муратов, И. Б. Петров, В. Б. Левянт Разработка математических моделей трещин для численного решения задач сейсморазведки с применением сеточно-характеристического метода Компьютерные исследования и моделирование, 8:6 (2016), 911–925.

183. М. В. Муратов, И. Б. Петров, И. Е. Квасов Численное решение задач сейсморазведки в зонах трещиноватых резервуаров Матем. моделирование, 28:7 (2016), 31–44.

184. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

185. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях// Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8-13.

186. А. В. Мясников, Ю. П. Стефанов, В. П. Стенин, Д.Д. Бек, А.И. Ахтямова. О возможном решении задачи дизайна многостадийного ГРП в баженовских формациях // Недропользование XXI. — 2016. — № 6. — С. 62–79.

187. Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984.- 535 с.

188. Нейбер Г. Концентрация напряжений / Пер. с нем. под ред. А.И. Лурье. М.: Гостехиздат, 1947. 204 с.

189. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — Наука Москва, 1978. — 336 с.

190. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Части I и II. — Наука Москва, 1987. — 464 с

191. Николаевский В. Н. Реальная продольная волна и ее зависимость от присутствия газа // Физика Земли. — 2016. — № 1. — С. 3–14.

192. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра. 1984. 232 с.

193. Николаевский В. Н. Собрание трудов. геомеханика. Том 1, 2, 3. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010.

194. Новацкий В. Теория упругости. М.: Наука. 1975. 872 с

195. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211с.

196. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 222 с

197. Норри Д., де Фриз Ж. - Введение в метод конечных элементов, 1981, 152с.

198. Овчинский А.С., Гусев Ю. С. Моделирование на ЭВМ процессов роста и слияния микродефектов в структурно-неоднородных материалах. // Механика композитных материалов. 1982. № 4. С. 585 - 592.

199. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.- М.: Мир, - 1976. - 464 с.

200. Одинг, И. А. Прочность металлов– М. ; Л. : Огиз – Гос. науч. техн. издат., 1932 г. – 280с.

201. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1990. 545 с.

202. Механика разрушения и прочность материалов/ Справочное пособие под ред. В.В. Панасюка. В 4-х томах. Киев: Наукова думка, 1988-1990. Т. 1. Основы механики разрушения. 488 с. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. 620 с. Т. 3. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их наблюдения. 436 с. Т. 4. Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов. 680 с.

203. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.

204. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 503 с.

205. А. Х. Пергамент, Ф. А. Петренко, Б. Д. Плющенков, В. И. Турчанинов Численное моделирование акустического каротажа скважин. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 1997, 070

206. И. Б. Петров, А. В. Фаворская, Н. И. Хохлов Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:11 (2017), 1804–1811.

207. Е. И. Петров, И. Н. Керусов, А. А. Тихонов, and Н. В. Шалаева. Прогнозирование фильтрационно - емкостных свойств в околоскважинном пространстве по данным многокомпонентного выносного ВСП. Каротажник, (3-4):116–119, 2004.

208. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.

209. Писецкий В.Б., Абатурова И.В., Савинцев И.Н., Шинкарюк В.А., Вершинин А.В., Левин В.А.. Задачи и методы изучения распространения деформационных явлений в системе "грунтовый массив - проектное сооружение - существующая застройка" на основе сейсмических и аналитических данных // ИНЖЕНЕРНАЯ, УГОЛЬНАЯ и

РУДНАЯ ГЕОФИЗИКА-2015. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ. — КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ. — ЕАГО Сочи, 2015. — С. 66–70.

210. Писецкий В.Б., Абатурова И.В., Савинцев И.А., Патрушев Ю.В.,Чевдарь С.М., Вершинин А.В., Левин В.А. Оптимизация инженерно-геофизического обеспечения проектов разработки месторождений твердого сырья на основе геомеханических исследований // 12th Conference and Exhibition Engineering Geophysics — Изыскания под инженерные сооружения и применение геофизики на техногенных объектах, геотехнический мониторинг. — EAGE, 2016. DOI: 10.3997/2214-4609.201600344

211. Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения / Пер. с франц. под ред. Е.М. Морозова/. М.: Мир, 1993. 450 с.

212. Б. Д. Плющенков, В. И. Турчанинов, А. А. Никитин Моделирование сейсмоакустических полей в аксиально-симметричных поглощающих средах. Разностная схема. Матем. моделирование, 30:4 (2018), 21–42.

213. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

214. Победря Б.Е. О методе последовательных приближений в нелинейной вязкоупругости // Механика полимеров. 1969, №2.

215. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – Издательство Московского Университета, 1995.

216. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 - 272 с.

217. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. - М.: Мир, 1989

218. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения/ Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.

219. Работнов Ю.Н Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

220. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

221. Работнов Ю.Н. Проблемы механики деформируемого твердого тела, М.: Наука 1991

222. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения.—В кн.: Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения.—М.; Мир, 1975.С. 204-335.

223. Рахматулин Х.А. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках, М.:Логос, 624с.

224. Рахматулин Х.А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации // Уч. зап. МГУ. 1951. Вып. 152. Т. 3. С. 47-55.

225. Ривлин Р. С. Большие упругие деформации. — В кн.: Реология. М:. ИЛ, 1962.

226. Ромалис Н.В., Тамуж В.П. Распространение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами // Механика композитных материалов. 1983. № 6. С. 1001-1009.

227. Савин Г.Н., Койфман Ю.И., Нелинейные эффекты в задачах о концентрации напряжений около отверстий с подкрепленным краем. Прикл, мех., 1, № 9, стр. 1—13, 1965

228. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 887 с.

229. В. А. Садовничий, В. М. Репин, А. В. Тихонравов, and Вл В. Воеводин. Высокопроизводительные вычисления - интеграция от "А" до "Я". Тезисы докладов Всероссийской конференции "Интеграция науки и высшего образования России", volume 1, pages 135–137. АНО "Издательство Самарского научного центра РАН Самара, 2001.

230. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1971.

231. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979.

232. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. -- 284 с.

233. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1994. 528с.

234. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.

235. Семёнов В.А. "Верификационный отчет по программному комплексу MicroFe". М.: 2009, 327 стр.

236. Сиратори М, Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения (предисловие редактора перевода Е.М.Морозова). - М., Мир, 1986, С.336.

237. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение.--Томск: Изд-во Томского уни-та, 2002.--128 с.

238. Смирнов М.М. - Уравнения в частных производных 2-го порядка, 1964, 206с

239. Соболев С.Л. Алгоритм Шварца в теории упругости// Доклады АН СССР, нов. сер. - 1936. - Т. 13. - С. 235-238.

240. Соннов Максим, Вершинин Анатолий, Жуков Владислав, Овчаренко Юрий, Лукин Сергей, Глазырина Александра. Геомеханическое моделирование околоскважинной зоны. Oil&Gas Journal Russia, № 1-2 (112), стр. 72–76, 2017.

241. Соннов М.А., Трофимов А.В., Румянцев А.Е. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В КАПИТАЛЬНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ НА БОЛЬШИХ ГЛУБИНАХ. Горная промышленность. №4(134)/2017, стр. 92-94.

242. Стащук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. Киев: Наукова думка, 1993. 360 с.

243. Стефанов Ю.П. Локализация деформации и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование // Физ. мезомех. 2002. Т. 5, № 5. С. 107-118.

244. Стефанов Ю.П. Некоторые особенности численного моделирования поведения упругохрупкопластичных материалов // Физ. мезомех. 2005. Т. 8, № 3. С. 129-142.

245. Стефанов Ю.П., Тьерселен М. Моделирование поведения высокопористых геоматериалов при формировании полос локализованного уплотнения // Физ. мезомех. Т. 10, №1. 2007. P. 93-106.

246. Н. Е. Стёпин, В. А. Левин, К. М. Зингерман, А. В. Вершинин. Сравнительный анализ различных вариантов алгоритма Узавы в задачах упругости для несжимаемых материалов. Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, № 3 (26), стр. 29–34, 2012.

247. Страуструп, Б. Программирование: принципы и практика использования C++, исправленное издание. Programming: Principles and Practice Using C++ / — М.: «Вильямс», 2011. — 1248 с.

248. Тарасьев Г.С., Толоконников Л.А. Концентрация напряжений около полостей в несжимаемом материале // Концентрация напряжений. Вып. 1. Киев, 1965. С. 251

249. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов т.1 – М., 1965 г. – 364 стр.

250. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, перев. с англ. – М.: Наука, 1975 г. – 576 стр.

251. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела.: - М.: Высшая школа, 1979. - 318 с.

252. Трелоар Л. Введение в науку о полимерах. М : Мир, 1973. 238 с.

253. Трелоар Л. Физика упругости каучука / Пер с англ. под ред. Е.В. Кувшинского. М.: ИЛ, 1953. 240 с.

254. Трофимов А.В., Румянцев А.Е., Андреев А.А. Применение методов прочностного анализа для обоснования технических средств обеспечения устойчивости горных выработок при отработке рудных месторождений подземным способом. Сборник трудов конференции “БЕЗОПАСНОСТЬ ТРУДА И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОИЗВОДСТВА ГОРНОДОБЫВАЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ С ПОДЗЕМНЫМ СПОСОБОМ РАЗРАБОТКИ”. Уральский государственный горный университет (Екатеринбург), 2016 г. стр. 85-93.

255. Труселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. - М.: Мир, 1975. - 592 с.

256. А. В. Фаворская, И. Б. Петров Численное моделирование волновых процессов в скальных массивах сеточно-характеристическим методом. Матем. моделирование, 30:3 (2018), стр. 37–51.

257. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. - Киев: Наукова думка, 1964.

258. Фильштинский Л.А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий// Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28, № 3. С. 430-441.

259. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. — М.: Наука, 1968.

260. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. — М.: Мир, 1988.

261. Л. А. Хакимова, А. В. Мясников, Т. М. Бондаренко, Е.Ю. Попов, А.Н. Черемисин, И.А. Карпов. Валидация численной модели процесса закачки воздуха высокого давления на месторождении баженовской свиты на основе результатов физического моделирования // Нефтяное хозяйство. — 2017. — № 4. — С. 85–89.

262. Христианович С.А., Желтов Ю.П. Образование вертикальных трещин при помощи очень вязкой жидкости. Докл. На IV Междунар. нефт. конгрессе в Риме. М.: Изд-во АН СССР, 1955, 34с.

263. Христианович С.А., Баренблатт Г.И. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 11. С. 73–86.

264. Христианович С.А., Баренблатт Г.И. О модуле сцепления в теории трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 2. С. 70–75.

265. Христианович С. А. Механика сплошной среды. М.: Наука (АН СССР ин-т проблем механики), 1981, 483с.(Об обрушении кровли при горных выработках. Совместно с Г.И.Баренблаттом. 1955 с. 384—4013; О модуле сцепления в теории

[3] Изв. Акад. наук СССР. Отд-ние техн. наук. - 1955. - N 11. - с.73-86

трещин. Совместно с Г. И. Баренблаттом 1968. с. 401—4094; О динамической сжимаемости прочных горных пород и металлов. Совместно с Е. И. Шемякиным. 1964. с. 432—4425)

266. Цвелодуб И.Ю. Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде. - Изв. АН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 72-81.

267. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

268. Черепанов Г.П. Современные проблемы механики разрушения // Проблемы прочности. 1987. № 8. С.3-13.

269. Черепанов Г.П., О развитии трещин в вязких телах // Изв. АН СССР, Механика твердого тела, №1, 1969.

270. С. Л. Чернышев, М. Ч. Зиченков, Ф. З. Ишмуратов, В. В. Чедрик Тенденции развития вычислительной механики для прочностного проектирования конструкций ЛА. Чебышевский сб., 2017, 18:3, 488–505

271. Б. Н. Четверушкин. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. Изд-во МГУ Москва, 1999.

272. Чижонков Е.В., «Релаксационные методы решения седловых задач», Москва, 2002.

273. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука,1977. 399 с.

274. Шешенин С.В. Трехмерное моделирование шины // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 13-21.

275. Шифрин Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002. 368с.

276. Эглит М.Э. О тензорных характеристиках конечных деформаций ПММ. т.XXIV, в.4, 1961

277. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций / Пер. с англ. под ред. Б.Я. Любова. М.: ИЛ, 1963. 247 с.

278. М. В. Якобовский, М. А. Корнилина, Е. А. Самарская, Б. Н. Четверушкин, and Н. Г. Чурбанова. Моделирование разработки нефтяных месторождений на параллельных вычислительных системах. Математическое моделирование, 7(2), 1995.

279. Яковлев М.Я., Вдовиченко И.И., Улькин Д.А., Вершинин А.В., Сбойчаков А.М.

[4] Изв. Акад. наук СССР. МТТ. - 1968. - N 2. - с.70-75

[5] Журн. прикл. механики и техн. физики. - 1964. - N 3. - С.9-15.

Об оценке эффективных механических и теплофизических характеристик полноразмерных образцов керна // Материалы научно-практической конференции Суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли. Математические методы, программное и аппаратное обеспечение, 16-17 февраля 2017 года, МГУ имени М.В. Ломоносова. — ISBN 978-5-904807-53-5. — ООО Издательство Полипресс Тверь, 2017. — С. 180–185.

280. Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э. Иерархическое моделирование механического поведения и свойств гетерогенных сред // Физ. мезомеханика. 2001. Т. 4. № 3. С. 63-71.

281. R. Abdelkhalek, H. Calandra, O. Coulaud. “Fast seismic modeling and reverse time migration on a GPU cluster” / Waleed W. Smari, John P. McIntire (Eds.), High Performance Computing & Simulation 2009. - Leipzig, Germany, 2009, pp. 36–44.

282. Abedi R., Petracovici B., Haber R.B. A space-time discontinuous Galerkin method for linearized elastodynamics with element-wise momentum balance. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, vol. 195, no. 25-28, pp. 3247-3273.

283. Abeyaratne R., Triantafyllidis N. An Investigation of Localization in Porous Elastic Material Using Homogenization Theory. // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. V.51. P. 481--486.

284. Aboudi J. Micromechanics-based thermoviscoelastic constitutive equations for rubber-like matrix composites at finite strains // International Journal of Solids and Structures. 2004. V. 41. – P. 5611–5629.

285. A. Agouzal, K. Lipnikov, Yu. Vassilevski, “Adaptive generation of quasi-optimal tetrahedral meshes”, East-West Journal, 7, 223-244, 1999.

286. V. Ajith, S. Gopalakrishnan “Spectral element approach to wave propagation in uncertain beam structures” / Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2010. -5 (4). - pp. 637-659.

287. Ainsworth M. A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin finite element approximation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2007, vol. 45, no. 4, pp. 1777-1798.

288. Ainsworth M., A. Hafiz “Dispersive and Dissipative Behavior of the Spectral Element Method” / SIAM Journal on Numerical Analysis, 2009. - 47 (5). - pp. 3910-3937. ISSN 0036-1429.

289. Ainsworth M., Monk P., Muniz W. Dispersive and dissipative properties of discontinuous galerkin Finite element methods for the second-order wave equation. Journal of Scientific Computing, 2006, vol. 27, no. 1-3, pp. 5-40.

290. Aki K., Richards P.G. Quantitative Seismology (2nd ed.). University Science Books, 2002.

291. H. Akima, ``A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures," J.ACM, vol. 17, no. 4, pp. 589-602, 1970.

292. Aköz Y., Kadioğlu F. The Mixed Finite Element Method for the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, vol. 44, no. 12, pp. 1909-32.

293. Aksoy H.G., Şenocak E. Space-time discontinuous Galerkin method for linear elastodynamics. Journal of Aerospace Engineering, 2007, vol. 20, no. 2, pp. 128-131.

294. Aksoy H.G., Şenocak E. Space-time discontinuous Galerkin method for dynamics of solids. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2008, vol. 24, no. 12, pp. 1887-1907.

295. Amadei, B., and Goodman, R.E. 1981. A 3-D constitutive relation for fractured rock masses. In Proceedings of the International Symposium on the Mechanical Behavior of Structured Media, Ottawa. pp. 249–268.

296. Ampilov Y. P. From seismic interpretation to modelling and Assesment of oil and Gas fields. — EAGE Publications Netherlands, 2010. — 276 p.

297. Andersen M.A. (1995). “Petroleum Research in North Sea Chalk”. Stavanger, Norway: RF–Rogaland Research (1995): 142.

298. Anderson T.L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications. Boca Raton: CRC Press, 1991. 793 p.

299. Anitescu M. Spectral Finite-Element Methods for Parametric Constrained Optimization Problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2009, vol. 47, no. 3, pp. 1739-59.

300. Antonov Alexander, Dongarra Jack, and Voevodin Vladimir. Algowiki project as an extension of the top500 methodology. Supercomputing Frontiers and Innovations, 5(1):4–10, 2018.

301. Aquino W. et al. Generalized Finite Element Method using Proper Orthogonal Decomposition. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 79, no. 7, pp. 887-906.

302. Areias P.M.A., Belytschko T. Analysis of Three-Dimensional Crack Initiation and Propagation using the Extended Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, vol. 63, no. 5, pp. 760-88.

303. Armero F. Assumed Strain Finite Element Methods for Conserving Temporal Integrations in Non-Linear Solid Dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, vol. 74, no. 12, pp. 1795-847.

304. Arnold D.N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, vol. 19, pp. 742-760.

305. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Donatella Marini L. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, vol. 39, no. 5, pp. 1749-1779.

306. Arrigo D.J., Hill J.M. Transformations and equation reduction in finite elasticity. II: Plane stress and axially symmetric deformations// Mathematics and Mechanics of Solids.1996. V. 1. P. 177–192.

307. Asadpoure A., Mohammadi S. Developing New Enrichment Functions for Crack Simulation in Orthotropic Media by the Extended Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, vol. 69, no. 10, pp. 2150-72.

308. N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. J. Acoust. Soc. Am., 104(3):1444-1452, 1998.

309. Attard M.M., Hunt G.W. Hyperelastic constitutive modeling under finite strain// International Journal of Solids and Structures. 2004. V.41, No.18-19. P. 5327-5350.

310. R. Ávila-Carrera, J. H. Spurlin, C. Valle-Molina. “Simulating elastic wave propagation in boreholes: Fundamentals of seismic response and quantitative interpretation of well log data” / Geofísica Internacional. 2011. 50-1: pp.57-76.

311. Bagheri, M. 2006. Modeling geomechanical effects on the flow properties of fractured reservoirs. Ph.D thesis, University of Calgary, Calgary, Alta.

312. Bagheri, M., Settari, A. Modeling of Geomechanics in Naturally Fractured Reservoirs – SPE-93083-MS, SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, USA, 2005.

313. Bagheri, M., Settari, A. Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Can. Geotech. J. 43: 574–586 (2006) doi:10.1139/T06-024

314. Bagheri, M., Settari, A. Modeling Coupled Fluid Flow and Deformation of Fractured Reservoirs Using Full Tensor Permeability // SPE paper 113319. Europec/EAGE Conference and Exhibition, 9-12 June 2008, Rome, Italy. DOI: http://dx.doi.org/10.2118/113319-MS

315. Bandis, S.C., Lumsden, A.C., and Barton, N.R. 1983. Fundamentals of rock joint deformation. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts, 20: 249–268.

316. Bargui H., Abousleiman Y. 2D and 3D elastic and poroelastic stress analysis for multilateral wellbore junctions // ARMA Conference Paper – 2000 – 8 p.
317. Barret R. and others - Templates for the solution of linear systems, 1994, 141p
318. Barrios T.P., Bustinza R. An augmented discontinuous Galerkin method for elliptic problems. Comptes Rendus Mathematique, 2007, vol. 344, no. 1, pp. 53-58.
319. Barros F.B., Proença S.P.B., de Barcellos C.S. On Error Estimator and p-Adaptivity in the Generalized Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, vol. 60, no. 14, pp. 2373-98.
320. Barton, N.R., and Choubey, V. 1977. The shear strength of rock joints in theory and practice. Rock Mechanics, 10: 1–54.
321. M.V. Barton, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates", Journal of Applied Mechanics, vol. 18, 1951, p. 129-134.
322. Bar-Yoseph P.Z., Fisher D., Gottlieb O. Spectral element methods for nonlinear spatio-temporal dynamics of an Euler-Bernoulli beam. Computational Mechanics, 2006, vol. 19, no. 2, pp. 136-151.
323. Bar-Yoseph P.Z., Fisher D., Gottlieb O. Spectral element methods for nonlinear temporal dynamical systems. Computational Mechanics, 2006, vol. 18, no. 4, pp. 302-313.
324. Bassey A., Dosunmu A., Otutu F., Usim M., Majekodunmi Borehole Stability Management Using the New Mudweight Window Concept;A Case Study of Well KTY 02, KTY 03 and KTY 04 // SPE 184279. – 2016. – 11 p.
325. Bassi F., Rebay S. A high-order accurate discontinuous Galerkin finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. J. Comput. Phys., 1997, vol. 131, pp. 267-279.
326. Bastian P., Engwer C. An Unfitted Finite Element Method using Discontinuous Galerkin. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 79, no. 12, pp. 1557-76.
327. Bathe K. -J. Finite Element Procedures, Prentice Hall, 1996, 1037 pp.
328. Irina O. Bayuk, Alexander A. Vikhorev, Hooper John, Vladimir V. Tertychnyi, Yuri A. Kukharenko, and Evgeni M. Chesnokov. Frequency dependent effects in porous rocks. In SEG International Conference and Exhibition, Moscow, 1-3 September, 2003, page PS10, 2003.
329. Beatrice Riviere, Mary F. Wheeler, Vivette Girault. Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. Computational Geosciences 3 (1999) 337–360.

330. Belhachmi Z., Sac-Epée J.M., Sokolowski J. Mixed Finite Element Methods for Smooth Domain Formulation of Crack Problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, vol. 43, no. 3, pp. 1295-320.

331. Nathan Bell and Michael Garland "Efficient Sparse Matrix-Vector Multiplication on CUDA" in "NVIDIA Technical Report NVR-2008-004", December 2008

332. Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. Int. J. Numer. Methods Eng. 1999; 45:601–620.

333. Belytschko T, Fish J and Engelmann BE. A finite element with embedded localization zones. Comput. Methods Appl. Mech.Eng. 1988; 70:59–89.

334. Belytschko T, Organ D and Gerlach C. Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete. Comput. MethodsAppl. Mech. Eng. 2000; 187:385–399.

335. Belytschko T. et al. Structured Extended Finite Element Methods for Solids Defined by Implicit Surfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, vol. 56, no. 4, pp. 609-35.

336. Belytschko T., Liu W. K., Morgan B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. -Chichester, England: J. Wiley Sons LTD., 2000. —650p.

337. T. Belytschko and M. Velebit, "Finite Element Method for Elastic-Plastic Plates," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 227-242 (1972)

338. Ben-Tal A., Bar-Yoseph P.Z., Flashner H. Space-time spectral element method for optimal slewing of a flexible beam. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 39, no. 18, pp. 3101-3121.

339. Bernacki M., Fezoui L., Lanteri S., Piperno S. Parallel discontinuous Galerkin unstructured mesh solvers for the calculation of three-dimensional wave propagation problems. Applied Mathematical Modelling, 2006, vol. 30, no. 8, pp. 744-763.

340. Bernacki M., Lanteri S., Piperno S. Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, nondiffusive, Discontinuous Galerkin methods. Journal of Computational Acoustics, 2006, vol. 14, no. 1, pp. 57-81.

341. Bernardi C., Chorfi N. Mortar spectral element methods for elliptic equations with discontinuous coefficients. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2002, vol. 12, no. 4, pp. 497-524.

342. C. Bernardi and Y. Maday. Approximations spectrales de problemes aux limites elliptiques. Springer, Paris, 1992.

343. C. Bernardi and Y. Maday, Spectral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis V, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions Eds., North-Holland (1997) 209-485.

344. C. Bernardi and Y. Maday, Spectral element discretizations of the Poisson equation with mixed boundary conditions. Appl. Math. Inform. 6 (2001) 1-29. Zbl 1004.65119

345. Bertoldi K., Boyce M.C., Deschanel S., Prange S.M., Mullin T. Mechanics of deformation-triggered pattern transformations and superelastic behavior in periodic elastomeric structures// Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. V.56. P.2642–2668.

346. Bertram A. Elasticity and Plasticity of Large Deformations: An Introduction. - Springer, 2005. - 326 p.

347. Beylkin G., Monzon L. On approximation of functions by exponential sums. // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2005. V. 19. P. 17–48.

348. Henri-Pierre Valero, Hugues Djikpesse, Bikash Sinha. 2009. Estimation of borehole fluid slowness using sonic array waveforms. SEG Technical Program Expanded Abstracts 2009, 361-365. doi: 10.1190/1.1442322

349. M.A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. J. Acoust. Soc. Am., 28:168-191, 1956.

350. Blanch ,J. O., J. O. Robertsson and W. W. Symes, 1995, Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique, Geophysics, 60 , no. 1, 176-184.

351. Bodard N., Bouffanais R., Deville M.O. Solution of moving-boundary problems by the spectral element method. Applied Numerical Mathematics, 2008, vol. 58, no. 7, pp. 968-984

352. Bodard N., Deville M.O. Fluid-structure interaction by the spectral element method. Journal of Scientific Computing, 2006, vol. 27, no. 1-3, pp. 123-136.

353. Boursier I., Tromeur-Dervout D., Vassilevski Y. Parallel solution of mixed finite element/spectral element systems for convection–diffusion equations on non-matching grids // Applied Numerical Mathematics. — 2010. — Vol. 60, no. 11. — P. 1131–1147

354. Brenner S.C., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer, 2008.

355. Brezzi F., Manzini G., Marini D., Pietra P., Russo A. Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2000, vol. 16, no. 4, pp. 365-378.

356. Bruhns O. T., Schiesse P. A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids // European Journal of Mechanics A: Solids. 1996. V. 15, 3. – P. 367–396.

357. Burman E. A Unified Analysis for Conforming and Nonconforming Stabilized Finite Element Methods using Interior Penalty. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, vol. 43, no. 5, pp. 2012-33.

358. Bustinza R. A unified analysis of the local discontinuous Galerkin method for a class of nonlinear problems. Applied Numerical Mathematics, 2006, vol. 56, no. 10-11, pp. 1293-1306.

359. Campos N.B.F., Arruda J.R.F. On the modeling of beam reinforced thin plates using the spectral element method. Shock and Vibration, 2008, vol. 15, no. 3-4, pp. 425-434.

360. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. & Zang, T.A., 1988. Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York.

361. Capdeville Y., Chaljub E., Vilotte J.P., Montagner J.P. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models. Geophysical Journal International, 2003, vol. 152, no. 1, pp. 34-67.

362. Capdeville Y., Gung Y., Romanowicz B. Towards global earth tomography using the spectral element method: A technique based on source stacking. Geophysical Journal International, 2005, vol. 162, no. 2, pp. 541-554.

363. Capdeville, Y., M´ethode coupl´ee ´el´ements spectraux – solution modale pour la propagation d'ondes dans la Terre `a l'´echelle globale. Ph.D. thesis, Universit´e Paris 7, Paris, France, 2000.

364. Carcione, J. M., and Wang, P. J., 1993,A Chebyshev collocation method for the wave equation in generalized coordinates: Comput. Fluid Dyn. J., 2, 269–290.

365. Carcione, J., 2007, Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media. Elsevier.

366. Carcione Jose M., Dan Kosloff, Alfred Behle, Geza Serianis A spectral scheme for wave propagation simulation in 3-D elastic-anisotropic media // Geophysics, Vol. 57, No. 12 (December 1992); P. 1593-1607

367. Carlo L. Bottasso, Stefano Micheletti, Riccardo Sacco. The discontinuous Petrov–Galerkin method for elliptic problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 3391–3409.

368. Castillo P. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. SIAM Journal of Scientific Computing, 2002, vol. 24, no. 2, pp. 524-547.

369. S. Catherine, S. Greenhalgh, B. Zhou. "2.5D modelling of elastic waves in transversely isotropic media using the spectral element method" / Exploration Geophysics, 2007. - 38, pp.225-234.

370. Cecka C., Lew A.J., Darve E. Assembly of Finite Element Methods on Graphics Processors. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, vol. 85, no. 5, pp. 640-69.

371. E. Chaljub, D. Komatitsch, Y. Capdeville. “Spectral-element analysis in seismology” / Advances in Geophysics, 2007. - v. 48, pp. 365-419.

372. Chaljub E., Komatitsch D., Vilotte J., Capdeville Y., Valette B., Festa G. Spectral Element Analysis in Seismology, in Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Media, edited by Ru-Shan Wu and Valérie Maupin. Advances in Geophysics, 2007, vol. 48, pp. 365-419.

373. Chan, A. K., and T. Tsang, 1983, Propagation of acoustic waves in a fluid-filled borehole surrounded by a concentrically layered transversely isotropic formation: The Journal of the Acoustical Society of America, 74, 1605–1616.

374. Charara M., Myasnikov A., Sabitov D. Finite difference modeling of elastic wave propagation on curvilinear grid: a generalized rotated operator approach // Proceedngs - SEG International Exposition and 78th Annual Meeting in Las Vegas. — USA, 2008. — P. 2092–2096.

375. Charara Marwan, Vershinin Anatoly, Deger Evgeniya, Sabitov Denis, Pekar Grigory. 3D spectral element method simulation of sonic logging in anisotropic viscoelastic media. In SEG Expanded Abstracts, Vol. 30, p. 432–437, 2011. DOI: 10.1190/1.3628113

376. M. Charara, A. Vershinin, D. Sabitov, G. Pekar. SEM wave propagation in complex media with tetrahedral to hexahedral mesh. In 73rd European Association of Geoscientists and Engineers Conference and Exhibition, p. 41–45. Vienna, Austria, 2011. DOI: 10.3997/2214-4609.20148951

377. Chen, H.-Y., & Teufel, L. W. (1997, January 1). Coupling Fluid-Flow and Geomechanics in Dual-Porosity Modeling of Naturally Fractured Reservoirs. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/38884-MS

378. Chen Z., Wu H. An Adaptive Finite Element Method with Perfectly Matched Absorbing Layers for the Wave Scattering by Periodic Structures. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2003, vol. 41, no. 3, pp. 799-826.

379. Cherepanov G.P. The propagation of cracks in a continuous medium. J. Appl. Math. Mech., 1967, 31, p. 503-512.

380. E. M. Chesnokov, Y. A. Kukharenko, I. O. Bayuk, J. H. Queen, and J. M. Hooper. Dispersive properties of porous cracked media. In GEO-SIBERIA 2007, 2007.

381. Chien C.C., Yang C.S., Tang J.H. Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous Galerkin finite element method. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, vol. 39, no. 7, pp. 561-580.

382. Choi, J.; Dongarra, J. J.; Pozo, R.; Walker, D. W. (1992). "ScaLAPACK: a scalable linear algebra library for distributed memory concurrent computers". \Proceedings 1992] the Fourth Symposium on the Frontiers of Massively Parallel Computation. p. 120. doi:10.1109/FMPC.1992.234898. ISBN 0-8186-2772-7.

383. Chorfi N. Handling Geometric Singularities by the Mortar Spectral Element Method I. Case of the Laplace Equation. Journal of Scientific Computing, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 25-48.

384. Chugunov V., Vassilevski Y. Parallel multilevel data structures for a nonconforming finite element problem on unstructured meshes // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2003. — Vol. 18, no. 1. — P. 1–11.

385. V. Chugunov, D. Svyatski, E. Tyrtyshnikov, Y. Vassilevski Parallel iterative multilevel solution of mixed finite element systems for scalar equations // Concurrency Computation Practice and Experience. — 2006. — Vol. 18, no. 5. — P. 501–518.

386. Chung D.-T., Horgan C.O., and Abeyaratne R. The finite deformation of internally pressurized hollow cylinders and spheres for a class of compressible elastic materials// Int. J. Solids and Structures. 1986. V.22. P.1557-1570.

387. Chung E.T., Engquist B. Optimal discontinuous Galerkin methods for wave propagation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, vol. 44, no. 5, pp. 2131-2158.

388. Cockburn B., Guzmán J., Wang H. Superconvergent discontinuous galerkin methods for second-order elliptic problems. Mathematics of Computation, 2009, vol. 78, no. 265, pp. 1-24.

389. Cockburn B., Schötzau D., Wang J. Discontinuous Galerkin methods for incompressible elastic materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, vol. 195, no. 25-28, pp. 3184-3204.

390. Collin F., Chambon R., Charlier R. A Finite Element Method for Poro Mechanical Modelling of Geotechnical Problems using Local Second Gradient Models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 65, no. 11, pp. 1749-72.

391. Costa A. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption // Geophysical Research Letters. 2006. 33. 2. C.

392. Cottrell, J. Austin; Thomas J.R. Hughes, Yuri Bazilevs (October 2009). Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons.ISBN 978-0-470-74873-2.Retrieved 2009-09-22.

393. Cottrell, J. Austin, Thomas J.R. Hughes, Yuri Bazilevs Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA

394. Cox J.V. An Extended Finite Element Method with Analytical Enrichment for Cohesive Crack Modeling. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 78, no. 1, pp. 48-83.

395. E. Cuthill and J. McKee. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In Proceedings of the 1969 24th national conference, pages 157-172, New York, NY, USA, 1969. ACM Press.

396. F. Daim, E. R., Hilhorst D., Mainguy M., Masson R. A preconditional Conjugate Gradient Based Algorithm for Coupling Geomechanical-Reservoir Simulations Rev. IFP. 2002. T. 57. – C. 515-524.

397. Danial A.N., Doyle J.F. A massively parallel implementation of the spectral element method for impact problems in plate structures. Computing Systems in Engineering, 2004, vol. 5, no. 4-6, pp. 375-388.

398. Danilov A. Unstructured tetrahedral mesh generation technology // Comp. Math. and Math. Phys. – 2010. – V. 50. – N. 1. – P. 139–156.

399. Daux C. et al. Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, vol. 48, no. 12, pp. 1741-60.

400. De Basabe J.D., Sen M.K. Comment on "Dispersion analysis of spectral element methods for elastic wave propagation" by G. Seriani and S.P. Oliveira. Wave Motion, 2009, vol. 46, no. 1, pp. 92-93.

401. De Basabe J.D., Sen M.K., Wheeler M.F. The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation: Grid dispersion. Geophysical Journal International, 2008, vol. 175, no. 1, pp. 83-93.

402. De Basabe, J D., and M. K. Sen, 2009, Continuous and discontinuous finite element methods for elastic wave propagation: SEG, Expanded Abstracts, 28, 2542–2546.

403. De Basabe J.D., Mrinal K.S. New developments in the finite-element method for seismic modeling. The Leading Edge, 2009, vol. 28, no. 5, pp. 562-567.

404. De Basabe J.D., Mrinal K.S. Stability of the high-order finite elements for acoustic or elastic wave propagation with high-order time stepping. Geophys. J. Int., 2010, vol. 181, pp. 577-590.

405. De Frutos J., Novo J. Postprocessing the Linear Finite Element Method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, vol. 40, no. 3, pp. 806-19.

406. De la Puente J., Käser M., Dumbser M., Igel H. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - IV. Anisotropy. Geophysical Journal International, 2007, vol. 169, no. 3, pp. 1210-1228.

407. De Maerschalck B., Gerritsma M.I. The use of Chebyshev polynomials in the space-time least-squares spectral element method. Numerical Algorithms, 2005, vol. 38, no. 1-3, pp. 173-196.

408. De S., Fish J., Shephard M .S., Keblinski P., Kumar S.K., "Multiscale modeling of polymer rheology," Physical Review E 74, 030801-1- 030801-4, (2006).

409. Degrande G., De Roeck G. A spectral element method for two-dimensional wave propagation in horizontally layered saturated porous media. Computers and Structures, 2002, vol. 44, no. 4, pp. 717-728.

410. Dhatt, G., Touzot, G., 1984. The Finite Element Method Displayed, John Wiley, New York.

411. Dobroskok A., Ghassemi A., Linkov A. Numerical simulation of crack propagation influenced by thermal and porous liquid stresses // Int. J. Fract. 2005. V. 134. No. 2. P. L29-L34.

412. Dolbow J., Harari I. An Efficient Finite Element Method for Embedded Interface Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 78, no. 2, pp. 229-52.

413. Dolbow J., Belytschko T. An introduction to programming the meshless element free Galerkin method. Archives of Computational Methods in Engineering, 1998, 5, p. 207-241.

414. Dong S., Yosibash Z. A parallel spectral element method for dynamic three-dimensional nonlinear elasticity problems. Computers and Structures, 2009, vol. 87, no. 1-2, pp. 59-72.

415. Douglas J., Dupont T. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976, vol. 58, pp. 207-216.

416. Duarte CA, Babuska I, Oden JT. Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems. Comput. Struct. 2000; 77:215–232.

417. Duarte CA, Hamzeh ON, Liszka TJ, Tworzydlo WW. A generalized finite element method for the simulation of three dimensional dynamic crack propagation. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2001; 190:2227–2262.

418. N. Dubinya, S. Tikhotsky, I. Bayuk, D. Beloborodov, M. Krasnova, A. Makarova, O. Rusina, and I. Fokin. Prediction of physical-mechanical properties and in-situ stress state of hydrocarbon reservoirs from experimental data and theoretical modeling. In SPE Russian Petroleum Technology Conference, pages 1–15, 2017.

419. Duflot M. The Extended Finite Element Method in Thermoelastic Fracture Mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, vol. 74, no. 5, pp. 827-47.

420. Dumbser M., Munz C. Building blocks for arbitrary high order discontinuous galerkin schemes. Journal of Scientific Computing, 2006, vol. 27, no. 1-3, pp. 215-230.

421. Dumbser M., Munz C. On source terms and boundary conditions using arbitrary high order discontinuous Galerkin schemes. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2007, vol. 17, no. 3, pp. 297-310.

422. Duruflé M., Grob P., Joly P. Influence of the Gauss and Gauss-Lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2009, vol. 25, no. 3, pp. 526-551.

423. Dutt P., Biswas P., Ghorai S. Spectral element methods for parabolic problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, vol. 203, no. 2, pp. 461-486.

424. Dutt P., Biswas P., Naga Raju G. Preconditioners for spectral element methods for elliptic and parabolic problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, vol. 215, no. 1, pp. 152-166.

425. Dutt P., Tomar S. Stability estimates for h-p spectral element methods for general elliptic problems on curvilinear domains. Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences, 2003, vol. 113, no. 4, pp. 395-429.

426. Dutt P.K., Kumar N.K., Upadhyay C.S. Nonconforming h-p spectral element methods for elliptic problems. Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences, 2007, vol. 117, no. 1, pp. 109-145.

427. Ekstrom, M. E., 1995, Dispersion estimation from borehole acoustic arrays using a modified matrix pencil algorithm: Presented at the 29th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, California.

428. Ellefsen, K. J., C. H. Cheng, and M. N. Toksöz, 1991, Effects of anisotropy upon the normal modes in a borehole: The Journal of the Acoustical Society of America, 89, 2597–2616.

429. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 241. № 1226. P. 376-396 = Эшелби Дж. Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой // Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит 1963. С. 103-139.

430. Eyck A.T., Lew A. Discontinuous Galerkin methods for non-linear elasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 67, no. 9, pp. 1204-1243.

431. Faccioli, E., F. Maggio, R. Paolucci, and A. Quarteroni, 1997, 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudospectral domain decomposition method: Journal of Seismology, **1**, 237–251.

432. Fichtner A., Igel H., Bunge H., Kennett B.L.N. Simulation and inversion of seismic wave propagation on continental scales based on a spectral-element method. Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics, 2009, vol. 4, no. 1-2, pp. 11-22.

433. Fish J. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. 2011. V. 55. – P. 215-231.

434. Fish J, Chen W, Nagai G. Non-local dispersive model for wave propagation in heterogeneous media:multi-dimensional case. International Journal for Numerical Methods in Engineering 2000; 54:347–363.

435. Fish J., Belytschko T., A First Course in Finite Elements, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester,336p 2007

436. Fish J., Fan R. Mathematical Homogenization of Nonperiodic Heterogeneous Media Subjected to Large Deformation Transient Loading// International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 76 , Issue 7, pp. 1044-1064 (2008)

437. Fish J., Shek K.L. Finite Deformation Plasticity Based on the Additive Split of the Rate of Deformation and Hyperelasticity// Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 190, pp. 75-93, (2000).

438. Fournier A. Exact calculation of Fourier series in nonconforming spectral-element methods. Journal of Computational Physics, 2006, vol. 215, no. 1, pp. 1-5.

439. Freund J. The space-continuous-discontinuos Galerkin method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 3461-3473.

440. Fries T., Belytschko T. The extended/generalized Finite Element Method: An Overview of the Method and its Applications. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, vol. 84, no. 3, pp. 253-304.

441. Festa G. Slip imaging by isochron back projection and source dynamics with spectral element methods, 2004. PhD Thesis.

442. Galvão A., Gerritsma M., De Maerschalck B. hp-Adaptive least squares spectral element method for hyperbolic partial differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, vol. 215, no. 2, pp. 409-418.

443. Gassner, G., Kopriva, D. “A Comparison of the Gauss and Gauss-Lobatto Discontinuous Galerkin Spectral Element Method for Wave Propagation Problems” / SIAM Journal of Scientific Computing, 2011.

444. Gassner G., Kopriva D. “On the Quadrature and Weak Form Choices in Collocation Type Discontinuous Galerkin Spectral Element Methods” / J. Sci. Comput., 2010. – 44. - pp. 136-155.

445. Geijselaers H.J.M., Huétink J. A second order discontinuous Galerkin method for advection on unstructured triangular meshes. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2003, vol. 19, no. 4, pp. 275-284.

446. Gerritsma M.I., Proot M.M.J. Analysis of a Discontinuous Least Squares Spectral Element Method. Journal of Scientific Computing, 2002, vol. 17, no. 1-4, pp. 297-306.

447. H.N. Gharti, D. Komatitsch, V. Oye. “Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis” / Int. J. Numer. Meth. Eng. 2011. pp. 253-265.

448. H.N. Gharti, V. Oye, D. Komatitsch, J. Tromp. “Simulation of multistage excavation based on a 3D spectral-element method” / Computers & Structures 2011. – pp. 2634-2651.

449. Giraldo F.X. The Lagrange-Galerkin Spectral Element Method on Unstructured Quadrilateral Grids. Journal of Computational Physics, 2008, vol. 147, no. 1, pp. 114-146.

450. Giraldo F.X., Taylor M.A. A diagonal-mass-matrix triangular-spectral-element method based on cubature points. Journal of Engineering Mathematics, 2006, vol. 56, no. 3, pp. 307-322.

451. Girault V., Sun S., Wheeler M.F., Yotov I. Coupling discontinuous galerkin and mixed finite element discretizations using mortar finite elements. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, vol. 46, no. 2, pp. 949-979.

452. Goldstein R. V., Shifrin E. I., Shushpannikov P. S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification. International Journal of Fracture. 2007. V. 147. No 1-4, 45-54

453. Goodman, R.E. 1976. Methods of geological engineering in discontinuous rocks. West Publication Company.

454. Gopalakrishnan J., Pasciak J.E. Multigrid for the Mortar Finite Element Method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, vol. 37, no. 3, pp. 1029-52.

455. Gottlieb S., Shu C., Tadmor E. Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods. SIAM Review, 2001, vol. 43, no. 1, pp. 89-112.

456. Gracie R., Wang H., Belytschko T. Blending in the extended finite element method by discontinuous Galerkin and assumed strain methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, vol. 74, no. 11, pp. 1645-1669.

457. Green A.E., Adkins J.E. Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics. Oxford: Clarendon Press. 1960 = Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие

деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.

458. Grenier S., Konrad J., LeBœuf D. Dynamic simulation of falling weight deflectometer tests on flexible pavements using the spectral element method: Forward calculations. Canadian Journal of Civil Engineering, 2009, vol. 36, no. 6, pp. 944-956.

459. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A. 1920. V.221. P. 163-198.

460. Gubaidullin A.A., Kuchugurina O.Y., Smeulders D.M.J., and Wisse C.J. Frequency-dependent acoustic properties of a fluid/porous solid interface. J. Acoust. Soc. Am., 116(3):1474-1480, 2004.

461. Guo B., Cao W. An Additive Schwarz Method for the h-p Version of the Finite Element Method in Three Dimensions. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, vol. 35, no. 2, pp. 632-54.

462. Gupta, A., Penuela, G., and Avila, R.: "An Integrated approach to the Determination of Permeability Tensors for Naturally Fractured Reservoirs", JCPT (Dec.2001) 40, 43-48

463. Hansbo P., Larson M.G. Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche's method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, vol. 191, no. 17-18, pp. 1895-1908.

464. Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. – J. Appl. Mech., 1962, v.29, p. 143.

465. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1962. V. 10. – P. 335–342.

466. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. V. 11. P. 127-140.

467. Henderson R.D. Dynamic refinement algorithms for spectral element methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, vol. 175, no. 3-4, pp. 395-411.

468. Hernandez I., Numerical Reservoir Simulation Coupled with Geomechanics. 2011. SPE-152364-STU.

469. Hesthaven J.S., Warburton T. Nodal Discontinuous Galerkin Methods. Springer, 2008.

470. D. Hilbert: Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. Mathematische Annalen 38 (1891), 459–460.

471. Hill J.M., Arrigo D.J. Transformations and equation reduction in finite elasticity. I: Plane strain deformations// Mathematics and Mechanics of Solids, 1, 155–175 (1996).

472. Hill R. On constitutive macrovariables for heterogeneous solids at finite strain. // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1972. V. 326, No. 1565. P. 131-147.

473. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1963. V. 11. – P. 357–372.

474. Hoefnagels J.P.M., Neggers J., Timmermans P.H.M., van der Sluis O., Geers M.G.D. Copper–rubber interface delamination in stretchable electronics// Scripta Materialia, 63, 875–878, (2010).

475. Hofstetter G., Mang H. Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures. - Vieweg Verlag. 1995. 366 p.

476. Hohe J., Becker W. A probabilistic approach to the numerical homogenization of irregular solid foams in the finite strain regime // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. – P. 3549–3569.

477. Holzapfel G.A. Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering. - Wiley, 2000. - 455 p.

478. Horr A.M., Safi M. Impact wave propagation in tall buildings using advanced spectral element method. Structural Design of Tall and Special Buildings, 2003, vol. 12, no. 2, pp. 127-143.

479. Horr A.M., Schmidt L.C. Dynamic analysis of large shell structures: Complex Damped Spectral Element method. International Journal of Space Structures, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 241-255.

480. Houston P., Schötzau D., Wihler T.P. An hp-adaptive mixed discontinuous Galerkin FEM for nearly incompressible linear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, vol. 195, no. 25-28, pp. 3224-3246.

481. Houston P., Schötzau D., Wihler T.P. Energy norm a posteriori error estimation of hp-adaptive discontinuous galerkin methods for elliptic problems. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2007, vol. 17, no. 1, pp. 33-62.

482. Houston P., Schwab C., Süli E. Stabilized Hp-Finite Element Methods for First-Order Hyperbolic Problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, vol. 37, no. 5, pp. 1618-43.

483. W. Hovgaard, “Stress in three dimensional pipe-bends”, Transactions of ASME, vol. 57, FSP 75 – 12, p. 401 – 416.

484. Huang, T. H., Chan, C. H., Yang, Z. Y. Elastic Moduli for Fractured Rock Mass Rock Mechanics and Rock Engineering. 1995. T. 28, № 3. – P. 135–144.

485. Hudson, J. A., 1980, Overall properties of a cracked solid: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 88, no. 2, 371–384, http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100057674.

486. Hudson, J. A., 1981, Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks: Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 64, no. 1, 133–150, http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1981.tb02662.x.

487. Hudson, J. A., E. Liu, and S. Crampin, 1996, The mechanical properties of materials with interconnected cracks and pores: Geophysical Journal International, 124, no. 1, 105–112, http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.1996.tb06355.x.

488. Hughes, T.J.R., 1987. The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

489. Hughes T.R.J., Taylor R.L. and Kanoknukulchai W. A finite element method for large displacement contact and impact problems. InFormulations and Computational Algorithms in FE Analysis,Bathe KJ (ed.). MIT Press: Boston, 1977; 468–495.

490. Hughes, T.J.R.; J.A. Cottrell, Y. Bazilevs (2005). "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS,exact geometry and mesh refinement". Comput.Methods Appl. Mech. Engrg. (Elsevier) 194: 4135–4195.

491. Huynh D.B.P., Belytschko T. The Extended Finite Element Method for Fracture in Composite Materials. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 77, no. 2, pp. 214-39.

492. Idiart M., Ponte Castaneda P. Variational linear comparison bounds for nonlinear composites with anisotropic phases. I. General results// Proc. R. Soc. A. 2007. V. 463. P. 907-–924.

493. Igawa H., Komatsu K., Yamaguchi I., Kasai T. Wave propagation analysis of frame structures using the spectral element method. Journal of Sound and Vibration, 2004, vol. 277, no. 4-5, pp. 1071-1081.

494. Igel, H., Mora, P., and Riollet, B., 1995, Anisotropic wave propagation through finite-difference grids: Geophysics, 60, 1203–1216.

495. Ioakimidis N.I. Fracture initiation at an elastic crack tip: A computational implementation of the T-criterion// International Journal of Fracture. 1999. V. 98. No. 3--4. P. 293-311.

496. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate /Journal of applied mechanics. 1957. V. 24, ¹ 3. P. 361-364.

497. Irwin G.R. Fracture / Handbuck der Physik. Bd. 6. Berlin: Springer-Verlag. 1958. P. 551-590.

498. Irwin G.R. Fracture dynamics.—In: Fracturing of metals.—Cleveland: ASM, 1948. P. 147-166.

499. Irwin G.R., Kies J.A., Smith H.L. Fracture strength relative to onset and arrest of crack propagation / Proceedings of the American Society for Testing and Materials. 1959. 58. P. 640-657.

500. Iskandarani M., Haidvogel D.B., Levin J.C., Curchitser E., Edwards C.A. Multiscale geophysical modeling using the spectral element method. Computing in Science and Engineering, 2002, vol. 4, no. 5, pp. 42.

501. Jalali M., Dusseault M. Coupled Fluid-Flow and Geomechanics in Naturally Fractured Reservoirs ISRM-ARMS5-2008-153.

502. Ji H., Dolbow J.E. On Strategies for Enforcing Interfacial Constraints and Evaluating Jump Conditions with the Extended Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, vol. 61, no. 14, pp. 2508-35.

503. Johnson C. Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, vol. 107, no. 1-2, pp. 117-129.

504. D.L. Johnson and T.J. Plona. Probing porous media with first and second sound. ii. acoustic properties of water-saturated porous media. J. Appl. Phys., 76(1):115-125, 1994.

505. Jose M. Carcione, Dan Kosloff, Alfred Behle, and Geza Serianis A spectral scheme for wave propagation simulation in 3-D elastic-anisotropic media // Geophysics, Vol. 57, No. 12 (December 1992); P. 1593-1607

506. Ju W. and Taylor R.L.. A perturbed Lagrange formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems. J. Theor. Appl. Mech. 1988; 7:1–14.

507. Juanes R., Samper J., Molinero J. A General and Efficient Formulation of Fractures and Boundary Conditions in the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, vol. 54, no. 12, pp. 1751-74.

508. Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht, Boston: Mar-tinus Nijhoff, 1986. 135 p.

509. Kachanov L.M. Fundamentals of the Theory of Plasticity. Dover Pubns, 2004. 496p.

510. Kachanov M. On the problems of crack interactions and crack coalescence // International Journal of Fracture 2003. V. 120. P.537-543.

511. Kachanov M., Sevostianov I. On quantitative characterization of microstructures and effective properties // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. – P. 309-336.

512. Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of Elasticity Solutions. Springer, 2003. 340 p.

513. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of a solid with holes and cavities of various shapes// Appl. Mech. Reviews. 1994. V. 47, № 1, Part 2. P. S151-S174.

514. Kanaun S.K., Levin V.M. Propagation of shear elastic waves in composites with a random set of spherical inclusions (effective field approach). Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. P. 3971–-3997.

515. Kanel G.I., Razorenov S.V., Fortov V.E. Shock-Wave Phenomena and the Properties of Condensed Matter. N.Y.: Springer, 2004. 320 p.

516. Kanevsky A., Carpenter M.H., Hesthaven J.S. Idempotent filtering in spectral and spectral element methods. Journal of Computational Physics, 2006, vol. 220, no. 1, pp. 41-58.

517. V. S. Karpenko, A. V. Vershinin, V. A. Levin, K. M. Zingerman. Some results of mesh convergence estimation for the spectral element method of different orders in Fidesys industrial package. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 158. — 012049, 2016. DOI:10.1088/1757-899x/158/1/012049

518. Karypis G. and Kumar V. METIS: Unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system. The University of Minnesota, 2.

519. M. Käser, H. Djikpesse, and M. Prange, 2010, Numerical modeling of borehole-guided waves and reservoir formation reflections, SEG, Expanded Abstracts, 29, 573–577.

520. Käser M., Dumbser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. Geophysical Journal International, 2006, vol. 166, no. 2, pp. 855-877.

521. Käser M., Dumbser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case. Geophysical Journal International, 2006, vol. 167, no. 1, pp. 319-336.

522. Käser M., Dumbser M., de la Puente J., Igel H. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - III. Viscoelastic attenuation. Geophysical Journal International, 2007, vol. 168, no. 1, pp. 224-242.

523. Käser M., Hermann V., de la Puente J. Quantitative accuracy analysis of the discontinuous Galerkin method for seismic wave propagation. Geophysical Journal International, 2008, vol. 173, no. 3, pp. 990-999.

524. Käser M., Mai P.M., Dumbser M. Accurate calculation of fault-rupture models using the high-order discontinuous Galerkin method on tetrahedral meshes. Bulletin of the Seismological Society of America, 2007, vol. 97, no. 5, pp. 1570-1586.

525. M.K. Kassir, G.C. Sih, Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loading. Trans. ASME, J. Appl. Mesh., 1966, 33, 601-611.

526. Khalili, N., Valliapan, S. Unified theory of flow and deformation in double porous media European Journal of Mechanics. 1996. T. 15, № 2. – P. 321–336.

527. Kim C. et al. Multiplier Spaces for the Mortar Finite Element Method in Three Dimensions. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, vol. 39, no. 2, pp. 519-38.

528. Kirby R.M., Warburton T.C., Lomtev I., Karniadakis G.E. Discontinuous Galerkin spectral/hp method on hybrid grids. Applied Numerical Mathematics, 2000, vol. 33, no. 1, pp. 393-405.

529. CUDA textbook by David Kirk from NVIDIA and Prof. Wen-mei Hwu from UIUC.

530. Kirkinis E., Ogden R.W., Haughton D.M. Some solutions for a compressible isotropic elastic material// Z. angew. Math. Phys. 2004. V. 55. P. 136–158.

531. Klöckner A., Warburton T., Bridge J., Hesthaven J.S. Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors. Journal of Computational Physics, 2009, vol. 228, no. 21, pp. 7863-7882.

532. Kobelkov G. M. Efficient methods for solving elasticity theory equations // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 1991. — Vol. 6, no. 5. — P. 1–15.

533. Kobelkov G. M., Arbash Z. Numerical methods for theory elasticity equations with highly varying coefficients // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 1993. — Vol. 8, no. 5. — P. 371–384.

534. Komatitsch D., Barnes C., Tromp J. Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method. Geophysics, 2000, vol. 65, no. 4, pp. 1251-1260.

535. Komatitsch D., Barnes C., Tromp J. Wave propagation near a fluid-solid interface: A spectral-element approach. Geophysics, 2000, vol. 65, no. 2, pp. 623-631.

536. Komatitsch D., Liu Q., Tromp J., Süss P., Stidham C., Shaw J.H. Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. Bulletin of the Seismological Society of America, 2004, vol. 94, no. 1, pp. 187-206.

537. Komatitsch D., Martin R., Tromp J., Taylor M.A., Wingate B.A. Wave propagation in 2-D elastic media using a spectral element method with triangles and quadrangles. Journal of Computational Acoustics, 2001, vol. 9, no. 2, pp. 703-718.

538. Komatitsch, D. “Fluid–solid coupling on a cluster of GPU graphics cards for seismic wave propagation” / C. R. Mecanique 339. 2011. pp.125–135.

539. Komatitsch D., Ritsema J., Tromp J. Geophysics: The spectral-element method, beowulf computing, and global seismology. Science, 2002, vol. 298, no. 5599, pp. 1737-1742.

540. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. Geophysical Journal International, 2009, vol. 139, no. 3, pp. 806-822.

541. Komatitsch, D., and Vilotte, J. P., 1998, The Spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures: Bull, Seis Soc. Am., 88, 368–392.

542. Komatitsch D., Vilotte J. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of the Seismological Society of America, 2008, vol. 88, no. 2, pp. 368-392.

543. Komatitsch D., Vilotte J., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sánchez-Sesma F.J. The spectral element method for elastic wave equations - Application to 2-D and 3-D seismic problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 45, no. 9, pp. 1139-1164.

544. Komatitsch, D., Coutel, F., and Mora, P., 1996, Tensorial formulation of the wave equation for modelling curved interfaces: Geophys. J. Internat., 127, 156–168.

545. Komatitsch, D., D. Goddeke, G. Erlebacher, and D. Michea, 2010, Modeling the propagation of elastic waves using spectral elements on a cluster of 192 GPUs. Comput. Sci. Res. Dev., 25, 75–82.

546. Komatitsch, D, Tsuboi, S, and Tromp, J (2005) The spectral-element method in seismology. In: Levander A. and Nolet G. Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms, volume 157 of Geophysical Monograph, pages 205–228 American Geophysical Union, Washington DC, USA.

547. Dmitriy Konovalov, Anatoly Vershinin, Konstantin Zingerman, Vladimir Levin. The implementation of spectral element method in a cae system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes. Modelling and Simulation in Engineering, 2017, p. 1–7, 2017. DOI:10.1155/2017/1797561.

548. Korneev V., Flaherty J.E., Oden T., Fish J. Hp-Version Additive Schwarz Algorithms on Triangular Meshes, I. Mathematical Modelling. No. 11, pp. 38-50, (2000).

549. Korneev V., Flaherty J.E., Oden T., Fish J. Hp-Version Additive Schwarz Algorithms on Triangular Meshes, II. Mathematical Modelling No.12, pp. 28-37, (2000).

550. Kosloff, D., Reshef, M., and Loewenthal, D., 1984, Elastic wave calculations by the Fourier method: Bull, Seis Soc. Am., 74, 875–891.

551. Kostin V., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V. Local time-space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multi-scale media // Journal of Computational Physics. – 2015. – T. 281. – C. 669-689

552. Kostin V., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V. Parallel algorithm with modulus structure for simulation of seismic wave propagation in 3D multiscale multiphysics media // Parallel Computing Technologies: 14th International Conference, PaCT 2017 (Nizhny Novgorod, Russia, September 4-8, 2017): Proceedings (Lecture Notes in Computer Science 10421). – 2017. – C. 42-57

553. Kostin V., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V., Vishnevsky D. Massively parallel hybrid algorithm for simulation of seismic wave propagation in complex media // Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции (г. Москва, 28-29 сентября 2015 г.). – 2015. – С. 49-60

554. Krawczuk M., Palacz M., Ostachowicz W. The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method. Journal of Sound and Vibration, 2003, vol. 264, no. 5, pp. 1139-1153.

555. Kudela P., Zak A., Krawczuk M., Ostachowicz W. Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method. Journal of Sound and Vibration, 2007, vol. 302, no. 4-5, pp. 728-745.

556. Kumar A., Gopalakrishnan S., Chakraborty A. Modified virtual crack-closure technique using spectral element method. International Journal of Computational Methods, 2007, vol. 4, no. 1, pp. 109-139.

557. Kumar N.K., Raju G.N. Least-squares hp/spectral element method for elliptic problems. Applied Numerical Mathematics, 2010, vol. 60, no. 1-2, pp. 38-54.

558. Kurdi M.H., Beran P.S. Spectral element method in time for rapidly actuated systems. Journal of Computational Physics, 2008, vol. 227, no. 3, pp. 1809-1835.

559. Laborde P. et al. High-Order Extended Finite Element Method for Cracked Domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, vol. 64, no. 3, pp. 354-81.

560. Ladevèze P., Allix O., Deü J.F., Lévêque D. A mesomodel for localization and damage computation in laminates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 183(1-2):105–122, 2000.

561. Ladeveze P., Neron D., Gosselet P. On a mixed and multiscale domain decomposition method// Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering. Vol 196. Num 8. Pages 1526-1540. 2007.

562. Ladeveze P., Passieux J.C., Neron D. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition//Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering. Vol 199. Num 21-22. Pages 1287-1296. 2010.

563. Larmat C., Montagner J., Capdeville Y., Banerdt W.B., Lognonné P., Vilotte J. Numerical assessment of the effects of topography and crustal thickness on martian seismograms using a coupled modal solution-spectral element method. Icarus, 2008, vol. 196, no. 1, pp. 78-89.

564. Lavit I.M. Conception of cohesive forces in nonlinear fracture mechanics // Proceedings of the Eleventh Biennial European Conference on Fracture ECF 11, Poitiers, Futuroscope, France, September 3-6, 1996. Warley, U.K.: EMAS, 1996.

565. Lcc U., Lee J. Vibration analysis of the plates subject to distributed dynamic loads by using spectral element method. ASME International Journal, 2008, vol. 12, no. 4, pp. 565-571.

566. Lee S., Chan Y., Komatitsch D., Huang B., Tromp J. Effects of realistic surface topography on seismic ground motion in the Yangminshan region of Taiwan based upon the spectral-element method and LiDAR DTM. Bulletin of the Seismological Society of America, 2009, vol. 99, no. 2A, pp. 681-693.

567. Lee S., Chen H., Liu Q., Komatitsch D., Huang B., Tromp J. Three-dimensional simulations of seismic-wave propagation in the Taipei Basin with realistic topography based upon the spectral-element method. Bulletin of the Seismological Society of America, 2008, vol. 98, no. 1, pp. 253-264.

568. Lee U. Dynamic characterization of the joints in a beam structure by using spectral element method. Shock and Vibration, 2001, vol. 8, no. 6, pp. 357-366.

569. Lee U., Jang I., Go H. Stability and dynamic analysis of oil pipelines by using spectral element method. Journal of Loss Prevention in the Process Industries, 2009, vol. 22, no. 6, pp. 873-878.

570. Lee U., Jeon D. Identification of non-ideal structural boundary conditions by using spectral element method. Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2009, vol. 2, pp. 978-987.

571. Lee U., Kim J., Leung A.Y.T. Spectral element method in structural dynamics. Shock and Vibration Digest, 2000, vol. 32, no. 6, pp. 451-465.

572. V. Lekic, B. Romanowicz “Inferring upper mantle structure by full waveform tomography with the Spectral Element Method” Submitted to Geophys / J. Int., 2010.

573. Leon Thomsen Weak elastic anisotropy // Geophysics, Vol. 51, No. 10 (October 1986); P. 1954-1966

574. LeVeque R., 2004. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambrige Univercity Press.

575. Levin V., Kachanov M., Lokhin V., Zingerman K. Effective response of porous materials undergoing large deformations // 19-th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech.: Abstr. Kyoto. 1996. P. 262.

576. Levin V.A. Repeatedly Superimposed Large Elastic Deformations // International J. of Fracture.1996. P. 79.

577. Levin V.A. Repeatedly superimposed large deformation in elastic and viscoelastic solids // 19-th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech.: Abstr. Kyoto. 1996. P. 320.

578. Levin V.A. Theory of Repeated Superposition of Large Deformations. Elastic and Viscoelastic Bodies // Intern. J. Solids a. Structures. 1998. V. 35, № 20. P. 2585-2600.

579. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective Elastic Properties of Porous Materials With Randomly Disposed Pores. Finite Deformation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2000. Vol. 67. №4. P. 667-670.

580. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Finite deformation analysis of crack growth in elastic body.// Proc. 9-th International Conference on Fracture. Sydney, 1997. Vol.4: Theoretical and computational fracture mechanics and new directions.- Elsevier, 1997. - P. 2191-2198.

581. LevinV.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M., Nikiforov I.V., Sabitov D. I. Effective properties of porous and composite materials which structuremay be changed in the process of loading. ECCM-2010(European Congress on Computational Mechanics:Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering), Paris. https://www.eccm-2010.org/abstract_pdf/abstract_814.pdf

582. V. A. Levin, I. I. Vdodichenko, A. V. Vershinin, M. Y. Yakovlev, K. M. Zingerman. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials. Letters on materials, 7(4), p. 452–454, 2017. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-4-452-454.

583. Levin V.A., Vershinin A.V. Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition./ Communications in numerical methods in engineering, Vol. 24, №12, p. 2240–2251, 2008.

DOI:10.1002/cnm.1092.

584. Levin V. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M. Numerical analysis of propagation of nonlinear waves in prestressed solids // Modern Applied Science. — 2016. — Vol. 10, no. 4. — P. 158–167.

585. Levin Vladimir, Vdovichenko Ignatiy, Vershinin Anatoly, Yakovlev Maksim, Zingerman Konstantin. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced plexiglas in the two-dimensional case. Modelling and Simulation in Engineering, Article ID 9010576, 10 pages, 2016. DOI: 10.1155/2016/9010576

586. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains./Communications in Numerical Methods in Engineering v.24, 2008

587. Levin V.A., Zingerman K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materialsat Finite Strains and Superimposed Finite Strains // Trans. ASME. (The American Society of Mechanical Engineers). Journal of Applied Mechanics. 2003. V. 70, No. 6. p. 982-985

588. Levin V.A., Zingerman K.M. Finite deformation analysis of a pre-stressed viscoelastic body weakened by two successively originated elliptical holes.// CSME Forum Proceedings. 1998. Vol. 2. - P.24-30.

589. Levin V.A., Zingerman K.M. Interaction and Microfracturing Pattern for Successive Origination (Introduction) of Pores in Elastic Bodies: Finite Deformation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1998. V. 65. № 2. P. 431-435.

590. V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin “Geomechanical Modelling of Fracture Propagation under Finite Strain. Prefracture Zones”. Seismic Technology, Vol 11, No 4, October 2014, pp.1 – 11. DOI: 10.3997/2405-7495.2015102.

591. V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, N.E. Styopin A model for stress analysis of elastomer samples’ crystallization in a solid mechanics problem accounting for superimposed finite strains // Contemporary Engineering Sciences. — 2016. — Vol. 9, no. 25. — P. 1217–1227. DOI: 10.12988/ces.2016.67126

592. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Freiman E.I., KukushkinA.V., TrachenkoA.V. Development and use of the CAE-system "FIDESYS" for nonlinear analysis of solids with microstructure that changed during loading /Keynote/.ECCM-2010 IV (European Congress on Computational Mechanics:Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering), Paris https://www.eccm2010.org/abstract_pdf/abstract_1650.pdf

593. V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, E. I. Freiman, A. V. Yangirova. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains. International Journal of Solids and Structures, Vol. 50, №20-21, p. 3119–3135, 2013. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019

594. V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin, M. Ya Yakovlev. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains. Composite Structures, Vol. 131, p. 25–36, 2015. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.04.037

595. Levitas V.I Large Deformation of Materials with Complex Rheological Properties at Normal and High Pressure. New York: Nova Science Publ. 1996. 374 p.

596. Levitas V.I., Levin V.A., Zingerman K.M., and Freiman E.I.. Displacive Phase Transitions at Large Strains: Phase-Field Theory and Simulations// Physical Review Letters. 103, 025702 (2009). иповторноопубликована on-line порешениюредколлегиижурналом Virtual Journal of Nanoscale Science & Technology(American Institute of Physics, American Physical Society)

597. Levitas V.I., Stein E. Simple micromechanical model of thermoelastic martensitic transformations // Mech. Res. Commun., 1997. V. 24. № 3. P. 309-318.

598. Lewis, R. W., Ghafouri, H. R. A novel FE DP model for multiphase flow through deformable fractured porous media Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1997. T. 21. – C. 789–816.

599. Lewis, R. W., Pao, W. K. S. Numerical simulation of Three-Phase Flow in Deformning Fractured Reservoir Oil & Gas Science and Technology. 2002. T. 57, № 5. – C. 499–514.

600. Li X. et al. Mixed Finite Element Method for Saturated Poroelastoplastic Media at Large Strains. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, vol. 57, no. 6, pp. 875-98.

601. Liebowitz H., Moyer E. T. Jr. Finite element methods in fracture mechanics /Computers & Structures. 1989. V. 31, № 1. P. 1-9.

602. Lin W. Chebyshev spectral element method for elastic wave modeling. Shengxue Xuebao/Acta Acustica, 2007, vol. 32, no. 6, pp. 525-533.

603. Lisitsa V., E. Lys, Dmitry Pissarenko, G. Reshetova and V. Tcheverda, 2010, Accurate numerical simulation of sonic logging in arbitrary anisotropic viscoelastic media SEG, Expanded Abstracts, 29 , no. 1, 2911-2915.

604. Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // Journal of Computational Physics. – 2016. – T. 311. – C. 142-157

605. Liu G.R. Mesh free methods. Moving beyond the finite element method, CRC, Boca Raton, 2003.

606. Liu F., Borja R.I. A Contact Algorithm for Frictional Crack Propagation with the Extended Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, vol. 76, no. 10, pp. 1489-512.

607. Liu H-L. and JohnsonD.L.. Effects of an elastic membrane on tube waves in permeable formations. J. Acoust. Soc. Am., 101(6):3322-3329, 1996.

608. Liu, Q. H., and B. K. Sinha, 2003, A 3D cylindrical PML/FDTD method for elastic waves in fluid-filled pressurized boreholes in triaxially stressed formations: Geophysics, 68, 1731–1743.

609. Q. Liu, J. Polet, D. Komatitsch. “Spectral-element moment tensor inversions for earthquakes in southern California” / Bull. Seism. Soc. Amer., 94. 2004. pp.1748–1761.

610. S.H. Lo, A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains, (1985) International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21, pp. 1403-1426.

611. Lohner Rainald "Extensions and Improvements of the Advancing Front Grid Generation Technique", Communications in Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd, Vol 12, pp.683-702, 1996

612. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Comput. Mater. Sci. 2004. V. 36. № 2. P. 145-152.

613. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mater. Sci. 2006. V. 41. № 20. P. 6693-6707.

614. Lys E., Romenski E., Tcheverda V., Epov M. Finite-difference simulation of wave propagation through prestressed elastic media // Finite Difference Methods, Theory and Applications: 6th International Conference, FDM 2014 (Lozenetz, Bulgaria, June 18-23, 2014). – 2015. – C. 282-289

615. Maerschalck B.D., Gerritsma M.I. Least-squares spectral element method for non-linear hyperbolic differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, vol. 215, no. 2, pp. 357-367.

616. Maitre J., Pourquier O. Condition number and diagonal preconditioning: Comparison of the p-version and the spectral element methods. Numerische Mathematik, 2006, vol. 74, no. 1, pp. 69-84.

617. Mauge C., Kachanov M. Effective elastic properties of an anisotropic material with arbitrary oriented interacting cracks // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 42 №4. P. 561-584.

618. Mavriplis C. Adaptive mesh strategies for the spectral element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, vol. 116, no. 1-4, pp. 77-86.

619. Menouillard T. et al. Efficient Explicit Time Stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM). International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 68, no. 9, pp. 911-39.

620. E.-D.Mercerat, J.-P.Vilotte, F.-J. S´anchez-Sesma. "Triangular spectral element simulation of two-dimensional elastic wave propagation using unstructured triangular grids" / Geophysical Journal International, 2006. – pp. 679–698.

621. Mercier S., Molinari A., Berbenni S., Berveiller M. Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials // Modeling and Simulation in Material Science and Engineering. 2012. V. 20. 024004.

622. Mergheim J., Kuhl E., Steinmann P. A Finite Element Method for the Computational Modelling of Cohesive Cracks. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, vol. 63, no. 2, pp. 276-89.

623. Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, vol. 46, no. 1, pp. 131-50.

624. Moony M.A. Theory of large elastic deformation // Journal of Applied Physics. 1940. № 11. P. 582-592.

625. C. Morency, J. Tromp. "Spectral-element simulations of wave propagation in porous media" / Geophys. J. Int., 175. 2008. pp.301–345.

626. C. Morency, Y. Luo, J. Tromp. "Acoustic, elastic and poroelastic simulations of CO2 sequestration crosswell monitoring based on spectral-element and adjoint methods" / Geophys. J. Int. 185. 2011: pp.955-966.

627. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. V. 21. – P. 571-574.

628. Morton, G. M. (1966), A computer Oriented Geodetic Data Base; and a New Technique in File Sequencing, Technical Report, Ottawa, Canada: IBM Ltd.

629. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // Trans. ASME. J. Appl. Mech.- 1988. 55. June. P.280- 286.

630. Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. New York: Willey, 1951, 140 pp

631. Myasnikov, A.V., Vershinin, A.V., Sboychakov, A.M. A generalization of geomechanical model for naturally fractured reservoirs // Proceedings - SPE Russian Petroleum

Technology Conference and Exhibition, 24-26 October 2016, Moscow, Russia. — Vol. 2. — Moscow, 2016. — P. 1050–1092

632. M. Nagai, T. Ikeda and N. Miyazaki, Stress intensity factor analyses of three-dimensional interface cracks using tetrahedral finite elements. Comput. Mech., 2013, 51, 603-615.

633. Nemat-Nasser S. On finite deformation elasto-plasticity // Int. J. Solids and struct. 1982. V. 18. № 10. P. 857-872.

634. Newman J., Rajn I. Stress intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels // Trans. ASME. J. of Pressure Vessel Technology. 1980. V. 102. N 5. P. 342-346.

635. J.C. Newman, I.S. Raju, Stress-intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies. NASA Technical Memorandum 83200, 1981.

636. I.V. Nikiforov, A.V. Vershinin, V.A. Levin, D.I. Fedorov, "Application of Cloud Computing for Strength Analysis of Solids Using SaaS Fidesys Online", in P. Iványi, B.H.V. Topping, (Editors), "Proceedings of the Fourth International Conference on Parallel, Distributed, Grid and Cloud Computing for Engineering", Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, Paper 27, 2015. doi:10.4203/ccp.107.27.

637. Nikishkov G.P. Estimate of conservativity of elastic approach to elastic-plastic crack problems using two-parameter J-A fracture criterion. Eng. Fract. Mech., 2015, 138, p. 92-99.

638. Nikishkov G.P., Atluri S.N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the equivalent domain integral method /International journal for numerical methods in engineering. 1987. V. 24, № 9. P. 1801-1821.

639. Nikishkov G. P., Vershinin A. V., Nikishkov Y. G. Mesh-independent equivalent domain integral method for j-integral evaluation // Advances in Engineering Software. — 2016. — Vol. 100. — P. 308–318. DOI:10.1016/j.advengsoft.2016.08.006.

640. Nissen-Meyer T., Fournier A., Dahlen F.A. A 2-D spectral-element method for computing spherical-earth seismograms - II. Waves in solid-fluid media. Geophysical Journal International, 2008, vol. 174, no. 3, pp. 873-888.

641. Nissen-meyer T., Fournier A., Dahlen F.A. A two-dimensional spectral-element method for computing spherical-earth seismograms - I. Moment-tensor source. Geophysical Journal International, 2007, vol. 168, no. 3, pp. 1067-1092.

642. Nissen-Meyer T., Y. Luo, C. Morency, J. Tromp “Spectral-element simulations of wave propagation in complex exploration-industry models: Mesh generation and forward simulations” / Eos Trans. AGU, 2008. - 89(53), Fall Meet. Suppl., S11C-1777.

643. Noels L., Radovitzky R. An explicit discontinuous Galerkin method for non-linear solid dynamics: Formulation, parallel implementation and scalability properties. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, vol. 74, no. 9, pp. 1393-1420.

644. Oden I.T. Variational principles in nonlinear continuum mechanics // Var. Meth..Eng. - Southampton, 1973. - V,ol.1.- P. 2/3 - 2/20. 2/105 - 2/108.

645. Oden J.T., Lin T.L. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 1986, p. 297-367.

646. Oden J.T., Pires E.B. Algorithms and numerical results for finite-element approximations of contact problems with non-classical friction laws // Computers and Structures, 1983, v. 19, p. 137-147.

647. Ogden R.W. Large Deformation of Isotropic Elasticity: On the Correlation of Theory and Experiment for Compressible Rubber-like Solids. — Proc Roy. Soc., London, 1977, A328, p. 567—583.

648. Ogden R.W. Non-Linear Elastic Deformations. Mineola, New York: Dover Publications, Inc. 1997.

649. H. Okada and S. Ohata, Three-dimensional J-integral evaluation for cracks with arbitrary curvatures and kinks based on domain integral method for quadratic tetrahedral finite element. {Eng. Fract. Mech., 2013, 109, 58-77.

650. S. P. Oliveira “Seriani Effect of element distortion on the numerical dispersion of spectral element methods” / Commun. Comput. Phys., 9. 2011. - pp. 937-958.

651. OLSON,M.D., LINDBERG,G.M., “Vibration analysis of cantilevered curved plates using a new cylindrical shell finite element, 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics”, WPAFB, Ohio, 1968.

652. OLSON,M.D., LINDBERG,G.M., “Dynamic analysis of shallow shells with a doubly curved triangular finite element”, JSV, Vol. 19, No 3, pp 299-318, 1971

653. Orowan E. Energy criteria of fracture /The welding journal. 1955. V. 34, №3. P. 1576-1606.

654. Orowan, E., Fracture and strength of solids. Reports on Progress in Physics XII, 1948. pp. 185–232

655. Ortiz M and Pandolfi A. Finite-Deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack propagation analysis. Int. J. Numer. Methods Eng. 1999; 44:1267–1282.

656. Paas M.H.J., Schreurs P.J.G, Brekelmans W.A.M. A continuum approach to brittle and fatigue damage: theory and numerical procedures. // International Journal of Solids and Structures. 1993. V. 30. No. 4. P. 579- 599.

657. Keunhwan Pack, Meng Luo, Tomasz Wierzbicki. Sandia Fracture Challenge: blind prediction and full calibration to enhance fracture predictability// Int. J. Fracture. 2014. V. 186. P. 155–175. DOI: 10.1007/s10704-013-9923-3.

658. Pailet F.L. and Cheng C.H., Acoustic Waves in Boreholes, CRC Press, Inc, 1991

659. Palacz M., Krawczuk M. Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method. Computers and Structures, 2002, vol. 80, no. 24, pp. 1809-1816.

660. Pasquetti R., Rapetti F. Spectral element methods on triangles and quadrilaterals: Comparisons and applications. Journal of Computational Physics, vol., 2004, no. 1, pp. 349-362.

661. Pasquetti R., Rapetti F. Spectral element methods on unstructured meshes: Comparisons and recent advances. Journal of Scientific Computing, 2006, vol. 27, no. 1-3, pp. 377-387.

662. Patera, A. T., 1984, A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion: J. Comput. Phys., 54, 468–488.

663. Pathria D., Karniadakis G.E. Spectral element methods for elliptic problems in nonsmooth domains. Journal of Computational Physics, 2005, vol. 122, no. 1, pp. 83-95.

664. Peng H., Meng G., Li F. Modeling of wave propagation in plate structures using three-dimensional spectral element method for damage detection. Journal of Sound and Vibration, 2009, vol. 320, no. 4-5, pp. 942-954.

665. D. Peter, D. Komatitsch. “Forward and adjoint simulations of seismic wave propagation on fully unstructured hexahedral meshes” / Geophys. J. Int. 186 (2011): 721-739.

666. M. Petyt, Introduction to Finite Element Vibrational Analysis, Cambridge University Press, 1990

667. Petrovskiy K. A., Vershinin A. V., Levin V. A. Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. — 012077. DOI: 10.1088/1757-899x/158/1/012077

668. Piat R., Tsukrov I., Boehlke T., Bronzel N., Shrinivasa T., Reznik B., Gerthsen D. “Numerical studies of the influence of textural gradients on the local stress concentrations around fibers in carbon/carbon composites”, Communications in Numerical Methods in Engineering, v. 24, pp. 2194-2205, 2008.

669. Pisarenko G.S., Krasovsky A.J. Analysis of kinetics of quasi-brittle fracture of crystalline materials // Proc. Int. Conf. Mech. Behav. Mater. Kyoto, 1971. 1972. V.1. P. 421-232.

670. V. PISETSKY, I. ABATUROVA, J. PATRUSHEV, S. CHEVDAR, A. VERSHININ,

V. LEVIN. Optimization of engineering and geodetic support development projects on the basis of solid materials geomechanical studies. In Extended abstracts of 12th Conference and Exhibition Engineering Geophysics, EAGE 2016, pages 444–451.

671. B.D. Plyushchenkov, V.I. Turchaninov, Acoustic logging modeling by refined biot's equations, Int. J. Mod. Phys. C 11 (2000), no. 2, 365–396.

672. B.D. Plyushchenkov, and V.I. Turchaninov, Construction principles of the efficient finite difference scheme for the refined Biot's equations, Poromechanics II, Auriault et al (eds.), 2002 Swets & Zeitlinger, Lisse, ISBN 90 5809 394 8, 757-764 (2002).

673. Ponte Castañeda P., Nebozhyn M.V. Variational estimates of the self-consistent type for the effective behavior of some model nonlinear polycrystals // Proceedings of the Royal Society A. 1997. V. 453. – P. 2715–2724.

674. Ponte Castaneda P., Tiberio E. A second-order homogenization method in finite elasticity and applications to black-filled elastomers// Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. V. 48. No. 6--7, P. 1389-1411.

675. Ponte Castañeda P., Willis J. R. Variational second-order estimates for nonlinear composites // Proceedings of the Royal Society A. 1999. V. 455. – P. 1799–1811.

676. Ponte Castaneda P., Zaidman M. Constitutive models for porous materials with evolving microstructure // J. Mech. a. Phys. Solids. 1994. V. 42. № 9. P. 1459-1497.

677. E. Popov, A. Myasnikov, A. Cheremisin, R. Miftakhov, V. Stukachev, A. Mukhametdinova. Experimental and computational complex for determination of the effectiveness of cyclic carbon dioxide injection for tight oil reservoirs / Proceedings - SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition, 24-26 October 2016, Moscow, Russia. — Vol. 2. — Moscow, 2016. — P. 811–830.

678. S. Pride. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media. Phys. Rev. B, 50 (21):678-696, 1994.

679. Priolo E. Earthquake ground motion simulation through the 2-D spectral element method. Journal of Computational Acoustics, 2001, vol. 9, no. 4, pp. 1561-1581.

680. Priolo, E., Carcione, J. M., and Seriani, G., 1994, Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques: J. Acoust. Soc. Am., 95, 681–693.

681. Propelar C. H., Hoagland R. G. On the nature of crack propagation and arrest in a damaging material // Eng. Fract. Mech. 1986. 23. № 1. P. 131- 144.

682. Quarteroni, A., Tagliani, A., and Zampieri, E., 1998, Generalized Galerkin approximations of elastic waves with absorbing boundary conditions: Comput. Method. Appl. Mech. Eng., 163, 323–341.

683. H. Rajaram, S. Socrate and D.M. Parks, Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors. Eng. Fract. Mech., 2000, 66, 455-482.

684. Reed W.H. & Hill T.R., 1973. Triangular mesh methods for the neutron transport equation, Technical Report, LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory.

685. Reissner E. A. Note on Two-dimensional Finite—deformation Theories of Shells. —Int. J. Non—Linear Mechanics, 1982, v. 17, N 3, p. 217—222.

686. Rice, J. R."A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", Journal of Applied Mechanics35: (1968), p379–386,

687. Rivlin R. S., Saunders D. W. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials—VII. Experiments on the Deformations of rubber, Phill. Trans. Roy. Soc., 1951, A243, p. 251—288.

688. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials // Philos. Trans. Roy. Soc. - London, 1948. A240. P. 459-508.

689. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory// Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1948. A241. P. 379-397.

690. Robertsson, J.O. A., 1996, A numerical free surface condition for elastic/ viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography: Geophysics, 61, 1921–1934.

691. Rodgers, David P. (June 1985). "Improvements in multiprocessor system design". ACM SIGARCH Computer Architecture News. New York, NY, USA: ACM. 13(3): 225–231. doi:10.1145/327070.327215

692. W. L. Roever, J. H. Rosenbaum, and T. F. Vining, “Acoustic waves from an impulsive source in a fluid-filled borehole,” J. Acoust. Soc. Am. 55, 1144–1157 (1974).

693. Rong Z., Xu C. Numerical approximation of acoustic waves by spectral element methods. Applied Numerical Mathematics, 2008, vol. 58, no. 7, pp. 999-1016.

694. Ru C.Q. Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1999. V. 66, P. 315--321.

695. Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second edition, SIAM, Philadelphia, 2003

696. Y. Saad, SPARSKIT: A Basic Tool for Sparse Matrix Computation, Tech. Report CSRD TR 1029, CSRD, University of Illinois, 1990. 18

697. Sack R.A. Extension of Griffith theory of rupture of three dimension // Proc. Phys. Soc. 1946. V. 58. P. 729-736.

698. V. Sadovnichy, A. Tikhonravov, Vl Voevodin, and V. Opanasenko. "lomonosov": Supercomputing at moscow state university. In Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale, Chapman & Hall/CRC Computational Science, pages 283–307, Boca Raton, United States, 2013. Boca Raton, United States.

699. Safari R., Gandikota R., Mutlu O., Ji M., Glanville J., Abass H. Pulse Fracturing in Shale Reservoirs: Geometrical Aspects, Ductile/Brittle Transition, and Field Implications // SPE 168759. – 2015. – 7 p.

700. Saint-Venant B. Memoire sur la torsion des prismes, avec des conciderations sur leur flexion, ainsi que sur l'equilibre interieure des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exercant simultanement//Men. Savants Acad. Sci. Inst. Imperial France. 1856. V. 14. P. 233-560

701. Samier, P., DeGennaro, S. Practical iterative coupling of GeoMechanics with reservoir simulation, SPE 106188. 2007

702. B. Savage, D. Komatitsch, J. Tromp. “Effects of 3D attenuation on seismic wave amplitude and phase measurements” / Bull. Seism. Soc. Amer. 100. 2010. pp.1241-1251.

703. D. P. Schmitt, “Shear wave logging elastic formations,” J. Acoust. Soc. Am. 84, 2215–2229 (1988).

704. Schuberth Bernhard, The Spectral Element Method for Seismic Wave Propagation. Theory, Implementation and Comparison to Finite Difference Methods. Diplomarbeit. Department für¨ Geo- und Umweltwissenschaften Sektion Geophysik. Ludwig-Maximilians-Universität München, 2003.

705. Seriani G. 3-D large-scale wave propagation modeling by spectral element method on Cray T3E multiprocessor. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, vol. 164, no. 1-2, pp. 235-247.

706. Seriani G. A parallel spectral element method for acoustic wave modeling. Journal of Computational Acoustics, 2007, vol. 5, no. 1, pp. 53-69.

707. Seriani G., Oliveira S.P. DFT modal analysis of spectral element methods for acoustic wave propagation. Journal of Computational Acoustics, 2008, vol. 16, no. 4, pp. 531-561.

708. Seriani G., Oliveira S.P. Dispersion analysis of spectral element methods for elastic wave propagation. Wave Motion, 2008, vol. 45, no. 6, pp. 729-744.

709. Seriani G., Priolo E. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, vol. 16, no. 3-4, pp. 337-348.

710. Seriani, G., Priolo, E., and Pregarz, A., 1995, Modelling waves in anisotropic media by a spectral element method, in Cohen, G., Ed., Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation: Soc. Ind. Appl. Math., 289–298.

711. Seriani, G., Priolo, E., Carcione, J. M., and Padovani, E., 1992, High order spectral element method for elastic wave modeling: 62nd Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1285– 1288.

712. Shen J., Wang L., Li H. A triangular spectral element method using fully tensorial rational basis functions. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2009, vol. 47, no. 3, pp. 1619-1650.

713. Sherwin S.J., Kirby R.M., Peiró J., Taylor R.L., Zienkiewicz O.C. On 2D elliptic discontinuous Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 65, no. 5, pp. 752-784.

714. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. Vol. 7 — Springer Verlag, New York, 1998. — P. 392

715. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling// Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1998. V. 155. No. 1-2. P.181-192.

716. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Predictive modelling of the properties and toughness of polymeric materials. Part III. Simultaneous prediction of micro- and macrostructural deformation of rubber-modified polymers// Journal of Materials Science 2000. V. 35. No. 11. P. 2881-2892.

717. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Predictive modelling of the properties and toughness of polymeric materials. Part II. Effect of microstructural properties on the macroscopic response of rubber-modified polymers// Journal of Materials Science. 2000. V. 35. No. 11. P. 2869--2879.

718. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid // Proc. Roy. Soc. Ser.A. 1946. V. 187. P. 229-260.

719. I.N. Sneddon, M. Lowengrub. Crack problems in the classical theory of elasticity, The SIAM Series in Applied Math, Wiley, NY, 1969.

720. Sofronov I. L., Zaitsev N. A. Numerical generation of transparent boundary conditions on the side surface of a vertical transverse isotropic layer // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 234, no. 6. — P. 1732–1738.

721. Ivan Sofronov, Nikolai Zaitsev, and Leonid Dovgilovich. Multi-block finite-difference method for 3d elastodynamic simulations in anisotropic subhorizontally layered

media. Geophysical Prospecting, 63(5):1142–1160, 2015.

722. Stanescu D., Ait-Ali-Yahia D., Habashi W.G., Robichaud M.P. Spectral Element Method for Linear Fan Tone Noise Radiation. AIAA Journal, 2004, vol. 42, no. 4, pp. 696-705.

723. Stanescu D., Kopriva D.A., Hussaini M.Y. Dispersion analysis for discontinuous spectral element methods. Journal of Scientific Computing, 2000, vol. 15, no. 2, pp. 149-171.

724. Stefanov Y. P., Myasnikov A. V. Modeling of inelastic deformation around vertical and horizontal wells // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1683. — P. 020221–1 – 020221–4.

725. Stein E., Rüter M., Ohnimus S. Adaptive finite element analysis and modelling of solids and structures, Int. J. Numer. Meth. Engng. V. 60 (2004), p. 103-138.

726. Stein E., Sagar G. Convergence behavior of 3-D finite elements for Neo-Hookean material models using Abaqus-UMAT, Int. J. for Computer-Aided Engng. and Software 25 (2008), no. 3, p. 220 – 232.

727. Stevenson R. An Optimal Adaptive Finite Element Method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, vol. 42, no. 5, pp. 2188-217.

728. Stupkiewicz S. Finite element treatment of soft elastohydrodynamic lubrication problems in the finite deformation regime. Comp. Mech., 44:605–619, 2009.

729. Nikita E. Styopin, Anatoly V. Vershinin, Konstantin M. Zingerman, Vladimir A. Levin. Comparative analysis of different variants of the uzawa algorithm in problems of the theory of elasticity for incompressible materials. Journal of Advanced Research, 7(5), p. 703–707, 2016. DOI:10.1016/j.jare.2016.08.001.

730. Sukumar N. et al. Extended Finite Element Method for Three-Dimensional Crack Modelling. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, vol. 48, no. 11, pp. 1549-70.

731. H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin. The stress analysis of cracks handbook. ASME Press, New York, 2000.

732. Talbot D.R. S., Willis J. R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite // Proceedings of the Royal Society A. 2004. V. 460. – P. 2705–2723.

733. Taylor M.A., Wingate B.A. Generalized diagonal mass matrix spectral element method for non-quadrilateral elements. Applied Numerical Mathematics, 2000, vol. 33, no. 1, pp. 259-265.

734. Tcheverda V., Kostin V., Reshetova G., Lisitsa V. Simulation of seismic waves propagation in multiscale media: Impact of cavernous/fractured reservoirs // Communications in Computer and Information Science. 3rd Russian Supercomputing Days Conference,

RuSCDays 2017 (Moscow, Russia, September 25-26, 2017). – 2017. – T. 793. – C. 183-193

735. Tessmer, E., 1995, 3-D seismic modelling of general material anisotropy in the presence of the free surface by a Chebyshev spectral method: Geophys. J. Internat., 121, 557–575.

736. Timoshenko S.P. Strength of Materials. Pt 2. N.Y: Van Nostrand, 1941 = Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Ч. 2. М.: Наука, 1965, 480 с.

737. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger “Theory of Plates and Shells”. McGraw–Hill New York, 1959, 580 pages.

738. S.P. Timoshenko, J.M Manages “Theory of elastic stability” second edition. Dunod, 1966, 500 pages

739. Tomar S.K. h-p spectral element method for elliptic problems on non-smooth domains using parallel computers. Computing (Vienna/New York), 2006, vol. 78, no. 2, pp. 117-143.

740. Treloar J.R.G. The physics of rubber elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1975. 310 p.

741. Treloar L. R. G The Mechanics of Rubber Elasticity. — J. Polimer Sci.: Polimer Simposium, 1974, N 48, p. 107—123.

742. J. Tromp, D. Komatitsch, Q. Liu. “Spectral-element and adjoint methods in seismology” // Communications in Comput. Phys., 3. 2008. pp. 1–32.

743. Trubetskov M. K., Amotchkina T. V., Tikhonravov A. V. Broadband monitoring simulation with massively parallel processors // Proceedings SPIE. — Vol. 8168. — 2011. — P. 81681D.

744. Truesdell C., Noll W., Nonlinear Field Theory of Mechanics, Handbuch der Physik, т. III, 3, 1965.

745. Tsukrov I., Kachanov M. Effective Moduli of an Anisotropic Material with Elliptical Holes of Arbitrary Orientational Distribution, International Journal of Solids and Structures, v. 37, No 41, pp. 5919-5941, 2000.

746. Tsukrov I., Novak J. Effective Elastic Properties of Solids with Defects of Irregular Shapes // International Journal of Solids and Structures. 2002. V. 39. – P. 1539-1555.

747. van den Bosch M.J., Schreurs P.J.G., Geers M.G.D., van Maris M.P.H.F.L.. Interfacial characterization of pre-strained polymer coated steel by a numerical-experimental approach, Mech. Mat., 40(4-5), 302-317, (2008)

748. van den Bosch M.J., Schreurs P.J.G., Geers M.G.D.. Identification and characterization of delamination in polymer coated metal sheet, J. Mech. Phys. Solids, 56, 3259-3276, (2008)

749. Vassilevski Y. V. A parallel cg solver based on domain decomposition and non-smooth aggregation // Conjugate Gradient Algorithms and Finite Element Methods. — Springer, 2004. — P. 93–102.

750. I. I. Vdovichenko, M. Ya Yakovlev, A. V. Vershinin, V. A. Levin. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 158. — 012094, 2016. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012094

751. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Advances in Engineering Software, Vol. 86, p. 80–84, 2015. DOI:10.1016/j.advengsoft.2015.04.007.

752. Vierieux J., 1986, P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, Geophysics, 51 , no. 4, 889-901

753. Vishnevsky D., Lisitsa V., Tcheverda V., Reshetova G. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves // Geophysics. – 2014. – Т. 79. – № 4. – С. T219-T232

754. Wang X., Seriani G., Lin W. Some theoretical aspects of elastic wave modeling with a recently developed spectral element method. Science in China, Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2007, vol. 50, no. 2, pp. 185-207.

755. Wang Y., Zhu X., Hao H., Ou J. Guided wave propagation and spectral element method for debonding damage assessment in RC structures. Journal of Sound and Vibration, 2009, vol. 324, no. 3-5, pp. 751-772.

756. Wanji C. Variational Principles for Non-Conforming Finite Element Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, vol. 53, no. 3, pp. 603-19.

757. Warburton T.C., Lomtev I., Du Y., Sherwin S.J., Karniadakis G.E. Galerkin and discontinuous Galerkin spectral/hp methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, vol. 175, no. 3-4, pp. 343-359.

758. Watanabe O. Variational Principles of Elastoplasticity in Finite Deformation // JSME Intern. J. 1990. Ser. I. V. 33. № 4. P. 480-489.

759. Westergaard H.M. Bearing pressures and cracks // J. Appl. Mech. 1939. V.6. N 2. P. A49-A53.

760. Clint Whaley, R.; Petitet, A.; Dongarra, J. J. (2001). "Automated empirical optimizations of software and the ATLAS project". Parallel Computing. 27: 3. doi:10.1016/S0167-8191(00)00087-9.

761. White, J. E., and C. Tongtaow, 1981, Cylindrical waves in transversely isotropic media: The Journal of the Acoustical Society of America, 70, 1147–1155.

762. White J.E., Underground Sound, Elsevier Science Publishing Company, Inc, 1983

763. David R. White, Redesign of the Paving Algorithm: Robustness Enhancements through Element by Element Meshing, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico 87185

764. Whiteley J.P. Discontinuous Galerkin finite element methods for incompressible non-linear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, vol. 198, no. 41-44, pp. 3464-3478.

765. Wihler T.P. Locking-free adaptive discontinuous Galerkin FEM for linear elasticity problems. Mathematics of Computation, 2006, vol. 75, no. 255, pp. 1087-1102.

766. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journ. Appl. Mech. 1957. V.24. №1. P.109-114.

767. Wilmanski, K.: Continuum Thermodynamics, Part I: Foundations, Wold Scientific, Singapore, 2008, ISBN 978-981-283-556-7.

768. Wu C., Ge X., Liu X., Scarpas A. Dynamic analysis of three-dimensional viscoelastic layer system using spectral element method. Yantu Lixue/Rock and Soil Mechanics, 2007, vol. 28, no. 11, pp. 2265-2270.

769. Xu J., Qin G., Zhu C. Chebychev spectral elements method for wave equation with absorbing boundary conditions. Hsi-An Chiao Tung Ta Hsueh/Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, vol. 41, no. 7, pp. 875-878.

770. Xu Y., Shu C. Local discontinuous Galerkin methods for three classes of nonlinear wave equations. Journal of Computational Mathematics, 2004, vol. 22, no. 2, pp. 250-274.

771. Xu Y., Shu C. Local discontinuous Galerkin methods for two classes of two-dimensional nonlinear wave equations. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2005, vol. 208, no. 1-2, pp. 21-58.

772. Yanovsky Yu.G. Polymer rheology: theory and practice. London, Chapman and Hall, 1993, 320 p.

773. Yarushina, V. M., and Y. Y. Podladchikov (2015), (De)compaction of porous viscoelastoplastic media: Model formulation, J. Geophys. Res. Solid Earth, 120, doi:10.1002/2014JB011258.

774. Viktoriya M. Yarushina, David Bercovici and Michael L. Oristaglio, Rock deformation models and fluid leak-off in hydraulic fracturing. Geophysical Journal International, Volume 194, issue 3, pages 1514-1526. DOI: http://dx.doi.org/10.1093/gji/ggt199

775. Yoffe E.H. The moving Griffith crack // Phil. Mag. 1951. V. 42. Pt. 2. P. 739-750.

776. Youshinaka, R., and Yamabe, T. 1986. Joint stiffness and the deformation behavior of discontinuous rock. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts, 23(1): 19–28.

777. Zampieri E., Pavarino L.F. An explicit second order spectral element method for acoustic waves. Advances in Computational Mathematics, 2006, vol. 25, no. 4, pp. 381-401.

778. Zampieri E., Pavarino L.F. Approximation of acoustic waves by explicit Newmark's schemes and spectral element methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, vol. 185, no. 2, pp. 308-325.

779. Zampieri E., Pavarino L.F. Implicit spectral element methods and Neumann-Neumann preconditioners for acoustic waves. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, vol. 195, no. 19-22, pp. 2649-2673.

780. Y.Q. Zeng and Q.H. Liu. A staggered-grid finite difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. J. Acoust. Soc. Am., 109(6):2571-2580, 2001.

781. Zheng H., Liu D.F., Li C.G. Slope Stability Analysis Based on Elasto-Plastic Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, vol. 64, no. 14, pp. 1871-88.

782. B. Zhoul, S.A. Greenhalgh. "3-D frequency-domain seismic wave modelling in heterogeneous, anisotropic media using a Gaussian quadrature grid approach" / Geophysical Journal International. Volume 184, Issue 1, pages 507–526, 2011.

783. Zhu C., Qin G., Xu Z. Comparison of explicit central difference method and implicit newmark method using chebyshev spectral element method for wave equations. Hsi-An Chiao Tung Ta Hsueh/Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, vol. 42, no. 9, pp. 1142-1145.

784. Zhu C., Qin G., Xu Z. Implicit spectral element method for wave equation and some factors influencing numerical accuracy. Hsi-An Chiao Tung Ta Hsueh/Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, vol. 42, no. 1, pp. 56-59+77.

785. Zhu X., McMechan G.A. Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoirs using Biot theory // Geophysics, 1991, v. 56. P. 328–339.

786. Zienkiewicz O.C. Achievements and some Unsolved Problems of the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, vol. 47, no. 1-3, pp. 9-28.

787. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. - Vol. 1. The finite element method. The basis, 2000, 707p

788. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. - Vol. 2. The finite element method. Solid mechanics, 2000, 479p

789. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics (6th Ed.). Elsevier, 2005.

790. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Sherwin S.J., Peiró J. On discontinuous Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, vol. 58, no. 8, pp. 1119-1148.

791. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (6th Ed.). Elsevier, 2005.

792. Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971;

793. Zingerman K. M., Vershinin A. V., Levin V. A. An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. —012104. DOI: 10.1088/1757-899x/158/1/012104

794. Zrahia U., Bar-Yoseph P. Space-time spectral element method for solution of second-order hyperbolic equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, vol. 116, no. 1-4, pp. 135-146.

795. http://www.cae-fidesys.com

796. http://www.sim4design.com

797. CAE Fidesys in Amazon AWS marketplace: https://aws.amazon.com/marketplace/pp/B01BDRF5OE

798. CAE Fidesys in Microsoft Azure marketplace: https://azuremarketplace.microsoft.com/ru-RU/marketplace/apps/fidesys.fidesys

799. CUBIT: http://cubit.sandia.gov/help-version13.1/mesh_generation/meshing_schemes/traditional/pave.htm

800. TRELIS: https://csimsoft.com/trelis

801. ACIS: https://www.spatial.com/

802. http://www-roc.inria.fr/gamma/gamma/Membres/CIPD/Loic.Marechal/Research/Hexotic.html

803. The Visualization Toolkit http://vtk.org/VTK/project/technical.html

804. ParaView http://www.paraview.org/

805. VisIt http://www.visitusers.org/

806. Qt: https://www.qt.io/

807. STEP Application Handbook: ISO 10303 (Version 3 ed.), North Charleston, SC: SCRA, 30 June 2006

808. Intel Parallel Studio: https://software.intel.com

809. PETSc: http://www.mcs.anl.gov/petsc/

810. Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics. ASME, 2006. Pages 36. ISBN: 079183042X
811. The Standart NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 05/10/1990
812. NAFEMS Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks
813. NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks
814. http://www.code-aster.org/V2/doc/v10/en/
815. http://www.autofemsoft.com/en/examples.html
816. SCAD Structure Контрольные примеры, Киев ,2000
817. SolidWorks Simulation 2010 Validation
818. Nastran Verification Manual
819. Verification Manual for the Mechanical APDL Application, SAS IP, Inc 2009
820. NVIDIA. CUDA Technology: http://www.nvidia.com/CUDA
821. NVIDIA CUDA C Programming Guide // https://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide/index.html
822. NVIDIA CUSP http://code.google.com/p/cusp-library/
823. http://www.ansys.com/staticassets/ANSYS/staticassets/resourcelibrary/presentation/simulationoffatiguecomposite-ncode-to-post2.pdf
824. http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/abaqusportfolio/abaqusstandard/vcctfor-abaqus/?xtmc=crack_growth&xtcr=1
825. http://www.mscsoftware.com/training_videos/patran/Reverb_help/index.html#page/Fatigue%2520Users%2520Guide/
826. http://www.beasy.com/crack-growth-simulation/software-solutions.html
827. http://www.tue.nl/en/university/departments/mechanical-engineering/thedepartment/staff/detail/ep/e/d/ep-uid/19971463/ep-tab/4/
828. http://www.aero.caltech.edu/~ortiz/publications.html
829. http://rub.academia.edu/G%C3%BCntherMeschke
830. http://www.lstc.com/products/ls-dyna
831. http://en.midasuser.com/
832. https://www.software.slb.com/products/visage
833. https://www.software.slb.com/products/petrel
834. http://www.tesseral-geo.com

835. Свидетельство на программу для ЭВМ: Программа прочностных расчётов "CAE Fidesys" - расчёт вязкоупругости (SOFT)
Авторы: Левин В.А., Вершинин А.В., Яковлев М.Я., Юшутин В.С., Петровский К.А., Коновалов Д.А.
#2018610690, 16 января 2018 г.

836. Свидетельство на программу для ЭВМ: Программа Прочностных Расчётов «CAE - Fidesys» - расчёт тонкостенных конструкций (SOFT)
Авторы: Левин Владимир Анатольевич, Вершинин Анатолий Викторович, Коновалов Дмитрий Андреевич, Петровский Константин Александрович
#2018610686, 15 января 2018 г.

837. Свидетельство на программу для ЭВМ: Программа прочностных расчётов "CAE Fidesys" - линейный расчёт эффективных упругих модулей предварительно нагруженного композиционного материала в двумерном случае (SOFT)
Авторы: Левин В.А., Вершинин А.В., Яковлев М.Я., Лукьянчиков И.С., Петровский К.А.
#2018610562, 12 января 2018 г.

838. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль для распараллеливания вычислительного процесса с использованием технологии MPI в "CAE Fidesys" (SOFT)
Авторы: Левин Владимир Анатольевич, Улькин Дмитрий Александрович, Вершинин Анатолий Викторович
#2017611230, 27 января 2017 г.

839. Свидетельство на программу для ЭВМ: Программа ЭВМ «Программа Прочностных Расчётов «CAE – Fidesys» – линейный расчёт эффективной прочности композиционного материала в двумерном случае» (SOFT)
Авторы: Левин В.А., Яковлев М.Я., Вершинин А.В., Вдовиченко И.И.
#2017611120, 19 января 2017 г.

840. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль расчета напряженно-деформированного состояния для задач термоупругости в "CAE Fidesys" (SOFT)
Авторы: Левин Владимир Анатольевич, Коновалов Дмитрий Андреевич, Вершинин Анатолий Викторович
#2017611119, 19 января 2017 г.

841. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль расчета методом спектральных элементов собственных частот и форм колебаний линейно упругих тел в "CAE Fidesys" v.1 (SOFT)
Авторы: Коновалов Дмитрий Андреевич, Вершинин Анатолий Викторович, Левин

Владимир Анатольевич

#2015662988, 8 декабря 2015 г.

842. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль расчета методом спектральных элементов линейных статических задач в «CAE Fidesys» v.1. (SOFT)

Авторы: Коновалов Д.А., Вершинин А.В., Левин В.А., Зингерман К.М.

#20155662987, 8 декабря 2015 г.

843. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль расчета методом спектральных элементов линейных динамических задач в «CAE Fidesys» v.1 (SOFT)

Авторы: Коновалов Дмитрий Андреевич, Вершинин Анатолий Викторович, Левин Владимир Анатольевич

#2015662738, 30 ноября 2015 г.

844. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль расчета линейных задач теплопроводности в «CAE Fidesys» v.1 (SOFT)

Авторы: Акушевич Андрей Дмитриевич, Вершинин Анатолий Викторович, Левин Владимир Анатольевич

#2015662669, 30 ноября 2015 г.

845. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль расчета нелинейных задач теплопроводности в «CAE Fidesys» v.1 (SOFT)

Авторы: Акушевич Андрей Дмитриевич, Вершинин Анатолий Викторович, Левин Владимир Анатольевич

#2015662635, 30 ноября 2015 г.

846. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль выбора решателя СЛАУ в задачах МДТТ (SOFT)

Авторы: Стёпин Н.Е., Вершинин А.В., Левин В.А.

#2015617039, 29 июня 2015 г.

847. Свидетельство на программу для ЭВМ: Модуль решения матриц СЛАУ на основе алгоритма Узавы в задачах МДТТ (SOFT)

Авторы: Стёпин Н.Е., Вершинин А.В., Левин В.А., Зингерман К.М.

#2015616895, 25 июня 2015 г.

848. Свидетельство на программу для ЭВМ: Полнофункциональная многоплатформенная система прочностного инженерного анализа с реализацией при конечных деформациях учета перераспределения деформаций, дискретного или непрерывного изменения массы, формы, свойств части материала элемента конструкции, а (SOFT)

Авторы: Зингерман К.М., Вершинин А.В., Яковлев М.Я., Янгирова А.В., Никифоров И.В., Стёпин Н.Е., Громов И.М., Фрейман Е.И., Кукушкин А.В., Улькин Д.А., Юшутин В.С., Коновалов Д.А.

#2013617002, 30 июля 2013 г.

849. Свидетельство на программу для ЭВМ: Программа Прочностных Расчетов "CAE - Fidesys" - Нелинейный расчет (SOFT)

Авторы: Левин В.А., Вершинин А.В., Фрейман Е.И.

#2013611397, 9 января 2013 г.

850. Свидетельство на программу для ЭВМ: Программа Прочностных Расчетов "CAE - Fidesys" - Линейный расчет (SOFT)

Авторы: Левин В.А., Вершинин А.В., Кукушкин А.В., Зингерман К.М., Янгирова А.В.

#2013610618, 9 января 2013 г.

851. Свидетельство на программу для ЭВМ: ФИДЕСИС Промлайн (SOFT)

Авторы: Левин В.А., Вершинин А.В., Кукушкин А.В.

#2012613363, 9 апреля 2012 г.

852. Свидетельство на программу для ЭВМ: Геофиз (SOFT)

Авторы: Левин В.А., Кукушкин А.В., Вершинин А.В.

#2010611588, 26 февраля 2010 г.

Список иллюстративного материала

Рисунок 1 Схема перехода из $(n-1)$- го в n - е и $(n+1)$ - е состояние. 30

Рисунок 2. Слева направо. 1. Начальное ненагруженное состояние. 2. Деформированное состояние в результате приложения внешних нагрузок (конечные деформации). В нагруженном теле наметили область концентратора напряжений. 3. Удалили область. Ее действие заменили силами реакции, распределенными по границе. 4. Изменили силы по границе области на конечную величину. Произошло перераспределение (наложение) конечных деформаций. Изменилась форма тела и концентратора напряжений. 42

Рисунок 3 Образование включения в нагруженном теле 45

Рисунок 4 Применение нелокального критерия прочности для определения размеров первой зоны предразрушения 50

Рисунок 5 Применение нелокального критерия прочности для определения размеров первой и второй зон предразрушения 51

Рисунок 6 Адаптивное перестроение сетки в процессе решения задачи о пошаговом образовании полостей 54

Рисунок 7 Решение задачи об образовании первого концентратора напряжений в координатном базисе первого промежуточного состояния 55

Рисунок 8 Решение задачи об образовании первого концентратора напряжений в координатном базисе второго промежуточного состояния 56

Рисунок 9 Решение задачи об образовании второго концентратора напряжений в координатном базисе второго промежуточного состояния 56

Рисунок 10 Треугольный симплекс элемент 58

Рисунок 11 Диаграмма нагружения 70

Рисунок 12 Распределение компоненты тензора истинных напряжений σ_{22}/G 71

Рисунок 13 График изменения первой главной компоненты тензора истинных напряжений 71

Рисунок 14 Диаграмма нагружения 72

Рисунок 15 Распределение компоненты тензора истинных напряжений σ_{22}/G 72

Рисунок 16 График изменения первой главной компоненты тензора истинных напряжений 73

Рисунок 17 Изменение максимального значения компоненты σ_{22}/G в зависимости от расстояния между отверстиями. Координата x **отнесена к радиусу кругового отверстия.**. 73

Рисунок 18 Схема закрепления пластины 76
Рисунок 19 Зависимость скоростей волн нагрузки и разгрузки от величины начального нагружения 76
Рисунок 20 Диаграмма нагружения в момент образования отверстий..... 84
Рисунок 21 Распределение поля полных истинных напряжений. Белые линии указывают контур будущих включений...... 85
Рисунок 22 Диаграмма нагружения в момент образования включения 85
Рисунок 23 Распределение поля полных истинных напряжений в момент образования первого упругого включения...... 86
Рисунок 24 Диаграмма начального нагружения 87
Рисунок 25 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений вблизи образованного эллиптического отверстия (черная линия – исходная граница отверстия).87
Рисунок 26 Напряжения у вершины эллиптической полости 88
Рисунок 27 Образование первой зоны предразрушения. Зона предразрушения показана серым цветом. 88
Рисунок 28 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений после образования первой зоны предразрушения (черная линия – исходная граница отверстия). 89
Рисунок 29 Напряжения у вершины полости после образования первой зоны предразрушения..... 89
Рисунок 30 Образование второй зоны предразрушения. Зона предразрушения показана серым цветом (вторая зона темнее, чем первая)..... 90
Рисунок 31 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений после образования второй зоны предразрушения (черная линия – исходная граница отверстия). 90
Рисунок 32 Напряжения у вершины полости после образования второй зоны предразрушения..... 91
Рисунок 33 Образование зоны откола..... 91
Рисунок 34 Поле первой главной компоненты тензора истинных напряжений после образования зоны откола (черная линия – исходная граница отверстия)...... 92
Рисунок 35 Напряжения у вершины полости после образования зоны откола 92
Рисунок 36 Последовательное образование зон откола..... 93
Рисунок 37 Остановка роста трещины в результате поглощения полостей..... 94
Рисунок 38 Зависимость площади зоны откола от размеров конечноэлементной сетки.... 95

Рисунок 39 Задача Ламе-Гадолина 95

Рисунок 40 Распределение компоненты напряжений σ_{xx} / G 96

Рисунок 41 Распределение напряжений в первом промежуточном состоянии. Синим представлено решение для случая труб из разного материала, Красным – для случая труб из одинакового материала. 97

Рисунок 42 Распределение компоненты напряжений σ_1 / G_1 98

Рисунок 43 Изменение во времени первой главной компоненты тензора истинных напряжений в точке на границе между двумя трубами (R=1) для задачи о динамическом приложении внутреннего давления после статической вставки труб. 98

Рисунок 44 Поля первой главной компоненты тензора истинных напряжений в различные моменты времени 99

Рисунок 45 Разбиение области на спектральные элементы. 105

Рисунок 46 Четырехугольные элементы, заданные 4 и 9 контрольными точками (сверху). Отображение эталонного квадрата на криволинейный спектральный элемент (снизу). . 106

Рисунок 47 Гексаэдральные элементы, заданные 8 и 27 контрольными точками. 108

Рисунок 48 Интерполяционные многочлены Лагранжа степени N=8 в точках GLL на отрезке [-1, 1]. Точки GLL видны на горизонтальной оси. Все полиномы Лагранжа, по определению, равны 1 или 0 в каждой из этих точек. 110

Рисунок 49 Неструктурированная гексаэдральная сетка на цилиндре 116

Рисунок 50 Получение гексаэдральной сетки из тетраэдральной 117

Рисунок 51 Гексаэдральная сетка, полученная путем разбиения тетраэдральной 118

Рисунок 52 Неструктурированная гексаэдральная сетка, построенная методом THex. ... 120

Рисунок 53 Неструктурированная гексаэдральная сетка, построенная пакетом Hexotic(tm). 121

Рисунок 54 Неструктурированная гексаэдральная сетка, построенная пакетом Cubit(tm). 121

Рисунок 55 Преобразование сетки 1го порядка в сетку 2го порядка с промежуточными узлами 123

Рисунок 56 Спектральноэлементные сетки. Слева - сетка высокого порядка для исходной дискретизации, справа - сетка с использованием изопараметрических спектральных элементов с адаптированным под геометрию расположением узлов. 124

Рисунок 57 Сетка для задачи Кирша 125

Рисунок 58 Зависимость численной ошибки (в логарифмическом масштабе) от степени аппроксимирующих полиномов для задачи Кирша – голубая пунктирная линия. Жёлтым пунктиром обозначена линейная функция для наглядности. 126
Рисунок 59 Сетка для задачи Ламе 126
Рисунок 60 Зависимость численной ошибки (в логарифмическом масштабе) от степени аппроксимирующих полиномов для задачи Ламе – голубая пунктирная линия. Жёлтым пунктиром обозначена линейная функция для наглядности. 127
Рисунок 61 Упругие волны в трёхмерной слоистой среде на исходной гексаэдральной сетке (слева) и сконвертированной из тетраэдральной методом THex (справа) 135
Рисунок 62 Модель и сетка из спектральных элементов для трехмерной среды со сложной поверхностной топографией 136
Рисунок 63 Распространение упругих волн вдоль поверхности со сложной топографией. 136
Рисунок 64 Геометрия модели (слева) и ее дискретизация неструктурированной сеткой из спектральных элементов. Стрелкой обозначен источник сейсмических волн. 137
Рисунок 65 Поле начальных напряжений. Наведенная анизотропия свойств массива вблизи включения. 137
Рисунок 66 Волновое поле (слева), наложенное на неструктурированную сетку из спектральных элементов (справа). 138
Рисунок 67 Слоистая среда с трещинами 138
Рисунок 68 Рассеивание упругих волн в трещиноватой среде для низкой частоты (сверху) излучателя и увеличенной в четыре раза (снизу). 139
Рисунок 69 Демпфирующий слой на границе расчетной области 140
Рисунок 70 Изменение демпфирующего коэффициента внутри расчетной области 141
Рисунок 71 Комбинация локальных и нелокальных неотражающих граничных условий 143
Рисунок 72 Сравнение численного (красным) и аналитического (синим) решений. Зелёным (нижний график) показана относительная разность двух решений в процентах. Использованы локальные и нелокальные неотражающие граничные условия. 143
Рисунок 73 Сравнение численного (красным) и аналитического (синим) решений. Зелёным (нижний график) показана относительная разность двух решений в процентах. Использованы только локальные неотражающие граничные условия. 144

Рисунок 74 Сравнение численного (красным) и аналитического (синим) решений. Зелёным (нижний график) показана относительная разность двух решений в процентах. Использованы только нелокальные неотражающие граничные условия. 144
Рисунок 75 Задача о точечном источнике в бесконечной среде 146
Рисунок 76 Компонента перемещений Uz от времени для аналитического (красным) и численного (синим) решений. 147
Рисунок 77 Относительная разность (в %) между вычисленной аналитически и численно компонентой Uz поля перемещений. 148
Рисунок 78 Компонента перемещений Uz от времени для аналитического (красным) и численного (синим) решений в случае наличия демпинговой зоны вблизи приёмника сейсмического сигнала. 149
Рисунок 79 Численное моделирование в одномерной задаче о распространении плоских волн в стержне 150
Рисунок 80 Сейсмограммы давления, рассчитанные методом спектральных элементов (синим). Красной линией обозначен аналитический график движения упругой волны вдоль стержня с непрерывно нарастающими упругими свойствами. 150
Рисунок 81 Изоповерхности поля давления для трёхмерного моделирования методом СЭ для случая гладко возрастающей с увеличением веритикальной координаты X жесткости среды 151
Рисунок 82 Спектральноэлементная сетка для двумерно-слоистой модели (10x3 километров). 152
Рисунок 83 Спектральноэлементная сетка для двумерно-слоистой модели вблизи разломов. 153
Рисунок 84 Поле перемещений, рассчитанное методом спектральных элементов в 2.5D постановке 154
Рисунок 85 Сейсмограммы на приемниках, расположенных вдоль верхней свободной поверхности (слева – давление, справа –компонента вектора перемещений вдоль оси Z). По вертикальной оси отложено время, по горизонтальной – позиции приемников. 155
Рисунок 86 Оси анизотропии. Чёрным изображёны базисные вектора системы координат, соответствующие вертикальному направлению, а синим – локальные оси анизотропии среды. 158
Рисунок 87 Сечение поверхностей уровня для энергии скоростей волн, содержащее ось симметрии TTI-среды. На фронте волны qSV видны точки возврата (перегиба). 159

Рисунок 88 Волновое поле, рассчитанное методом спектральных элементов, в трансверсально изотропной среде. 160
Рисунок 89 Волновое поле в случае анизотропии общего вида 160
Рисунок 90 Сравнение численного (пунктирная линия) и аналитического (сплошная линия) решений (перемещение вдоль оси симметрии) для трансверсально изотропной упругой среды с точечной силой, направленной вдоль оси симметрии. 161
Рисунок 91 Сравнение численного (пунктирная линия) и аналитического (сплошная линия) решений для однородной вязкоупругой изотропной среды для горизонтальной и вертикальной компонент перемещения 162
Рисунок 92 Схема акустического каротожа. 169
Рисунок 93 Разложение функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (красным) в ряд Прони (синим) из 10 членов разложения (слева) и 14 членов разложения (справа). 175
Рисунок 94 Сравнение численного и аналитического решений в задаче об акустическом каротаже. Красный – общий случай уравнений Био (интеграл свертки). Синий – низкочастотное приближение (замена интеграла свертки рациональной функцией). Зеленый – аналитическое решение. 177
Рисунок 95 Пример 2D-сетки для набора вложенных цилиндров в плоскости, перпендикулярной оси симметрии 179
Рисунок 96 Схема измельчения элементов сетки 181
Рисунок 97 Группировка элементов по слоям сетки 182
Рисунок 98 Вертикальный срез трехмерной сетки с разгрублением размеров элементов 183
Рисунок 99 Неструктурированная гексаэдральная сетка для цилиндрической геометрии 184
Рисунок 100 Гексаэдральная сетка для заполненной жидкостью скважины в VTI среде. Сетка мелкая в самой скважине и её окрестности. При удалении от скважины сетка разгрубляется. 185
Рисунок 101 Сравнение аналитического решения и результатов моделирования МСЭ. Представлены графики зависимости давления от времени в точке пространства, расположенной внутри пористой среды. Красным цветом выделен МСЭ с 6ым порядком аппроксимации по пространству, голубым – точное решение, зелёным – МСЭ со 2ым порядком аппроксимации по пространству. 186
Рисунок 102 Скорость вычислений для разных частей программы и разных порядков аппроксимации. Наблюдается почти линейный рост времени расчётов в зависимости от

порядка аппроксимации, в то время как точность растёт экспоненциально ввиду спектральной сходимости МСЭ. 187
Рисунок 103 Сейсмограммы для задачи об акустическом каротаже 188
Рисунок 104 Дисперсионные кривые - зависимости медленности (обратная величина к скорости) от частоты. Сплошная линия – численный расчет (МСЭ). Кружки – аналитическое решение. 188
Рисунок 105 Эффект упругой оболочки на границе жидкость-пористая порода. Синий – открытые поры. Красный – упругая мембрана на границе жидкость-порода. Зеленый – закрытые поры. 189
Рисунок 106 Сравнение численного и аналитического решений в случае VTI анизотропии. Точки – численное решение, сплошные линии – аналитическое решение. Синяя/сиреневая кривая – дипольная cuspidal мода, зелёный/бирюзовый – вторая дипольная мода. 190
Рисунок 107 Моделирование квадрупольного источника в TTI-среде 190
Рисунок 108 Сравнение численного и приближенно аналитического решений для различных углов наклона оси TTI-анизотропии. Сверху: результаты для угла анизотропии 0 для МСЭ (слева) и наложены на приближенно аналитическое решение (справа). Снизу: результаты для угла анизотропии 45 для МСЭ (слева) и наложены на приближенно аналитическое решение (справа) 191
Рисунок 109 Дисперсионная кривая для скважины со смещенным прибором 192
Рисунок 110 Дисперсионная кривая для случая спектральноэлементной сетки с плоскими гранями 194
Рисунок 111 Дисперсионная кривая для случая спектральноэлементной сетки с криволинейными гранями 195
Рисунок 112 Поле давления для дипольного источника в различные моменты времени. Неструктурированная гексаэдральная сетка, использованная для расчета, основана на тетраэдральных элементах, где каждый тетраэдр разбивался на 4 гексаэдра (THex-метод). 196
Рисунок 113 Волновое поле перемещений в различные моменты времени. Эллиптичность волновых фронтов обусловлена наведенной анизотропией начального преднапряжения вдоль оси цилиндра. 197
Рисунок 114 Численное моделирование акустического каротажа в скважине с прибором, рассеченной наклонными анизотропными слоями (нижний рисунок). Неструктурированная гексаэдральная сетка (верхний рисунок) строится с учетом

геометрии прибора (средний рисунок), заполненной жидкостью скважины и скачков в упругих свойствах 199
Рисунок 115 График $f_1(t)$ 204
Рисунок 116 График $f_2(x,0),\ x_f = 99,\ \ z_f = 0$ 204
Рисунок 117 Геометрия одномерной слоистой среды, диаграмма продольной скорости .. 205
Рисунок 118 Зависимость плотности (зеленым), скоростей продольных (синим) и поперечных (красным) волн от глубины 205
Рисунок 119 Геометрия расширенной разрывной модели, диаграмма продольной скорости. 206
Рисунок 120 Зависимость плотности (зеленым), скоростей продольных (синим) и поперечных (красным) волн от глубины для сглаженной модели 208
Рисунок 121 Первоначальная (синяя) и сглаженная (красная) зависимость продольной скорости от глубины 208
Рисунок 122 Виды сейсмических волн: продольные (P) волны и поперечные (S) волны (прямые, отражённые и проходящие), волны Рэлея, распространяющиеся по границам раздела слоев, головные волны. 212
Рисунок 123. Представительная область с порами. 219
Рисунок 124. Представительный объем с порами различных размеров. 221
Рисунок 125. Конечноэлементная сетка по границам пор. 221
Рисунок 126 Виды граничных условий на ячейке периодичности: растяжения и сдвиги 223
Рисунок 127 Зависимость эффективного модуля Юнга от пористости 228
Рисунок 128 Зависимость эффективного коэффициента Пуассона от пористости 229
Рисунок 129 Зависимость эффективного модуля Юнга от пористости для случая пор с оболочками 229
Рисунок 130 Зависимость эффективного коэффициента Пуассона от пористости для $EsE0 = 2$ 230
Рисунок 131 Разница между упругими модулями, вычисленными при разных параметрах R/h 230
Рисунок 132 Элемент горной породы, пронизанный плоскими трещинами 231
Рисунок 133 Одномерная модель с плоской трещиной 234
Рисунок 134 Конечноэлементная модель ячейки периодичности Хадсона 241
Рисунок 135 Сравнение численно рассчитанных эффективных свойств (темные кружки) с аналитическими значениями по теории Хадсона (светлые кружки) 241
Рисунок 136 Образцы кернов 242

Рисунок 137 Представительный объем цифрвой модели керна 243
Рисунок 138 Цифровой анализ керна на воксельной модели 244
Рисунок 139 Цифровой анализ керна на неструктурированной тетраэдральной сетке 244
Рисунок 140 Цифровая модель керна песчаника 245
Рисунок 141 Разбиение конечноэлементной модели керна по процессорам 246
Рисунок 142 Многокомпонентная цифровая модель керна 246
Рисунок 143 Схематическое изображение модели для расчета устойчивости ствола скважины 250
Рисунок 144 Предельная поверхность модели Друкера-Прагера 254
Рисунок 145 Взаимная ориентация скважины и напластований 256
Рисунок 146 Напряжения в сечении, перпендикулярном оси скважины 256
Рисунок 147 Зоны вывалов для различных углов напластования 257
Рисунок 148 Пример исходных данных для построения дискретной геомеханической модели скважины в CAE Fidesys 258
Рисунок 149 Трехмерная геометрия скважины в слоистой среде, восстановленная по данным каверномера 259
Рисунок 150 Примеры пространственных моделей скважин в однородных и слоистых средах с адаптивной геометрии неструктурированной сеткой 261
Рисунок 151 Распределение напряжений в породе. Слева – материал создан путем загрузки распределения свойств из внешнего файла, справа – однородный материал области. 261
Рисунок 152 Распределение напряжений по стволу наклонной скважины и скважины с боковым ответвлением 262
Рисунок 153 Сопоставление результатов расчета в Fidesys и ABAQUS. Разница результатов расчетов на идентичной модели и сетке составила менее 2%. 263
Рисунок 154 Распределение напряжений в упругой (сверху, коричневый график) и пороупругой (снизу, черный график) постановках 264
Рисунок 155 Распределение порого давления с расстоянием от скважины 264
Рисунок 156 Распределений полос пластических деформаций. Слева – интенсивность пластических деформаций, справа – интенсивность напряжений Мизеса. 265
Рисунок 157 Дискретизация области вокруг скважины (четверть модели) в а) CAE Fidesys б), в) г) ANSYS. 266
Рисунок 158 Пластические деформации, полученные в CAE Fidesys 267
Рисунок 159 Пластические деформации, полученные в ANSYS 267

Рисунок 160 Два масштаба в гидрогеомеханическом сопряжении 271
Рисунок 161 Внутренние итерации в методе расщепления по физическим процессам для решения связанной гидрогеомеханической задачи о фильтрации жидкости сквозь пористую трещиноватую породу 272
Рисунок 162 Сетка для сопряженной гидро-геомеханической модели нефтяной скважины с четырьмя магистральными трещинами. Цветовой палитрой обозначена компонента тензора напряжений σ_xx в момент добычи пластового флюида. 278
Рисунок 163 График дневной нефтедобычи (сверху) и интегральной (снизу) нефтедобычи на скважине при циклической закачке CO2. Коричневая кривая: 30 шагов процедуры сопряжения; красная кривая: 300 шагов процедуры сопряжения; синяя кривая: 1000 шагов процедуры сопряжения. 280
Рисунок 164 Гистограммы распределений кубов проницаемостей на различных шагах совмещения для расчета прогноза добычи на 20 лет с 1000 шагами совмещения. Слева-направо, сверху-вниз: 1) первый цикл, 2) 10-ый цикл 3) 100-ый цикл 4) 200-ый цикл 5) 400-ый цикл 6) 800-ый 281
Рисунок 165 Многопоточность с использованием технологии OpenMP 288
Рисунок 166 Примеры портретов разреженных матриц СЛАУ, полученных в результате дискретизации двумерной (слева) и трёхмерной (справа) краевых задач теории наложения. Черные точки – ненулевые элементы. 291
Рисунок 167 Объем требуемой оперативной памяти (сверху) и время решения (снизу) при использовании прямого метода решения СЛАУ в зависимости от размера разреженной матрицы 293
Рисунок 168 Объем требуемой оперативной памяти (сверху) и время решения (снизу) при использовании итерационного метода решения СЛАУ в зависимости от размера разреженной матрицы 294
Рисунок 169 Эффективность (отношение времени выполнения задачи на одном ядре, к суммарному времени выполнения на нескольких ядрах) распараллеливания с использованием OpenMP для прямого и итерационного методов решения СЛАУ 295
Рисунок 170 Отличия в архитектурах центрального и графического процессоров 296
Рисунок 171 Структура графического процессора 297
Рисунок 172 Многоуровневая структура потоков на GPU 299
Рисунок 173 Перенумерация строк и столбцов разреженной матрицы 301
Рисунок 174 Алгоритмы Z-кривой (слева) и кривой Гильберта (справа) в задаче оптимальной нумерации 301

Рисунок 175 Сравнение времени работы МКЭ-решателя при использовании методов перенумерации RCM и Metis 302
Рисунок 176 Виды памяти на GPU 303
Рисунок 177 Основные этапы расчета в МКЭ 304
Рисунок 178 Сквозное формирование матрицы и решение СЛАУ на GPU 306
Рисунок 179 Ассемблирование глобальной матрицы жесткости в последовательной и параллельной версиях алгоритма 307
Рисунок 180 Раскраска сетки на непересекающиеся подмножества. Элементы одного цвета не имеют общих узлов. 308
Рисунок 181 Раскраска сетки и балансировка цветов в двумерном случае 309
Рисунок 182 Раскраска сетки и балансировка цветов в трёхмерном случае 310
Рисунок 183 Основные этапы формирования матрицы жесткости на GPU 310
Рисунок 184 Сравнение времени работы итерационных решателей CG(сверху) и BICGStab (снизу) на CPU и GPU. 312
Рисунок 185 Сравнение предобуславливателей по числу итераций (сверху) и общему времени (снизу) работы итерационного алгоритма решения СЛАУ 314
Рисунок 186 Сравнение форматов хранения разреженных матриц при использовании итерационных методов решения СЛАУ CG (сверху) и BiCGStab (снизу). 318
Рисунок 187 Основные по времени этапы решения статической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на CPU 319
Рисунок 188 Основные по времени этапы решения динамической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на CPU 320
Рисунок 189 Основные по времени этапы решения статической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на GPU 320
Рисунок 190 Основные по времени этапы решения динамической задачи линейной теории упругости с использованием МКЭ на GPU 321
Рисунок 191 Сравнение основных этапов решения статической задачи с использованием МКЭ на CPU и GPU 322
Рисунок 192 Сравнение основных этапов решения динамической задачи с использованием МКЭ на CPU и GPU 324
Рисунок 193 Сравнение эффективности распараллеливания алгоритма МСЭ в режимах одинарной и двойной точности на GPU, а также на CPU 325
Рисунок 194 Примеры разбиений расчетной области по блокам, соответствующим различным процессам MPI 326

Рисунок 195 Решение задачи МКЭ с использованием MPI 329
Рисунок 196 Сравнение эффективности распараллеливания решателей СЛАУ на многопроцессорной системе 334
Рисунок 197 Ускорение расчетов на различном количестве процессоров для краевой задачи теории упругости, решаемой МКЭ, на сетке из 500 тыс. (сверху) и 4 млн. (снизу) узлов 335
Рисунок 198 Время выполнения основных этапов решения задачи МКЭ с использованием MPI 336
Рисунок 199 MultiGPU система 337
Рисунок 200 Пример разбиения МСЭ сетки по подобластям. 338
Рисунок 201 Обмен данными между GPU в рамках MultiGPU системы координируется потоками на центральном процессоре 339
Рисунок 202 Границы подобластей в МСЭ сетке. Для 10000 спектральных элементов: неравномерность в распределении между подобластями – 0.05% и 1433 граней-разрезов (граней элементов, принадлежащих двум различным подобластям). 340
Рисунок 203 Место CAE в жизненном цикле разработки изделия (PLM). 348
Рисунок 204 Автоматизация анализа на сеточную сходимость. С использованием МСЭ точность численного решения (справа) повышается варьированием порядка спектрального элемента без перестроения исходной сетки (слева). 350
Рисунок 205 Функциональная структура CAE Fidesys. Слева направо представлен процесс инженерного анализа в препроцессоре, расчетных ядрах и постпроцессоре. 353
Рисунок 206 Программная структура CAE Fidesys. Сверху вниз: варианты интерфейсов пользователя, интерпретатор команд Fidesys на основе Python, математические ядра (генератор сеток, расчетные ядра МКЭ/МСЭ, решатель СЛАУ), программно-аппаратный уровень. 354
Рисунок 207 Web-интерфейс для запуска CAE Fidesys в облачной инфраструктуре 355
Рисунок 208 Архитектура облачного решения 355
Рисунок 209 Графический интерфейс препроцессора CAE Fidesys. 358
Рисунок 210 Изменение начальной геометрической модели (сверху) и процесс построения сетки (снизу) в CAE Fidesys 359
Рисунок 211 Варианты построения геометрической модели в CAE Fidesys. Сверху – геометрические примитивы, снизу – построение восходящим методом. 360
Рисунок 212 Примеры неструктурированных конформных сеток 362
Рисунок 213 Построение сетки на геометрических примитивах 363

Рисунок 214 Дискретизация CAD-модели 363
Рисунок 215 Перестроение и улучшение сеточных моделей 363
Рисунок 216 Импорт модели из САПР. Сверху - грубая начальная сетка с элементами низкого качества; Снизу - перестроенная неструктурированная сетка. 364
Рисунок 217 Варианты задания шага сетки. Слева - квазиравномерная сетка; в центре - задание шага сетки вдоль кривой; справа - автоматическое сгущение к границам области. 365
Рисунок 218 Панели для работы с сетками в CAE Fidesys 365
Рисунок 219 Примеры сеточных моделей, построенных в CAE Fidesys 366
Рисунок 220 Задание граничных условий (слева), параметров материала (в центре) и расчета (справа) 367
Рисунок 221 Графический интерфейс FidesysViewer. 369
Рисунок 222 Задание параметров оболочечных (слева) и балочных (справа) элементов . 371
Рисунок 223 Варианты формульного и табличного задания зависимостей граничных условий от пространственных координат и времени 372
Рисунок 224 Сглаживание напряжений по методу согласованных результантов 375
Рисунок 225 Деформируемое тело с заданными нагрузками и закреплениями 376
Рисунок 226 Блок-схема работы расчетного ядра (слева направо) для стационарных задач 378
Рисунок 227 Блок-схема работы расчетного ядра (слева направо, сверху вниз) для нестационарных задач 379
Рисунок 228 Блок-схема работы универсального решателя в составе расчетного ядра ... 380
Рисунок 229 Блох-схема алгоритма решения задачи устойчивости 383
Рисунок 230 Блок-схема алгоритма решения динамической задачи с использованием МСЭ 385
Рисунок 231 Блок-схема алгоритма функционирования модуля CUDA 390
Рисунок 232 Блок-схема работы модуля вывода результатов расчета 392
Рисунок 233 Блок-схема алгоритма решения задачи термоупругости 399
Рисунок 234 Блок-схема алгоритма численной оценки эффективных механических характеристик неоднородного материала 401
Рисунок 235 Составные части интерфейса пользователя CAE Fidesys 407
Рисунок 236 Панель инструментов для работы с геометричесими моделями 409
Рисунок 237 Панель инструментов для работы с сеточными моделями 409
Рисунок 238 Панель команд для работы с материалами 411

Рисунок 239 Панель инструментов для работы с блоками..... 413
Рисунок 240 Панель инструментов для задания граничных условий..... 415
Рисунок 241 Панель инструментов для выбора типа анализа..... 419
Рисунок 242 Составные части интерфейса пользователя FidesysViewer..... 425
Рисунок 243 Командная строка позволяет выполнять автоматизацию рабочих процессов в CAE Fidesys..... 428
Рисунок 244 Параметры фланцев под 12-метровую (слева) и 9-метровую (справа) цилиндрическую опору 429
Рисунок 245 Конечноэлементная модель фланца в CAE Fidesys с приложенной нагрузкой на свободном торце (выделено желтым)..... 430
Рисунок 246 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX8, 11752 элементов.431
Рисунок 247 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX20, 11752 элементов. 431
Рисунок 248 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX8, 35021 элементов.432
Рисунок 249 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX20, 35021 элементов. 432
Рисунок 250 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX8, 60113 элементов.433
Рисунок 251 Интенсивность напряжений Мизеса, тип элемента HEX20, 60113 элементов 433
Рисунок 252 Конечноэлементная модель в Ansys. Сетка 59766 элементов, 255501 узлов. 434
Рисунок 253 Интенсивность напряжений Мизеса, рассчитанная в Ansys...... 434
Рисунок 254 Геометрическая модель сборки цангового замка..... 435
Рисунок 255 Результаты расчета цангового замка в Fidesys и Ansys. 436
Рисунок 256 Расчетная модель в CAE Fidesys и Ansys 437
Рисунок 257 Первые формы колебаний в CAE Fidesys (слева) и ANSYS (справа) 438
Рисунок 258 Результаты гармонического анализа в CAE Fidesys (а, в) и ANSYS (б, г)..... 439
Рисунок 259 Нестационарное воздействие (м/с2) в углах пластины..... 440
Рисунок 260 Ускорения при нестационарном воздействии..... 440
Рисунок 261 Конечноэлементная модель кессона крыла в препроцессоре CAE Fidesys. Желтым цветом выделен набор граней лонжерона, на которые приложено внешнее давление. 441
Рисунок 262 Расчёт кессона крыла в CAE Fidesys (слева) и Nastran (справа). Сверху приведено поле перемещений (начальная и деформированння конфигурации) вдоль вертикальной оси (X), снизу – поле интенсивности напряжений Мизеса. 442

Рисунок 263 Конечноэлементные модели лопатки авиационного двигателя в пакетах CAE Fidesys (слева) и Ansys (справа). 442
Рисунок 264 Расчёт лопатки авиационного двигателя в CAE Fidesys (слева) и Ansys (справа). Сверху приведено поле перемещений вдоль вертикальной оси (Z), снизу – поле интенсивности напряжений Мизеса. 443
Рисунок 265 Конструктивная схема (слева) и трехмерная геометрическая модель лопатки спрямляющего аппарата вентилятора 444
Рисунок 266 Граничные условия для проведения расчета СА вентилятора 445
Рисунок 267 Конечноэлементная модель лопатки в CAE Fidesys 446
Рисунок 268 Интенсивность напряжений Мизеса в лопаке СА вентилятора (слева). Максимальное значение 60.7 МПа достигается на кромке лопатки (справа). 446
Рисунок 269 Собственные частоты и формы колебаний лопатки СА вентилятора 447
Рисунок 270 Геометрическая модель опоры подшипника 447
Рисунок 271 Кривые упругопластического деформирования при различных температурах 448
Рисунок 272 Схема приложения нагрузок (слева) и закреплений (справа) на опору подшипника 449
Рисунок 273 Конечноэлементная модель опоры подшипника в препроцессоре CAE Fidesys 449
Рисунок 274 Поле перемещений на деформированной (деформации увеличены в 10 раз для наглядности) конфигурации (слева) и интенсивности напряжений (справа) в упругой постановке 450
Рисунок 275 Поле пластических деформаций (слева) и интенсивности напряжений Мизеса (справа) в упругопластической постановке 450
Рисунок 276 Первые три формы и коэффициенты запаса по потери усточивости. 450
Рисунок 277 Схема установки защитной решетки в подруливающем устройстве ледокола 451
Рисунок 278 Конечноэлементная модель решетки (желтым подсвечены закрепленные по всем осям узлы) 452
Рисунок 279 Деформированное состояние решетки (перемещения увеличены в 100 раз) (слева) и интенсивность напряжений Мизеса (справа). 452
Рисунок 280 Конечноэлементная модель решетки с туннелем (желтым подсвечены закрепленные по всем осям узлы). 453

Рисунок 281 Деформированное состояние решетки с тоннелем (перемещения увеличены в 100 раз) (слева) и интенсивность напряжений Мизеса (справа). 453
Рисунок 282 Объемная модель конструкции боковой рамы тележки железнодорожного вагона 454
Рисунок 283 Разбиение модели боковой рамы на конечные элементы 455
Рисунок 284 Схема задания кинематических и силовых граничных условий 456
Рисунок 285 Интенсивность напряжений Мизеса в боковой раме 457
Рисунок 286 Геометрическая модель цистерны 458
Рисунок 287 Конечоэлементная (1.7 млн. элементов) модель цистерны и граничные условия на ней. 459
Рисунок 288 Исходная и деформированная цистерна в разрезе. Для наглядности перемещения увеличены в 300 раз. 460
Рисунок 289 Интенсивность напряжений Мизеса на внутренней поверхности цистерны 460
Рисунок 290 Третья форма потери устойчивости. Коэффициент критической нагрузки - 2.53116. 461
Рисунок 291 Геометрическая модель транспортировочной рамы, состоящая из тонкостенной рамы, ложементов и накладок на них. Снизу приведены действующие на раму нагрузки и места заделок. 462
Рисунок 292 Конечноэлементная модель рамы, состоящая из оболочечных элементов рамы и объемных элементов ложементов и накладок на них. 463
Рисунок 293 Результаты расчета напряженно-деформированного состояния. Поле вертикальных перемещений (сверху) и поле интенсивности напряжений Мизеса (снизу). 464
Рисунок 294 Геометрическая модель адаптера, сечение стрингера и места приложения нагрузок 465
Рисунок 295 МКЭ-модель адаптера в CAE Fidesys 466
Рисунок 296 Поле перемещений 467
Рисунок 297 Поле интенсивности напряжений Мизеса (сингулярность в местах приложения точечных сил). 467
Рисунок 298 Собственные формы колебаний адаптера на 10 минимальных резонансных частотах (сверху вниз - с первой по десятую). 472
Рисунок 299 Геометрическая модель бака (слева), уровень заполения его жидкостью (в центре) и конечноэлементая модель 473
Рисунок 300 Собственные частоты и формы колебаний бака 473

Рисунок 301 Обобщенные спектры ответа для землетрясения силой 6 баллов на отметках + 4- 5 метров 474
Рисунок 302 Эквивалентные напряжения по Мизесу (максимум напряжений) 475
Рисунок 303 Геометрическая (слева) и конечноэлементая (справа) модели бака на раме 476
Рисунок 304 Форма потери устойчивости бака, соответствующая коэффициенту запаса 108.3 477
Рисунок 305 Формы собственных колебаний на резонансных частотах 25.7 Гц (слева) и 47.5 Гц (справа). 477
Рисунок 306 Распределение интенсивности напряжений Мизеса в баке 478
Рисунок 307 Геометрическая модель редуктора и контактные поверхности внутри него 479
Рисунок 308 Конечноэлементная дискретизация редуктора в CAE Fidesys (слева) и сетка вблизи роликов (справа). 479
Рисунок 309 Векторное поле перемещений (сверху) и интенсивность напряжений Мизеса в сечении (снизу) редуктора. 480
Рисунок 310 Схема установки ограничителей хлыстовых колебаний 481
Рисунок 311 Параметры геометрической модели ограничителя 482
Рисунок 312 Дискретизация ограничителя спектральными элементами 482
Рисунок 313 Высоконелинейное деформирование ограничителя с учетом контактной, физической и геометрической нелинейностей. 483
Рисунок 314 Трехмерная модель горных выработок (слева) и зона разгрузки вокруг них, построенная в CAE Fidesys. 484
Рисунок 315 Конечноэлементые модели горных выработок в CAE Fidesys 485
Рисунок 316 Горизонтальные напряжения (сверху) и интенсивность пластических деформаций (снизу) для исходной модели (слева) и с увеличенной зоной разгрузки (справа). 486
Рисунок 317 Конечноэлементная модель выработки с крепями в CAE Fidesys 487
Рисунок 318 Реальные (слева) и смоделированные (справа) деформации в горной выработке 488
Рисунок 319 Результаты моделирования технических решений по укреплению горных выработок с крепями. 489

Приложение. Верификационные задачи

Введение

Основная цель приведенных в данном приложении примеров верификационных задач заключается в том, чтобы продемонстрировать широкий круг возможностей CAE Fidesys в задачах, которые имеют аналитическое или верифицированное другими авторами численное решение. Тестовые примеры содержат большинство типов элементов, моделей материалов, видов граничных условий и вариантов анализа, реализованных в CAE Fidesys. “Библиотека” конечных элементов CAE Fidesys содержит более шестидесяти элементов для задач статического и динамического анализа, более двадцати – для задач теплопередачи, также включает в себя многочисленные элементы теории поля и специальные элементы. Это разнообразие элементов позволяет CAE Fidesys проводить расчёты балочных, оболочечных, твердотельных (включая гибридные сетки) и комбинированных систем в двумерной и трёхмерной постановках для различных порядков аппроксимации, а также позволяет решать нелинейные задачи, в том числе контактные задачи и задачи при конечных деформациях.

Верификация CAE Fidesys проводилась в соответствии с процедурами, которые являются частью методик Гарантии Качества (Quality Assurance), использовавшихся при разработке CAE Fidesys. Настоящее приложение содержит относительно небольшую выборку из библиотеки тестовых примеров Гарантии Качества, которая используется при проверке версии CAE Fidesys, находящейся в стадии тестирования. В тестовых примерах численные результаты, полученные в CAE Fidesys, сопоставляются с известными теоретическими решениями, экспериментальными данными или независимыми результатами решения тестовых задач [810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819].

Предлагаемые тестовые модели объединены по видам расчетов, рассмотренным в пятой главе, в следующие разделы:

- верификация статических расчетов;
- верификация динамических расчетов;
- верификация расчетов на собственные частоты;
- верификация расчетов на устойчивость;
- верификация расчетов теплопроводности и термоупругости;
- верификация нелинейных расчетов (с учетом конечных деформаций, для нелинейных материалов, в контактных задачах);
- верификация расчетов эффективных свойств неоднородных материалов.

Для каждой модели используемые входные и выходные данные указаны непосредственно в

каждом конкретном тесте, в зависимости от верифицируемого параметра. Тест считается выполненным корректно, если, при корректных входных данных, без ошибок происходит отображение модели в интерфейсе, строится конечноэлементная сетка, задача корректно запускается на счёт, после чего программа выдаёт результаты, сходящиеся при измельчении сетки либо к аналитическому решению, либо к решению, полученному в других CAE-системах, эталонному численному решению (например, NAFEMS) и т.п.; а при некорректных входных данных на определённом этапе решения выдаётся ошибка.

При помощи данных тестовых задач исследуется достоверность результатов, полученных в CAE Fidesys. Верификационные примеры основаны на ранее изданных работах в области статики, динамики и теплопередачи. В процессе верификации были выявлены объяснимые расхождения между численными результатами и экспериментальными данными (или аналитическим решением), которые можно считать приемлемыми. В некоторых случаях одна и та же задача решается несколькими различными путями для демонстрации и проверки разных элементов и возможностей программы.

Поскольку CAE Fidesys способен решать сложные прикладные инженерные задачи (примеры которых приведены в пятой главе), не имеющие в общем случае аналитического решения, относительно простые задачи, рассмотренные в данном приложении, не иллюстрируют всех возможностей CAE Fidesys. Различия между результатами, полученными в CAE Fidesys, и целевыми результатами представлены как погрешность (в %) за исключением случаев, когда целевое решение равно нулю или имеет нечисловой характер. Следует отметить, что для каждого примера сравниваются только те величины, которые приведены в теоретическом решении.

Данное приложение также содержит информацию о применимости, выборе и эффективности конечных элементов CAE Fidesys, алгоритмов построения сетки и алгоритмов решения в ряде тестовых примеров (benchmarks). Примеры предназначены для того, чтобы проиллюстрировать как корректное, так и неправильное применение конечных элементов в различных ситуациях. Результаты, представленные здесь, для некоторых тестовых случаев могут содержать ошибочные решения, но, на самом деле, эти ошибки являются «ожидаемыми» результатами для выбранного типа элемента, дискретизации, условий нагружения. Результаты данных тестовых примеров могут рассматриваться как руководство при выборе соответствующих опций расчета.

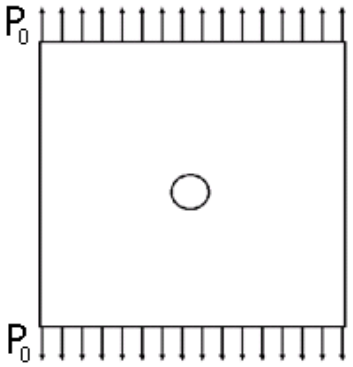
Ряд примеров содержит сравнение решений, полученных в CAE Fidesys, и эталонных значений, приведенных в тестах NAFEMS. NAFEMS (National Agency for Finite Element Methods and Standards) опубликовало ряд технических отчетов по инженерному анализу,

которые стали стандартными отраслевыми тестами (benchmarks).

Статическое нагружение

Одноосное растяжение пластины с круговым вырезом

Рассматривается двумерная задача об одноосном растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом.



Геометрическая модель:

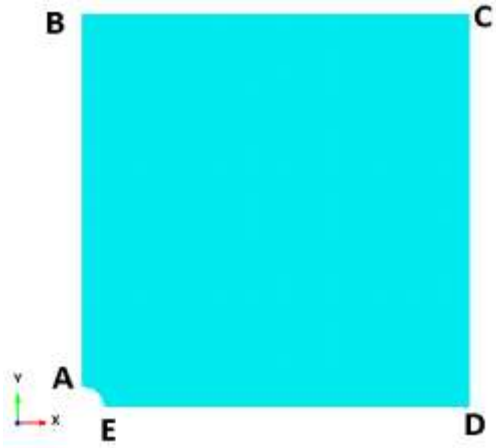
- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/4 пластины
- BC = 5 м
- Диаметр отверстия 0.5 м
- Используются полярные координаты

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой ED
- P_0 = 1 МПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 Гпа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3



Сетка:

Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):

- 3-узловые треугольники Tri3 (93 874 элементов)
- 6-узловые треугольники Tri6 (93 874 элементов)
- 4-узловые четырёхугольники Quad4 (16 052 элементов)
- 8-узловые четырёхугольники Quad8 (16 052 элементов)
- 9-узловые четырёхугольники Quad9 (16 052 элементов)

Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_θ в точке E (0.25;0;0) равно 3 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [234]: $\sigma_\theta^{max} = 3P_0$.

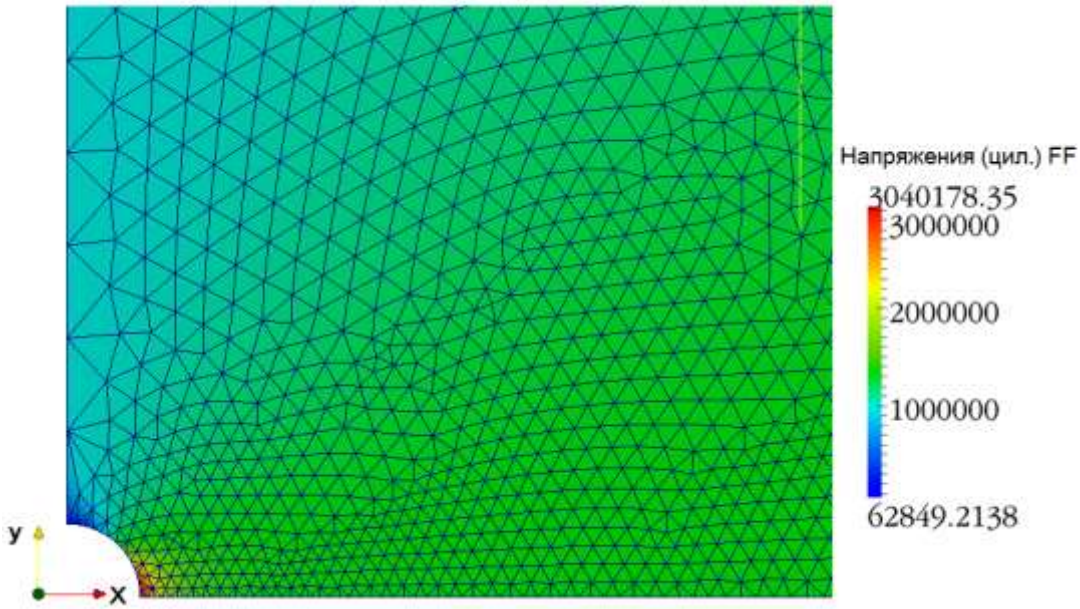
Результаты:

Полученные максимальные значения компонент тензора напряжений σ_θ^{max} представлены в таблице:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS[6]	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_θ^{max},МПа	3	3.0288	0.96%	3.0208	0.69%	2.9736	0.88%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS[7]	
		Quad4[8]		Quad8		Quad9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_θ^{max},МПа	3	3.0358	1.10%	3.022	0.73%	3.0214	0.71%	2.9736	0.88%

На рисунке ниже представлен фрагмент исходной модели вблизи точки E с полем распределения напряжений σ_θ при разбиении на треугольные элементы (Tri3).

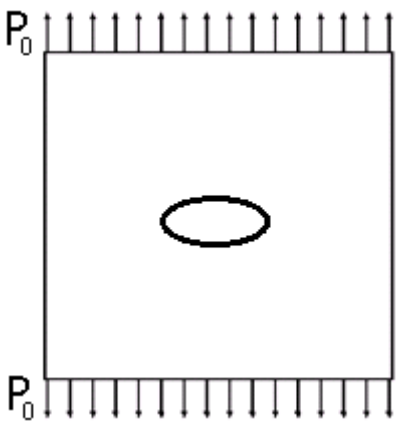


Одноосное растяжение пластины с эллиптическим вырезом

Рассматривается двумерная задача об одноосном растяжении плоской неограниченной пластины с эллиптическим вырезом.

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- BC = 25 м
- Размеры отверстия a = 1.5 м, b = 0.5 м



[6] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, коли
[7] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, коли
[8] При расчете методом спектральных элементов не рекомендуется использова на задачах с криволинейной геометрией тела.

- Используется полярная система координат

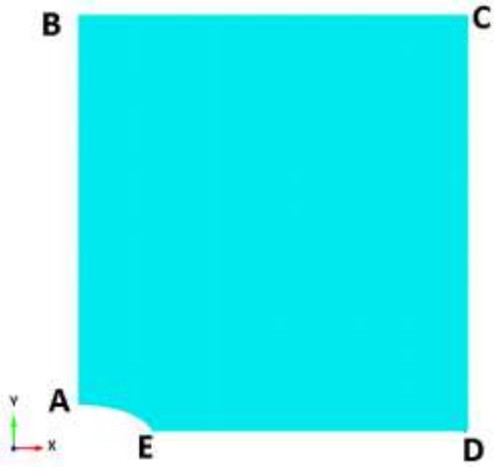
Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой ED
- Давление на сторону BC величиной $P_0 = 1$ Мпа

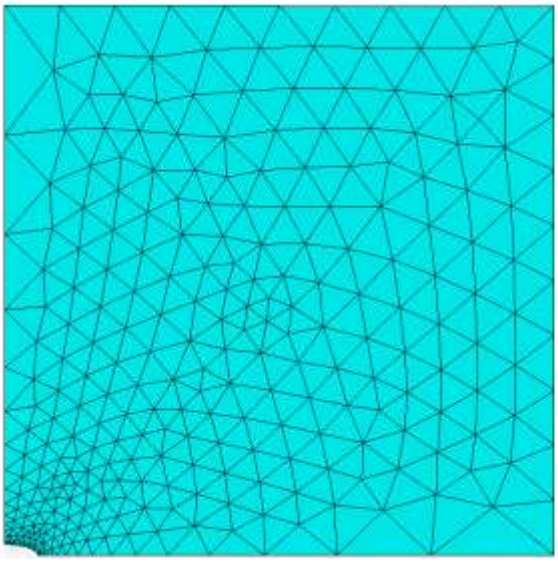
Параметры материала:

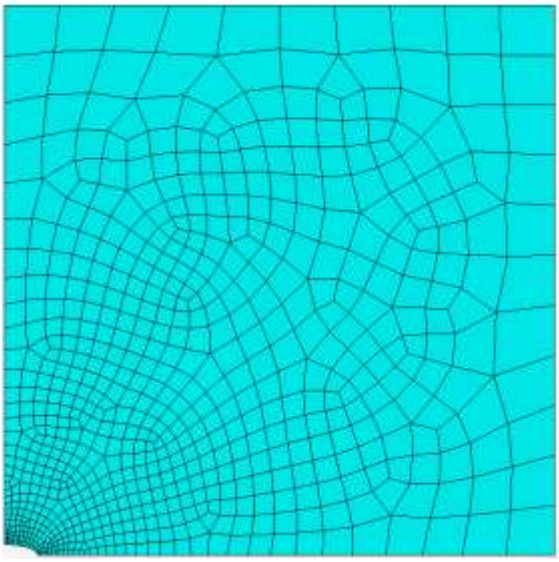
- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:



- Измельчённая на линиях AB, AE и ED (вблизи точек A и E)
- Пять типов конечных элементов (5 отдельных тестов):
  - 3-узловые треугольники Tri3 (329 961 элемент)
  - 6-узловые треугольники Tri6 (130 774 элементав)
  - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (22 959 элементов)
  - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (22 959 элементов)
  - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (22 959 элементов)
- Пять типов спектральных элементов 3го порядка (5 отдельных тестов):
  - 3-узловые треугольники Tri3s 3-го порядка (329 961 элемент)
  - 6-узловые треугольники Tri6 3-го порядка (130 774 элемента)
  - 4-узловые четырёхугольники Quad4s 3-го порядка (22 959 элементов)
  - 8-узловые четырёхугольники Quad8s 3-го порядка (22 959 элементов)
  - 9-узловые четырёхугольники Quad9s 3-го порядка (22 959 элементов)





Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_θ в точке E (1.5;0;0) равно 7 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [234]: $\sigma_\theta^{max} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) P_0$

Результаты:

Полученные максимальные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:

– Конечные элементы

Величина	**Теоретическое значение, Па**	**Численный анализ**				**ANSYS**	
		FIDESYS					
		Tri3		**Tri6**			
		Значение, Па	**Ошибка**	**Значение, Па**	**Ошибка**	**Значение, Па**	**Ошибка**
σ_θ^{max}	7 000 000	7 057 330	0.82%	7 046 770	0.67%	6 981 100	0.27 %

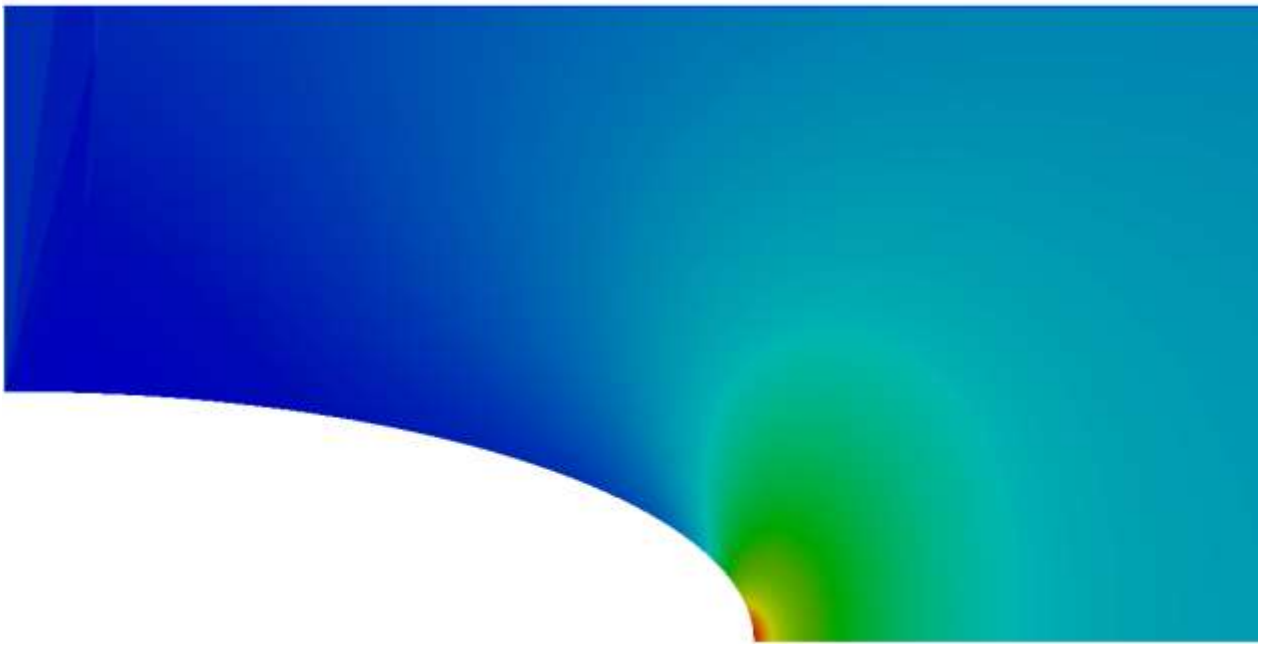
Величина	**Теоретическое значение, Па**	**Численный анализ**						**ANSYS**	
		FIDESYS							
		Quad4		**Quad8**		**Quad9**			
		Значение, Па	**Ошибка**	**Значение, Па**	**Ошибка**	**Значение, Па**	**Ошибка**	**Значение, Па**	**Ошибка**
σ_θ^{max}	7 000 000	6 961 680	0.55 %	7 050 180	0.72 %	7 046 390	0.66%	6 981 100	0.27 %

– Спектральные элементы 3го порядка

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS	
		Tri3s		Tri6s			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_θ^{max}	7 000 000	7 233 060	3.33%	7 047 260	0.67%	6 981 100	0.27 %

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS	
		Quad4s		Quad8s		Quad9s			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_θ^{max}	7 000 000	7 125 660	1.79 %	7 046 110	0.66 %	7 046 070	0.66%	6 981 100	0.27 %

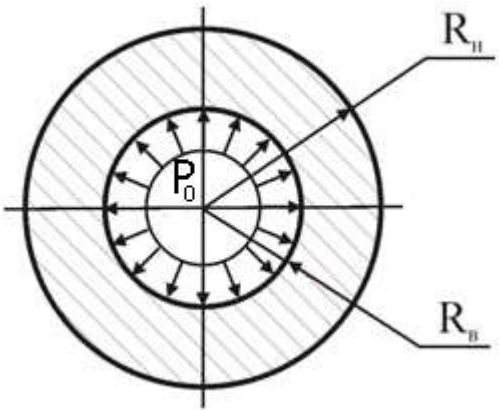
На рисунке ниже представлено распределение напряжений вблизи точки E, в которой достигается максимальное напряжение, при разбиении на треугольные элементы:



Нагружение цилиндра внутренним давлением

Рассматривается двумерная задача о нагружении внутренним давлением круглого толстостенного цилиндра.

Геометрическая модель:



- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть тела
- $R_н$ = 1 м, $R_в$ = 0,75 м
- Используется полярная система координат

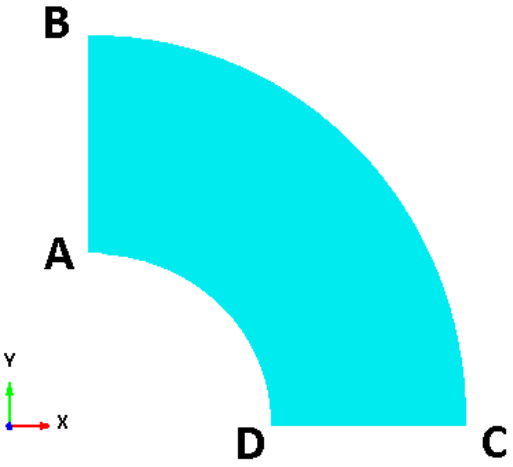
Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой CD
- P_0 = 1 Мпа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 Гпа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:



Измельчённая на линиях AD, DC и DC (вблизи точек D и C)

Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):

– 3-узловые треугольники Tri3 (4 934 элемента)

– 6-узловые треугольники Tri6 (2 258 элементов)

– 4-узловые четырёхугольники Quad4 (2 236 элементов)

– 8-узловые четырёхугольники Quad8 (2 236 элементов)

– 9-узловые четырёхугольники Quad9 (2 236 элементов)

Три типа спектральных элементов(девять отдельных тестов):

– 4-узловые четырёхугольники Quad4s

  – 2-ого порядка (2 336 элементов)

  – 3-го порядка (2 336 элементов)

  – 4-ого порядка (2 336 элементов)

– 8-узловые четырёхугольники Quad8s

– 2-ого порядка (964 элементов)

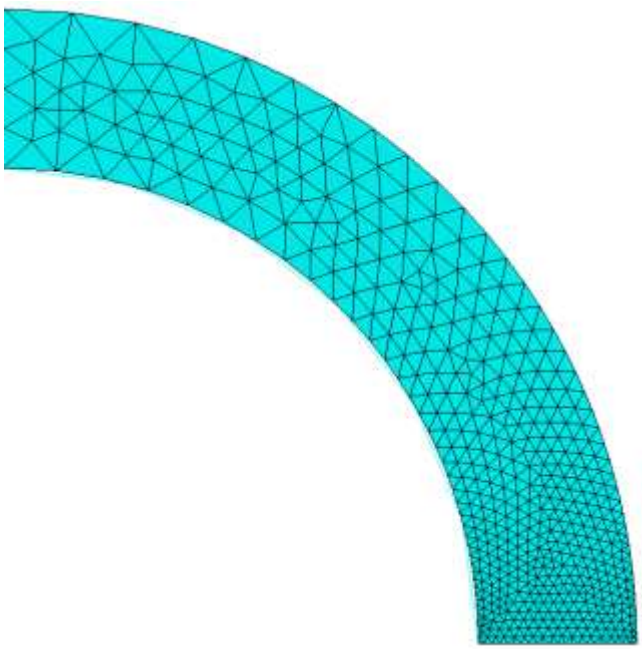
– 3-го порядка (765 элементов)

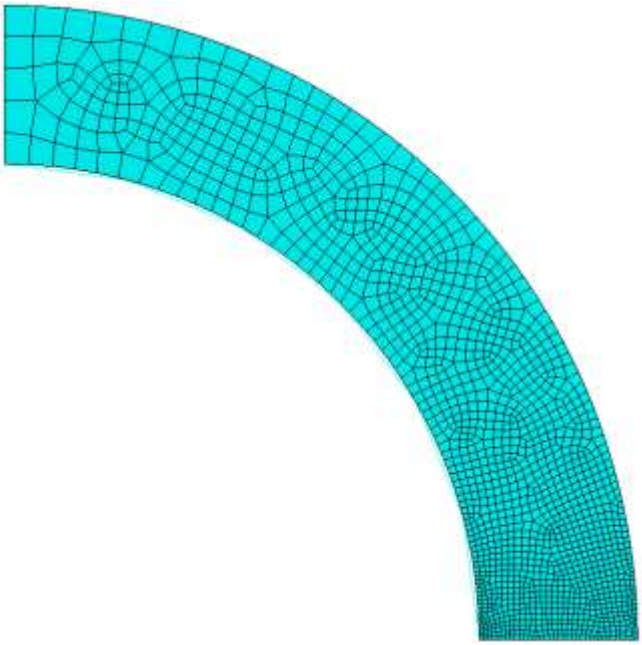
– 4-ого порядка (707 элементов)

- 9-узловые четырёхугольники Quad9s
  – 2-ого порядка (937 элементов)

  – 3-го порядка (708 элементов)

  – 4-ого порядка (650 элементов)





Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_θ на внутренней поверхности цилиндра равно 3,571429 МПа с точностью 1%

Напряжение σ_r на внутренней поверхности цилиндра равно -1 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формулам [234]: $\sigma_\theta|_{r=R_B} = P_0 \frac{1+\frac{R_в^2}{R_н^2}}{1-\frac{R_в^2}{R_н^2}}, \sigma_r|_{r=R_B} = -P_0$

Результаты:

Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:

- Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS[9]	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_\theta\|_{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 583.33	0.33%	3 571.3	<0.01%	3 560.9	0.29%

[9] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

$\sigma_r\|_{r=R_B}$, кПа	-1 000	-980.67	1.93%	-999.9	0.01%	-995.6	0.44%	

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS[10]	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_\theta\|_{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 583.4	0.34%	3 551.5	0.56%	3 551.5	0.56%	3 560.9	0.29%
$\sigma_r\|_{r=R_B}$, кПа	-1 000	-970.9	2.91%	-980.13	1.9%	-980.13	1.9%	-995.6	0.44%

– Спектральные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ Fidesys (quad4s)[11]					
		Элементы 2-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_\theta\|_{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 570	0.04%	3 590	0.52%	3 600	0.8%
$\sigma_r\|_{r=R_B}$, кПа	-1 000	-999	0.014%	-995	0.416%	-994	0.513%
Величина	**Теоретическое значение**	**Численный анализ Fidesys (quad8s)**					
		Элементы 2-го порядка		**Элементы 3-го порядка**		**Элементы 4-го порядка**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$\sigma_\theta\|_{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 570	0.04%	3 570	0.04%	3 570	0.04%
$\sigma_r\|_{r=R_B}$, кПа	-1 000	-999	0.042%	-1 000	0%	-1 000	0%
Величина	**Теоретическое значение**	**Численный анализ Fidesys (quad9s)**					
		Элементы 2-го		**Элементы 3-го**		**Элементы 4-го**	

[10] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

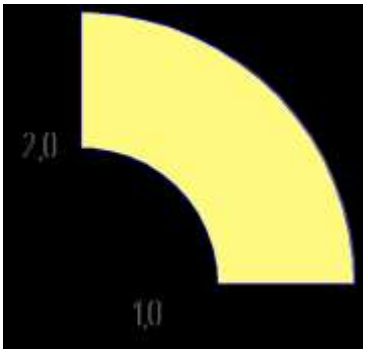
[11] При расчете на спектральные элементы, данный тип элементов не рекомендуется использовать на задачах с криволинейной геометрией тела.

		порядка		порядка		порядка	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$\sigma_\theta\|_{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 570	0.04%	3 570	0.04%	3 570	0.04%
$\sigma_r\|_{r=R_B}$, кПа	-1 000	-999	0.042%	-1 000	0%	-1 000	0%

<u>Круглая цилиндрическая труба под воздействием внутреннего и внешнего давлений (3D)</u>

Рассматривается задача о бесконечной цилиндрической трубе, находящейся под воздействием внутреннего давления.

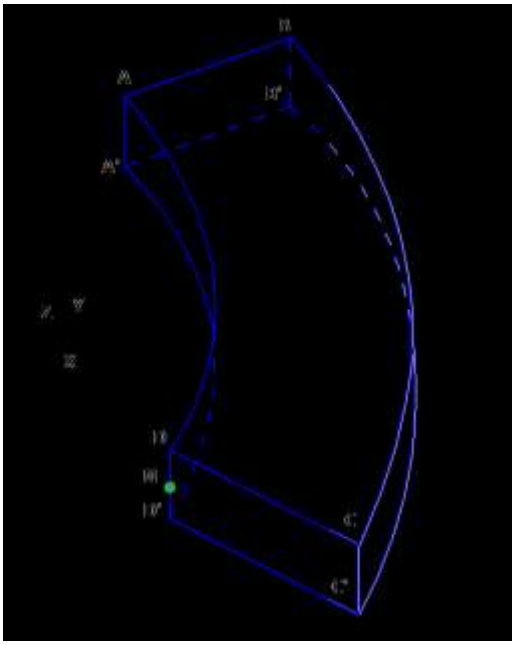
Геометрическая модель:



- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть трубы
- Толщина 0.5 м
- Используется цилиндрическая система координат

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на поверхности ABB'A'
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на поверхности CDD'C'
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на поверхностях ABCD и A’B’C’D’
- Давление на поверхность AA’D’D величиной 1 Мпа
- Давление на поверхность B’B’C’C величиной 0.5 Мпа



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Девять типов конечных элементов (девять отдельных тестов):

– 4-узловые тетраэдры Tetra4 (2 058 954 элемента)

– 10-узловые тетраэдры Tetra10 (65 452 элемента)

– 8-узловые гексаэдры Hex8 (682 030 элементов)

– 20-узловые гексаэдры Hex20 (415 540 элементов)

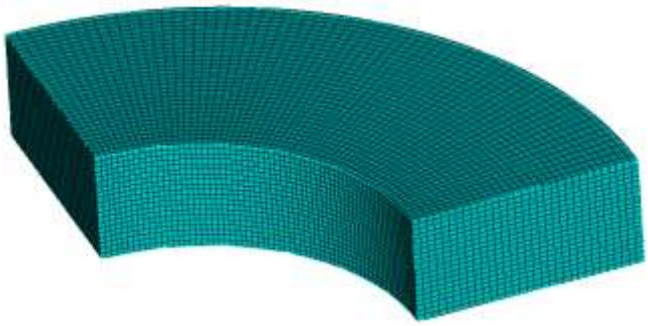
– 27-узловые гексаэдры Hex27 (415 540 элементов)

– 6-узловые призмы WEDGE6 (198 132 элементов)

– 15-узловые призмы WEDGE15 (26 367 элементов)

– 5-узловые пирамиды PYRAMID5 и 4-узловые тетраэдры TETRA4 (198 132 элементов)

– 13-узловые пирамиды PYRAMID13 и 10-узловые тетраэдры TETRA10 (8 456 элементов)





Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_{rr} в точке N (1;0;0) равно -1.00 МПа с точностью 1%

Напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ в точке N (1;0;0) равно 0.33 МПа с точностью 1%

Напряжение σ_{zz} в точке N (1;0;0) равно -0.2 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [234]: $\sigma_{rr} = \sigma_{11} = \frac{a^2 p_a}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^2\sigma_{22} = \frac{a^2 p_a}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad \sigma_{zz} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2-a^2}$$

Результаты:

Полученные значения напряжений представлены в таблицах:

– Конечные элементы

Величина	**Теоретическое значение**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**ANSYS**[12]	
		Тетраэдры (TETRA4)		**Тетраэдры (TETRA10)**		**Тетраэдры**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
σ_{rr},МПа	-1	-0.999	0.1%	-0.999	0.1%	-1	<0.01%
$\sigma_{\theta\theta}$,МПа	0.333	0.334	-0.22%	0.333	<0.01%	0.333	<0.01%

[12] Анализ проводился на следующих сетках:

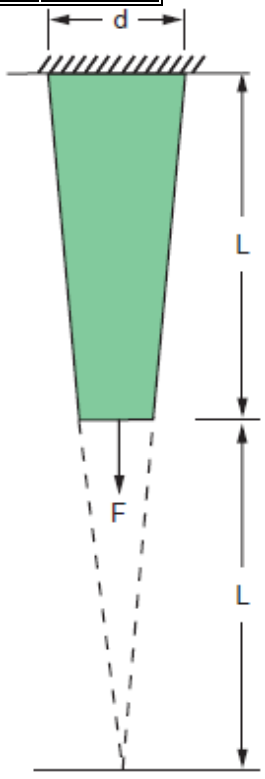
– тетраэдальной (тип элемента SOLID187, количество элементов 1 626 578, количество узлов 2 243 852);

σ_{zz},МПа	-0.200	-0.198	0.59%	-0.199	0.5%	-0.200	<0.01%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS[13]	
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)		Гексаэдры	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{rr},МПа	-1	-0.999	0.1%	-0.999	0.1%	-0.979	2%	-0.999	0.1%
$\sigma_{\theta\theta}$,МПа	0.333	0.334	-0.22%	0.333	<0.01%	0.312	6.29%	0.334	0.35%
σ_{zz},МПа	-0.200	-0.198	0.59%	-199 701	0.15%	-200 052	0.30%	-199 810	0.1%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS							
		Призмы (WEDGE6)		Призмы (WEDGE15)		Пирамиды (PYRAMID5)		Пирамиды (PYRAMID13)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{rr},МПа	-1	-0.996	0.4%	-0.999	0.01%	-1	<0.01%	-0.998	0.2%
$\sigma_{\theta\theta}$,МПа	0.333	0.338	1.5%	0.332	0.03%	0.333	<0.01%	0.333	<0.01%
σ_{zz},МПа	-0.200	-0.197	1.5%	-0.2	<0.01%	-0.200	<0.01%	-0.199	0.5%

Растяжение балки



В задаче рассматривается подвешенная балка с квадратным сечением, закреплённая в верхней секции. Осевая растягивающая сила приложена к свободному концу балки.

Геометрическая модель:

- Высота балки L = 10
- Ширина балки d = 2

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей на плоскости Y = 0
- Осевая сила P = 10 000, приложенная во все узлы плоскости Y = L

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = $10.4 \cdot 10^6$
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

– 8-узловые гексаэдры Hex8 (7 элементов)

Критерий прохождения теста [819]:

[13] Анализ проводился на следующих сетках:
– гексаэдральной (тип элемента SOLID185, количество элементов 1 620 000, количество узлов 1 682 358).

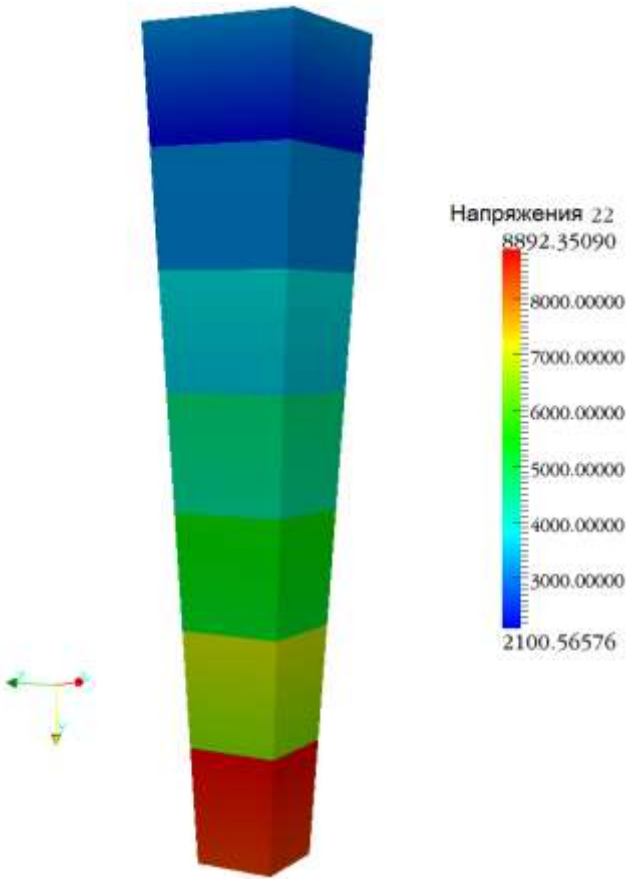
Напряжение σ_{yy} в точке B (1;L/2;1) равно 4444 с точностью 1%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS [819]:

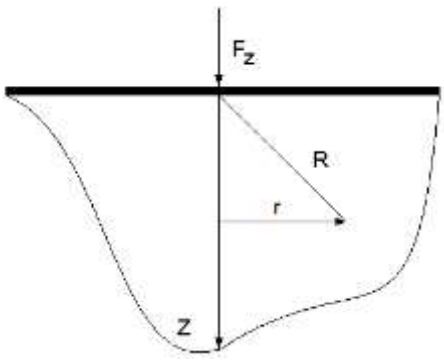
Величина	**Теоретическое значение**	**Объемная схема (гексаэдры)**			
		FIDESYS (HEX8) Гексаэдры		**ANSYS**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
σ_{yy}	4444	4431.8	0.27%	4441	1%

На рисунке ниже представлена деформированная модель с полем распределения напряжений по оси Y:



Задача Буссинеска

В задаче рассматривается бесконечное упругое полупространство z≥0, в некоторой точке которой приложена сосредоточенная сила. Задача будет ограничена объёмом параллелепипеда 50мх25мх25м, в центр которого приложена точечная сила F, направленная по оси Z.



Геометрическая модель:

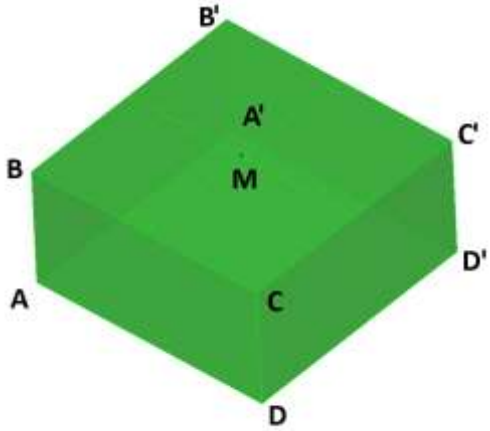
- Длина больших ребер параллелепипеда L = 50 м
- Высота ребер параллелепипеда h = 25 м
- Используются цилиндрические координаты
- Начало координат в точке M

Граничные условия:

- Закрепление по всем перемещениям для плоскостей AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D и A'B'C'D'.
- В точке M (середина стророны ABCD) приложена сила F величиной 100 кН, направленная по оси Z

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3



Сетка:

8-узловые гексаэдры (1 000 188 элементов)

Критерии прохождения теста:

Напряжение σ_z в точке (5, 0.3, 5) равно -337.619 Па с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [250]: $\sigma_Z = \frac{3F}{2\pi}\frac{z^3}{R^5}$

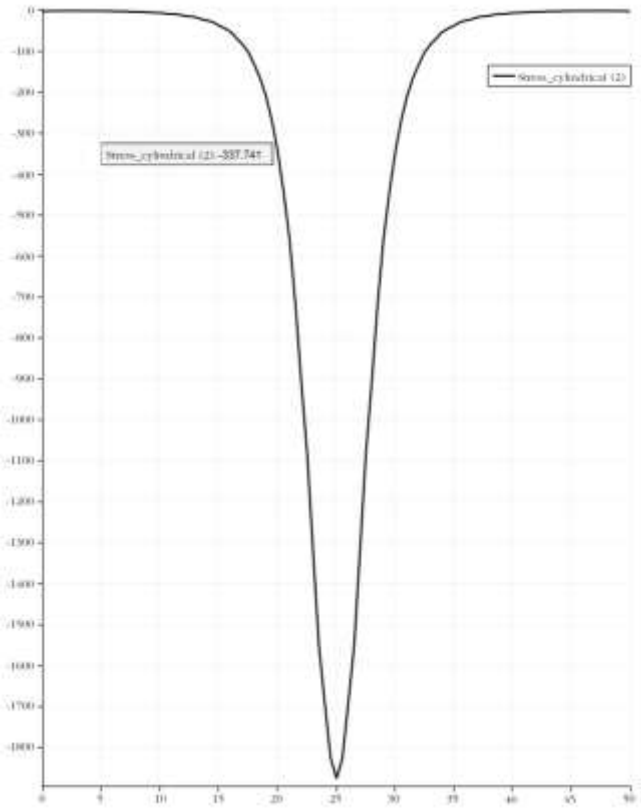
где $R = \sqrt{z^2 + r^2}$

Результаты:

Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:

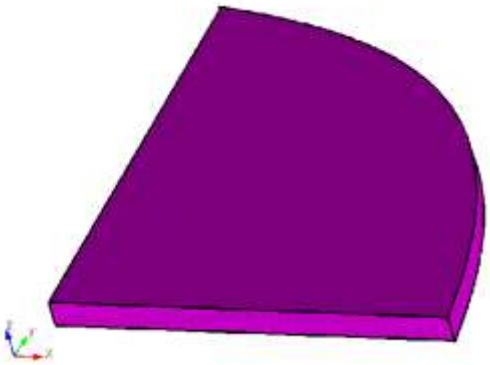
Величина	**Теоретическое значение, Па**	**Численный анализ**	
		FIDESYS	
		Значение, Па	**Ошибка**
σ_Z	-337.619	-337.741	0.04 %

На рисунке ниже представлен график распределения напряжений σ_z вдоль линии z=5:



Равномерно нагруженная круглая пластина, защемленная по контуру

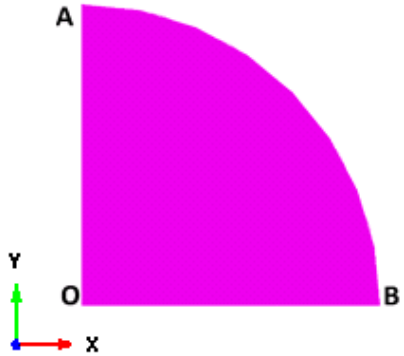
Рассматривается задача об изгибе круглой пластинки под действием равномерно распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки.



Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Радиус R=1 м
- Толщина h=0.01 м
- Используются сферические координаты

Граничные условия:



- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Закрепление по всем перемещениям и поворотам на кривой AB

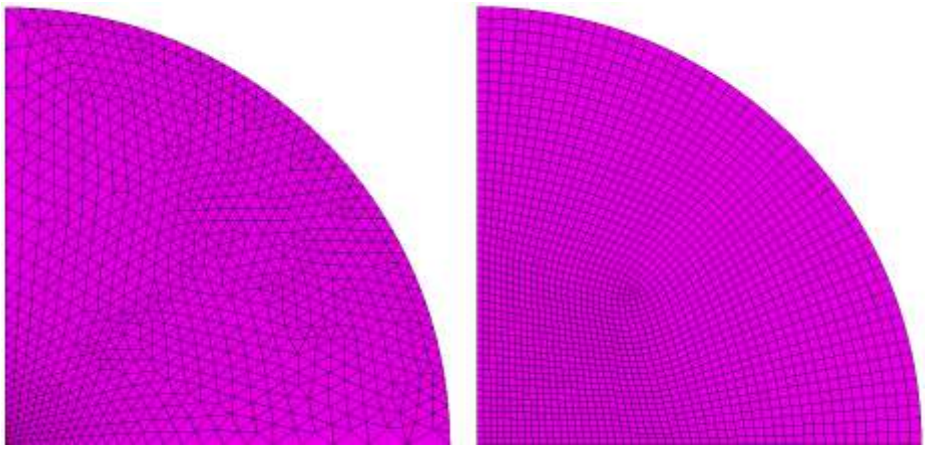
- Равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности OAB q = 10 кПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
  - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 670 элементов)
  - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (1 670 элементов)
  - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 976 элементов)
  - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 976 элементов)
  - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 976 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещения u_z в точке O (0, 0, 0) равно -8.53125 мм с точностью 3%
- Момент M_r в точке O (0, 0, 0) равен 812.5 Н с точностью 3%
- Момент M_r в точке B (1, 0, 0) равен -1 250 Н с точностью 3%
- Напряжение на верхней поверхности σ_R в точке B (1, 0, 0) равно 75 МПа с точностью 3%

Значения вычислены по следующим формулам [737]:

$$u_z|_{r=0} = -\frac{qR^4}{64D}, \text{ где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_r|_{r=0} = \frac{qR^2}{16}(1+\nu),$$

$$\mathrm{M}_r|_{r=R} = -\frac{qR^2}{8}\ ,\ \sigma_R|_{r=R} = \frac{3qR^2}{4h^2}.$$

Результаты:

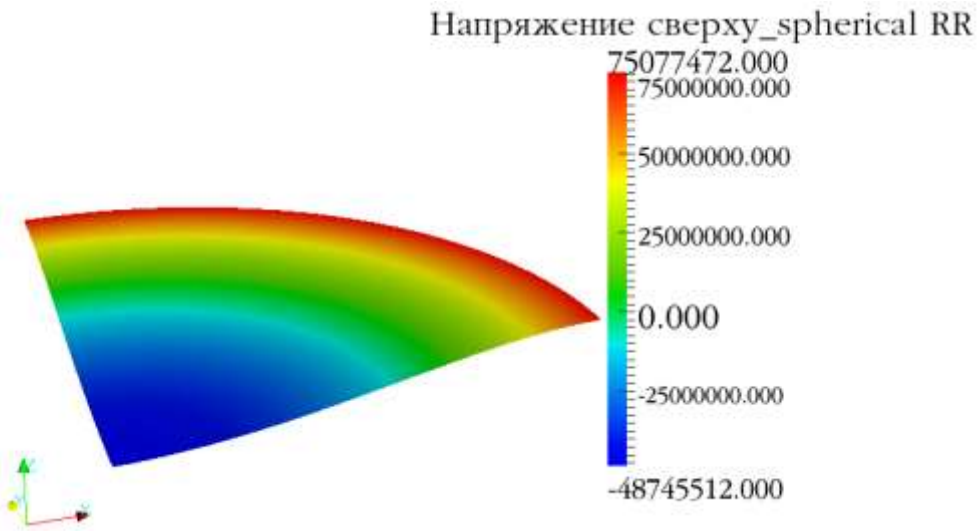
- Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:

Величина	**Теор. значение**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**ANSYS[14]**	
		TRISHELL3		**TRISHELL6**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$u_z\|_{r=0}$, мм	-8.531	-8.54	<0.01%	-8.536	<0.01%	-8.468	0.74
$\mathrm{M}_r\|_{r=0}$, Н	812.5	812.776	<0.01%	812.521	<0.01%	808.88	0.45%
$\mathrm{M}_r\|_{r=R}$, Н	-1 250	-1 206.76	3.46%	-1277.91	0.02%	1 233.19	1.35%
$\sigma_R\|_{r=R}$, МПа	75	72.40	3.47%	76.67	0.02%	74.2	1.07%

Величина	**Теор. значение**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**ANSYS[15]**	
		SHELL4		**SHELL8**		**SHELL9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$u_z\|_{r=0}$, мм	-8.531	-8.435	1.13%	-8.551	0.23%	-8.535	< 0.01%	-8.468	0.74
$\mathrm{M}_r\|_{r=0}$, Н	812.5	812.785	0.04%	812.473	<0.01%	816.428	0.5%	808.88	0.45%
$\mathrm{M}_r\|_{r=R}$, Н	-1 250	-1 203.73	1.54%	-1 224.18	2%	-1250.92	0.1%	1 233.19	1.35%
$\sigma_R\|_{r=R}$, МПа	75	72.222	3.70%	73.451	2%	75.055	0.1%	74.2	1.07%

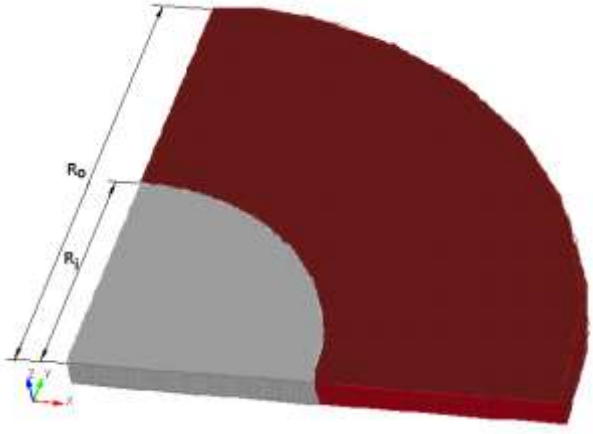
- На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения напряжений σ_R на верхней поверхности :

[14] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 690 элементов).
[15] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 690 элементов).



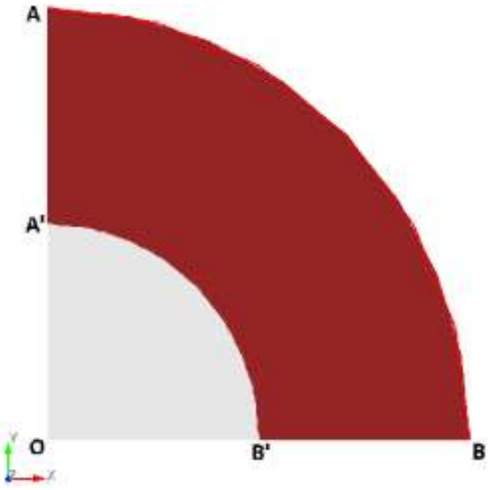
Круглая пластина, нагруженная концентрически

Рассматривается задача об изгибе круглой пластинки под действием нагрузки, равномерно распределенной по внутренней части пластинки, ограниченной радиусом R_i.



Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Радиус R=1 м
- Радиус R_i =0.5 м
- Толщина h=0.01 м
- Используются сферические координаты



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Закрепление по всем перемещениям на кривой AB
- Равномерно распределенная нагрузка по поверхности OA`B` q = 10 кПа

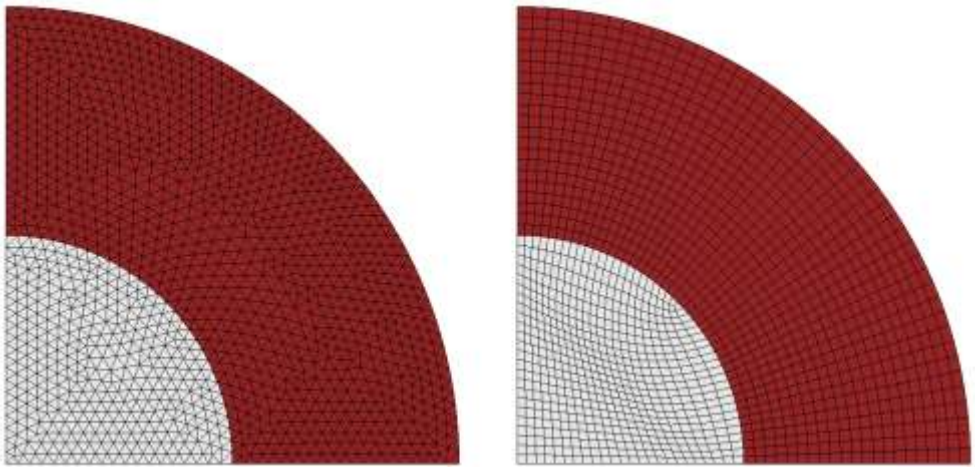
Параметры материала:

- Изотропный

- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
  - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 546 элементов)
  - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 546 элементов)
  - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 541 элементов)
  - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 541 элементов)
  - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 541 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке O (0, 0, 0) равно -0.016941 м с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [737]:

$$u_z|_{r=0} = -\frac{P}{16\pi D}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}{R_o}^2 + {R_i}^2 ln\frac{R_i}{R_o} - \frac{7-3\nu}{4(1+\nu)}{R_i}^2\right],$$

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, P = \pi R_i q,$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

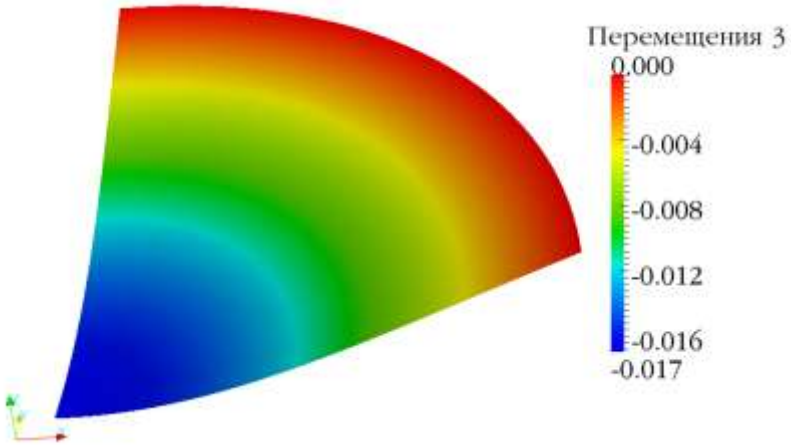
Величина	**Теор. значение**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**ANSYS**[16]	
		TRISHELL3		**TRISHELL6**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$u_z\|_{r=0}$, м	-0.01694	-0.01693	0.06%	-0.01694	<0.01%	-	0.02%

[16] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 951 элементов).

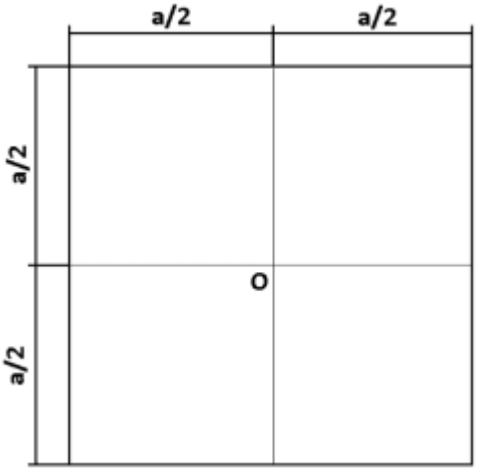
						0.016937	

Величина	**Теор. значение**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**ANSYS[17]**	
		Shell4		**Shell8**		**Shell9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$u_z\|_{r=0}$, м	-0.01694	-0.016936	0.01%	-0.01694	<0.01 %	-0.01695	0.06%	-0.016937	0.02%

На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_z на нижней поверхности :



Квадратная пластина, защемленная по контуру и нагруженная в центре



Рассматривается задача об изгибе квадратной пластинки, защемленной по всему контуру, под действием сосредоточенной нагрузки, приложенной в центре пластинки.

Геометрическая модель:

- Сторона a=1 м
- Толщина h=0.01 м

Граничные условия:

- Закрепление по всем перемещениям и поворотам на всех сторонах пластины

[17] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 951 элементов).

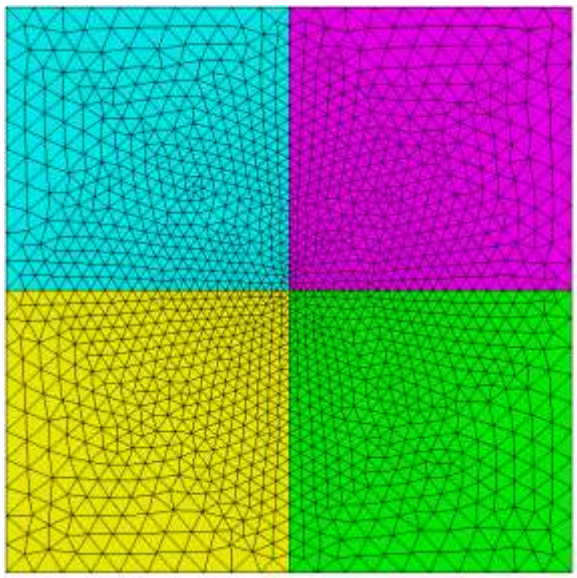
- Сосредоточенная сила в точке O P=100 кН

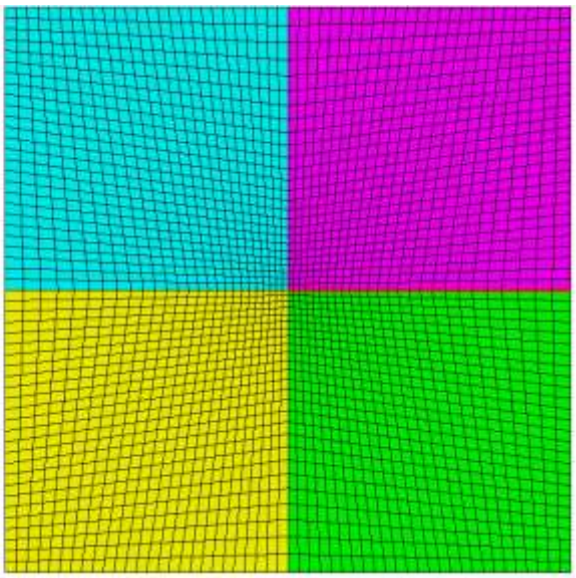
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
  - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 850 элементов)
  - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 850 элементов)
  - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (2 704 элементов)
  - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (2 704 элементов)
  - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (2 704 элементов)





Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке O (0, 0, 0) равно -0.030576 м с точностью 2%

Значения вычислены по следующим формулам [737]:

$$u_z|_{x=y=0} = -0.0056\frac{Pa^2}{D}, \text{ где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

Результаты:

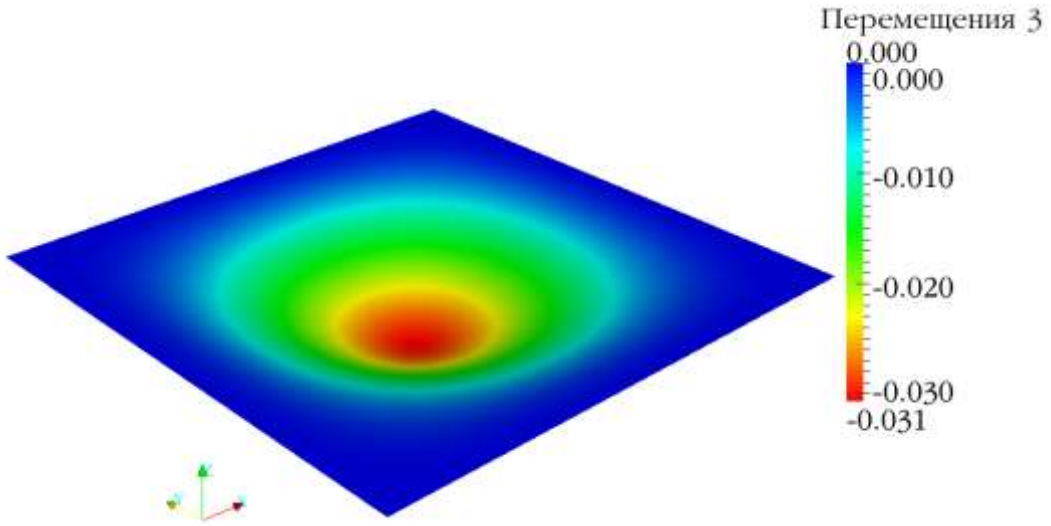
- Полученные значения представлены в таблице:

Величина	Теор.	Численный анализ

	значение	FIDESYS				ANSYS[18]	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z\|_0$, м	-0.030576	-0.0305	0.25%	-0.030922	1.13%	-0.03077	0.69%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS[19]	
		Shell4		Shell8		Shell8			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z\|_{x=y=0}$, м	-0.030576	-0.03076	0.60%	-0.03087	0.96%	-0.03084	-0.86%	-0.03077	0.69%

- На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_z:

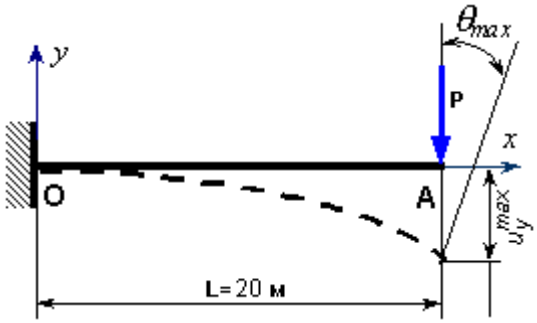


Консольная балка с сосредоточенной силой на свободном конце

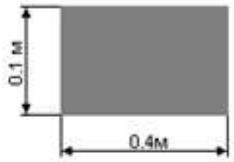
Рассматривается задача об изгибе балки, защемленной на одном конце и приложенной сосредоточенной силой на другом. При этом приводятся решения для четырех видов поперечных сечений – прямоугольник, круг, труба, двутавр (четыре отдельных теста).

[18] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).
Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).

Геометрическая модель:

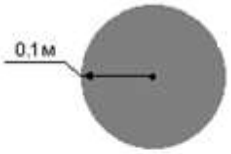


Сечение:



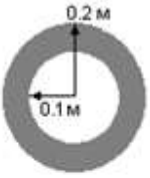
прямоугольник

$I_z = 5.66 \cdot 10^{-4}\ м^4$



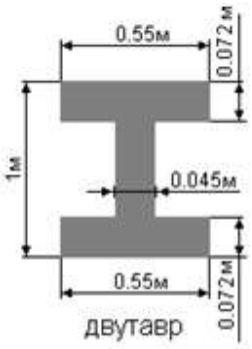
круг

$I_z = 7.85 \cdot 10^{-5}\ м^4$



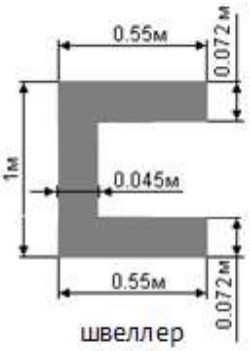
труба

$I_z = 1.117 \cdot 10^{-3}\ м^4$



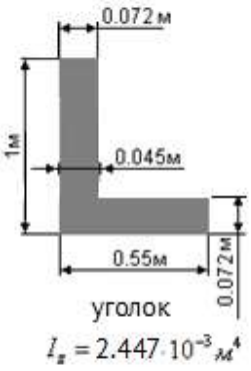
двутавр

$I_z = 2 \cdot 10^{-3}\ м^4$



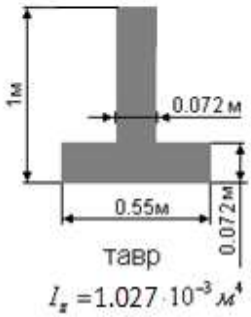
швеллер

$I_z = 3.655 \cdot 10^{-3}\ м^4$



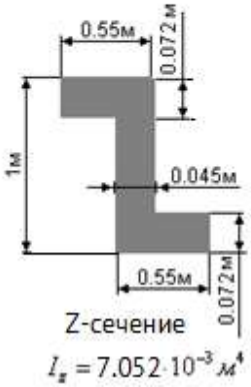
уголок

$I_z = 2.447 \cdot 10^{-3}\ м^4$



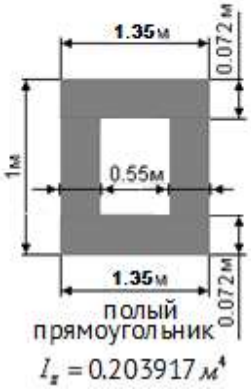
тавр

$I_z = 1.027 \cdot 10^{-3}\ м^4$



Z-сечение

$I_z = 7.052 \cdot 10^{-3}\ м^4$



полый прямоугольник

$I_z = 0.203917\ м^4$

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты вдоль всех осей в точке O
- Сосредоточенная сила в точке A: P = 1 кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Для прямоугольного сечения:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.025 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.0019 рад с точностью 1%
- Для круглого сечения:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.169851 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.012739 рад с точностью 1%
- Для сечения труба:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.011318 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.000849 рад с точностью 1%
- Для сечения двутавр:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.006667 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.000500 рад с точностью 1%
- Для сечения швеллер:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -3.65E-03 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -2.74E-04 рад с точностью 1%
- Для сечения уголок:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -5.45E-03 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -4.09E-04 рад с точностью 1%
- Для сечения тавр:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -1.30E-02 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -9.74E-04 рад с точностью 1%
- Для Z-сечения:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -1.89E-03 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -1.42E-04 рад с точностью 1%
- Для сечения полый прямоугольник:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -6.54E-05 м с точностью 1%

– Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -4.9040E-06 рад с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [249]:

$$u_y\big|_{x=L} = -\frac{PL^3}{3EI_z},\ \theta_z\big|_{x=L} = -\frac{PL^2}{2EI_z}.$$

Результаты:

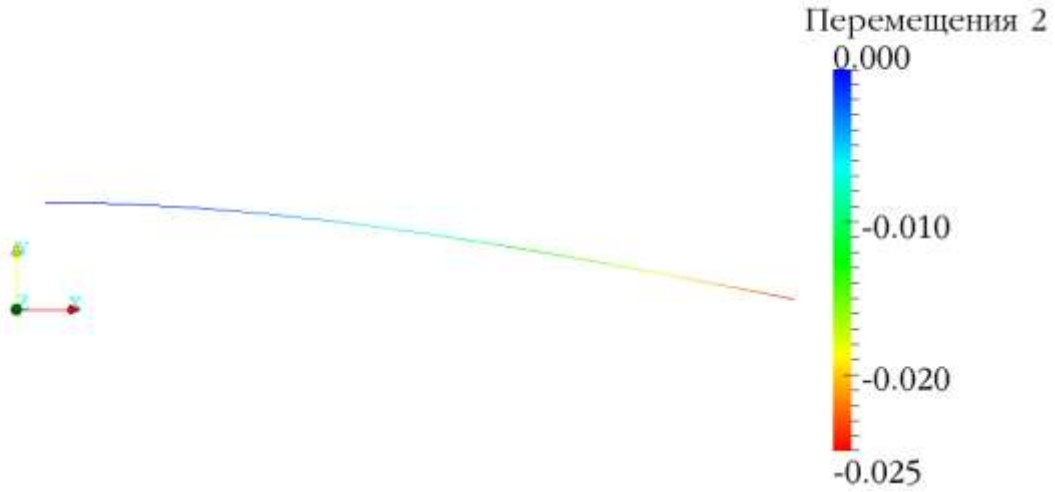
- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	**Величина**	**Теор. значение**	**Численный анализ**			
			FIDESYS		**ANSYS**[20]	
			Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
Прямоугольник	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-2.5E-02	-2.5000E-02	0%	-2.49E-02	0.40%
	$\theta_z\big\|_{x=L}$	-1.90E-03	-1.8750E-03	1.32%	-1.8750E-03	1.32%
Круг	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-1.69E-01	-1.6977E-01	0.05%	-1.6978E-01	0.04%
	$\theta_z\big\|_{x=L}$	-1.2739E-02	-1.2732E-02	0%	-1.2759E-02	0.16%
Труба	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-1.1318E-02	-1.1318E-02	0%	-1.1325E-02	0.06%
	$\theta_z\big\|_{x=L}$	-8.4900E-04	-8.4900E-04	0%	-8.51E-04	0.24%
Двутавр	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-6.6670E-03	-6.6570E-03	0.15%	-6.6480E-03	0.28%
	$\theta_z\big\|_{x=L}$	-5.0000E-04	-4.9900E-04	0.20%	-4.99E-04	0.20%
Швеллер	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-3.65E-03	-3.6480E-03	0.05%	-3.647E-03	0.08%
	$\theta_z\big\|_{x=L}$	-2.74E-04	-2.7360E-04	0.15%	-2.7358E-04	0.15%
Уголок	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-5.45E-03	-5.4439E-	0.11%	-5.4488E-03	0.02%

[20] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента BEAM4, 10 элементов).

			03			
	$\theta_z\|_{x=L}$	-4.09E-04	-4.0829E-04	0.17%	-4.0866E-04	0.08%
Тавр	$u_y\|_{x=L}$, м	-1.30E-02	-1.2981E-02	0.14%	-1.3080E-02	-0.62%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-9.74E-04	-9.7361E-04	0.04%	-9.7360E-04	0.04%
Z-сечение	$u_y\|_{x=L}$, м	-1.89E-03	-1.8906E-03	-0.03%	-1.8907E-03	-0.04%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-1.42E-04	-1.4179E-04	0.15%	-1.4180E-04	0.14%
Полый прямоугольник	$u_y\|_{x=L}$, м	-6.54E-05	-6.5386E-05	0.02%	-6.6229E-05	-1.27%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-4.90E-06	-4.9040E-06	-0.08%	-4.9040E-06	-0.08%

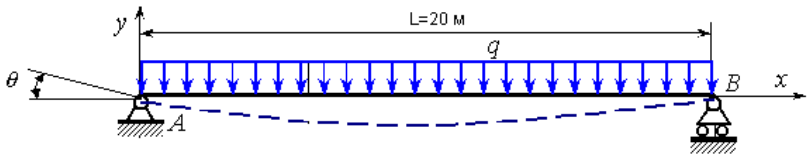
На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_y для прямоугольного сечения:



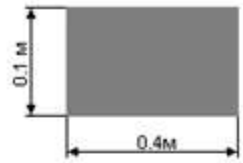
Балка с распределенной нагрузкой

Рассматривается задача об изгибе балки под действием равномерно распределенной нагрузки. При этом приводятся решения для четырех видов поперечных сечений – прямоугольник, круг, труба, двутавр (четыре отдельных теста).

Геометрическая модель:

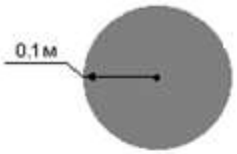


Сечение:



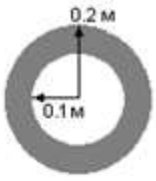
прямоугольник

$I_z = 5.66 \cdot 10^{-4}\ м^4$



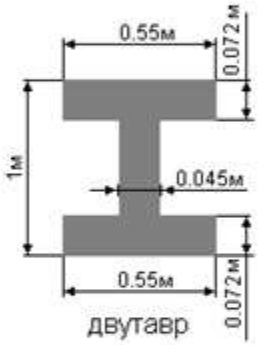
круг

$I_z = 7.85 \cdot 10^{-5}\ м^4$



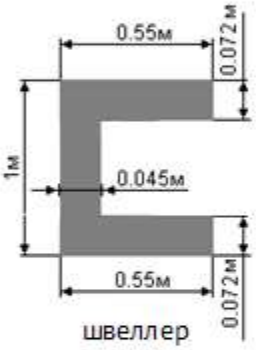
труба

$I_z = 1.117 \cdot 10^{-3}\ м^4$



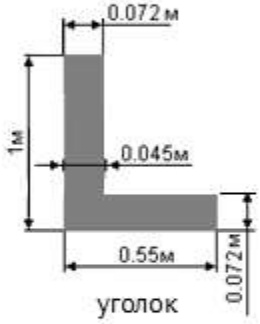
двутавр

$I_z = 2 \cdot 10^{-3}\ м^4$



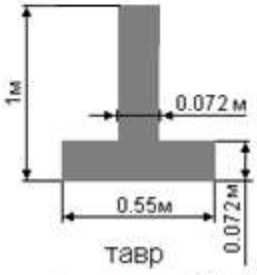
швеллер

$I_z = 3.655 \cdot 10^{-3}\ м^4$



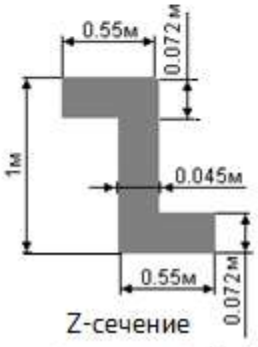
уголок

$I_z = 2.447 \cdot 10^{-3}\ м^4$



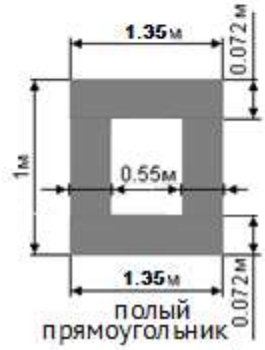
тавр

$I_z = 1.027 \cdot 10^{-3}\ м^4$



Z-сечение

$I_z = 7.052 \cdot 10^{-3}\ м^4$



полый прямоугольник

$I_z = 0.203917\ м^4$

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точках A и B
- Распределенная нагрузка на прямой AB q=1 кН/м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа

- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Для прямоугольного сечения:
  - Перемещение u_y в точке C (10, 0, 0) равно -1.950E-01 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (0, 0, 0) равен -3.130E-02 рад с точностью 1%
- Для круглого сечения:
  - Перемещение u_y в точке C (10, 0, 0) равно -0.1327 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (0, 0, 0) равен -2.120E-01 рад с точностью 1%
- Для сечения труба:
  - Перемещение u_y в точке C (10, 0, 0) равно -9.330E-02 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (0, 0, 0) равен -1.490E-02 рад с точностью 1%
- Для сечения двутавр:
  - Перемещение u_y в точке C (10, 0, 0) равно -5.210E-02 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (0, 0, 0) равен -8.330E-03 рад с точностью 1%
- Для сечения швеллер:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -2.850E-02м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -4.560E-03 рад с точностью 1%
- Для сечения уголок:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -4.260E-02 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -6.810E-03 рад с точностью 1%
- Для сечения тавр:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -1.010E-01 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -1.620E-02 рад с точностью 1%
- Для Z-сечения:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -1.480E-02 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -2.360E-03 рад с точностью 1%
- Для сечения полый прямоугольник:
  - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -5.110E-04 м с точностью 1%
  - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -8.170E-05 рад с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [249]:

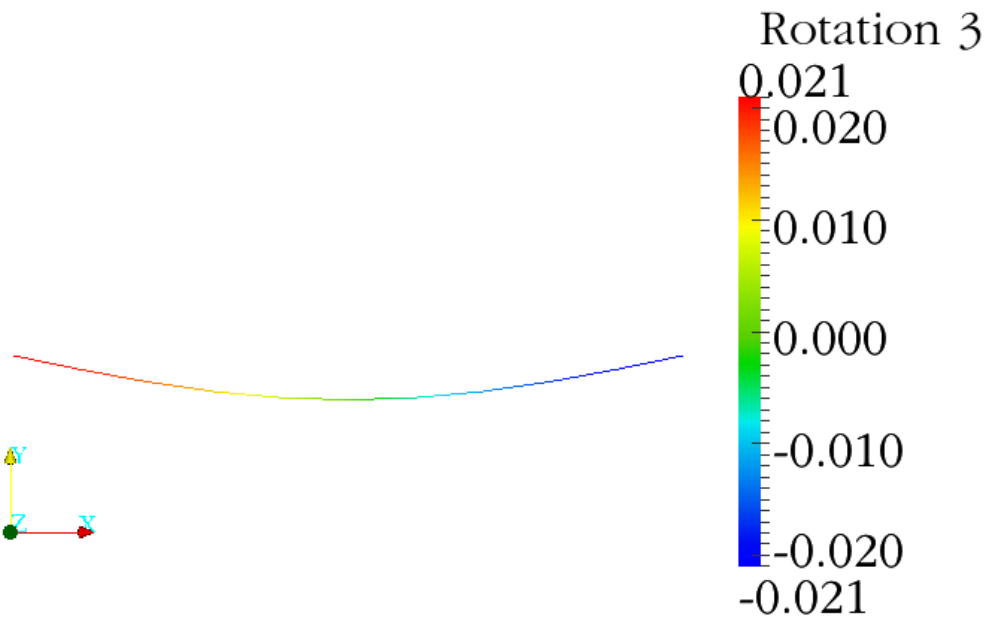
$$u_y\big|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI_z},\ \theta_z|_{x=0} = -\frac{1}{24}\frac{qL^3}{EI_z}.$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	Величина	Теор. значение	FIDESYS	
			Значение	Ошибка
Прямоугольник	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-1.950E-01	-1.933E-01	0.86%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-3.130E-02	-3.093E-02	1.17%
Круг	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-1.330E+00	-1.313E+00	1.30%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-2.120E-01	-2.101E-01	0.91%
Труба	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-9.330E-02	-8.752E-02	6.20%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-1.490E-02	-1.400E-02	6.01%
Двутавр	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-5.210E-02	-5.147E-02	1.20%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-8.330E-03	-8.237E-03	1.12%
Швеллер	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-2.850E-02	-2.821E-02	1.03%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-4.560E-03	-4.514E-03	1.02%
Уголок	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-4.260E-02	-4.210E-02	1.18%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-6.810E-03	-6.736E-03	1.08%
Тавр	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-1.010E-01	-1.004E-01	0.61%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-1.620E-02	-1.606E-02	0.85%
Z-сечение	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-1.480E-02	-1.462E-02	1.22%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-2.360E-03	-2.339E-03	0.87%
Полый прямоугольник	$u_y\big\|_{x=\frac{L}{2}}$, м	-5.110E-04	-5.056E-04	1.05%
	$\theta_z\|_{x=L}$	-8.170E-05	-8.091E-05	0.97%

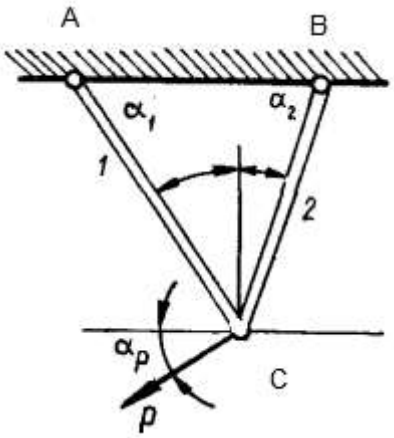
На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения углов поворота сечения θ_z для круглого сечения:



Определение усилий в стержневой системе

Решается задача о статическом нагружении стержневой системы сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:



- Длина стержней l=1.414 м
- Сечение балки эллипс d=0.01 м
- Углы $\alpha_1=\alpha_2=45^o$ $\alpha_p=90^o$

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точках A и B
- Сосредоточенная сила в точке B вдоль оси Y F=-10^3 Н

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 2 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Линейные балочные элементы Beam2

Критерий прохождения теста:

Усилие N_1 для первого стержня равно 707.106 Н с точностью 1%

Усилие N_2 для второго стержня равно 707.106 Н с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [208]:

$$N_1 = -\mathrm{P}\frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \qquad N_2 = \mathrm{P}\frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Для приведенных выше значений α_1, α_2 и α_p

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

Результаты:

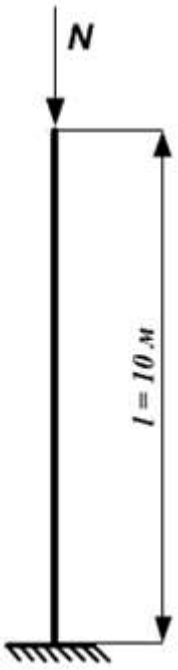
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**	
		FIDESYS	
		Значение	**Ошибка**
N_1, Н	707.106	704.465	0.37%
N_2, Н	707.106	704.465	0.37%

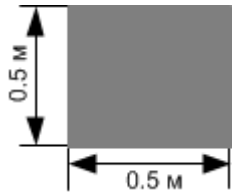
Вертикальный консольный стержень

Рассматривается задача об изгибе вертикального консольного стержня, нагруженного продольной сосредоточенной нагрузкой на свободном конце. Приводится решение для прямоугольного поперечного сечения.

Геометрическая модель:



Сечение:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты вдоль всех осей на нижнем конце стержня
- Сосредоточенная продольная сила N = 10 000 кН на вехнем конце стержня

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 30 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке A (0, 10, 0) равно -0.01333 м с точностью 1%
- Напряжение (балки) σ в точке A (0, 10, 0) равно -4e7 Па с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [249]:

$$u_y\big|_{x=L} = -\frac{Nl}{Ebh},$$

$$\sigma = -\frac{N}{bh}.$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	**Величина**	**Теор. значение**	**Численный анализ**	
			FIDESYS	
			Значение	**Ошибка**
Прямоугольник	$u_y\big\|_{x=L}$, м	-0.01333	-0.01333	<0.01%
	$\sigma_y\big\|_{x=L}$, Па	-4e7	4e7	<0.01%

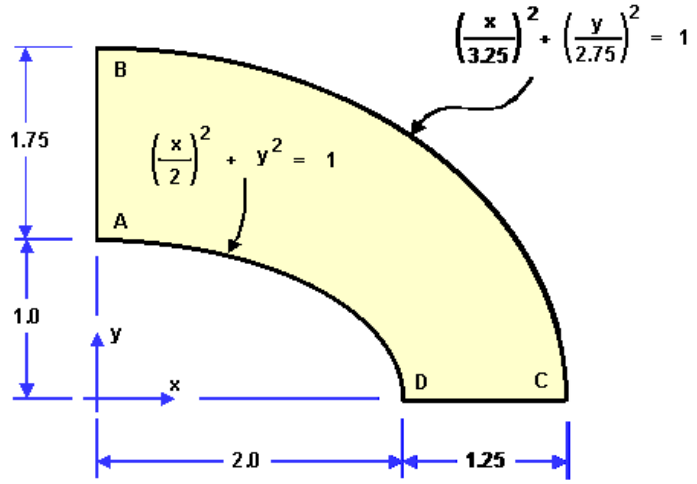
Нагружение эллипсоидальной пластины (2D)

NAFEMS test "Elliptic Membrane", TestNoLE1, Date/Issue1986-07-01/1 [811].

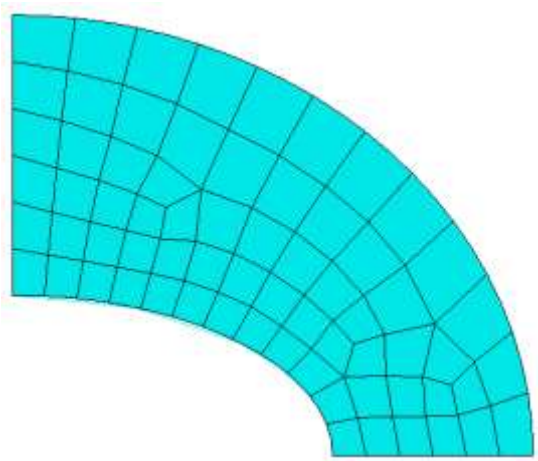
Пример взят с сайта NAFEMS: http://www.caesarsystems.co.uk/NAFEMS_benchmarks/le1.html.

Решается задача о статическом нагружении двумерной эллипсоидальной пластинки.

Геометрическая модель(размеры указаны в метрах):



Граничные условия:



- Нулевые перемещения вдоль оси X на стороне AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на стороне CD
- Давление на сторону BC величиной 10 МПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

8-узловые четырёхугольники Quad8 (68 элементов)

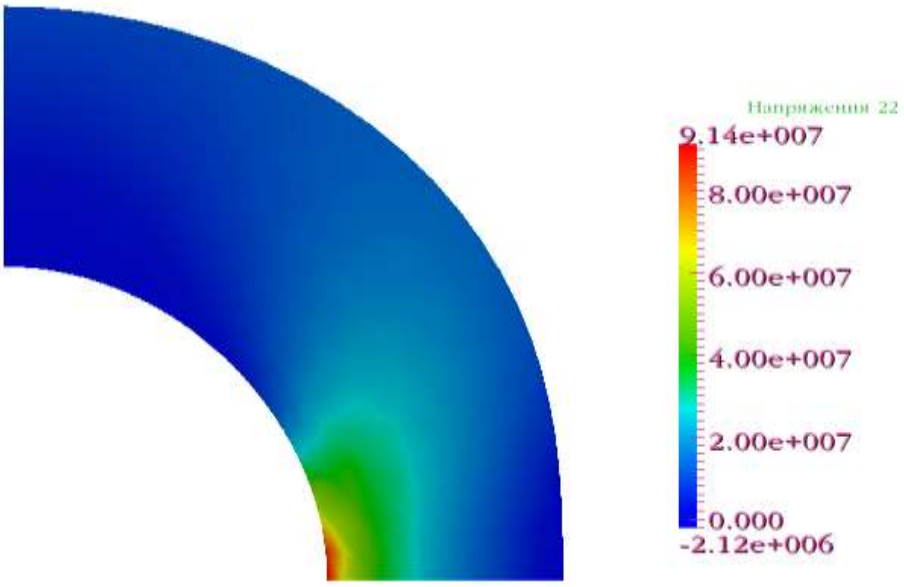
Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_{yy} в точке D равно 92.7 МПа [811] с точностью 2%

Результаты:

Полученное значение σ_{yy} в точке D 91.37 МПа отличается от требуемого 92.7 МПа на 1.43%

На рисунке ниже представлена деформированная модель с полем напряжения σ_{yy}:

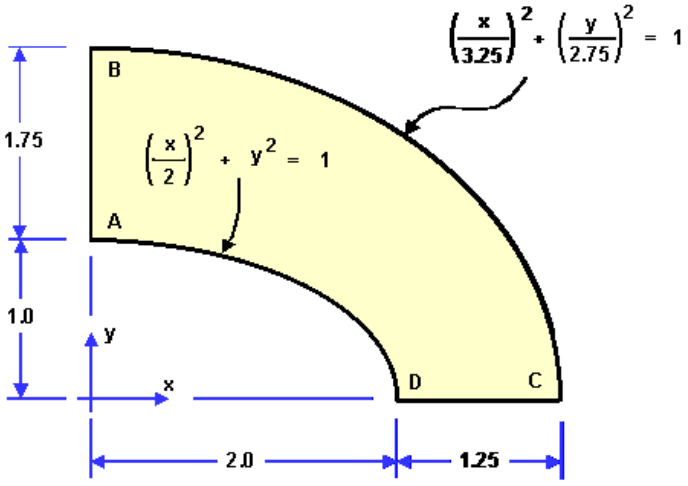


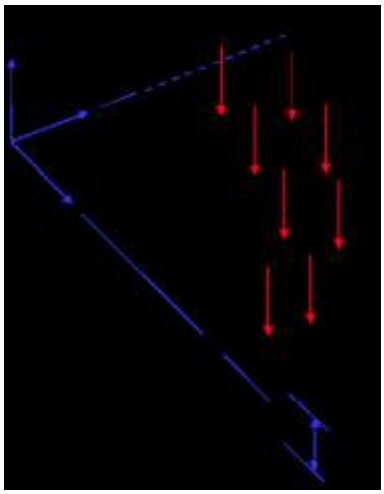
Нагружение эллипсоидальной пластины (3D)

NAFEMS test "ThickPlatePressure",TestNoLE10, Date/Issue1990-06-15/2 [811].

Решается задача о статическом нагружении эллипсоидальной пластинки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):



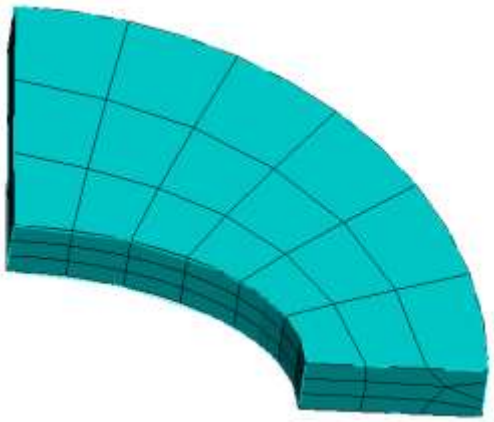


Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на поверхности ABB'A'
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на поверхности CDD'C'
- Нулевые перемещения вдоль осей X и Y на поверхности CBB'C'
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на средней линии поверхности CBB'C'

- Давление на поверхность ABCD величиной 1 МПа

Параметры материала:



- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

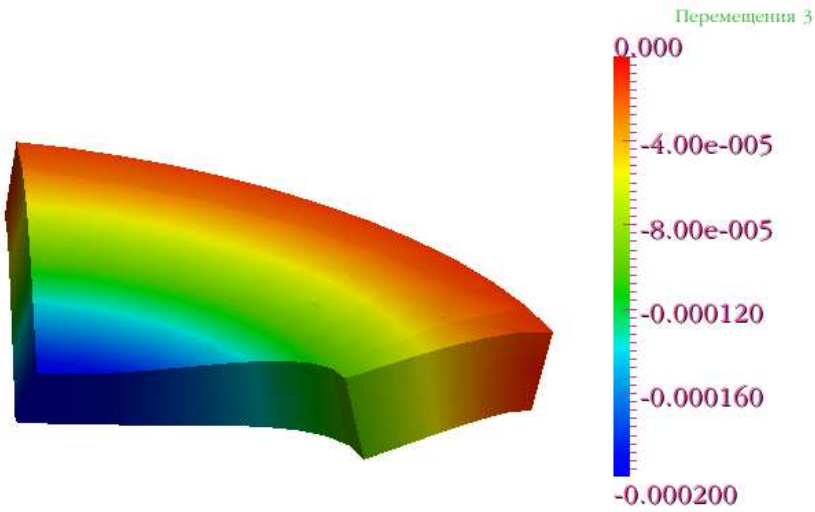
20-узловые гексаэдры Hex20 (60 элементов)

Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_{yy} в точке D равно -5.38МПа[811] с точностью 2%

Результаты:

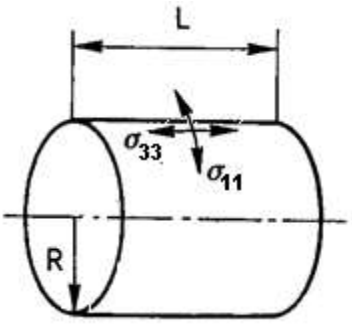
Полученное значение σ_{yy} в точке D -5.2948 Мпа отличается от требуемого -5.38 МПа на 1.61%. На рисунке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси Z:



<u>Цилиндр под внутренним давлением</u>

R.J. Roark et W.C. Young, Formulas for stress and strain, 5e edition, New York, McGraw-Hill, 1975.

Решается задача о нагружении цилиндрической оболочки внутренним давлением.



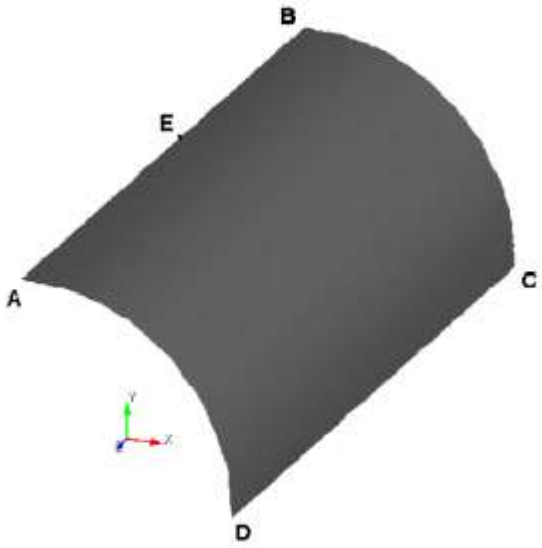
Геометрическая модель(размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть оболочки
- Длина L=4 м
- Радиус R=1 м

- Толщина h=0.02 м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой DC ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Z в точке A
- Давление на поверхность ABCD величиной 10 кПа



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):

- 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 166 элементов)
- 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (1 166 элементов)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 092 элементов)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 092 элементов)
- 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 092 элементов)

Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_{33} в точке E (0,1,0) равно 0 Па с точностью 1%

Напряжение σ_{11} в точке E (0,1,0) равно $5\cdot10^{5}$ Па с точностью 1%

Перемещение u_2 в точке E (0,1,0) равно $2.38\cdot10^{-6}$ м с точностью 1%

Перемещение u_3 в точке B (0,1,-2) равно $2.86\cdot10^{-6}$ м с точностью 1%

Результаты:

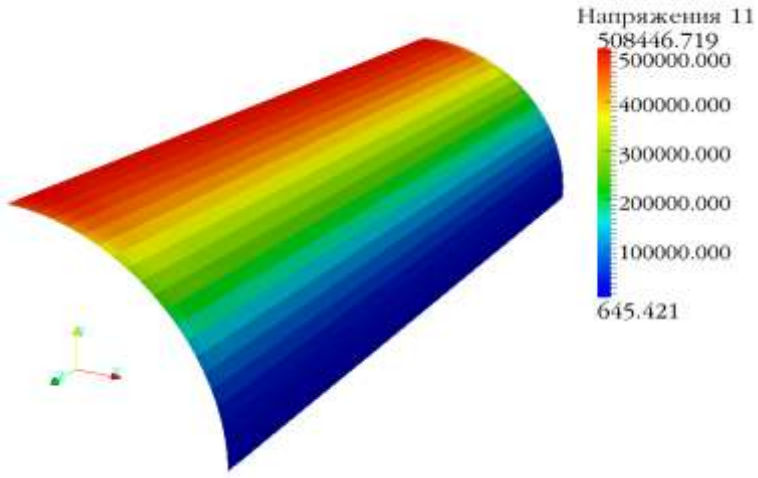
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ЛИРА [70]:

Величина	**Теор. значение**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**ЛИРА**	
		Trishell3		**Trishell6**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**

$\sigma_{11}\|_E$, Па	$5\cdot10^5$	498354	0.33%	500824	0.16%	$4.957\cdot10^5$	0.86%
$u_2\|_E$, м	$2.38\cdot10^{-6}$	$2.30431\cdot10^{-6}$	3.18%	$2.352\cdot10^{-6}$	1.18%	$2.3619\cdot10^{-6}$	0.76%
$u_3\|_B$, м	$2.86\cdot10^{-6}$	$2.79248\cdot10^{-6}$	2.36%	$2.84216\cdot10^{-6}$	0.62%	$2.8327\cdot10^{-6}$	0.95%

Величина	**Теор. значение**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**ЛИРА**	
		Shell4		**Shell8**		**Shell9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$\sigma_{11}\|_E$, Па	$5\cdot10^5$	498952	0.21 %	500492	0.10 %	499470	0.11%	$4.957\cdot10^5$	0.86%
$u_2\|_E$, м	$2.38\cdot10^{-6}$	$2.379\cdot10^{-6}$	0.03 %	$2.381\cdot10^{-6}$	0.04 %	$2.381\cdot10^{-6}$	0.04%	$2.3619\cdot10^{-6}$	0.76%
$u_3\|_B$, м	$2.86\cdot10^{-6}$	$2.855\cdot10^{-6}$	0.17 %	$2.8571\cdot10^{-6}$	0.10 %	$2.8571\cdot10^{-6}$	0.10%	$2.8327\cdot10^{-6}$	0.95%

- На рисунке ниже представлена деформированная модель с полем распределения напряжений σ_{11}:

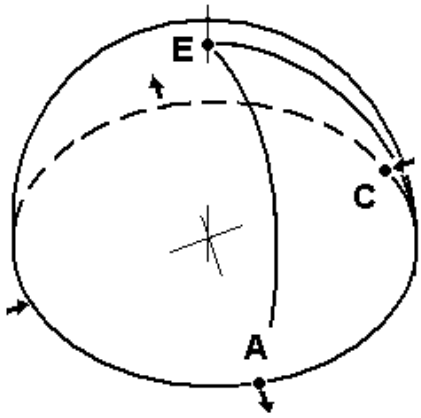


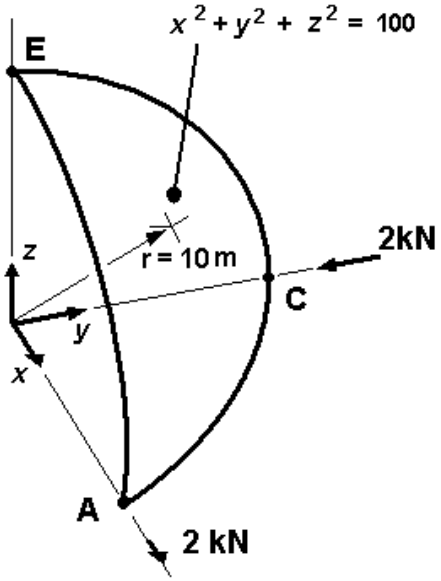
Нагружение сферической оболочки

NAFEMS test "ThickPlatePressure",TestNoLE10, Date/Issue1990-06-15/2 [811].

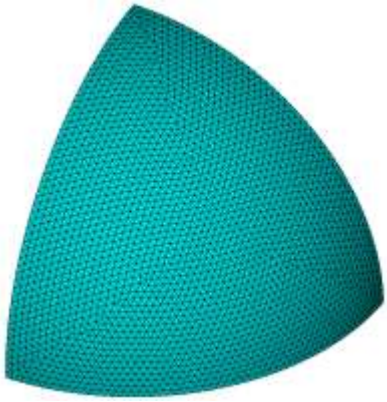
Решается задача о статическом нагружении сферической оболочки.

Геометрическая модель:





Граничные условия:



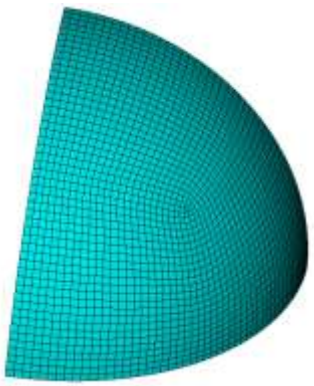
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой CE
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой AE
- Нулевые перемещения вдоль оси Z в точке E
- Сосредоточенная сила в точке A вдоль оси X F_A=2 кН
- Сосредоточенная сила в точке C вдоль оси Y F_C=-2 кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = $68.25 \cdot 10^3$ МПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Толщина 0.04

Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):



- 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (5 422 элементов)
- 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (5 422 элементов)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (4 800 элементов)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (4 800 элементов)
- 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (4 800 элементов)

Критерий прохождения теста:

Перемещение u_x в точке A равно 0.185 [811] с точностью 1.5%

Результаты:

Полученное значение u_x в точке A при разбиении на 3-узловые треугольные оболочки 0.184106 отличается от требуемого 0.185 м на 0.48%

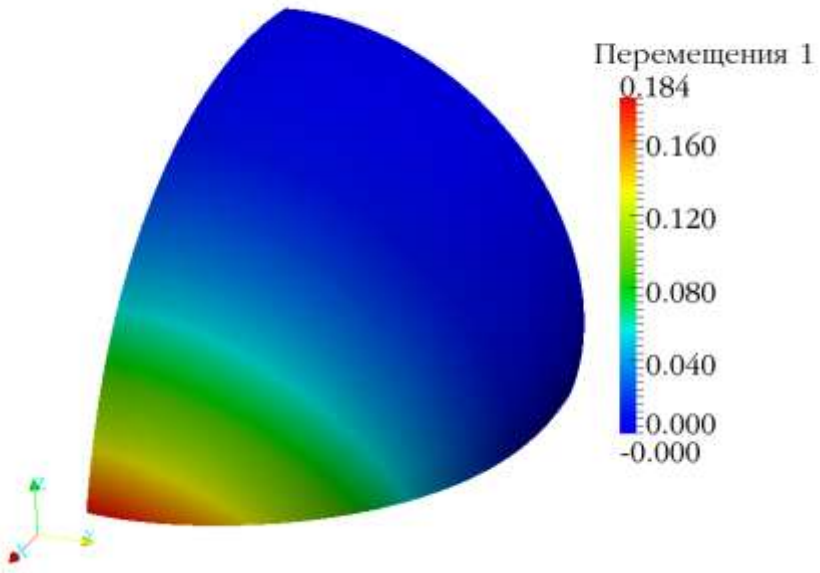
Полученное значение u_x в точке A при разбиении на 6-узловые четырехугольные оболочки 0.185046 отличается от требуемого 0.185 м на 0.02%

Полученное значение u_x в точке A при разбиении на 4-узловые четырехугольные оболочки 0.184834 отличается от требуемого 0.185 м на 0.09%

Полученное значение u_x в точке A при разбиении на 8-узловые четырехугольные оболочки 0.184934 отличается от требуемого 0.185 м на 0.04%

Полученное значение u_x в точке A при разбиении на 8-узловые четырехугольные оболочки 0.185044 отличается от требуемого 0.185 м на 0.02%

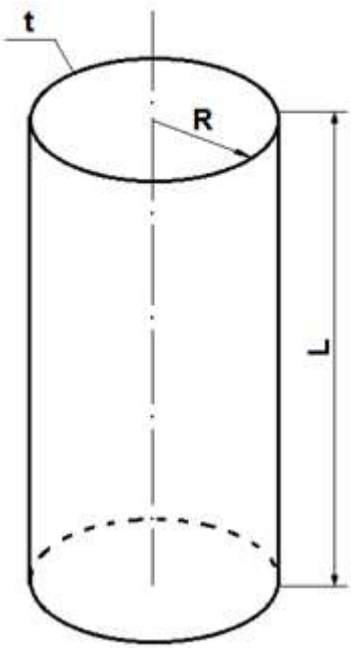
На рисунке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси X:



<u>Осевая нагрузка для тонкостенного цилиндра</u>

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique,1990.) Test No. SSLS07/89 [818].

Решается задача о нагружении цилиндрической оболочки нагрузкой, действующей вдоль оси цилиндра.



Геометрическая модель:

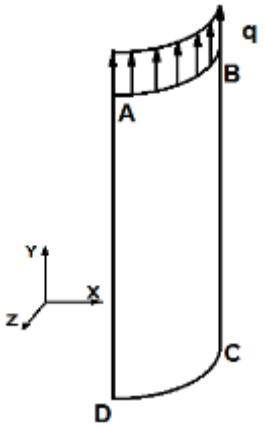
- В виду симметрии рассматривается 1/8 часть цилиндра
- Длина L = 8 м, радиус R = 1 м
- Толщина оболочки t = 0.02 м

Граничные условия:

- На стороне CD перемещения u_y= R_x=R_z=0
- На стороне CB u_x=R_y=R_z=0
- На стороне AD u_z=R_x=R_y=0
- q = 500 000 Н/м^2

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = $2.1 \cdot 10^{11}$ Па
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3



Сетка:

- 4-узловые четырехугольные элементы Shell4 (200 элементов)
- 8-узловые четырехугольные элементы Shell8 (200 элементов)
- 9-узловые четырехугольные элементы Shell9 (200 элементов)

Критерий прохождения теста [818]:

Перемещение u_z в точке A равно $-7.140 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 3%

Перемещение u_y в точке A равно $9.520 \cdot 10^{-6}$ м с точностью 3%

Напряжение σ_{11} в точке A равно 0 Па с точностью 3%

Напряжение σ_{22} в точке A равно $5 \cdot 10^5$ Па с точностью 3%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[818]:

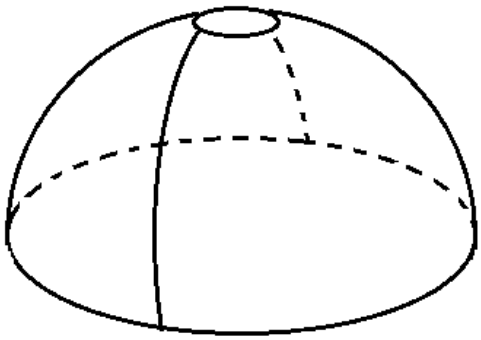
Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**ЛИРА**	
		Shell4		**Shell8**		**Shell9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_z, м	$-7.140 \cdot 10^{-7}$	$-7.1428 \cdot 10^{-7}$	0.04%	$-7.001 \cdot 10^{-7}$	1.95%	$-7.002 \cdot 10^{-7}$	1.97%	0.202	0%
u_y, м	$9.520 \cdot 10^{-6}$	$9.5238 \cdot 10^{-}$	0.04%	$9.5238 \cdot 10^{-}$	0.04%	$9.5238 \cdot 10^{-}$	0.04%	$4.957 \cdot 10^5$	0.86%

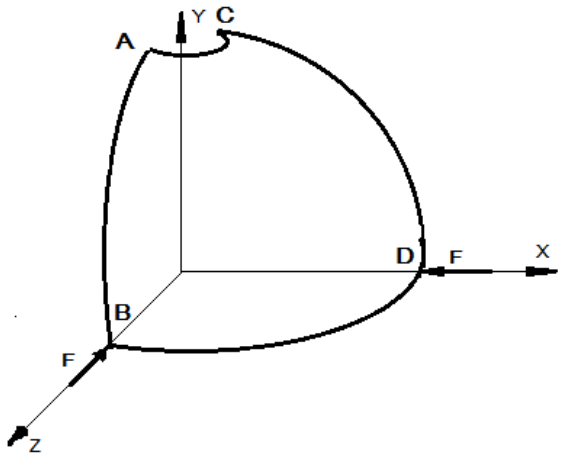
		6		6		6			
σ_{11}Па	0	$3.6\cdot10^{-9}$	<0.01 %	-	-	-	-	$2.3619\cdot10^{-6}$	0.76%
σ_{22}, Па	$5\cdot10^{5}$	$5\cdot10^{5}$	0%	$5.001\cdot10^{5}$	0.03%	5.002	0.03%	$2.8327\cdot10^{-6}$	0.95%

Усеченная сферическая оболочка

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique,1990.) Test No. SSLS21/89 [818].

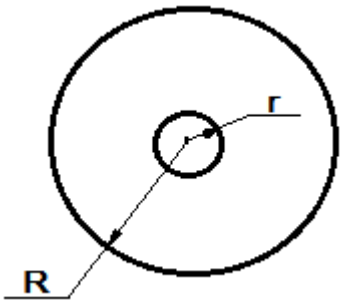
Решается задача о нагружении усеченной сферической оболочки двумя уравновешивающими силами.





Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/8 часть модели
- Радиус R = 10 м
- Радиус r = 1.8 м
- Толщина оболочки t = 0.04 м



Граничные условия:

- На стороне CD перемещения u_z= R_x=R_y=0
- На стороне AB u_x=R_y=R_z=0
- На стороне BD u_y=R_x=R_z=0
- F = 2 Н
- В силу симметрии прикладывается половина указанного значения силы

Параметры материала:

- Изотропный

- Модуль упругости E = $6.285 \cdot 10^7$ Па
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):

- 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (688 элемента)
- 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (234 элемента)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (100 элементов)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (100 элементов)
- 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (100 элементов)

Критерий прохождения теста [818]:

Перемещение u_z в точке B равно $9.4 \cdot 10^{-2}$ м с точностью 3%

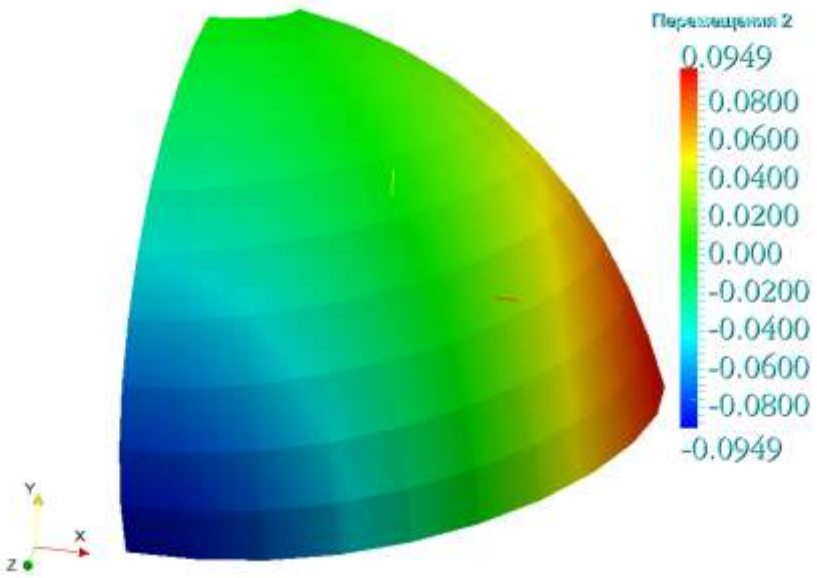
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[818]:

Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**NASTRAN**	
		TRISHELL3		**TRISHELL6**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$u_z \cdot 10^{-2}$,м	9.4	8.8	6.4%	9.73209	3.53%	10.2	8.5%

Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**NASTRAN**	
		Shell4		**Shell8**		**Shell9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
$u_z \cdot 10^{-2}$,м	9.4	9.56903	1.80%	9.14153	2.75%	9.14209	2.74%	10.2	8.5%

На рисунке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси Y:

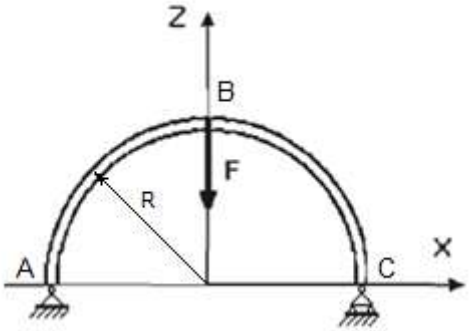


<u>Арка с шарнирным опиранием</u>

P.Delius, Resistance dex meteriaux, Paris, Technique et Vulgarisation, 1958

Решается задача о статическом нагружении арки сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:



- Радиус арки R=1 м
- Сечение балки труба (d_H=0.02 м d_B=0.016 м I_x=4.637·10^{-9} м^4)

Граничные условия:

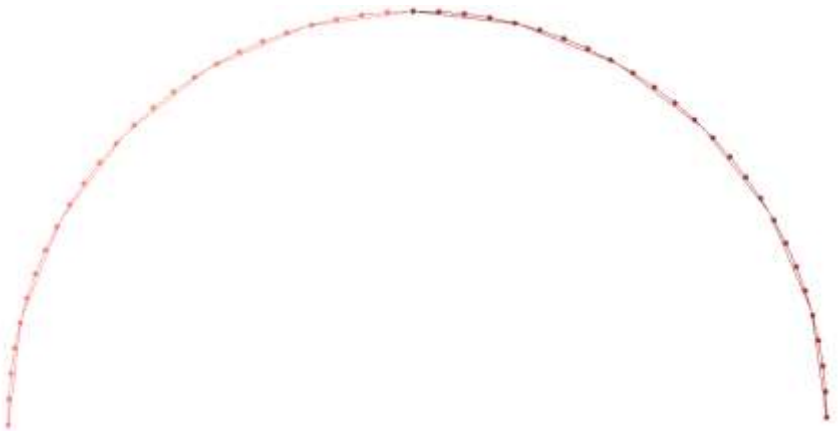
- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точке A
- Нулевые перемещения вдоль осей Y и Z в точке C
- Сосредоточенная сила в точке B вдоль оси Z F=-0.1 кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 2 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Линейные балочные элементы Beam2 (50 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке C (0,0,1) равно -1.9206·10^{-2} м с точностью 1.5%
- Угол поворота сечения θ_y в точке A (-1,0,0) равен -3. 0774·10^{-2} рад с точностью 1.5%
- Перемещение u_x в точке B (1,0,0) равно 5.3912·10^{-2} м с точностью 1.5%
- Угол поворота сечения θ_y в точке B (1,0,0) равен -3. 0774·10^{-2} ·10^{-2} рад с точностью 1.5%

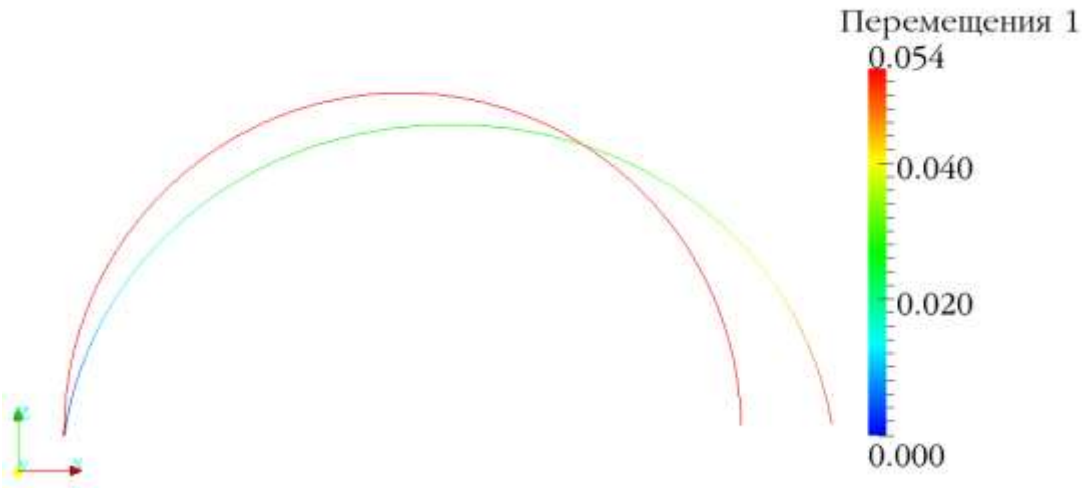
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, SCAD [816]

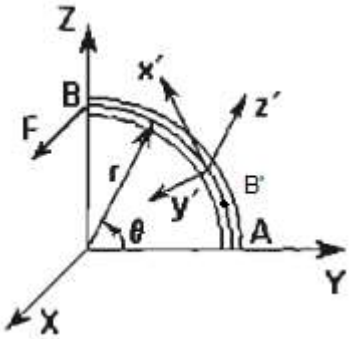
Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**			
		FIDESYS		**SCAD**[21]	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_z, м	-1.9206·10^{-2}	-1.9210·10^{-2}	0%	-1.7248·10^{2}	10.19%
$\theta_y\|_{x=-1}$	-3. 0774·10^{-2}	-3.0787·10^{-2}	0.04%	-2.85513·10^{-2}	7.2%
u_x, м	5.3912·10^{-2}	5.3903·10^{-2}	0.2%	4.9581·10^{-2}	8%
$\theta_y\|_{x=1}$	-3. 0774·10^{-2}	3.0787·10^{-2}	0.04%	2.85513·10^{-2}	7.2%

На рисунке ниже представлены недеформированная модель и деформированная модель с полем распределения перемещений по оси X:

[21] Анализ проводился для модели из 50 элементов типа 10



Арка с защемлением



S.Timoshenko, Strength of materials, Part: Elementary theory and problem, 3eed, 1955,

R.J. Roark, Formulas of stress and strain, 4eed, New York, McGraw-Hill, 1965

Решается задача о статическом нагружении арки сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:

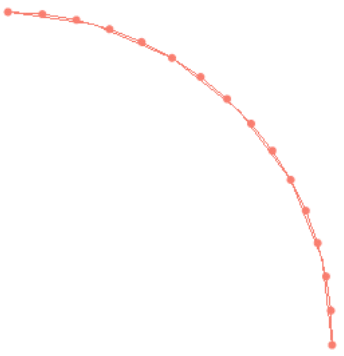
- Радиус арки r=1 м
- Сечение балки труба (d_H=0.02 м d_B=0.016 м I_x=4.637·10^{-9} $м^4$)

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точке A
- Сосредоточенная сила в точке B вдоль оси X F=0.1 кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 2 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3



Сетка:

Линейные балочные элементы Beam2 (15 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке B (0,0,1) равно 0.13462 м с точностью 1.5%

- Момент M_x в точке B' (0,0.9659, 0.25882) равен -74.1180 Нм с точностью 1.5%
- Момент M_z в точке B' (0,0.9659, 0.25882) равен 96.5925 Нм с точностью 1.5%

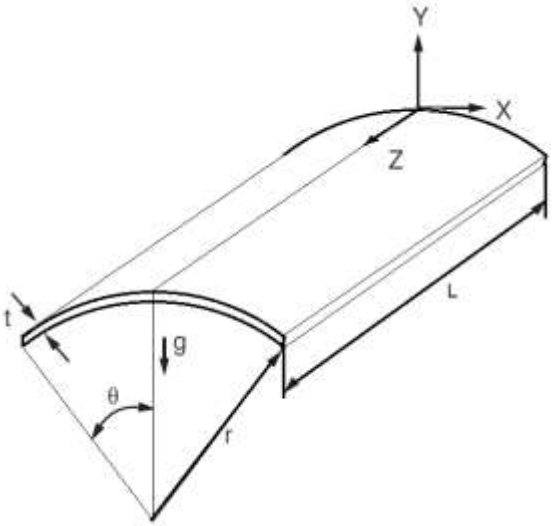
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, SCAD [816]

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		SCAD	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_x, м	0.13462	0.135808	0.88%	0.133939	0.5%
M_x	74.1180	71.5642	3.45%	72.5754	2.08%
M_z	96.5925	98.499	1.97%	94.7573	1.9%

<u>Свод крыши под собственным весом</u>

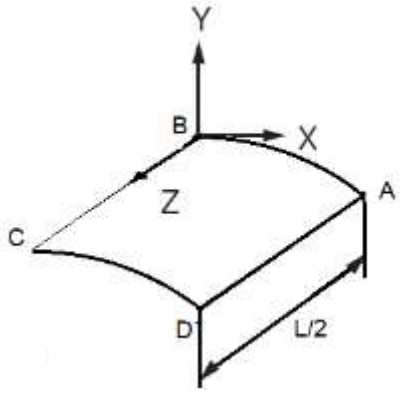
R.D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1981, pp. 284-287 [819]



Решается задача об изгибе цилиндрической оболочки крыши под собственным весом.

Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается ¼ часть крыши
- Длина L = 50 м
- Радиус r = 25 м
- $\theta=40^o$
- Толщина оболочки t = 0.25 м



Граничные условия:

- На стороне CD перемещения u_x=u_y=0
- На стороне CB u_x=R_y=R_z=0
- На стороне AB u_z=R_x=R_y=0
- g=9.8 м/с^2

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = $4.32\cdot10^8$
- Коэффициент Пуассона ν = 0.0

- Плотность ρ=36.7347 кг/м^3

Сетка:

4-узловые четырехугольные элементы Shell4 (24 элемента)

Критерий прохождения теста:

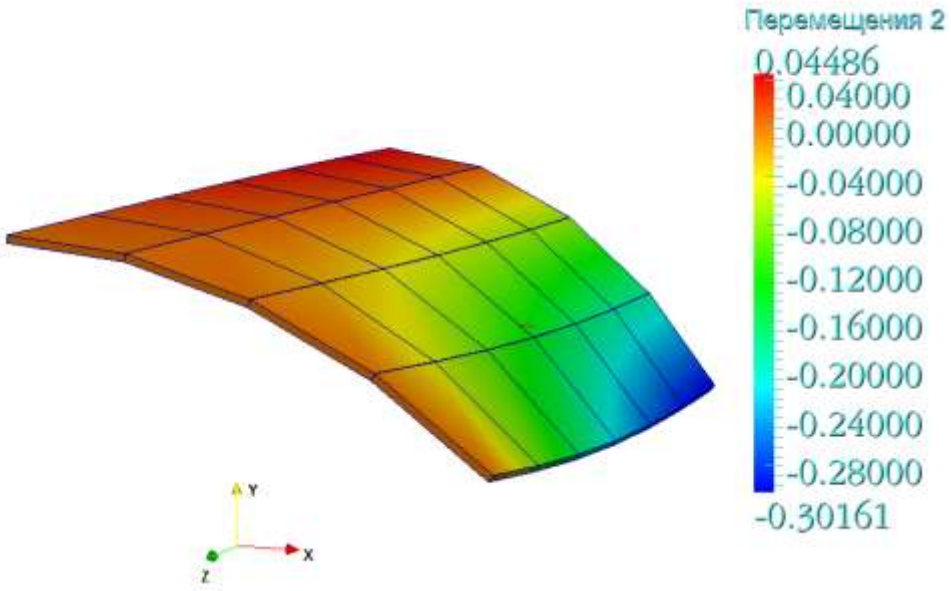
- Перемещение u_x в точке A равно -0.1593 м [819] с точностью 5%
- Перемещение u_y в точке A равно -0.3019 м [819] с точностью 5%
- Напряжение σ_z (верх оболочки) в точке A равно 215 570 Па с точностью 5%
- Напряжение σ_z (низ оболочки) в точке A равно 340 700 Па с точностью 5%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[819]:

Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**			
		FIDESYS(Shell4)		**ANSYS (Shell181)**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_x, м	-0.1593	-0.15871	0.37%	-0.1661	4.27%
u_y, м	-0.3019	-0.30161	0.1%	-0.316	4.67%
$\sigma_z\|_{z=\frac{t}{2}}$, Па	215 570	210 262.15	2.46%	205 333.3	4.75%
$\sigma_z\|_{z=-\frac{t}{2}}$, Па	340 700	331 786.16	2.6%	336 983.7	1.05%

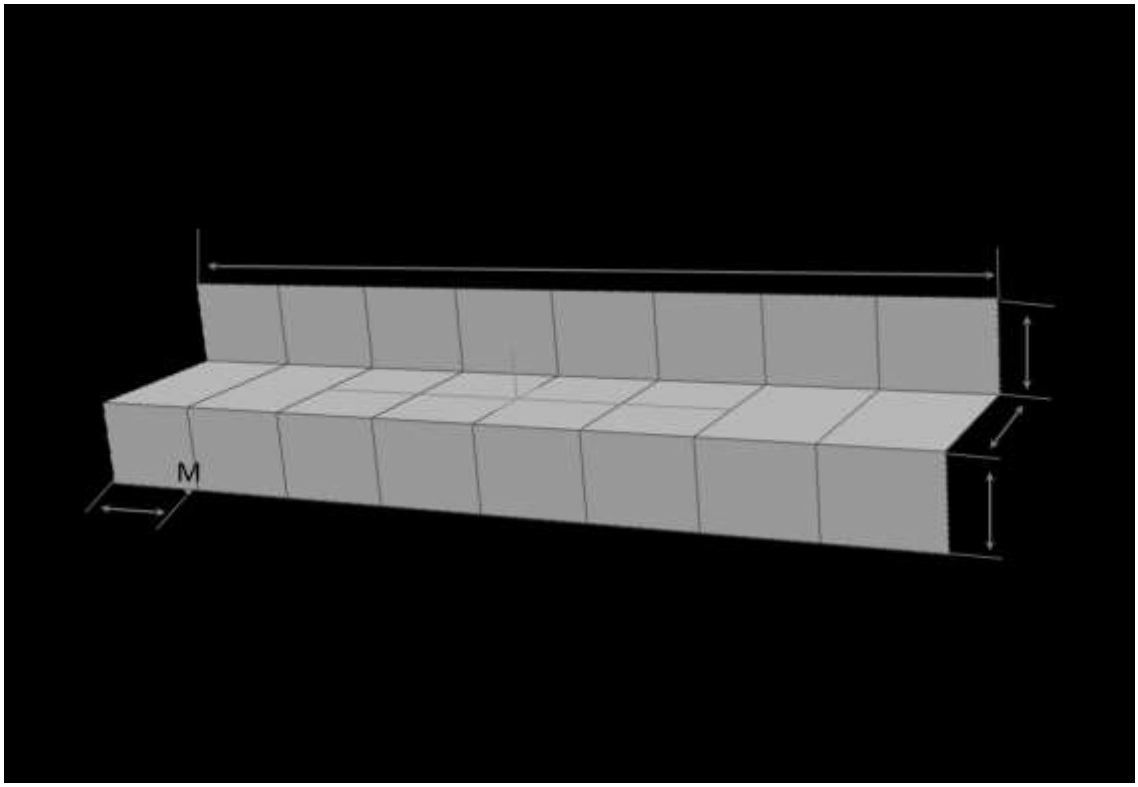
На рисунке ниже представлен деформированный 3D-вид модели с полем перемещения u_y:



Пространственная пластинчатая система (3D)

NAFEMS Finite Element Methods & Standards, The Standard NAFEMS Benchmarks, Test No. LE5. Glasgow: NAFEMS, Rev. 3, 1990.

Рассматривается задача о пластинчатой системе с одной закрепленной стороной при действии давления на ее две противоположные грани.



Геометрическая модель:

- Пластинчатая система представляет собой объединение трех двумерных пластин. Геометрические размеры модели, а так же ее расположение в пространстве приведены на рисунках ниже
- Толщина оболочки = 0.1м

Граничные условия:

- Закрепление по всем перемещениям и поворотам на грани ABCD
- Равномерно распределенные нагрузки по грани EF и GH вдоль оси Y, противоположные по направлению, q = 0.6 МН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 Гпа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Три типа элементов (три отдельных теста):

- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (24 элемента)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (24 элемента)
- 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (24 элемента)

Критерий прохождения теста:

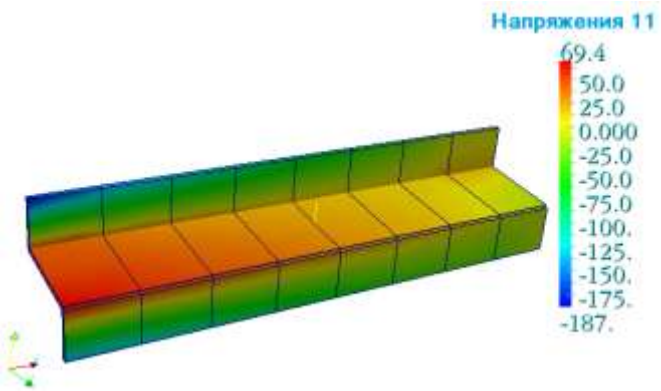
Напряжение σ_x в точке M (-2.51;-1; 2) равно -108 МПа с точностью 1%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ FIDESYS					
		Shell4		Shell8		Shell9	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_x, МПа	108	-107.892	0.10%	-109.311	1.21%	-109.285	1.19%

На рисунке ниже представлен 3D-вид модели с полем напряжения σ_x для элементов shell8:



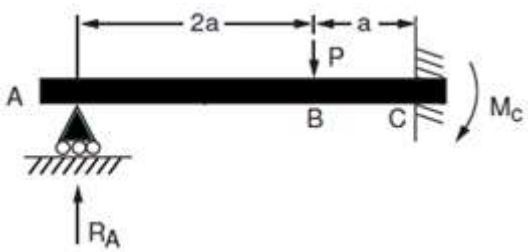
<u>Определение силы реакции балки</u>

S.H. Crandall, N.C. Dahl, An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1959, pg. 389, ex. 8.9 (case 1)

Решается задача о статическом нагружении балки квадратного сечения.

Геометрическая модель:

- Рассматривается балка состоящая из двух частей
- a = 50
- Сечение – квадрат со стороной 1

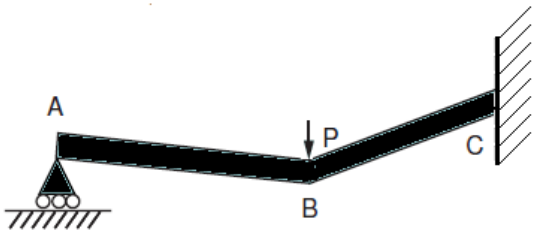


Граничные условия:

- Правый конец жестко закреплен
- На левом конце трубы нулевые перемещения U_y и U_z

- $F_y = -1000$

Параметры материала:



- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

Линейные балочные элементы Beam2 (2 элемента)

Критерий прохождения теста:

Сила реакции R_A в точке A равно 148.15 с точностью 1%

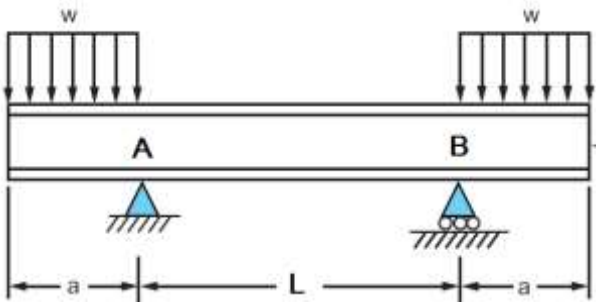
Момент реакции в точке C равен 27 778 с точностью 1%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[819]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
R_A	148.15	148.148	<0.01%	148.25	<0.01%
Mc	27 778	27 777.8	<0.01%	27 762.817	<0.1%

<u>Определение напряжений для балки</u>



S. Timoshenko, Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1955, pg. 98, problem 4.

Решается задача об изгибе двутавровой балки под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на вылетах. Балка расположена вдоль оси Ox. В результате решения сравниваются напряжения и перемещения.

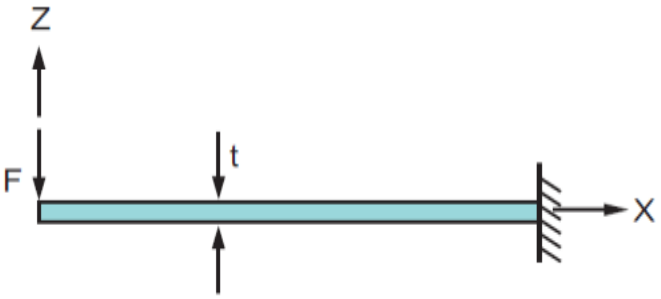
Геометрическая модель:



- L = 240
- a = 120
- h = 30
- Сечение – двутавр ($I_z = 7892$, $A = 50.65$)

Граничные условия:

- В точке A $U_x = U_y = U_z = 0$
- В точке B $U_y = U_z = 0$
- Распределенная нагрузка w = 10000/12



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

Линейные балочные элементы Beam2 (4 элемента)

Критерий прохождения теста:

- Максимальное перемещение U_y в центре балки равно 0.182 с точностью 1%
- Максимальное напряжение $Stress_{beam}$ для балки равно -11 400 с точностью 1%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[819]:

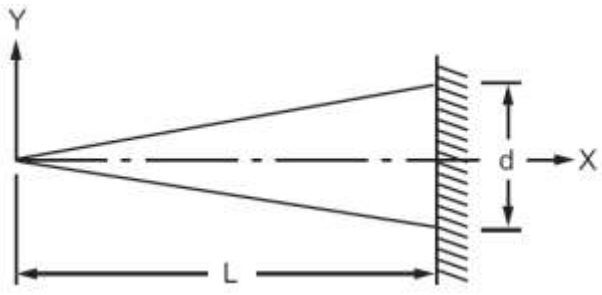
Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**			
		FIDESYS		**ANSYS**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
U_y	0.182	0.182	<0.01%	0.182	<0.01%
$Stress_{beam}$	-11 400	-11 404	0.04%	-11 440.746	0.36%

<u>Изгиб конической пластины</u>

Решается задача об изгибе конической пластины под действием точечной силы. Сравниваются напряжения и перемещения.

Геометрическая модель:

- L = 20
- d = 3
- t = 0.5



Граничные условия:

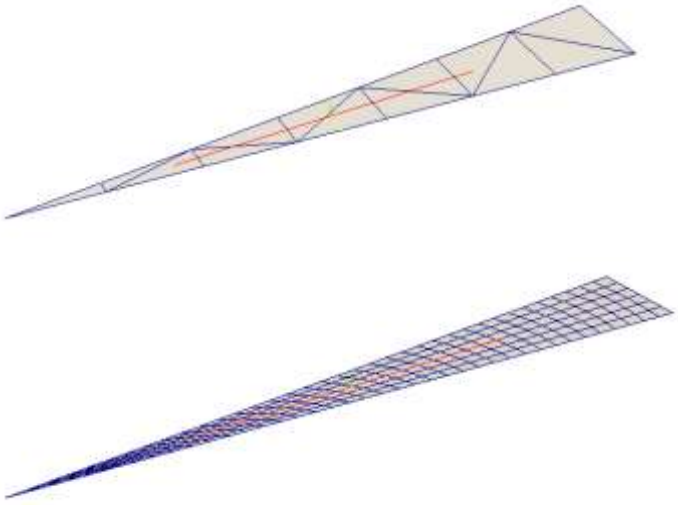
- Жестко закреплено основание
- На вершину действует сила F = 10

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = $30 \cdot 10^6$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.0$

Сетка:

- 5 типов элементов (пять отдельных тестов):
  - 3-узловые четырёхугольные оболочки TriShell3 (13 элемента)
  - 6-узловые четырёхугольные оболочки TriShell6 (13 элементов)
  - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (215 элементов)
  - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (215 элементов)
  - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (215 элементов)



Критерий прохождения теста:

Перемещение u_z для вершины конуса равно -0.042667 с точностью 1%

Напряжение σ_x равно 1600 с точностью 1%

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[819]:

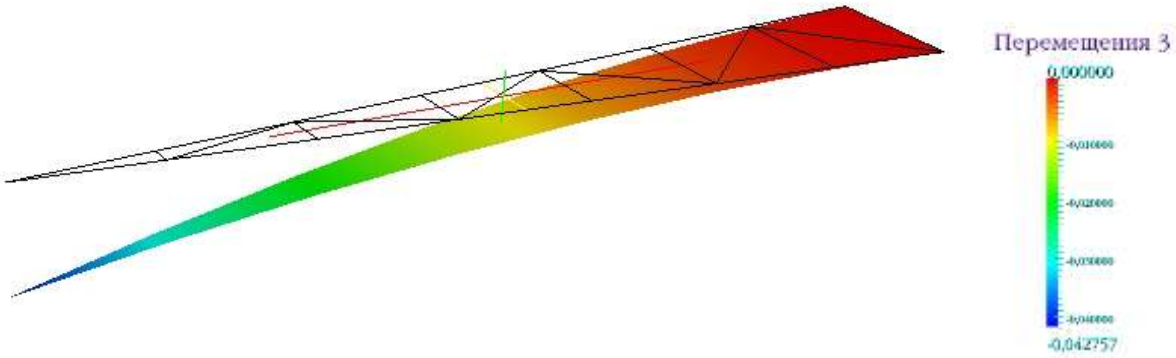
Величина	**Теоретическое значение**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**ANSYS**	
		TriShell3		**TriShell6**		**SHELL63**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_z	-0.042667	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%	-0.042	1.6%

σ_x	1 600.00	1 602.29	0.1%	1 619.97	1.2%	1 600.450	<0.01%

Величина	**Теоретическое значение**	**Численный анализ**			
		FIDESYS (SHELL4)		**ANSYS (SHELL181)**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_z	-0.042667	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%
σ_x	1 600.00	1 611.09	0.7%	1 600.00	<0.01%

Величина	**Теоретическое значение**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**ANSYS**	
		SHELL8		**SHELL9**		**SHELL281**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_z	-0.042667	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%
σ_x	1 600.00	1 616.13	1%	1 591.020	0.6%	1 604.376	0.3%

На рисунке ниже представлен деформированный вид модели с полем перемещения u_z для элементов TriShell3



Динамическое нагружение

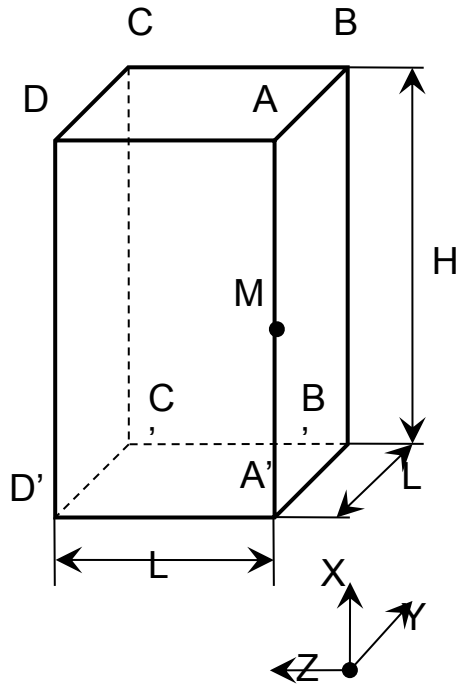
Значительное количество верификационных тестов для нестационарных задач было рассмотрено во второй главе. Поэтому приведем лишь 2 теста в данном разделе.

Задача Стокса

В этой задаче рассматривается распространение волн в бесконечной упругой среде, вызываемых действием сосредоточенной силы. Задача будет ограничена объемом куба с

длиной ребра равной 4 м.

Геометрическая модель:



- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть куба – параллелепипед ABCDA’B’C’D’
- Высота параллелепипеда H = 4 м
- Длина и ширина L = 2 м

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости AA’D’D вдоль оси Y
- Нулевое перемещение плоскости AA’B’B вдоль оси Z
- Нулевое перемещенио ребра CC’ вдоль оси X
- В точке M (середина ребра AA’) приложена сила величиной 100 кН, направленная по оси X
- Зависимость силы от времени – гармоническая, циклическая частота 20 000 Гц

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность ρ = 7900 кг/м^3

Сетка:



- Измельчённая вдоль ребра AA’
- Элементы следующих типов (отдельные тесты):
  - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (1 121 480 элементов)
  - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 024 000 элементов)
  - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 1-го, 3-го и 5-го порядков (везде 53 944 элемента)

Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке (1, 0, 0) в момент времени t = 0.0003 с равно $2.318 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 1%
- Перемещение u_x в точке (0, 0.6, 0) в момент времени t = 0.0003 с равно $5.353 \cdot 10^{-7}$м с точностью 1%

- Перемещение u_z в точке (0.231, 0, 0.283) в некоторый момент времени t = 0.0003 с равно $-3.609 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 1%

Значения перемещений вычислены по следующей формуле [2]:

$$u_i(\boldsymbol{r},t) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{4\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau f(t-\tau)d\tau + \frac{\gamma_i\gamma_j}{4\pi\rho r\alpha^2} f(t-\frac{r}{\alpha}) - \frac{(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{4\pi\rho r\beta^2} f(t-\frac{r}{\beta})$$

Результаты:

- Для тестов с линейными элементами Tet4 и Hex8 результаты расчетов приведены в таблице:

Величина	**Теоретическое значение, $\cdot 10^{-7}$м**	**Численный анализ**					
		Fidesys				**Ansys[22]**	
		Гексаэдральная сетка		**Тетраэдральная сетка**		**Тетраэдральная сетка**	
		Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	**Ошибка**	**Значение, $\cdot 10^{-7}$ м**	**Ошибка**	**Значение, $\cdot 10^{-7}$ м**	**Ошибка**
u_x	2.318	2.328	0.41 %	2.321	0.13 %	2.322	0.17 %
u_x	5.353	5.333	-0.39 %	5.342	-0.33 %	5.395	0.78 %
u_z	-3.609	-3.625	0.45 %	-3.641	0.89 %	-3.683	2.05 %

- Результаты тестов со спектральными элементами сведены в отдельную таблицу:

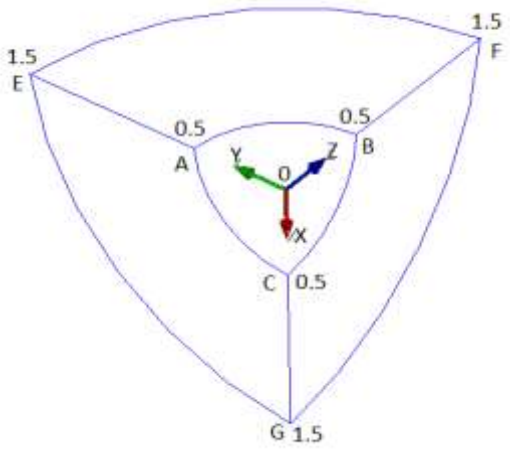
Величина	**Теоретическое значение, $\cdot 10^{-7}$м**	**Численный анализ Fidesys**					
		Элементы 1-го порядка		**Элементы 2-го порядка**		**Элементы 3-го порядка**	
		Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	**Ошибка**	**Значение, $\cdot 10^{-7}$ м**	**Ошибка**	**Значение, $\cdot 10^{-7}$ м**	**Ошибка**
u_x	2.318	2.114	-8.80 %	2.314	-0.17 %	2.307	-0.47 %
u_x	5.353	4.936	-7.79 %	5.292	-1.14 %	5.312	-0.77 %
u_z	-3.609	-3.637	0.78 %	-3.567	1.16 %	-3.647	1.06 %

Взрывное давление в сферической полости

[22] Анализ проводился на тетраэдральной сетке (тип элемента SOLID168, количество элементов 864 796, количество узлов 1 197 306).

Задача рассматривает поведение упругой бесконечной среды со сферической полостью после приложения давления к поверхности полости. Решение проводилось для явной схемы.

Геометрическая модель:



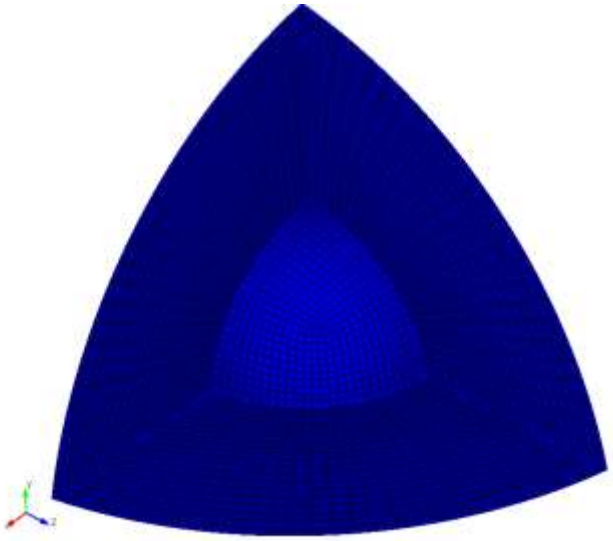
- Рассматриваемая область среды ограничена объемом сферы радиусом 1.5 м
- Полость расположена в центре сферы и имеет радиус 0.5 м
- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/8 исходного объема

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABFE вдоль оси X
- Нулевое перемещение плоскости BCGF вдоль оси Y
- Нулевое перемещение плоскости ACGE вдоль оси Z

На поверхность сферической полости ABC приложено давление, изменяющееся от времени по закону $p(t) = 10^8 \sin(40000t)$

- Время расчета t = 1.35· 10^{-4} с



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 7900 кг/м^3

Сетка:

- Два типа конечных элементов (два отдельных теста):
  - 10-узловые тетраэдры Tetra10
  - 27-узловые гексаэдры Hex27
- Два типа спектральных элементов порядков (два отдельных теста):
  - 27-узловые гексаэдры Hex27s 2го порядка
  - 27-узловые гексаэдры Hex27s 4го порядка

Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_R в точке R=0.75 м в последний момент времени равно 4.08106· 10^{-5} м с точностью 1%

- Напряжение σ_R в точке R=0.75 м в последний момент времени равно 48.75 МПа с точностью 1%
- Напряжение σ_θ в точке R=0.75 м в последний момент времени равно 36.44 МПа с точностью 1%

Значения перемещений и напряжений вычислены по следующим формулам [250]:

$$\tau = t - \frac{r-a}{c},$$

$$f(\tau) = \frac{a}{(\beta-\alpha)\rho}\int_0^\tau p(\xi)\left[e^{\alpha(\tau-\xi)} - e^{\beta(\tau-\xi)}\right]d\xi,$$

$$u_R = -\frac{-f\prime(\tau)}{c\cdot r} - \frac{f(\tau)}{r^2},$$

$$\sigma_R = \frac{\rho}{r}f''(\tau) + 2\frac{\rho c}{r^2}\frac{1-2\nu}{1-\nu}[f'(\tau) + \frac{c}{r}f(\tau)],$$

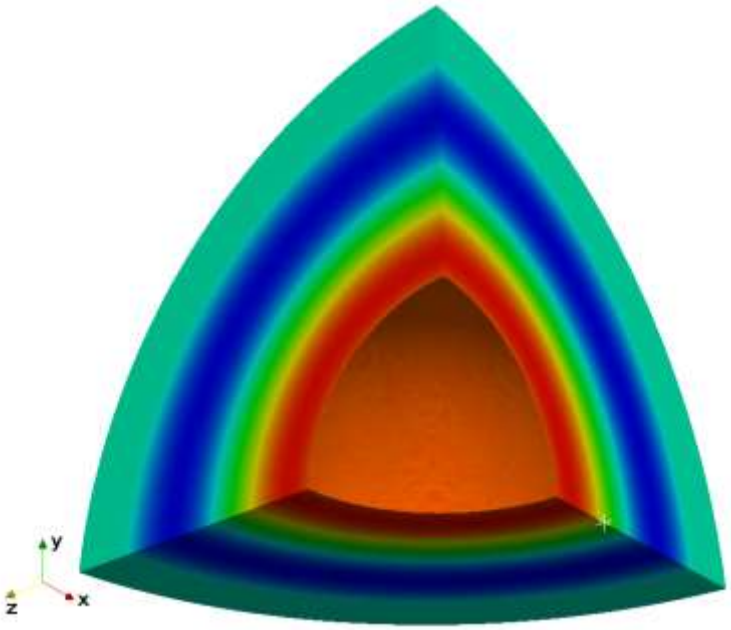
$$\sigma_\Theta = \frac{\rho}{r}\frac{\nu}{1-\nu}f''(\tau) - \frac{\rho c}{r^2}\frac{1-2\nu}{1-\nu}[f'(\tau) + \frac{c}{r}f(\tau)]$$

Результаты:

- Полученные значения перемещения и напряжений для конечных элементов представлены в таблице:

Величина, ед. измерения	**Теоретическое значение**	**Численный анализ FIDESYS**					
		HEX27		**HEX27s (2-го порядка)**		**HEX27s (4-го порядка)**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_R, $\cdot 10^{-5}$ м	4.08106	4.14403	1.54%	4.13617	1.35%	4.1059	0.6%
σ_R, МПа	48.75	49.37	1.27%	44.016	9.7%	47.773	2%
σ_θ, МПа	36.44	35.57	2.39%	34.054	6.55%	36.16	0.77%

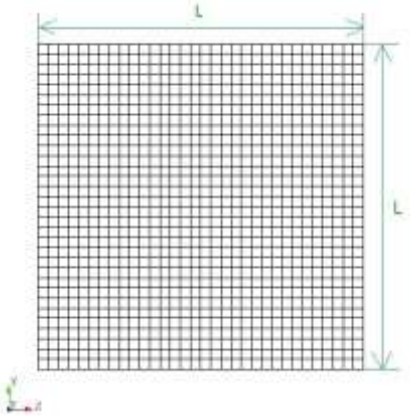
На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения радиальных напряжений σ_R в момент времени t = $1.35\cdot 10^{-4}$ с и с отмеченной точкой, в которой сравнивались значения напряжений и перемещения



Анализ собственных частот

<u>Собственные частоты квадратной пластинки с защемлённой стороной</u>

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки, одна сторона которой защемлена.



Геометрическая модель:

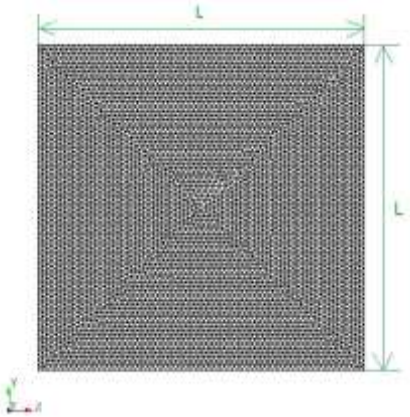
- Размеры пластинки: L = 1 м
- Толщина: t = 0.01 м

Граничные условия:

- Ux = Uy = Rz = 0 во всех узлах сетки
- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 на прямой X = 0 м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 7800 кг/м^3



Сетка:

Пять типов сетки (пять отдельных тестов):

- Линейные треугольные оболочки Trishell3 (64*64)
- Линейные треугольные оболочки Trishell6 (64*64)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*64)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8(64*64)

– 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9(64*64)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 6)

Анализ результатов

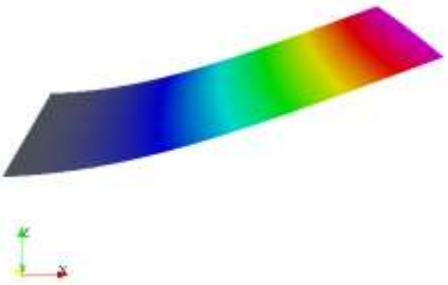
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [321]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Trishell3		FIDESYS, Trishell6	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	8.73	8.67	0.69%	8.67	0.67%
2	21.30	21.22	0.38%	21.19	0.51%
3	53.56	53.17	0.73%	53.13	0.81%
4	68.30	67.91	0.57%	67.83	0.69%
5	77.74	77.23	0.66%	77.08	0.85%
6	136.05	135.13	0.68%	134.74	0.96%

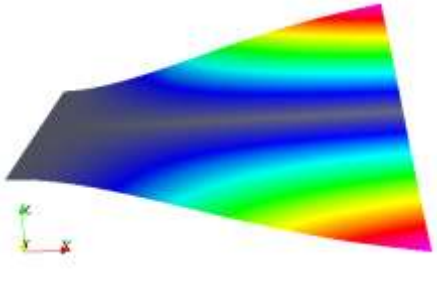
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Shell8		FIDESYS, Shell9	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	8.73	8.67	0.69%	8.67	0.67%	8.67	0.67%
2	21.30	21.22	0.38%	21.21	0.40%	21.20	0.48%
3	53.56	53.17	0.73%	53.13	0.80%	53.14	0.79%
4	68.30	67.9	0.59%	67.86	0.64%	67.84	0.67%
5	77.74	77.22	0.68%	77.16	0.75%	77.11	0.81%
6	136.05	135.06	0.74%	134.91	0.83%	134.81	0.91%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

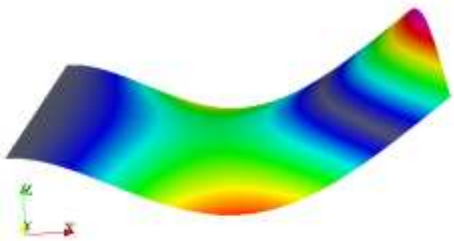
1 собственное значение



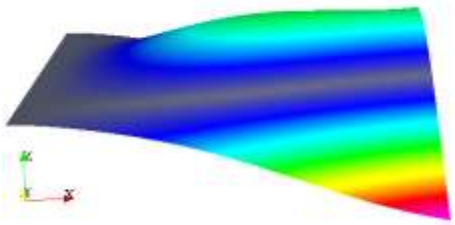
2 собственное значение



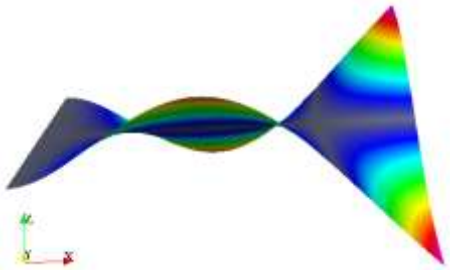
3 собственное значение



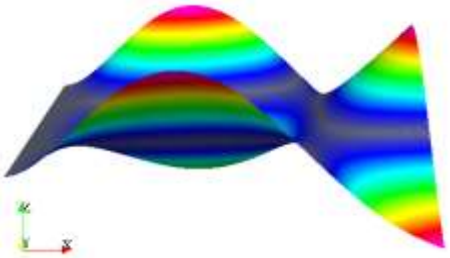
4 собственное значение



5 собственное значение

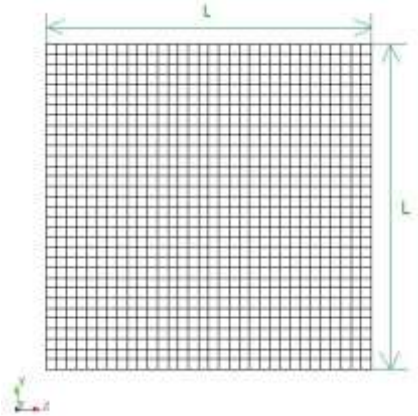


6 собственное значение



<u>Собственные частоты квадратной пластинки с защемлённием по периметру</u>

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки с защемлением по периметру.



Геометрическая модель:

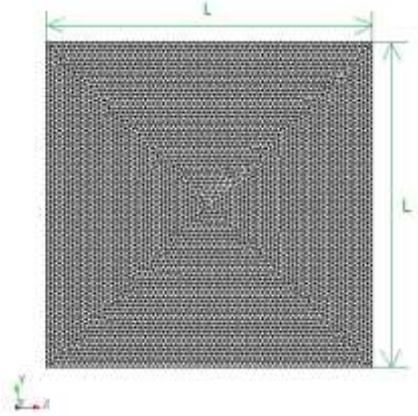
- Размеры пластинки: L = 1 м
- Толщина: t = 0.002 м

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 по периметру

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 207 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 7850 кг/м^3



Сетка:

Пять типов сетки (пять отдельных тестов):

- Линейные треугольные оболочки Trishell3 (64*64)
- Линейные треугольные оболочки Trishell6 (64*64)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*64)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8(64*64)
- 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9(64*64)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 6)

Анализ результатов

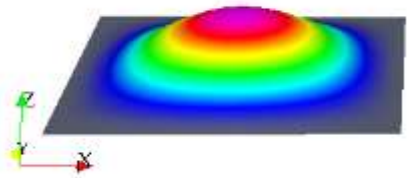
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [666]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Trishell3		FIDESYS, Trishell6	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**17.80**	17.83	0.17%	17.7937	0.04%
2	**36.30**	36.4	0.28%	36.2825	0.05%
3	**36.30**	36.4	0.28%	36.2825	0.05%
4	**53.53**	53.76	0.43%	53.4846	0.08%
5	**65.09**	65.34	0.38%	65.0252	0.10%
6	**65.39**	65.66	0.41%	65.3349	0.08%

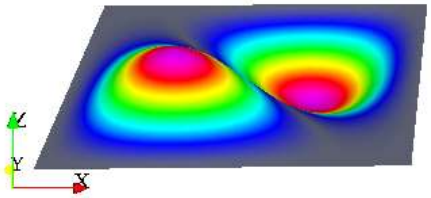
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Shell8		FIDESYS, Shell9	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**17.80**	17.81	0.06%	17.80	0.01%	17.80	0.01%
2	**36.30**	36.36	0.17%	36.30	0.01%	36.30	0.00%
3	**36.30**	36.36	0.17%	36.30	0.01%	36.30	0.00%
4	**53.53**	53.61	0.15%	53.52	0.03%	53.52	0.02%
5	**65.09**	65.3	0.32%	65.07	0.03%	65.08	0.02%
6	**65.39**	65.61	0.34%	65.38	0.02%	65.39	0.01%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

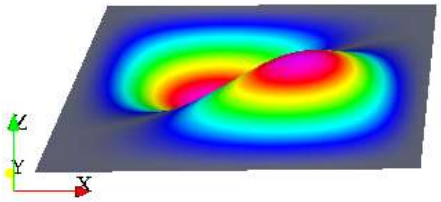
1 собственное значение



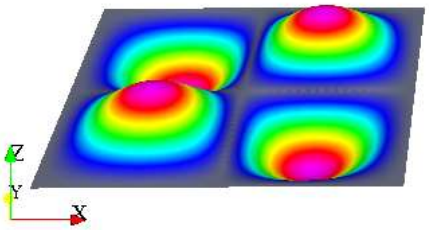
2 собственное значение



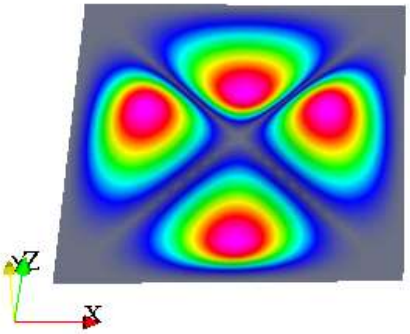
3 собственное значение



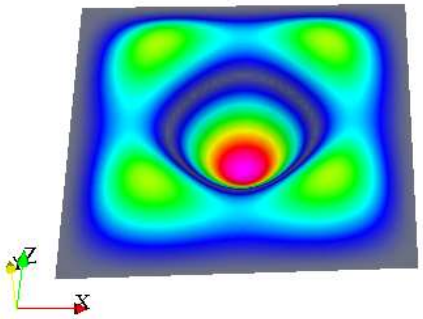
4 собственное значение



5 собственное значение

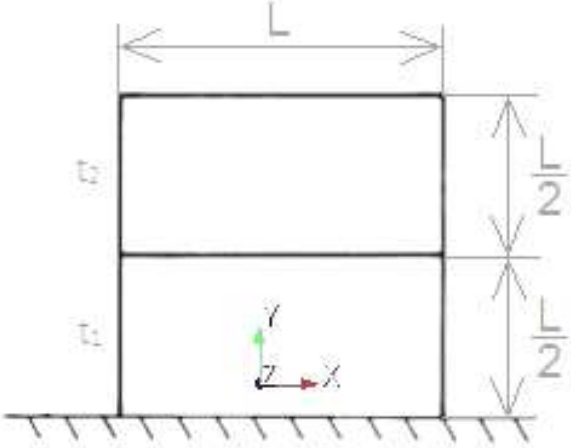


6 собственное значение



Собственные частоты консольной пластики с разными толщинами

Решается задача о нахождении собственных частот пластины с разными толщинами, закреплённой в основании.



Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: L = 0.4572 м
- Толщины: t_1 = 6.185 мм, t_2 = 3.028 мм

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 в основании

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 206.84 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 7853 кг/м^3

Сетка:

Два типа сетки (два отдельных теста):

- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*256)
- 3-узловые треугольные оболочки Trishell3 (64*256)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 9)

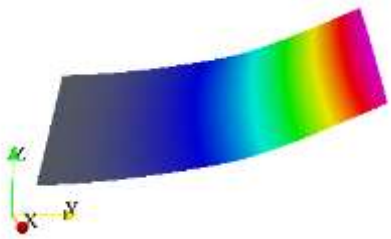
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [666]:

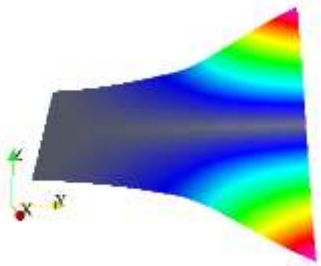
№	Экспериментальное значение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Trishell3	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**29.50**	30.16	2.24%	30.16	2.24%
2	**56.60**	55.48	1.98%	55.49	1.96%
3	**102.70**	105.87	3.09%	105.86	3.08%
4	**129.80**	127.96	1.42%	128	1.39%
5	**149.80**	150.6	0.53%	150.63	0.55%
6	**264.40**	262.98	0.54%	262.98	0.54%
7	**269.90**	270.51	0.23%	270.64	0.27%
8	**308.50**	315.73	2.34%	315.56	2.29%
9	**344.50**	351.3	1.97%	351.24	1.96%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

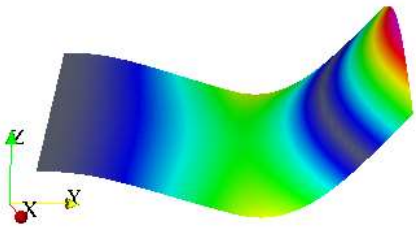
1 собственное значение



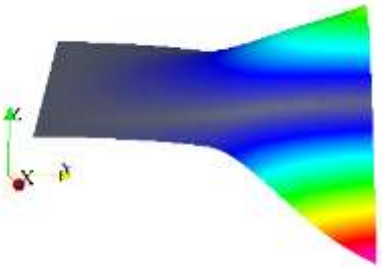
2 собственное значение



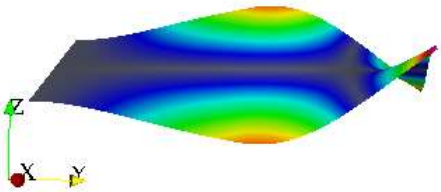
3 собственное значение



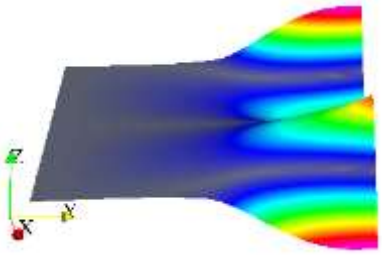
4 собственное значение



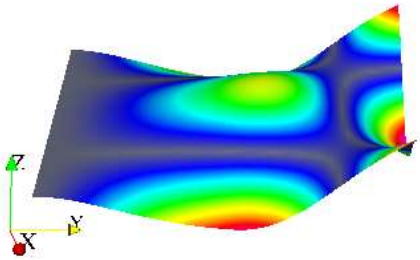
5 собственное значение



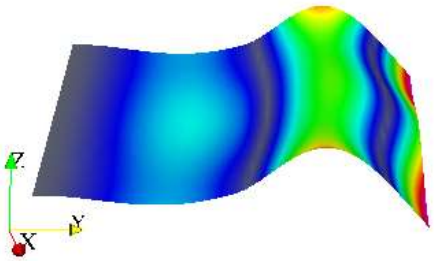
6 собственное значение



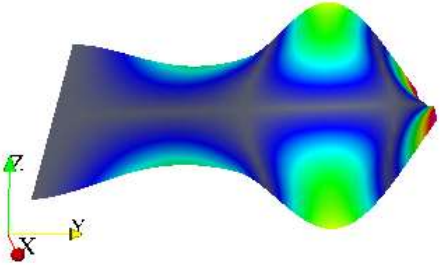
7 собственное значение



8 собственное значение



9 собственное значение



Собственные частоты сферической оболочки

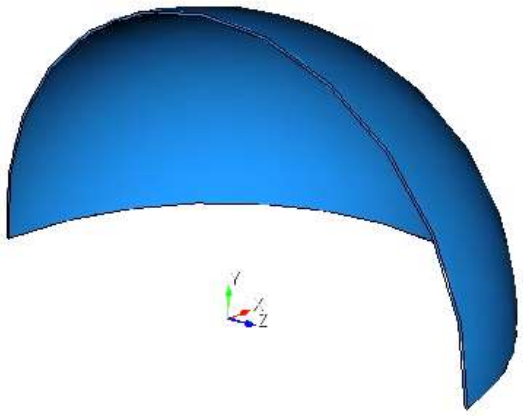
Решается задача о нахождении собственных частот сферической оболочки, защемлённой с одной стороны.

Геометрическая модель:

- Размеры сферы: радиус R = 0.3 м, толщина t = 0.003 м
- В силу симметрии задачи рассматривается половина полусферы

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 на поверхности Y = 0
- Ux = 0 на поверхности X = 0



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.28
- Плотность ρ = 7800 кг/м^3

Сетка:

Два типа сетки (два отдельных теста):

- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*256)
- 3-узловые треугольные оболочки Trishell3 (64*256)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 5)

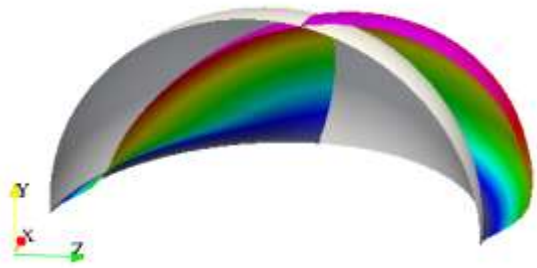
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [815]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Trishell3	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**1564.70**	1573.65	0.57%	1573.65	0.57%
2	**2115.30**	2105.15	0.48%	2105.56	0.46%
3	**2455.40**	2466.23	0.44%	2466.57	0.45%
4	**2465.40**	2487.69	0.90%	2487.75	0.91%
5	**2590.40**	2586.98	0.13%	2587.45	0.11%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

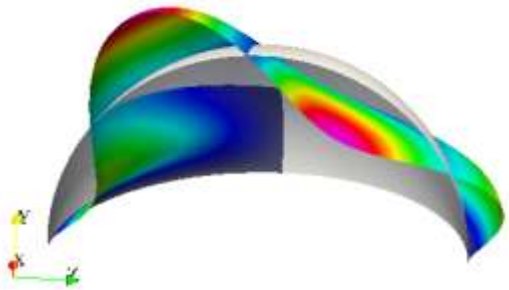
1 собственное значение



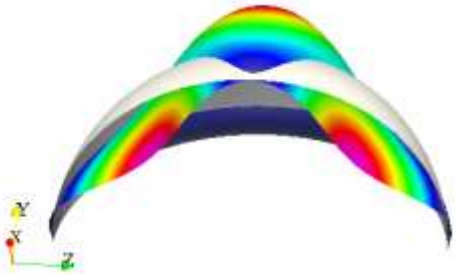
2 собственное значение



3 собственное значение



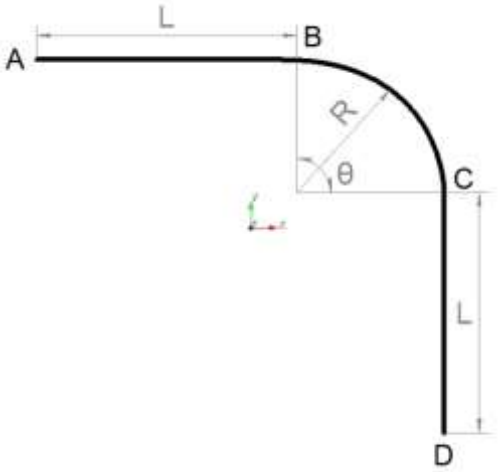
4 собственное значение



Собственные частоты колена полой трубы

Решается задача о нахождении собственных частот колена полой трубы.

Геометрическая модель:

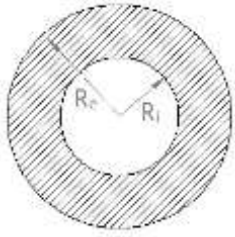


- Размеры пластинки: L = 2 м, R = 1 м, θ = 90°
- Сечение: круг с отверстием, внешний радиус R_e = 0.01 м, внутренний радиус R_i = 0.008 м

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 в точках A и D
- Uy = Uz = 0 в точке B
- Ux = Uz = 0 в точке C

Параметры материала:



- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 7800 кг/м^3

Сетка:

Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли), 150 элементов (по 50 элементов на каждом звене балки: AB, BC и CD)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 4)

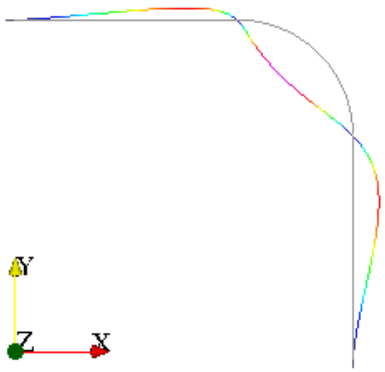
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на балочных элементах (Beam2) в сравнении с аналитическим решением [814]:

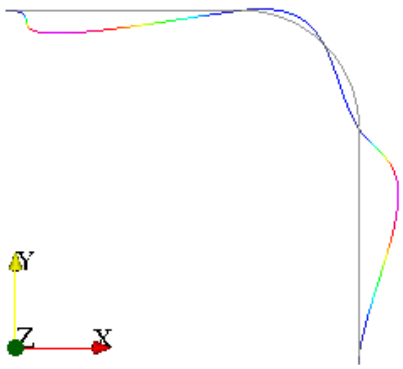
№	Аналитическое решение	FIDESYS	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка
1	**17.90**	17.65	1.4%
2	**24.80**	24.43	1.5%
3	**25.30**	24.95	1.4%
4	**27.00**	26.73	1.0%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

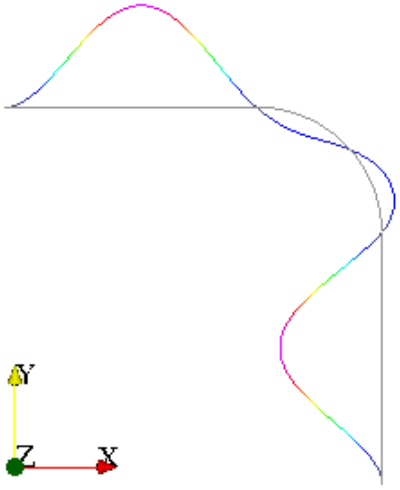
1 собственное значение



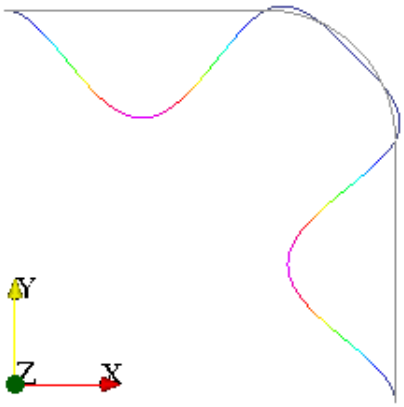
2 собственное значение



3 собственное значение



4 собственное значение



Собственные частоты треугольной пластины (2D)

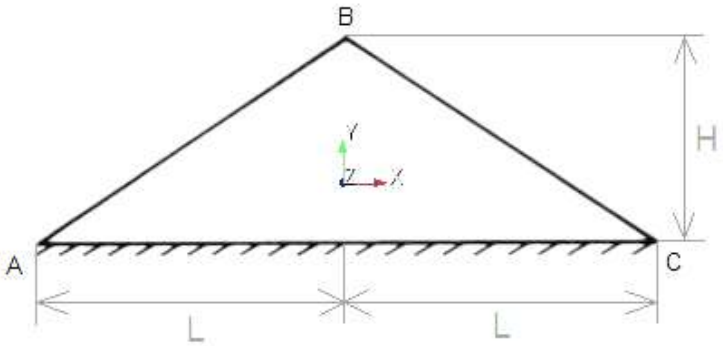
Решается задача о нахождении собственных частот сечения дамбы, закреплённой в основании.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: H = 91.44 м, L = 137.2 м

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 на прямой AC



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 560.5 МПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.45$
- Плотность ρ = 2082 кг/м^3

Сетка:

Тест 1:

– 3-узловые треугольники Tri3 (по 65 узлов на ребре)

– 4-узловые четырёхугольники Quad4 (по 65 узлов на ребре)

– 8-узловые четырёхугольники Quad8 (по 65 узлов на ребре)

– 9-узловые четырёхугольники Quad9 (по 65 узлов на ребре)

Тест 2:

– 4-узловые четырёхугольники Quad4 (по 9 узлов на ребре) – МКЭ

– 4-узловые четырёхугольники Quad4s (по 9 узлов на ребре) – МСЭ, 2ой порядок элементов

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 3)

Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [666]:

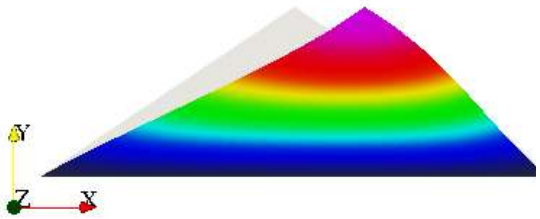
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Tri3		FIDESYS, Quad4		FIDESYS, Quad8		FIDESYS, Quad9	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**1.23**	1.24	0.8%	1.24	0.7%	1.24	0.7%	1.24	0.7%
2	**1.99**	1.99	0.0%	1.99	0.1%	1.99	0.3%	1.99	0.3%
3	**2.32**	2.31	0.7%	2.31	0.8%	2.30	1.2%	2.30	1.2%

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на элементах типа Quad4 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого порядка в сравнении с аналитическим решением [666]:

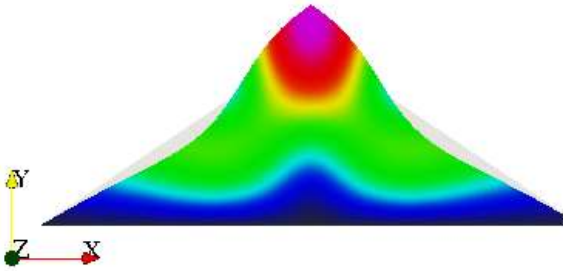
№	Аналитическое решение	МКЭ, Quad4		МСЭ, Quad4, порядок 2	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**1.23**	1.24	1.0%	1.24	0.7%
2	**1.99**	2.14	7.2%	1.99	0.1%
3	**2.32**	2.60	12.1%	2.32	0.1%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

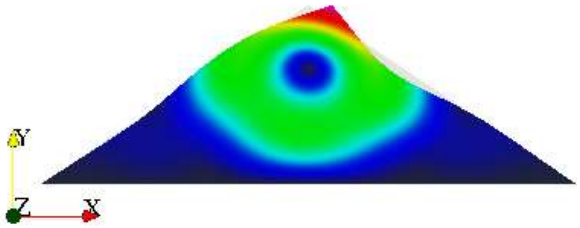
1 собственное значение



2 собственное значение



3 собственное значение



Собственные частоты круглой пластины (3D)

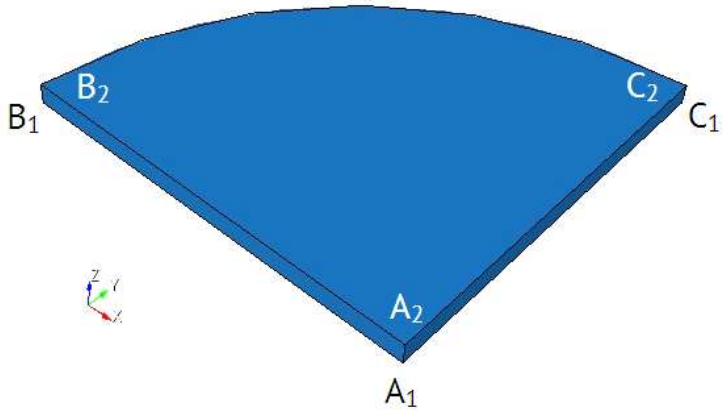
Решается задача о нахождении собственных частот круглой пластинки, защемлённой по периметру.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: радиус R = 0.2 м, толщина H = 0.01 м
- В силу симметрии задачи рассматривается четверть первоначальной модели

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 на внешней поверхности $B_1B_2C_2C_1$
- Uy = 0 на поверхности $B_1B_2A_2A_1$
- Ux = 0 на поверхности $C_1C_2A_2A_1$



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.28
- Плотность ρ = 7800 кг/м^3

Сетка:

Тест 1:

- Линейные гексаэдры Hex8 (1728 элементов)
- Параболические гексаэдры Hex20 (300 элементов)
- Параболические гексаэдры Hex27 (300 элементов)

Тест 2:

- 8-узловые гексаэдры Hex8 (108 элементов) – МКЭ
- 8-узловые гексаэдры Hex8s (108 элементов) – МКЭ – МСЭ, 2ой порядок элементов
- 8-узловые гексаэдры Hex8s (108 элементов) – МКЭ – МСЭ, 3ий порядок элементов

Критерий прохождения теста:

Сравнение 1ой собственной частоты

Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [815]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Hex8		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Hex27	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**633.90**	702.03	10.7%	635.94	0.3%	633.08	0.1%

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на грубой сетке на элементах типа Hex8 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого и 3его порядков в сравнении с аналитическим решением [815]:

№	Аналитическое решение	МКЭ, Hex8	МСЭ, Hex8			
		FIDESYS, Hex8		Порядок 2		Порядок 3	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**633.90**	942.62	48.7%	636.11	0.3%	633.51	0.1%

Собственные частоты консольной балки (3D)

Решается задача о нахождении собственных частот консольной балки, защемлённой с одной стороны.

Геометрическая модель:

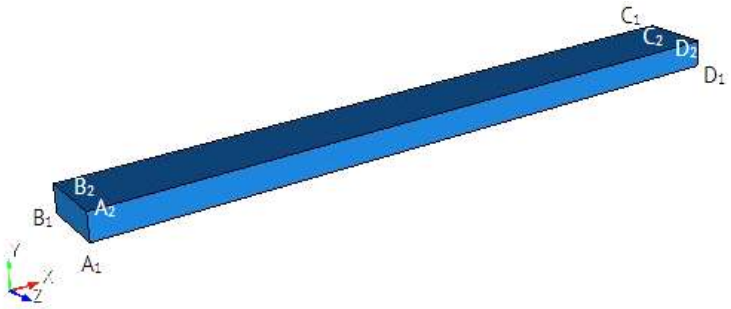
- Размеры балки: 0.5 м x 0.05 м x 0.02 м

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 на поверхности $B_1B_2A_2A_1$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.28
- Плотность ρ = 7800 кг/м^3



Сетка:

Тест 1:

- 4-узловые тетраэдры Tetra4 (9393 элемента)
- 8-узловые гексаэдры Hex8 (512 элементов)

– 20-узловые гексаэдры Hex20 (512 элементов)
– 27-узловые гексаэдры Hex27 (512 элементов)

Тест 2:

– 27-узловые гексаэдры Hex27 (2 элемента) – МКЭ
– 27-узловые гексаэдры Hex27s (2 элемента) – МКЭ – МСЭ, 3ий порядок элементов
– 27-узловые гексаэдры Hex27s (2 элемента) – МКЭ – МСЭ, 4ый порядок элементов

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (на изгиб: 1, 3 и 6)

Анализ результатов

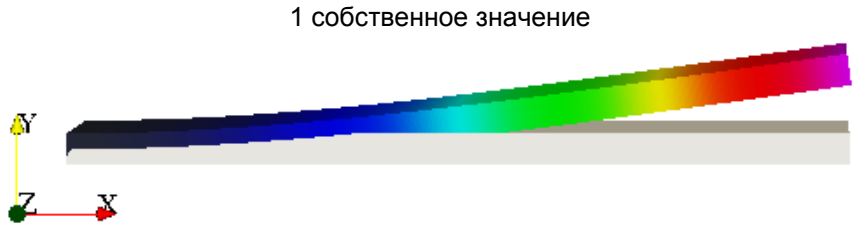
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [815]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Tetra4		FIDESYS, Hex8		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Hex27	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибк
1	**67.00**	76.53	14.2%	70.47	5.2%	67.28	0.4%	67.26	0.4%
3	**420.20**	473.98	12.8%	438.80	4.4%	418.56	0.4%	418.44	0.4%
6	**1176.70**	1311.30	11.4%	1216.95	3.4%	1159.07	1.5%	1158.73	1.5%

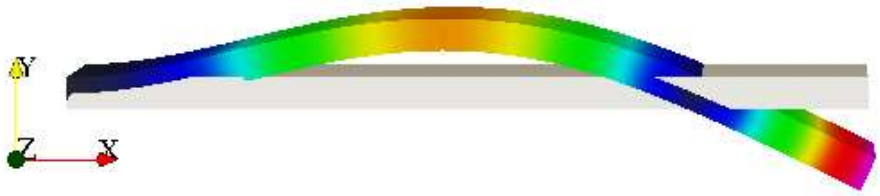
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на грубой сетке из двух элементов типа Hex27 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого и 3его порядков в сравнении с аналитическим решением [815]:

№	Аналитическое решение	МКЭ, Hex27		МСЭ, Hex27			
		FIDESYS, Hex27		Порядок 3		Порядок 4	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**67.00**	71.35	6.5%	68.49	2.2%	67.88	1.3%
3	**420.20**	678.27	61.4%	426.85	1.6%	423.21	0.7%
6	**1176.70**	2636.05	124.0%	1406.78	19.6%	1176.56	0.0%

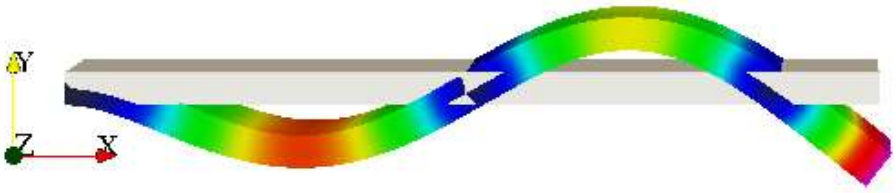
На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:



3 собственное значение



6 собственное значение



Собственные частоты тонкой полусферы (3D)

Решается задача о нахождении собственных частот тонкой полусферы, защемлённой с одной стороны.

Геометрическая модель:

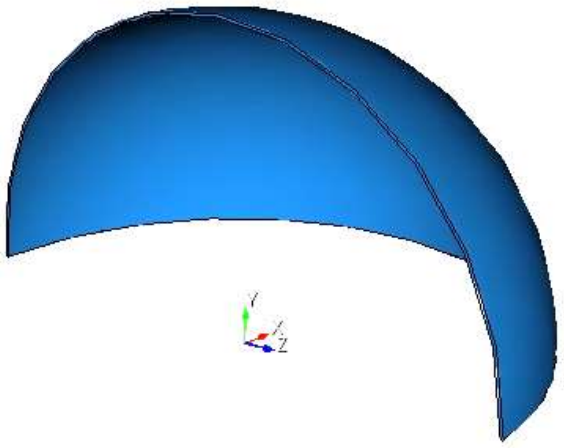
- Размеры сферы: радиус R = 0.3 м, толщина h = 0.003 м
- В силу симметрии задачи рассматривается половина полусферы

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 на поверхности Y = 0
- Ux = 0 на поверхности X = 0

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.28
- Плотность ρ = 7800 кг/м^3



Сетка:

Тест 1:

– 4-узловые тетраэдры Tetra4 (9465

элемента)

- 8-узловые гексаэдры Hex8 (1328 элементов)
- 20-узловые гексаэдры Hex20 (1328 элементов)
- 27-узловые гексаэдры Hex27 (1328 элементов)

Тест 2:

- 27-узловые гексаэдры Hex27 (90 элементов) – МКЭ
- 27-узловые гексаэдры Hex27s (90 элементов) – МКЭ – МСЭ, 2-4 порядки элементов

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 5)

Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [815]:

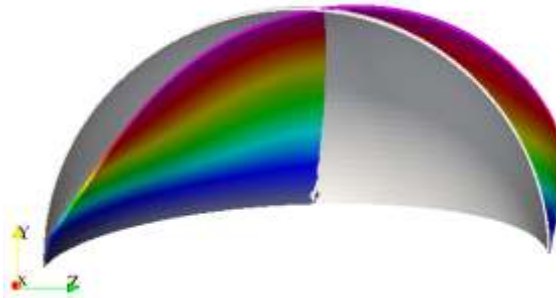
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Tetra4		FIDESYS, Hex8		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Hex27	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошиб
1	**1564.70**	1643.37	5.0%	1619.09	3.5%	1583.19	1.2%	1582.63	1.1%
2	**2115.30**	2225.26	5.2%	2181.74	3.1%	2118.17	0.1%	2117.31	0.1%
3	**2455.40**	2559.62	4.2%	2522.67	2.7%	2479.02	1.0%	2478.55	0.9%
4	**2465.40**	2624.17	6.4%	2545.15	3.2%	2499.57	1.4%	2499.53	1.4%
5	**2590.40**	2784.32	7.5%	2686.78	3.7%	2599.66	0.4%	2599.33	0.3%

В таблице ниже приведены результаты расчёта FIDESYS на грубой сетке из элементов типа Hex27 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого, 3его и 4ого порядков в сравнении с аналитическим решением [815]:

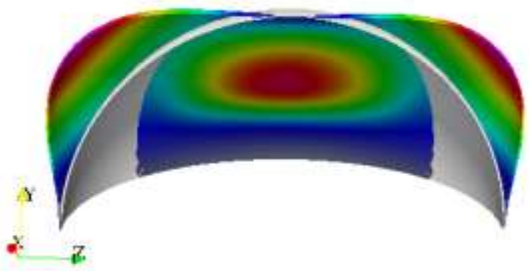
№	Аналитическое решение	МКЭ, Hex27		МСЭ, Hex27					
		FIDESYS, Hex27		Порядок 2		Порядок 3		Порядок 4	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	**1564.70**	1610.77	2.9%	1618.16	3.4%	1588.79	1.5%	1582.70	1.2%
2	**2115.30**	2156.32	1.9%	2167.47	2.5%	2125.43	0.5%	2117.13	0.1%
3	**2455.40**	2502.53	1.9%	2505.53	2.0%	2482.85	1.1%	2478.45	0.9%
4	**2465.40**	2503.62	1.6%	2512.50	1.9%	2500.15	1.4%	2499.49	1.4%
5	**2590.40**	2620.22	1.2%	2631.14	1.6%	2602.06	0.5%	2599.15	0.3%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

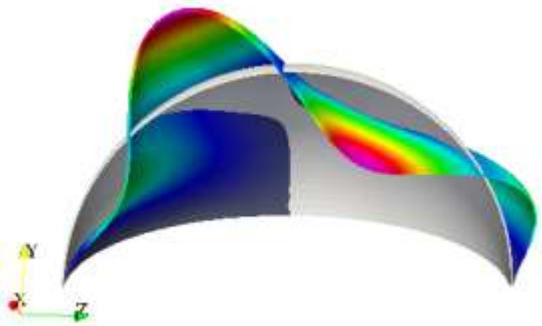
1 собственное значение



3 собственное значение



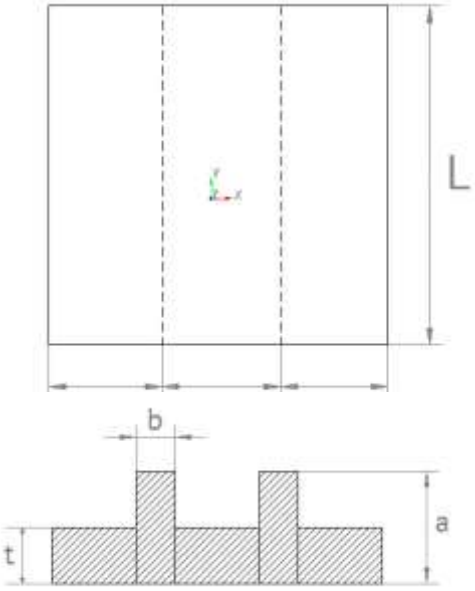
4 собственное значение



Собственные частоты армированной оболочки

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной армированной двумя балками оболочки, защемлённой по периметру.

Геометрическая модель:



- Размеры пластинки: L = 20.32 см
- Толщина пластинки: t = 1.27 мм
- Сечение балок: прямоугольник, a = 11.43 мм, b = 1.854 мм

Граничные условия:

- Ux = Uy = Uz = Rx = Ry = Rz = 0 по периметру

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 69 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.33
- Плотность ρ = 2600 кг/м^3

Сетка:

4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4, 4032 элемента (64*63)

Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли), 128 элементов (по 64 элемента на каждой балке)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 3)

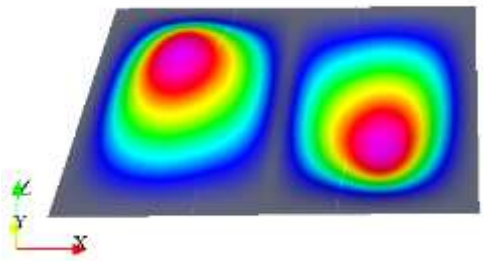
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на линейных оболочечных (Shell4) и балочных (Beam2) элементах в сравнении с экспериментальным решением [666]:

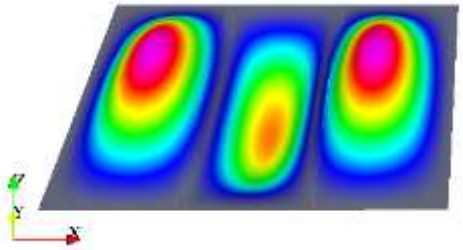
№	Экспериментальное значение	FIDESYS, Shell4	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка
1	**859.00**	859.20	0.0%
2	**1044.00**	1052.58	0.8%
3	**1292.00**	1272.67	1.5%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

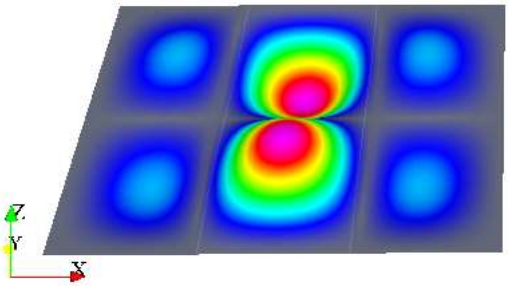
1 собственное значение



2 собственное значение



3 собственное значение

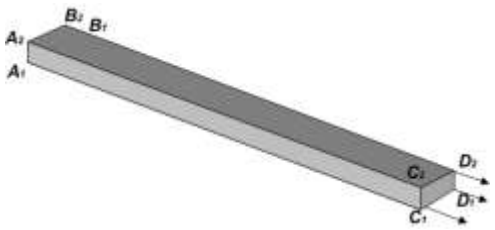


<u>Собственные частоты консольной балки, предварительно нагруженной силой (3D)</u>

Решается задача о нахождении собственных частот консольной балки, защемленной с одной грани, при действии силы на вершины противоположной грани.

Геометрическая модель:

- Размеры балки: 0.5 м x 0.02 м x 0.05 м



Граничные условия:

- Перемещения $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на поверхности $B_1B_2A_2A_1$
- Сосредоточенные силы в точках C_1, C_2, D_2, D_1 F=12500 Па

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 ГПа
- Коэффициент Пуассона = 0.28
- Плотность ρ = 7800 кг/м3

Сетка:

Два типа элементов (два отдельных теста):

- 20-узловые гексаэдры Hex20 (1 386 элементов)
- 10-узловые тетраэдры Tetra10 (9 312 элементов)

Критерий прохождения теста:

Первая собственная частота 85.804 Гц

Значение вычислено по следующей формуле [815]:

$$f^* = f_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{5Pl^2}{14EJ}},$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1.875}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}},$$

где J – момент инерции балки, F – площадь сечения.

Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчета FIDESYS и AUTOFEM [815] на различных элементах в сравнении с аналитическим решением:

№	Аналитическое решение	FIDESYS				AUTOFEM	
		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Tetra10			
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	85.804	86.1376	0.4%	86.1352	0.39%	86.156	0.41%

Собственные частоты свободно опёртой квадратной пластинки (3D)

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis "Simply Supported "Solid" Square Plate", Test No FV52 [5].

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки.

Геометрическая модель и сетка:

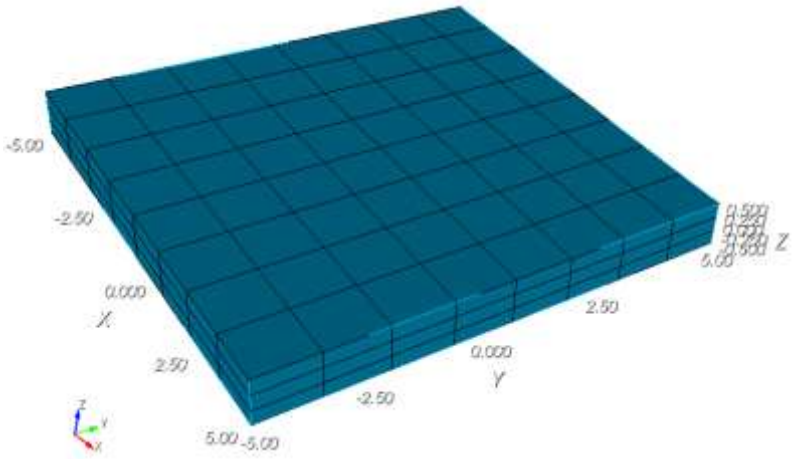
- Размеры пластинки: 10 м x 10 м x 1 м

Граничные условия:

- Uz = 0 на всех рёбрах нижней грани (плоскости Z = -0.5 м)

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 8000 кг/м^3



Сетка:

8-узловые гексаэдры Hex8, 192 элемента (8*8*3)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 4 по 10)

Анализ результатов

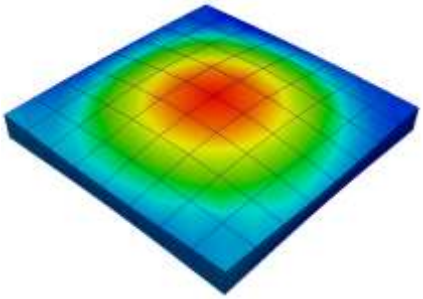
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS[23] и NASTRAN [818]:

№	NAFEMS	FIDESYS		ANSYS		NASTRAN	
	Значение, Гц	**Значение, Гц**	**Ошибка**	**Значение, Гц**	**Ошибка**	**Значение, Гц**	**Ошибка**
4	**51.65**	55.68	7.8%	45.32	12.3%	45.24	12.4%
5	**132.73**	141.52	6.62%	113.96	14.1%	113.70	14.3%
6	**132.73**	141.52	6.62%	113.96	14.1%	113.70	14.3%
7	**194.37**	196.87	1.29%	173.30	10.8%	172.30	11.4%
8	**197.18**	208.79	5.89%	196.77	0.2%	196.80	0.2%
9	**210.55**	210.62	0.03%	209.56	0.5%	209.60	0.5%
10	**210.55**	210.62	0.03%	209.56	0.5%	209.60	0.5%

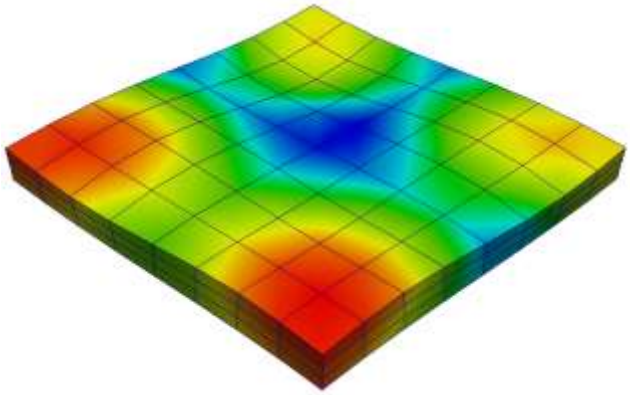
На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

[23] Анализ проводился на гексаэдральной сетке (тип элемента SOLID185, количество элементов 192).

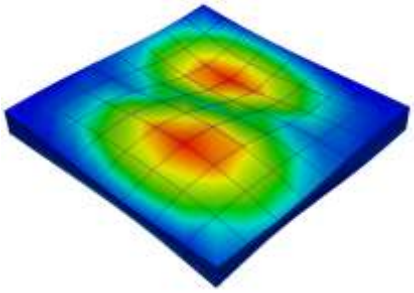
4 собственное значение



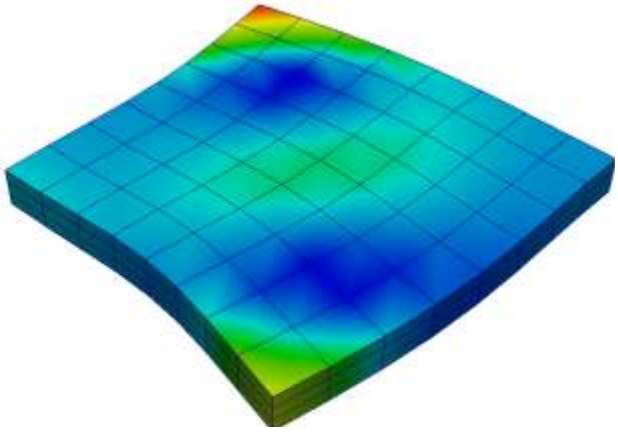
8 собственное значение



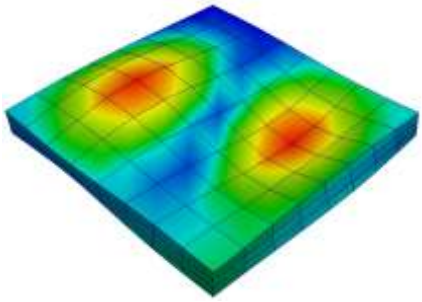
5 собственное значение



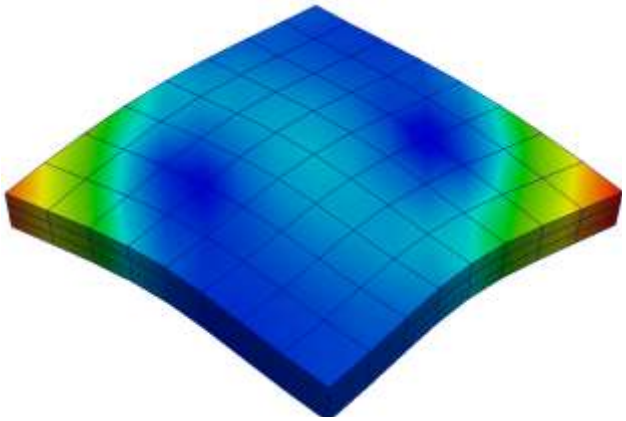
9 собственное значение



6 собственное значение

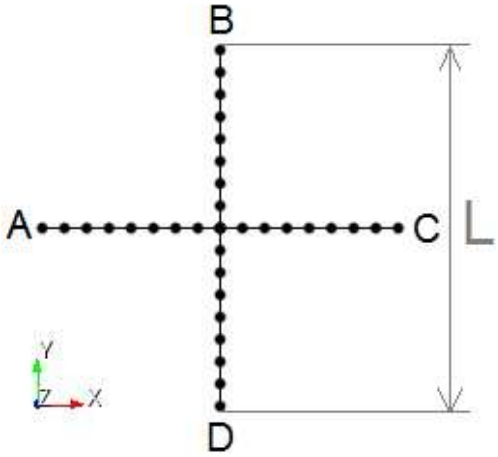


10 собственное значение



Собственные частоты креста в плоскости

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, "Pin-Ended Cross: In-Plane Vibration", Test No FV1.



Решается задача о нахождении собственных частот креста в плоскости.

Геометрическая модель:

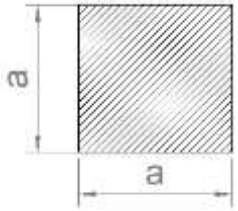
- Длина стержней: L = 10 м
- Сечение: квадрат, длина ребра a = 0.125 м

Граничные условия:

- Ux = Uy = 0 в точках A, B, C и D
- Uz = Rx = Ry = 0 во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.29
- Плотность ρ = 8000 кг/м^3



Сетка:

Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли), 32 элемента (по 16 элементов на каждой балке)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 8)

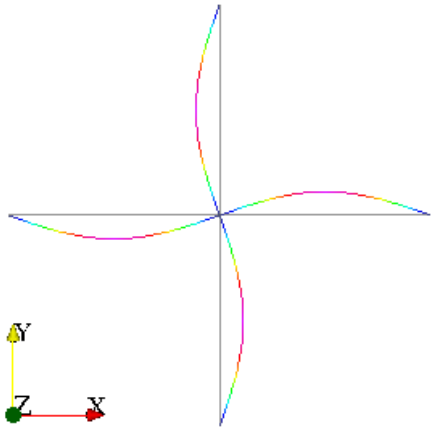
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [818]:

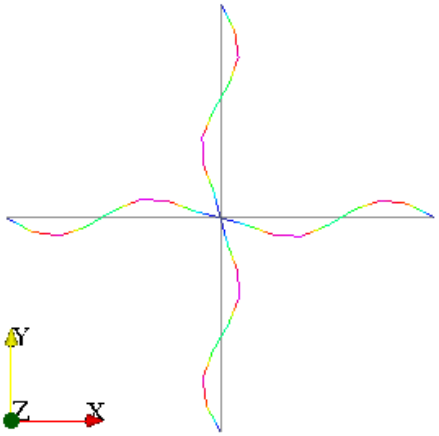
№	NAFEMS	FIDESYS		NASTRAN	
	Значение, Гц	**Значение, Гц**	**Ошибка**	**Значение, Гц**	**Ошибка**
1	**11.34**	11.34	0.0%	11.34	0.0%
2, 3	**17.71**	17.68	0.2%	17.69	0.1%
4	**17.71**	17.71	0.0%	17.72	0.1%
5	**45.35**	45.36	0.0%	45.52	0.4%
6, 7	**57.39**	57.10	0.5%	57.43	0.1%
8	**57.39**	57.41	0.0%	57.75	0.6%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

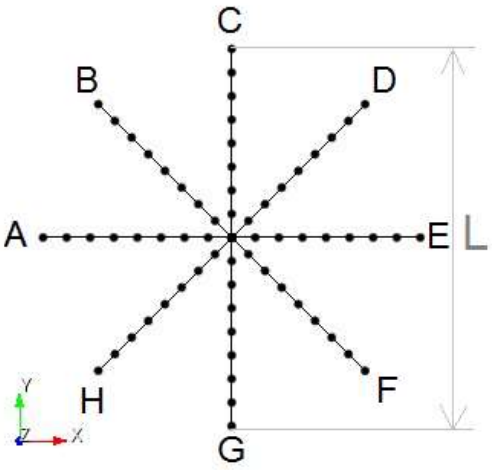
1 собственное значение



8 собственное значение



<u>Собственные частоты двойного креста в плоскости</u>



NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, "Pin-Ended Double Cross: In-Plane Vibration", Test No FV2.

Решается задача о нахождении собственных частот двойного креста в плоскости, концы которого жёстко закреплены.

Геометрическая модель:

- Длина стержней: L = 10 м
- Сечение: квадрат, длина ребра a = 0.125 м

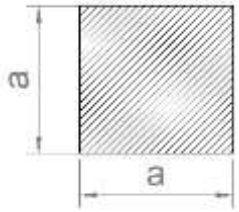
Граничные условия:

- Ux = Uy = 0 в точках A, B, C, D, E, F, G и H
- Uz = 0 во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 8000 кг/м^3

Сетка:



Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли), 64 элемента (по 16 элементов на каждой балке)

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 1 по 16)

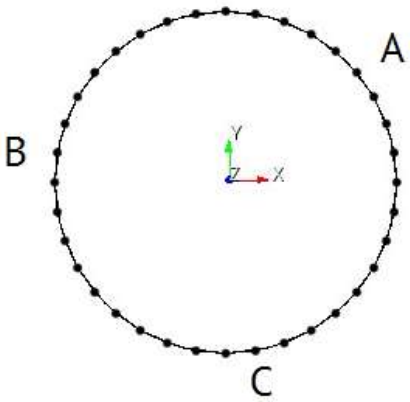
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ABAQUS[24], NASTRAN [818], CATIA и AUTODESK SIMULATION:

№	NAFEMS	FIDESYS		ABAQUS		NASTRAN		CATIA		AUTO
	Знач., Гц	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц
1	**11.34**	11.34	0.0%	11.34	0.0%	11.34	0.0%	11.34	0.0%	11.33
2, 3	**17.71**	17.68	0.2%	17.68	0.2%	17.69	0.1%	17.69	0.1%	17.63
4 - 8	**17.71**	17.71	0.0%	17.71	0.0%	17.72	0.1%	17.72	0.0%	17.66
9	**45.35**	45.36	0.0%	45.36	0.0%	45.52	0.4%	45.48	0.3%	44.88
10, 11	**57.39**	57.10	0.5%	57.10	0.5%	57.43	0.1%	57.36	0.0%	55.77
12 - 16	**57.39**	57.41	0.0%	57.41	0.0%	57.75	0.6%	57.68	0.5%	56.05

Собственные частоты кругового кольца

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique,1990.) Test No. SDLL11/89



Решается задача о нахождении собственных частот кругового кольца, закреплённого в трёх точках.

Геометрическая модель:

- Размеры кольца: R = 0.1 м
- Сечение: прямоугольник, a = 0.005 м, b = 0.010 м

Граничные условия:

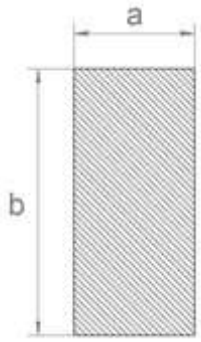
- Ux = Uy = 0 в точках A, B и C

Параметры материала:

- Изотропный

[24] Анализ проводился на линейной двухузловой сетке (тип элемента B31, количество элементов 64).

- Модуль упругости E = 72 ГПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Плотность ρ = 2700 кг/м^3



Сетка:

Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли), 36 элементов

Критерий прохождения теста:

Сравнение собственных частот (с 4 по 11)

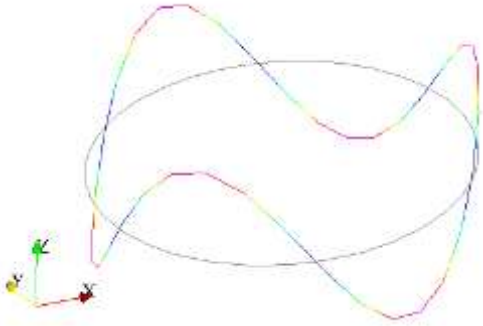
Анализ результатов

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на балочных элементах (Beam2) в сравнении с известным численным решением:

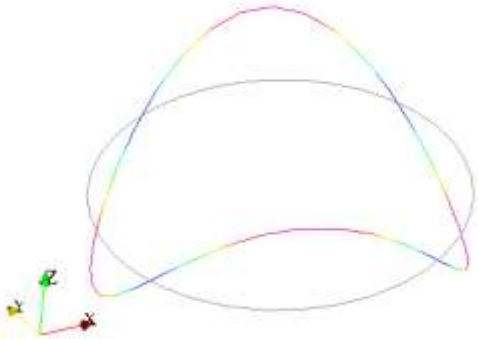
№	Известное решение	FIDESYS	
	Значение, Гц	**Значение, Гц**	**Ошибка**
4, 5	**318.36**	320.84	0.8%
6, 7	**900.46**	904.77	0.5%
8, 9	**1726.55**	1732.78	0.4%
10, 11	**2792.21**	2801.07	0.3%

На рисунках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

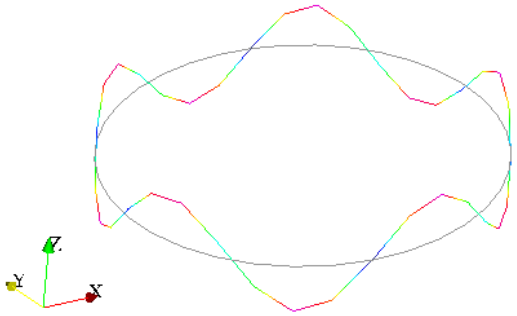
6, 7 собственные значения



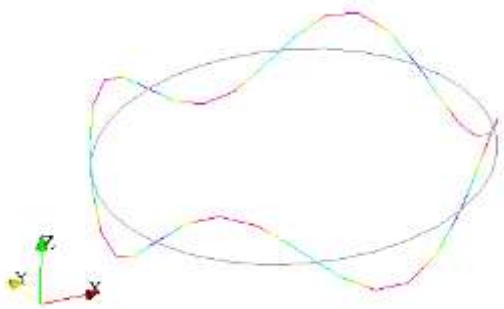
4, 5 собственные значения



10, 11 собственные значения



8, 9 собственные значения



Нелинейные задачи

Большие перемещения квадратной мембраны

Квадратная мембрана, опертая шарнирно по контуру, нагружена по всей поверхности равномерно распределенным давлением интенсивности q. Края мембраны неподвижны

Геометрическая модель:

- Размеры мембраны: 10x10 м^2
- Толщина мембраны: 0.001 м

Граничные условия:

- По краям мембраны отсутствуют перемещения
- На верхней поверхности равномерно распределенная нагрузка q=-10 кН/м^2

Параметры материала:

- Модуль упругости E=2·10^{11} Па
- Коэффициент Пуассона ν=0.25

Сетка:

8-узловые гексаэдры Hex8 (409 600 элементов).

Критерий прохождения теста:

Перемещения u_z в точке (0,0,0) равно -0.2262 м с точностью 1.5%

Напряжение σ_x в точке (0,0,0) равно 3.47932·10^8 Н/м^2 с точностью 1.5%

Значения вычислены по формулам [31]:

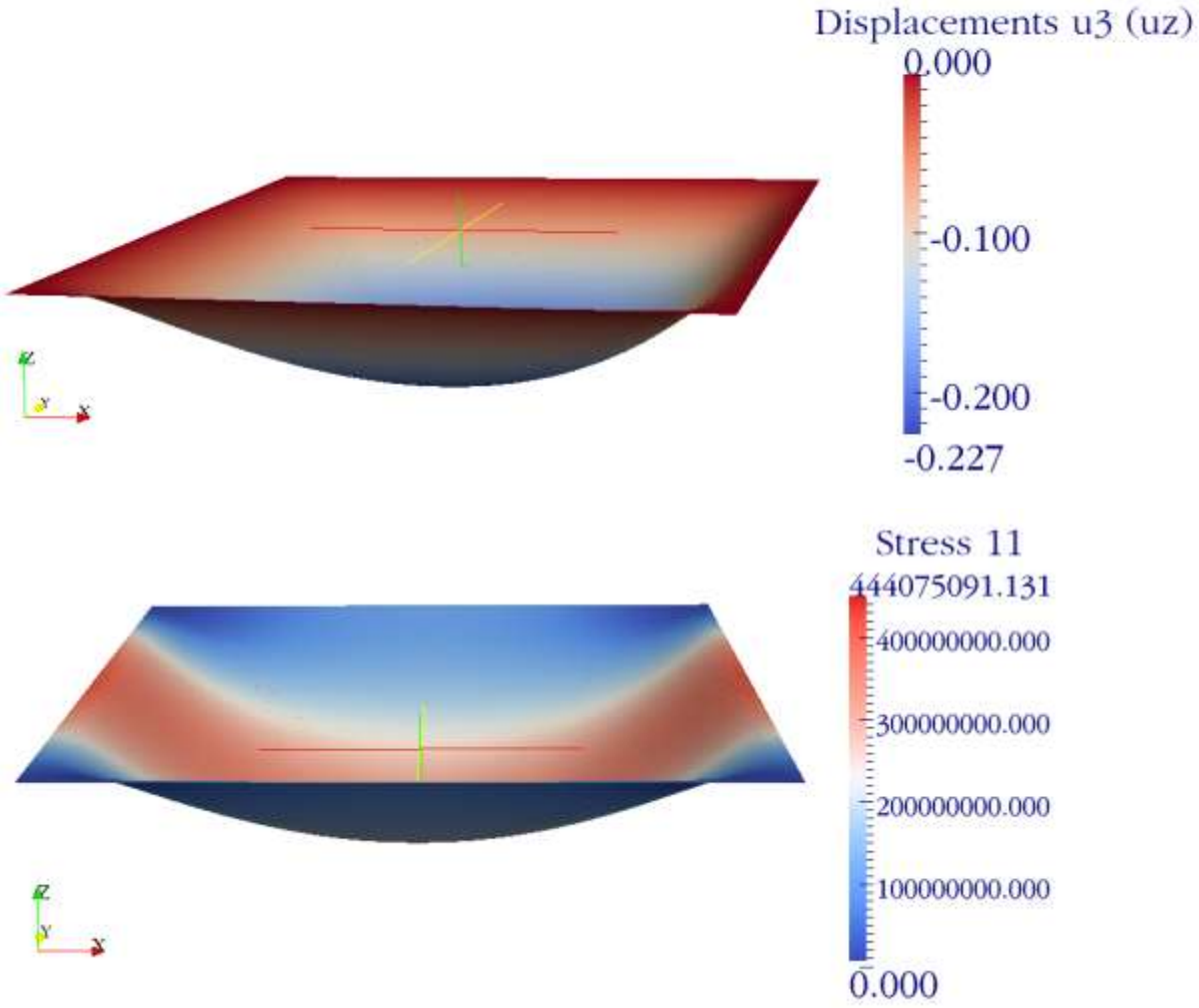
$$u_z = 0.285h\sqrt[3]{(b/h)^4 q/E},$$

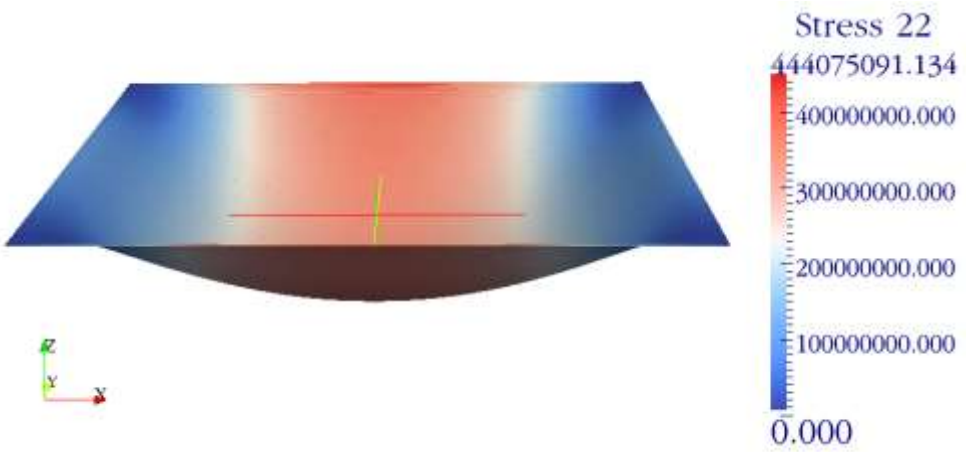
$$\sigma_x = \sigma_y = 3.4E(w/b)^2.$$

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта в FIDESYS:

Величина	**Теоретическое значение**	**FIDESYS (HEX8)**	
		Значение	**Погрешность**
u_z, м	-0.2262	-0.229	1.23%
σ_x, Па	$3.47932 \cdot 10^8$	$3.2825 \cdot 10^8$	5.7%





Полый шар под действием давления

Рассматривается упругопластическое равновесие полого шара, испытывающего внутреннее давление. В силу симметрии выделяется сегмент шара, расположенный в первом октанте.

Геометрическая модель:

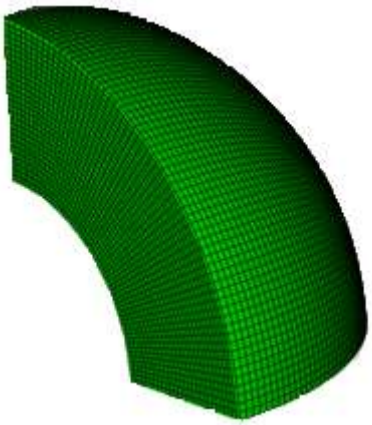
- Внутренний радиус шара: a = 2.5 м
- Внешний радиус шара: b = 5 м

Граничные условия:

- На координатных плоскостях перемещения по перпендикулярам равны нулю
- На внутренней поверхности приложено давление p = 30 Па.

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 21 \cdot 10^3$ Н/м^2
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Предел текучести $\sigma_y = 24$ Н/м^2



Сетка:

Три типа конечных элементов (три отдельных теста):

– 8-узловые гексаэдры Hex8 (128 304 элемента)

– 20-узловые гексаэдры Hex20 (7 280 элементов)

– 10-узловые тетраэдры TETRA10 (68 547 элементов)

Спектральные элементы (один тест):

– 27-узловые гексаэдры Hex27 (7 280 элементов)

Критерий прохождения теста (в сферической системе координат) [94]:

В точках пластической зоны с радиальной координатой r = 3:

- напряжение σ_{rr} = -21.249 Па с точностью 1%,

- напряжение $\sigma_{\phi\phi}$ = 2.751 Па с точностью 1%,

- перемещения u_r = 4.219·10^{-3} с точностью 1%.

-В точках упругой зоны с радиальной координатой r = 4.5:

- напряжение σ_{rr} = -2.908 Па с точностью 1%,

- напряжение $\sigma_{\phi\phi}$ = 13.189 Па с точностью 1%,

- перемещения u_r = 2.165·10^{-3} с точностью 1%.

Напряженно-деформированное состояние определено по формулам [94]:

В пластической зоне (a ≤ r ≤ c)

$$\sigma_{rr}(r) = 2\sigma_y \ln(r/a) - p, \qquad \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{rr}(r) + \sigma_y,$$

$$\varepsilon_{rr} = \psi(r) \cdot \big(\sigma_{rr}(r) - \sigma(r)\big) + \mathrm{k} \cdot \sigma(r), \qquad \varepsilon_{\phi\phi} = \psi(r) \cdot \Big(\sigma_{\phi\phi}(r) - \sigma(r)\Big) + \mathrm{k} \cdot \sigma(r),$$

$$u_{plast} = \varepsilon_{\phi\phi} \cdot r$$

где $\psi(r) = -2k + \left(\frac{1}{2G} + 2k\right) \cdot \left(\frac{c}{r}\right)^3$, $k = \frac{1-2\nu}{E}$, $\sigma(r) = \frac{1}{3}\Big(\sigma_{rr}(r) + 2\sigma_{\phi\phi}(r)\Big)$,

c – граница пластической зоны, находящейся из уравнения

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 = \frac{p}{2\,\sigma_y} - \frac{1}{3}$$

В упругой зоне (c ≤ r ≤ b)

$$\sigma_{rr}(r) = p^* \cdot (1 - (b/r)^3), \quad \sigma_{\phi\phi}(r) = p^* \cdot (1 + b^3/(2r^3))$$

$$\varepsilon_{rr} = du_{elastic}/dr, \qquad \varepsilon_{\phi\phi} = u_{elastic}/r,$$

где $p^* = \big(p - 2\sigma_y \ln(c/a)\big) \cdot \left(\frac{c^3}{b^3 - c^3}\right)$, $u_{elastic} = p^* \cdot \left(k + \frac{b^3}{4Gr^3}\right)$

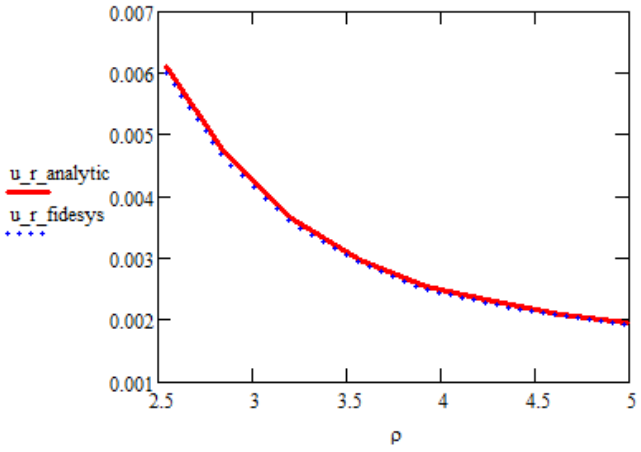
Результаты:

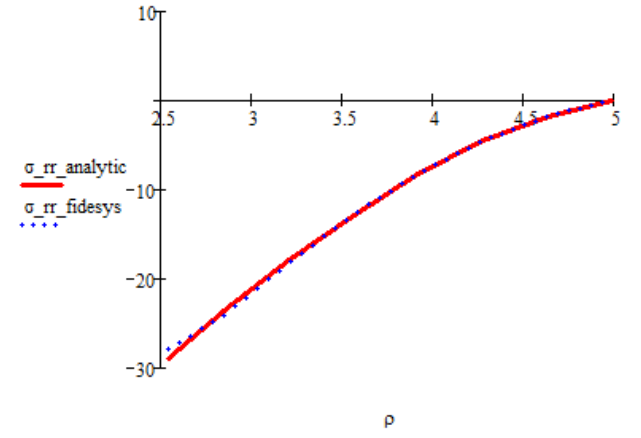
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS.

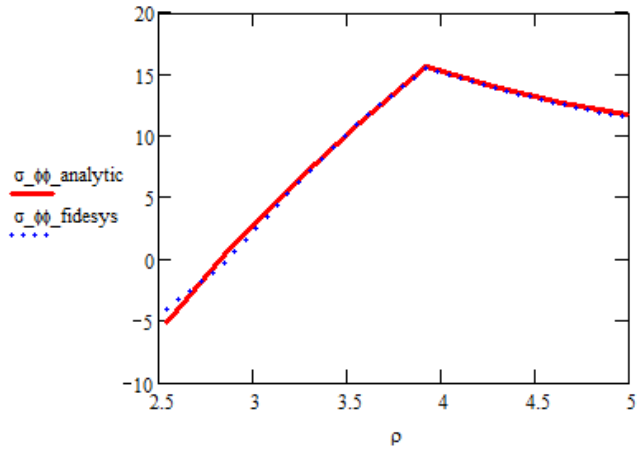
Тип элемента		**Радиальная координата, м**					
		3			4.5		
		u_r, м	σ_{rr}, Па	$\sigma_{\varphi\varphi}$, Па	u_r, м	σ_{rr}, Па	$\sigma_{\varphi\varphi}$, Па
Hex8	Значение	4.2x10^{-3}	-21.19	2.82	2.155x10^{-3}	-2.8	13.17
	Погрешность	0.45%	0.28%	2.51%	0.46%	3.71%	0.14%
Hex20	Значение	4.13x10^{-3}	-21.29	2.71	2.13x10^{-3}	-2.85	12.97
	Погрешность	2.11%	0.19%	1.49%	1.62%	1.99%	1.67%
Hex27	Значение	4.14x10^{-}	-21.27	2.73	2.13x10^{-3}	-2.851	13

		3					
Tetra10	Погрешность	1.87%	0.1%	0.76%	1.62%	1.96%	1.43%
	Значение	$4.2x10^{-3}$	-21.21	2.78	$2.16x10^{-3}$	-2.902	13.18
	Погрешность	0.45%	0.18%	1.02%	0.23%	0.21%	0.07%

На следующих рисунках приведены зависимости характеристик напряженно-деформированного состояния полого шара, нагруженного внутренним давлением, от радиуса (решение fidesys для сетки с элементом Hex27)



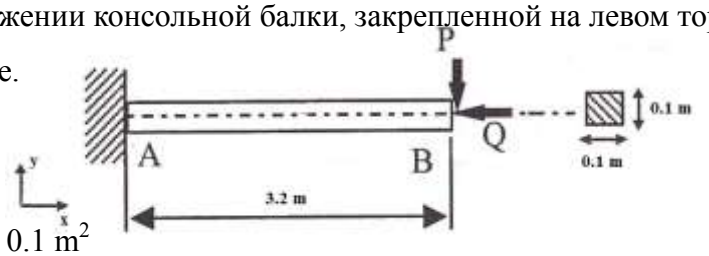




Изгиб консольной балки

NAFEMS Background to Finite Element Analisys of Geometryc Non-linearity Benchmarks, "Straight cantiveler benchmark"

Решается задача о статическом нагружении консольной балки, закрепленной на левом торце, сила прикладывается на правом торце.



Геометрическая модель:

- Длина балки L=3.2 m
- Сечение балки – квадрат 0.1 x 0.1 m^2

Граничные условия:

- Жесткая заделка (нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей) в поперечном сечении, соответствующем точке A
- Силы, приложенные на правом торце, соответствующем точке B: Q=-3.844·10^6 Н, P=-3.844·10^4 Н

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210·10^9 Н/$м^2$
- Коэффициент Пуассона ν = 0

Сетка:

Четыре типа элементов (четыре различных теста):

- 8-узловые гексаэдры Hex8 (33 100 элементов). МКЭ
- 20-узловые гексаэдры гексаэдры Hex20 (33 100 элементов). МКЭ
- 27-узловые гексаэдры Hex27s (4 000 элементов). МСЭ: 2-ой порядок.
- 4-узловые тетраэдры Tetra4 (364 005 элементов). МКЭ

Критерий прохождения теста:

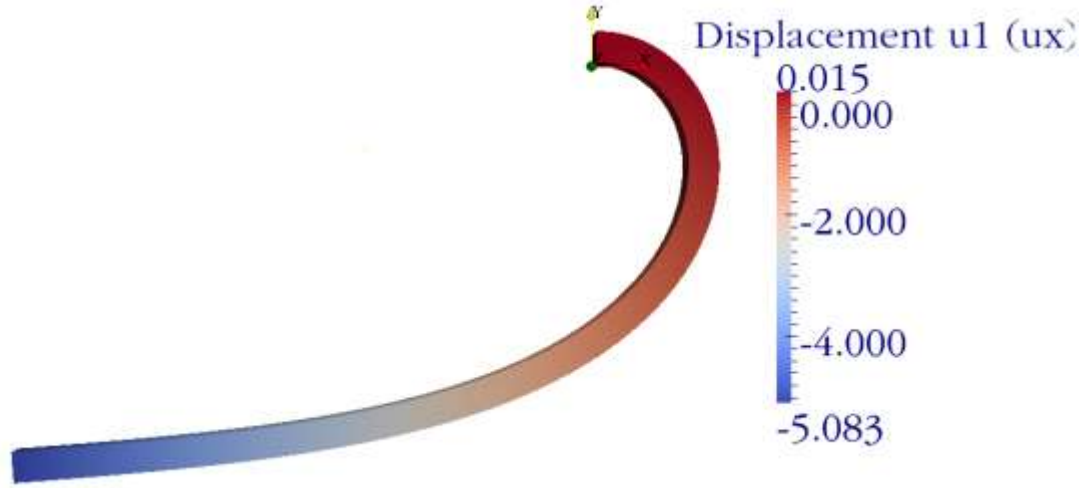
- Перемещение u_x в точке (3.2, 0, 0) равно -5.07 м с точностью 1.5%
- Перемещение u_y в точке (3.2, 0, 0) равно -1.34 м с точностью 1.5%

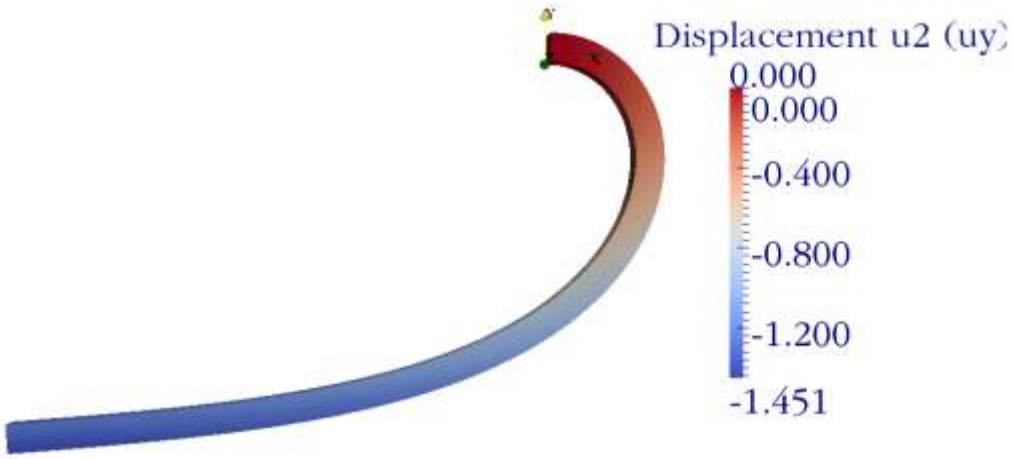
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ FIDESYS**							
		Hex8		**Hex20**		**Hex27**		**Tetra4**	
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**

u_x,м	-5.07	-5.0786	0.17%	-5.082	0.24%	-5.0794	0.19%	-5.0706	0%
u_y, м	-1.34	-1.3517	0.87%	-1.348	0.6%	-1.349	0.67%	-1.359	1.42%





Цилиндр, нагруженный внутренним давлением (а)

«Pressurised cylinder plasticity benchmark » NAFEMS Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks

Рассматривается задача о нагружении полого цилиндра внутренним давлением.

Верхний/нижний торцы цилиндра могут иметь только радиальные перемещения. Приводятся результаты в рамках модели идеальной пластичности.

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус R_1 = 100 мм
- Внешний радиус R_2 = 200 мм
- Высота H = 100 мм

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 21x10^3 Н/мм^2
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Предел текучести σ_y = 24 Н/мм^2

Граничные условия:

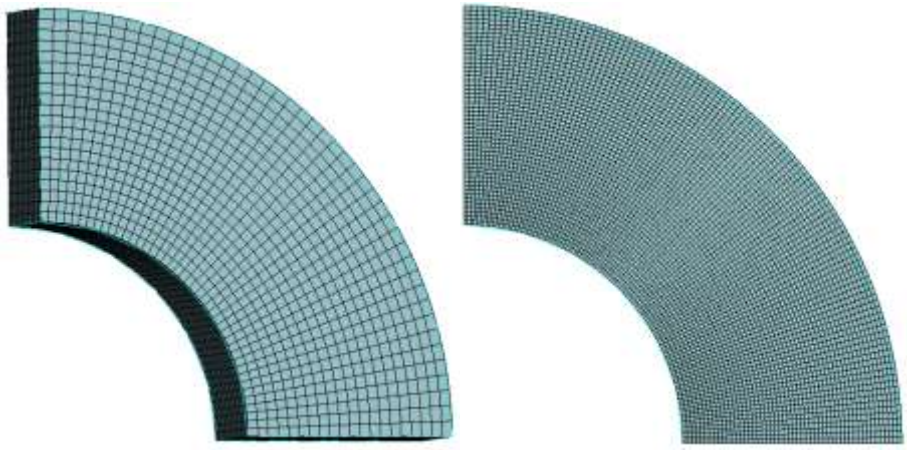
- Верхняя/нижняя поверхности цилиндра закреплены по нормали к ним
- Производится нагружение внутренней поверхности цилиндра давлением P в соответствие с путем нагружения, характеризуемого следующими шагами

Номер шага	1	2	3
P (Н/мм^2)	10	14	16.6

Сетка:

Два типа конечных элементов:

- 20-узловые гексаэдры Hex27 (1 100 элементов)
- 8-узловые четырехугольники Quad8 (5 400 элементов), плоско-деформированное состояние.



Критерий прохождения теста:

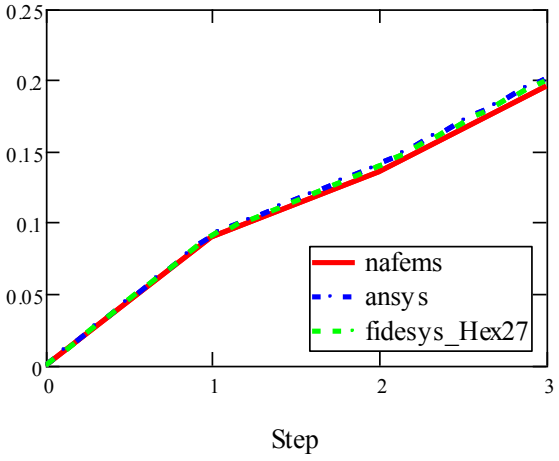
На внутренней поверхности цилиндра наблюдается радиальное перемещение радиальное перемещение u_r, в точках с радиусом 109.09 характеристики напряженного состояния (s_{rr}, $s_{\varphi\varphi}$, s_{zz} - компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат):

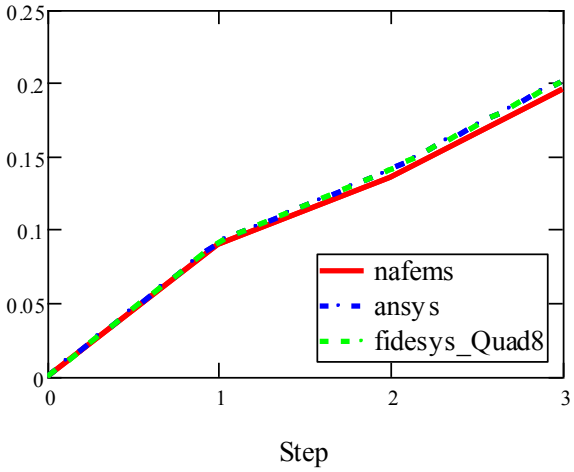
№ шага	u_r(мм)	s_{rr} (Н/мм^2)	$s_{\varphi\varphi}$ (Н/мм^2)	s_{zz} (Н/мм^2)
1	0.09	-8	14.5	2
2	0.135	-11.7	16	1.7
3	0.195	-14.5	13.4	0.05

Результаты:

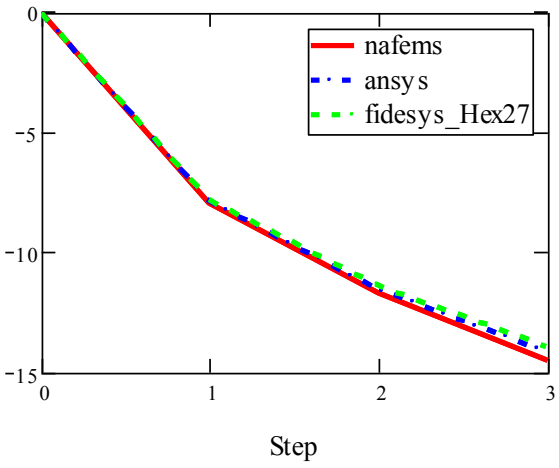
На следующих графиках приведены зависимости перемещений и напряжений в цилиндрической системе координат от шага нагружения для данных NAFEMS[812], FIDESYS, ANSYS[25].

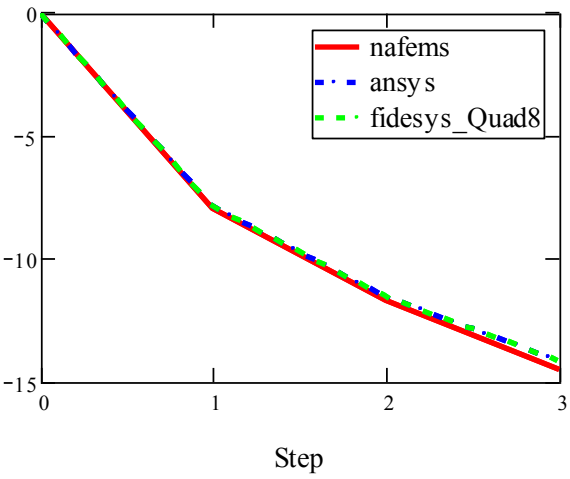
Перемещение u_r





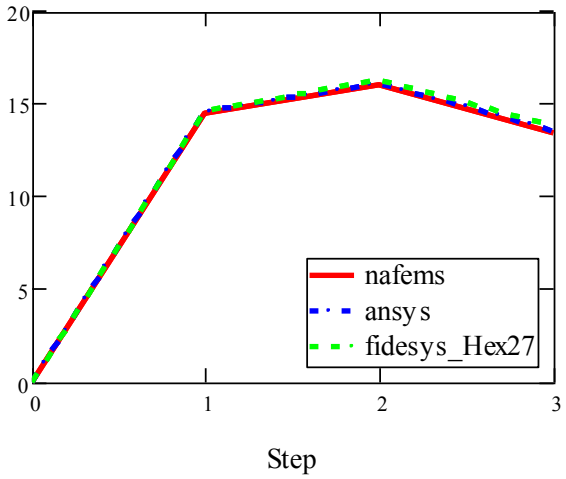
Напряжение s_{rr}

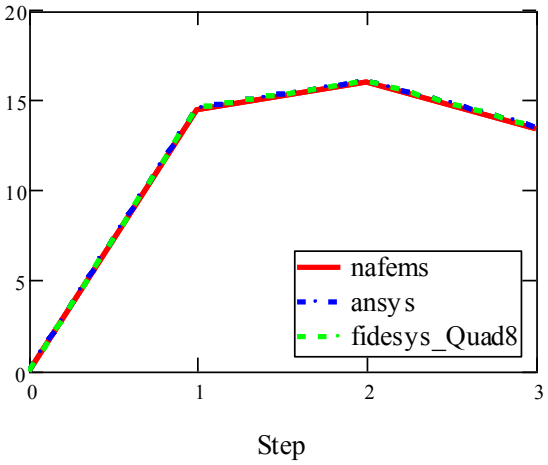




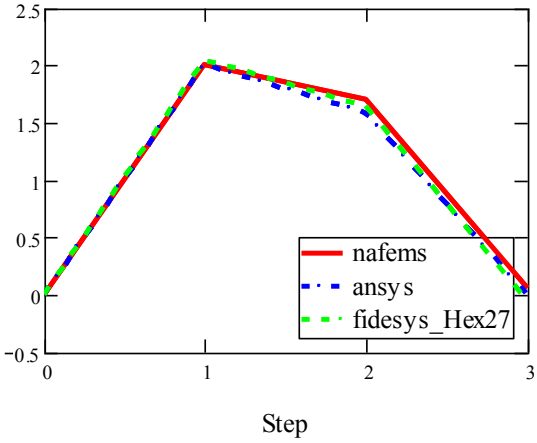
[25] Проводилось сравнение с расчетом в пакете ANSYS (14 796 элементов solid186 и 5 400 элементов PLANE183)

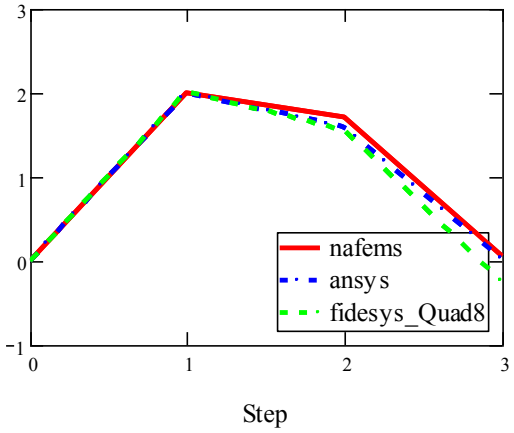
Напряжение $s_{\varphi\varphi}$





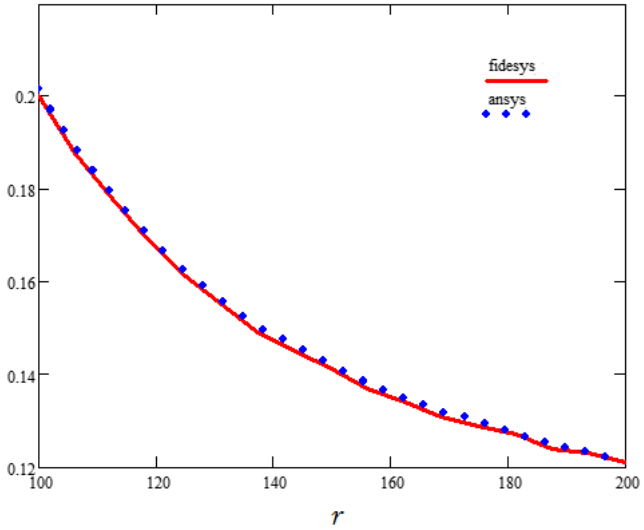
Напряжение s_{zz}:





На следующем графике приведены зависимости радиальных перемещений от радиальной координаты для шага 3, полученные в пакетах ANSYS и FIDESYS.

Перемещение $u_r(r)$



Толстостенная труба под действием температурной нагрузки

«Термопрочность деталей машин». Под редакцией И.А. Биргера и Б.Ф. Шорра (далее benchmark)

Рассматривается задача о распределении температурных напряжений в полом цилиндре (трубе) с отношением внутреннего радиуса к внешнему, равным 0.5. Установившаяся разница температур между холодной внешней и горячей внутренней поверхностями равна 250 ˚C. Приводятся результаты в рамках модели идеальной пластичности.

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус $R_1 = 0.5$ м
- Внешний радиус $R_2 = 1$ м
- Высота H = 5 м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 1.85 \times 10^4$ Н/м^2
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Предел текучести $\sigma_y = 22$ Н/м^2
- Коэффициент температурного напряжения $\alpha = 1.72 \times 10^{-5}$ 1/ ˚C

Граничные условия:

- Температура на внутренней поверхности 250 ˚C

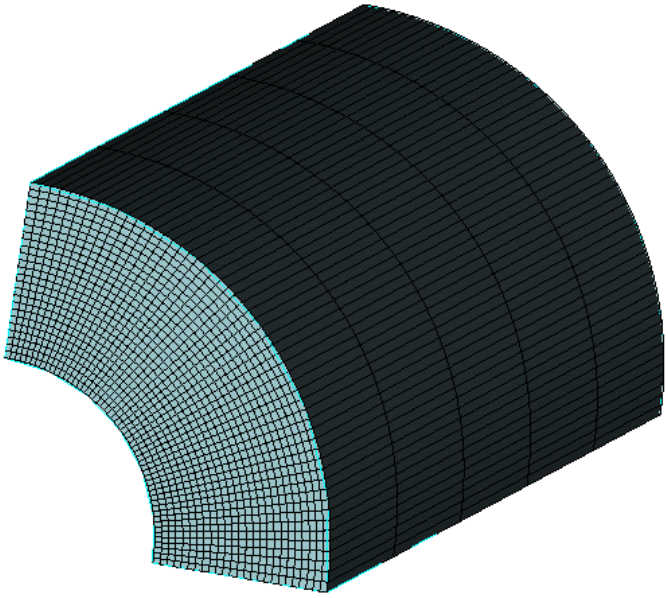
- Температура на внешней поверхности 0 ˚C
- На торцах отсутствуют перемещения вдоль оси симметрии

Сетка:

– 20-узловые гексаэдры Hex20 (13 500 элементов)

– 27-узловые гексаэдры Hex27s (6 750 элементов)

– Спектральные элементы второго порядка



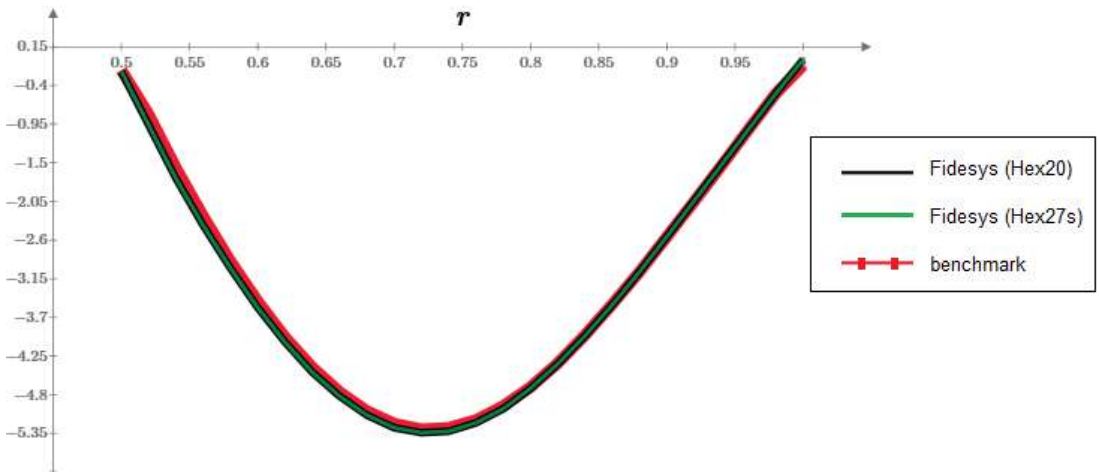
Критерий прохождения теста:

Малые отличия температурных напряжений, полученных в CAE Fidesys, от приведенных в benchmark

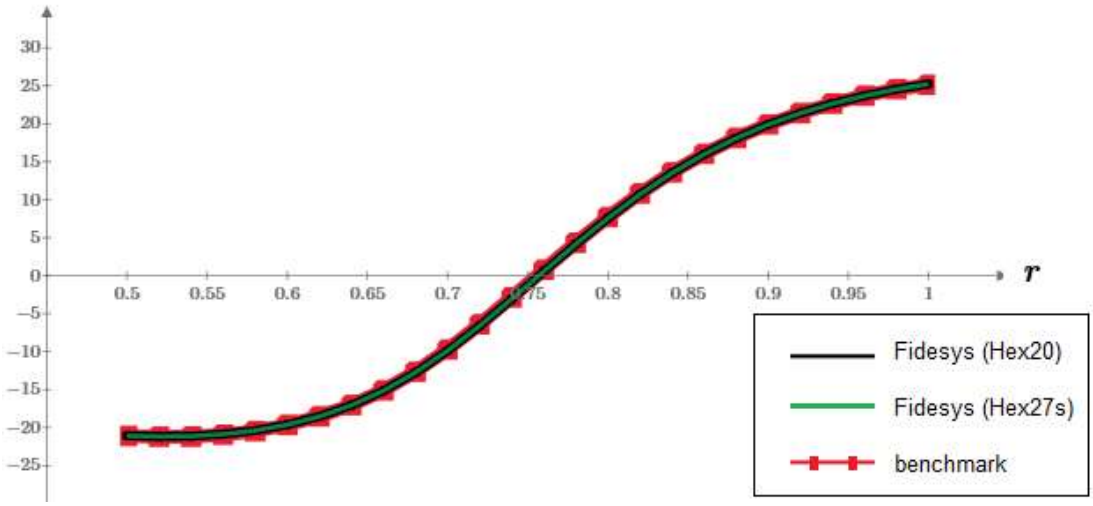
Результаты:

На следующих графиках показаны зависимости температурных напряжений в цилиндрической системе координат от радиальной координаты

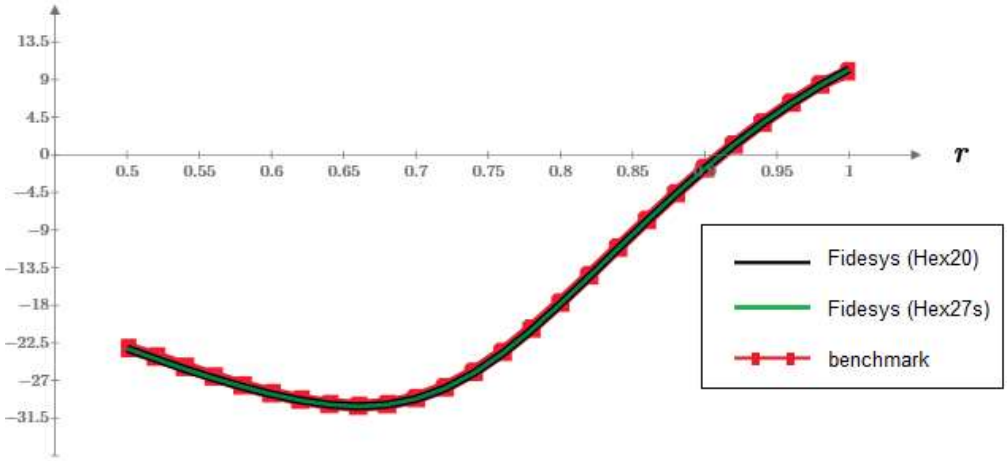
Напряжения s_{rr}:



Напряжения $s_{\varphi\varphi}$:



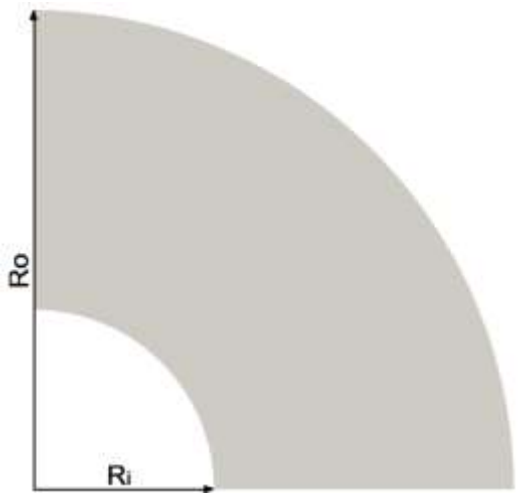
Напряжения s_{zz}:



<u>Цилиндр под давлением. Материал Муни-Ривлина (2D)</u>

J.T. Oden, Finite Elements of Nonlinear Continia, Mc-Graw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1972, pg. 325-331

Решается задача о нагружении цилиндра из материала Муни-Ривлина, закрепленного из условия симметрии. Задача решается для плоско-деформированного состояния с учетом конечных деформаций.



Геометрическая модель:

- R_i=7 in

- R_o=18.625

Граничные условия:

- P=150

Параметры материала:

- Материал Муни-Ривлина
- Коэффициент Пуассона ν = 0.49
- C_1 = 80 C_2 = 20 D= 5000

Сетка:

Два типа конечных элемента (два различных теста):

- 8-узловые четырехугольники quad8 (220 элементов)
- 9-узловые четырехугольники quad9 (220 элементов)

Критерий прохождения теста:

Перемещение u_r в точке (7, 0, 0) равно 7.180 с точностью 3%

Напряжение σ_r в точке (8.16, 0, 0) равно -122 с точностью 3%

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS [819]:

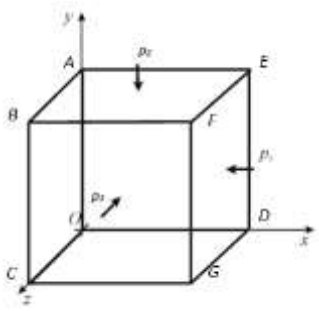
Величина	**Критерий прохождения теста**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**Ansys**	
		QUAD8		**QUAD9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
u_r	7.180	7.413	3%	7.413	3%	7.491	4.3%
σ_r	-122	-122.96	0.8%	-124.44	3%	-122.77	0.6%

<u>Разрушение куба под действием давления</u>

Г.Г. Болдырев, А.Ю Муйземнек, И.М. Малышев. Моделирование деформационных процессов в грунтах с использованием программ Ansys и LS-DYNA.

Рассматривается куб с ребром 1 м, три грани которого, принадлежащие координатным плоскостям, закреплены по перпендикулярам к ним. На двух других гранях приложено давление 20 кПа. Определяется, при каком давлении на оставшуюся грань произойдёт разрушение куба. Принимается модель пластичности по Друкеру-Прагеру.

Геометрическая модель:



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 5.1x10^8 Па
- Коэффициент Пуассона ν = 0.25
- Когезия c = 11300 Па
- Угол внутреннего трения $\varphi = 19.1°$

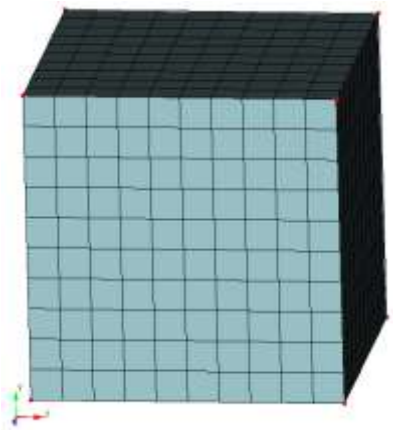
Граничные условия:

- $u_x|_{ABCO} = 0, u_y\big|_{OCGD} = 0, u_z|_{AODE} = 0$
- $p_1 = p_2 = 20000$ Па

Сетка:

– Гексаэдры Hex8, Hex20 (1000 элементов) - МКЭ

– Гексаэдры Hex27 (64 элемента) - спектральные элементы второго порядка



Критерий прохождения теста:

В соответствии с аналитическим решением, приведенным в статье, а также расчетом в CAE Ansys , искомое давление p_3, приложенное к грани $BCGF$, при котором происходит переход в пластическое состояние, составляет 70 кПа.

Результаты:

аналитическое решение	Fidesys - hex20	
	значение	погрешность
70 кПа	71 кПа	1.43%

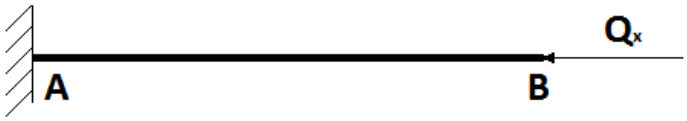
Линейно-упругая устойчивость

Устойчивость консольного тела

Рассматривается задача об устойчивости защемленного левым торцом консольного тела под действием осевой нагрузки Q_x.

Геометрическая модель:

- AB=10 м
- Сечение квадрат 1x1 м



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты в точке A
- Нагрузка в точке B в отрицательном направлении оси x Q_x

Параметры материала:

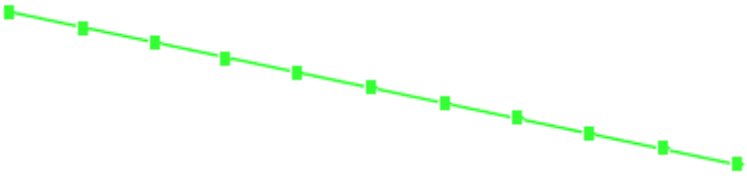
- Изотропный
- Модуль упругости E = 30 Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

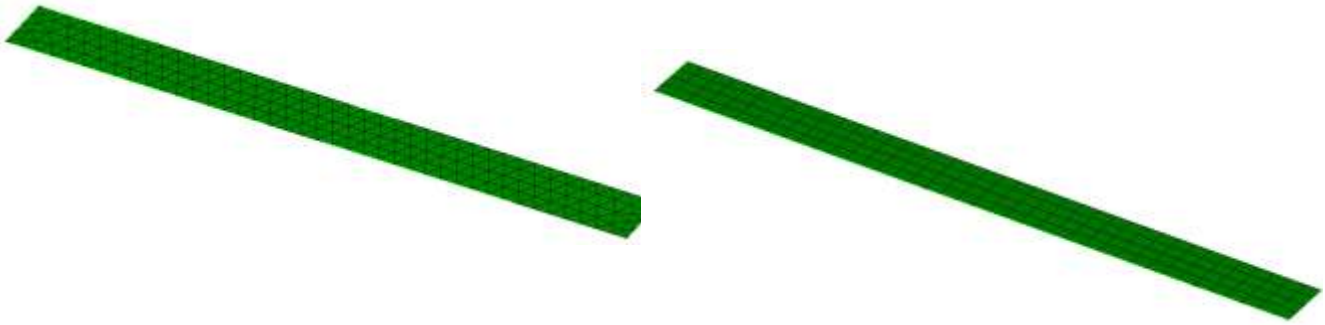
Рассматривалось три варианта расчетной схемы:

- Балочная схема (один отдельный тест):
  - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)
- Оболочечная схема (два отдельных теста):
  - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (326 элементов)
  - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (326 элементов)
  - 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4 (160 элементов)
  - 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (160 элементов)
  - 9-узловые четырехугольные оболочки Shell9 (160 элементов)
- Объемная схема (восемь отдельных тестов):
  - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (48 682 элемента)
  - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (48 682 элемента)
  - 8-узловые гексаэдры Hex8 (2 125 элементов)
  - 20-узловые гексаэдры Hex20 (2 125 элементов)
  - 27-узловы гексаэдры Hex27 (2 125 элементов)

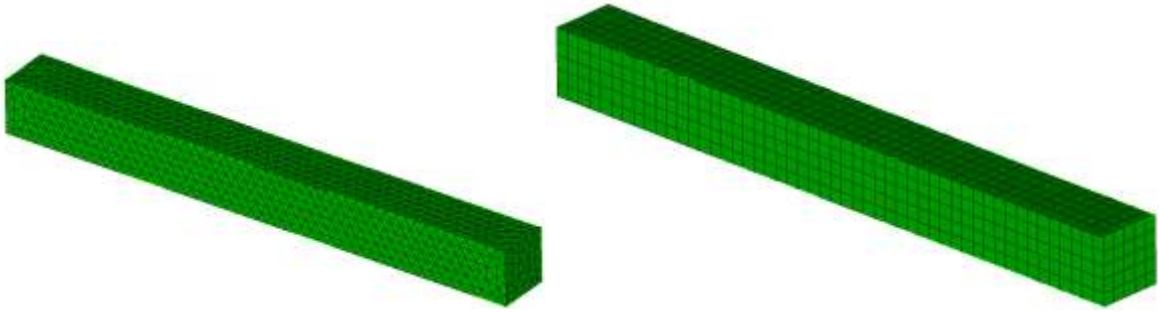
Балочная схема:



Оболочечная схема:



Объемная схема:



Критерий прохождения теста:

Две первые критические сжимающие нагрузки для стержневой схемы 61 685 кН с точностью 1%

Две первые критические сжимающие нагрузки для оболочечной схемы 61 685 кН/м с точностью 1%

Две первые критические сжимающие нагрузки для объемной схемы 61 685 кПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [31]:

$$P_1 = P_2 = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, MICROFE [235]:

Величина	**Теоретическое**	**Стержневая схема**

	значение	FIDESYS (элементы Beam2)		MICROFE	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
Q_1, кН	61 685	61 685.1	<0.01%	61 336	0.83%
Q_2, кН	61 685	61 685.1	<0.01%	61 336	0.83%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема					
		FIDESYS				MICROFE	
		TriShell3		TriShell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Q_1,кН/м	61 685	61 433.8	0.41%	61 247.7	0.71%	61 428	0.68%
Q_2, кН/м	61 685	68 681.5	11%	61 404.4	0.45%	61 498	0.57%

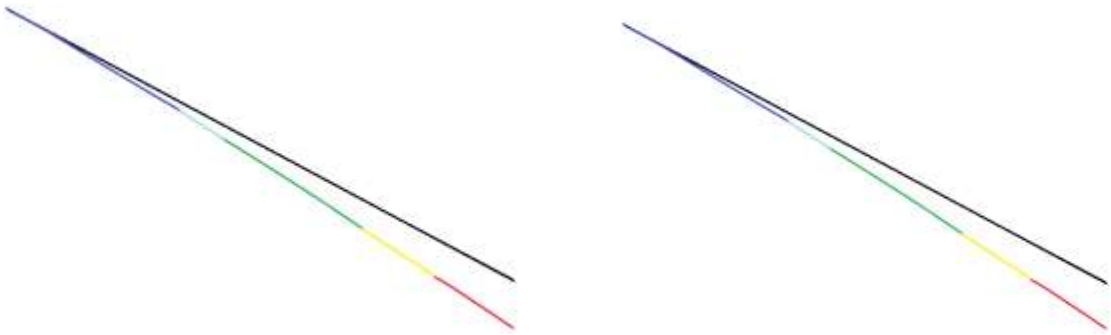
Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема							
		FIDESYS						MICROFE	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Q_1,кН/м	61 685	61 446.6	0.39%	61 248.0	0.73%	61 226.2	0.74%	61 428	0.68%
Q_2, кН/м	61 685	63 929.8	3.6%	61 383	0.49%	61 404.6	0.45%	61 498	0.57%

Величина	Теоретическое значение, Па	Объемная схема (тетраэдры)					
		FIDESYS				MICROFE	
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Q_1, кПа	61 685	62 988.79	1.84%	61 331.24	0.84%	61 659	0.31%
Q_2, кПа	61 685	63 012.03	1.88%	61 331.47	0.84%	61 659	0.31%

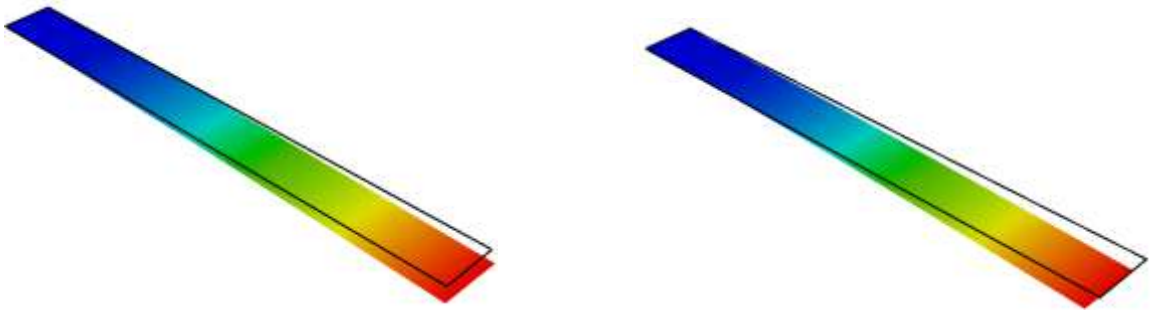
Величина	Теоретическое значение	Объемная схема (гексаэдры)							
		FIDESYS						MICROFE	
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Q_1, кПа	61 685	61 862.73	0.02 %	61 335.06	0.83 %	61 331.07	0.84%	61 659	0.31 %
Q_2, кПа	61 685	61 862.73	0.02 %	61 335.06	0.83 %	61 331.07	0.84%	61 659	0.31 %

На рисунках ниже представлены деформированные модели для двух первых форм потери устойчивости.

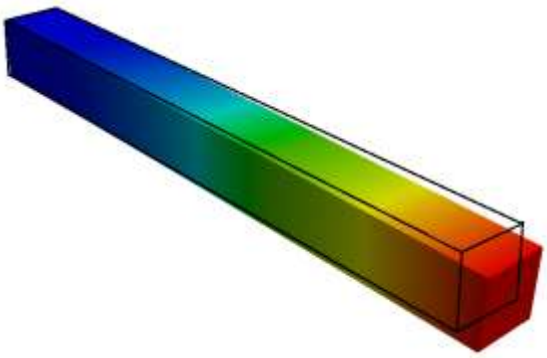
Стержневая схема:

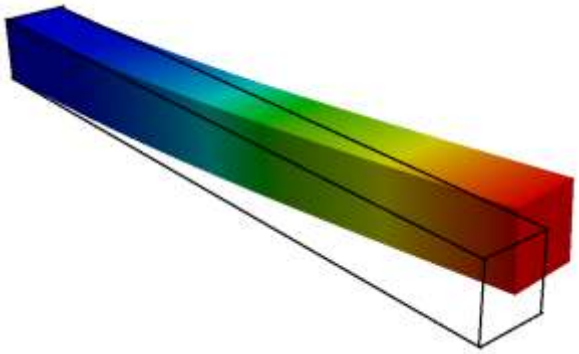


Оболочечная схема:



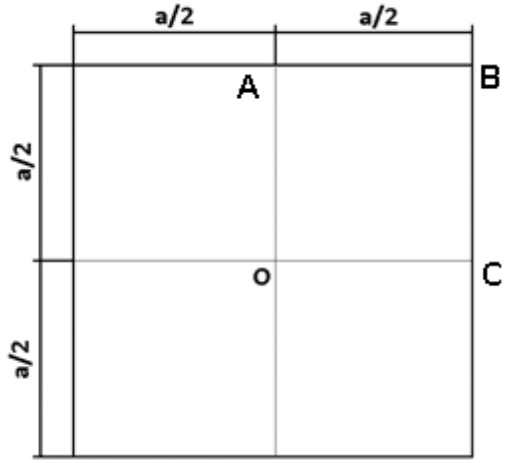
Объемная схема:





Устойчивость шарнирно опертой пластины

Рассматривается задача об устойчивости шарнирно опертой по кромкам под действием сжимающего напряжения по двум противоположным кромкам.



Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Сторона a=8 м
- Толщина h=0.008 м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения U_z на прямой BC
- Нулевые перемещения U_x, U_y и U_z на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA (U_x=R_y=R_z=0)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB (U_y=R_x=R_z=0)
- Равномерно распределенная нагрузка по прямой BC вдоль оси X q =-1 кН/м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 10 Гпа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3333

Сетка:

Два типа элементов (два отдельных теста):

- 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 364 элементов)
- 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 364 элементов)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (114 элементов)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (114 элементов)

– 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (114 элементов)

Критерий прохождения теста:

Критическое значение напряжения σ_{crit}= 37 010.9 Па с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [31]: $\sigma_{crit} = \frac{E\pi^2 D}{L^2 h}$, где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$.

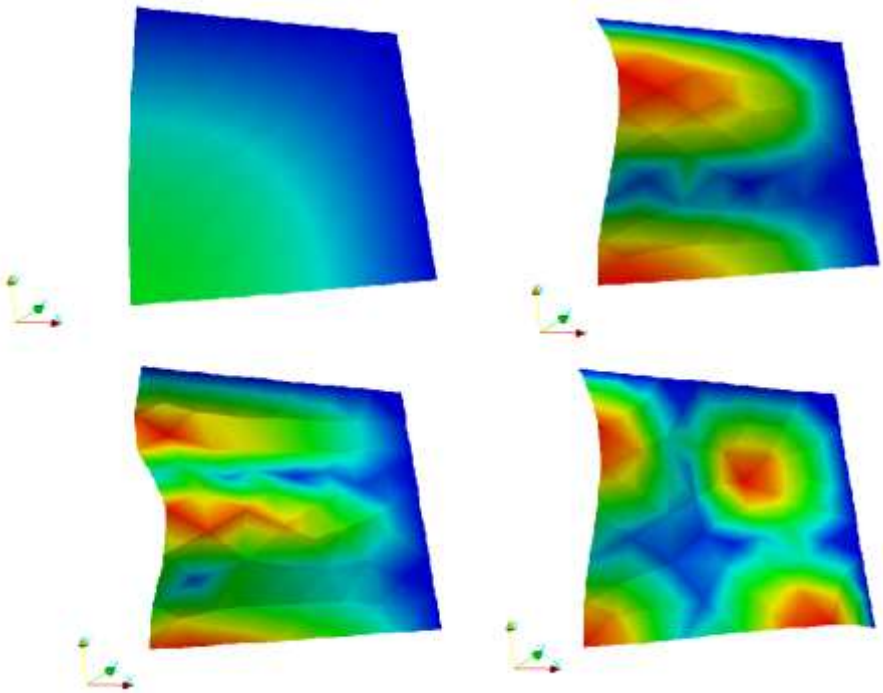
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, MICROFE [235], ANSYS[26]:

Величина	Теор. значение	Численное решение							
		FIDESYS				MICROFE		ANSYS	
		TriShell3		TriShell6					
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{crit}, Па	37 010.9	37 063.7	<0.01 %	37 005.3	0.02%	37 010	<0.01 %	37 052	0.11%

Величина	Теор. значение	Численное решение									
		FIDESYS						MICROFE		ANSYS	
		Shell4		Shell8		Shell9					
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{crit}, Па	37 010.9	37 137.9	0.1%	37 001.1	0.34%	37 010.8	<0.01%	37 010	<0.01%	37 052	0.11%

На рисунках ниже представлены первые четыре формы потери устойчивости.

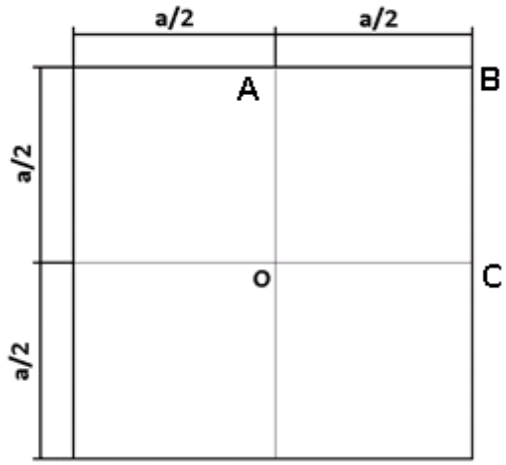


[26] Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 100 элементов).

Устойчивость квадратной пластины при двустороннем сжатии

Рассматривается задача об устойчивости квадратной пластины с несмещаемыми кромками при действии давления на две противоположные стороны.

Геометрическая модель:



- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Сторона a=0.5 м
- Толщина h=0.005 м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения U_z на прямой BC и AB
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA (U_x=R_y=R_z=0)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB (U_y=R_x=R_z=0)
- Равномерно распределенная нагрузка по прямой BC вдоль оси X q =-200 кН/м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 210 Гпа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Два типа элементов (два отдельных теста):

- 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 442 элемента)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (400 элементов)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (400 элементов)

Критерий прохождения теста:

Первый коэффициент критической нагрузки q_1^{crit} = 379.6 с точностью 3%

Второй коэффициент критической нагрузки q_2^{crit}= 1 054.44 с точностью 3% [814]

Третий коэффициент критической нагрузки q_3^{crit}= 2 566.1 с точностью 3% [814]

Первое значение вычислено по формуле [31]: $q_{crit} = 4\frac{\pi^2 D}{L^2}$, где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

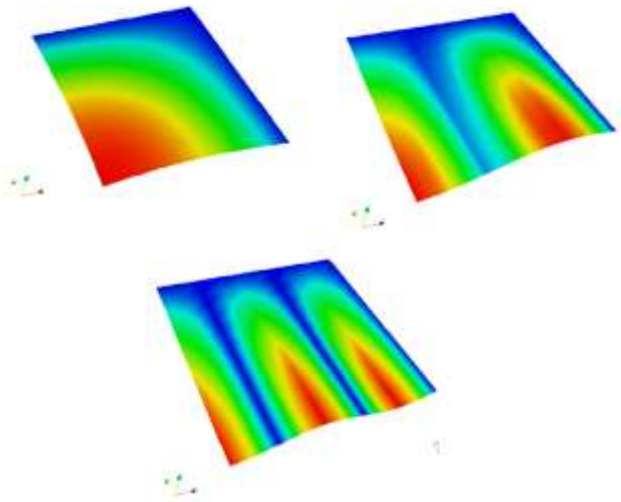
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, CODE_ASTER[814]:

Величина	Теоретическое значение	Численное решение					
		FIDESYS				CODE_ASTOR	
		TriShell3		TriShell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit}	379.6	378.26	0.35%	376.23	0.89%	378.52	0.98%
q_2^{crit}	1 054.44	1 055.48	0.1%	1 046.44	0.76%	1 049	0.5%
q_3^{crit}	2 566.1	2 580.83	0.57%	2 534.88	1.78%	2 574.7	0.33%

Величина	Теоретическое значение	Численное решение							
		FIDESYS						CODE_ASTOR	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit}	379.6	378.37	0.32%	377.86	0.46 %	376.86	0.72%	378.52	0.98 %
q_2^{crit}	1 054.44	1 058.29	0.37%	1 047.59	0.65 %	1 048.96	0.52%	1 049	0.5%
q_3^{crit}	2 566.1	2 608	1.63%	2 530.14	1.4%	2 545.06	1.39%	2 574.7	0.33 %

На рисунках ниже представлены первые три формы потери устойчивости.



Устойчивость балки, заделанной на одном конце и шарнирно опертой на другом

Рассматривается задача об устойчивости балки, заделанной на одном конце и шарнирно опертой на другом, при действии сжимающей силы.

Геометрическая модель:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точке A
- Нулевые перемещения U_y и U_z в точке B
- Сосредоточенная сила в точке B $P_x = 1$ кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)



Критерии прохождения теста:

Для прямоугольного сечения:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -336.67 кН с точностью 3%

Для круглого сечения:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -792.84 кН с точностью 3%

Для сечения труба:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -11 898.65 кН с точностью 3%

Для сечения двутавр:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -20 199.72 кН с точностью 3%

Для сечения швеллер:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -36 914.99 кН с точностью 3%

Для сечения уголок:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -24 728.8 кН с точностью 3%

Для сечения полый прямоугольник:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -1 004 259 кН с точностью 3%

Для сечения тавр:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -10 370.3 кН с точностью 3%

Для сечения Z-сечение:

– Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -71 205.9 кН с точностью 3%

Значения вычислены по следующим формулам [31]:

$$P_{crit} = -\frac{\pi^2 E I_z}{(0.699L)^2}.$$

Результаты:

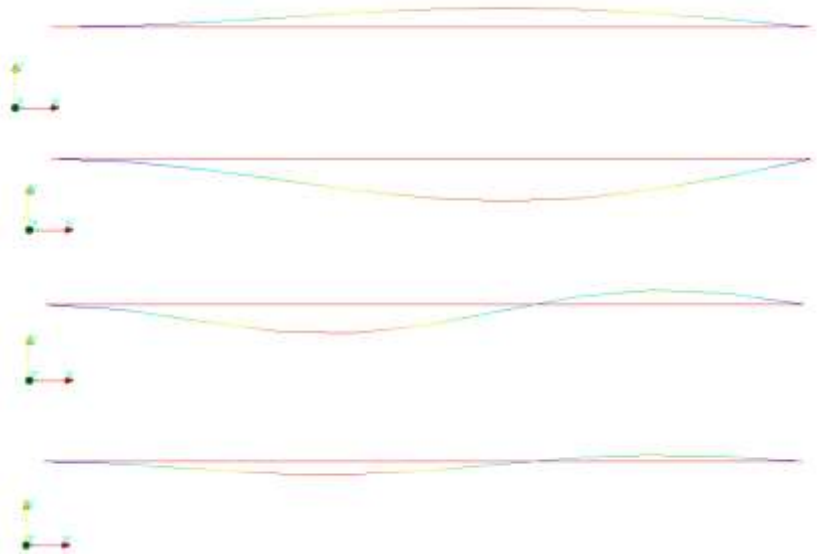
В таблице приведены результаты расчёта в пакетах FIDESYS и ANSYS[27]:

Сечение	**Величина, кН**	**Теор. значение**	**Численный анализ**			
			FIDESYS		**ANSYS**	
			Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
Прямоугольник	P_{crit}	-336.67	-336.55	0.04%	-337.65	0.31%
Круг	P_{crit}	-792.84	-792.981	-0.02%	-793.72	0.11%
Труба	P_{crit}	-11 898.65	-11 894.7	0.03%	-11 872	0.05%
Двутавр	P_{crit}	-20 199.72	-20 223.4	-0.12%	-20 206	2.9%
Швеллер	P_{crit}	-36	-36 905.6	0.03%	-36	0.04%

[27] Анализ проводился для 30 балочных элементов beam188.

		914.99			900.60	
Уголок	P_{crit}	-24 714.36	-24 728.8	-0.06%	-24 704.70	0.04%
Тавр	P_{crit}	-10 372.56	-10 370.3	0.02%	-10 368.50	0.04%
Z-сечение	P_{crit}	-71 224.22	-71 205.9	0.03%	-71 196.50	0.04%
Полый прямоугольник	P_{crit}	-1 004 259	-1 003 930	0.03%	-1 003 870	0.04%

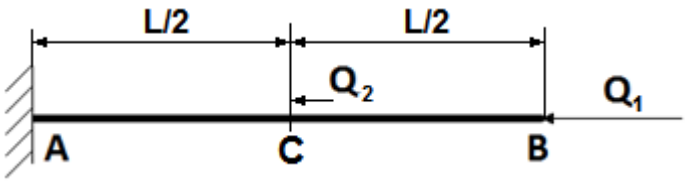
На рисунках ниже представлены первые четыре формы потери устойчивости для круглого сечения:



Консольное тело, нагруженное двумя сжимающими силами

Рассматривается задача об устойчивости консольного тела, нагруженного двумя сжимающими силами – на свободном конце и в середине.

Геометрическая модель :



- AB=20 м
- Сечение квадрат 1x1 м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты в точке A
- Нагрузка в точке B P_1 =1 кН

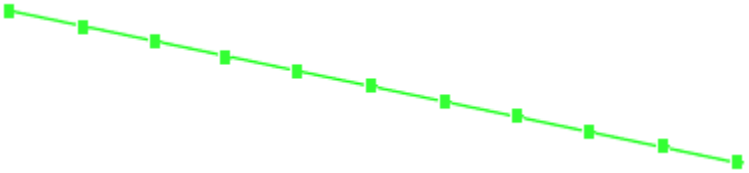
- Нагрузка в точке C P_2 =1 кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 30 Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Стержневая схема (один отдельный тест):
  - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)



Критерий прохождения теста:

Первое значение критической нагрузки для стержневой схемы P_1= 86 166.67 кН с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [31]:$P_1 = 2.068\frac{EI}{L^2}$

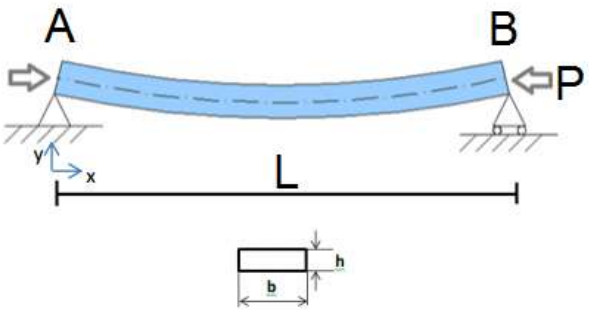
Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS[28]:

Величина	Теоретическое значение	Стержневая схема			
		FIDESYS (элементы Beam2)		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
P_1, кН	86 166.67	86 134.95	0.04%	85 982	0.21%

Устойчивость шарнирно опертой балки

Рассматривается задача об устойчивости шарнирно опертой балки, нагруженной двумя сжимающими силами.



Геометрическая модель :

[28] Анализ выполнялся для десяти элементов beam188.

- Длина L=200 мм
- Сечение высота b=10 мм, толщина h=1 мм

Граничные условия:

- Нулевые перемещения в точке A (U_x= U_y= U_z=0)
- Нулевые перемещения вдоль оси У в точке B (U_y= U_z=0)

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 2 000 000 Н/мм^2
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Рассматривалось два варианта расчетной схемы:

Стержневая схема (один отдельный тест):

– Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Оболочечная схема (два отдельных теста):

– 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (276 элементов)

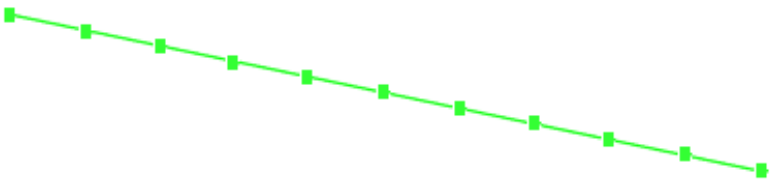
– 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (276 элементов)

– 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (94 элемента)

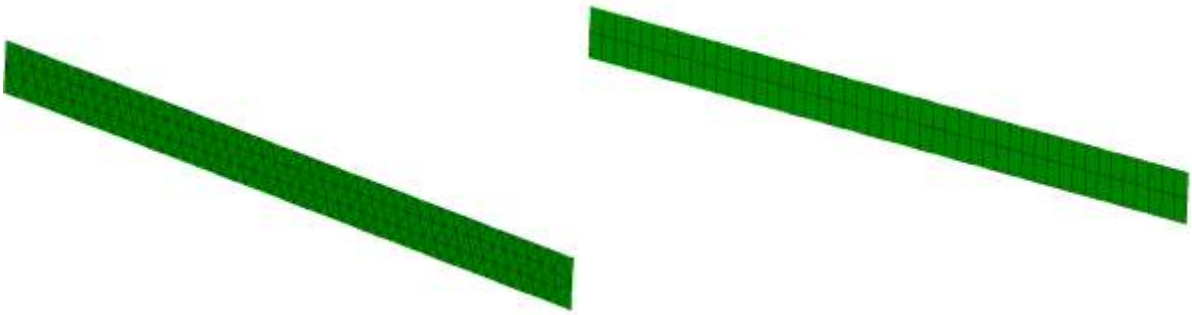
– 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (94 элемента)

– 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (94 элемента)

Стержневая схема:



Оболочечная схема:



Критерий прохождения теста:

Критическая температура P_{crit} = 41.124 Н с точностью 1%

Значение вычислено по формуле [31]: $P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, где момент инерции балки $I = \frac{bh^3}{12}$

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта в пакетах FIDESYS, ANSYS [173]:

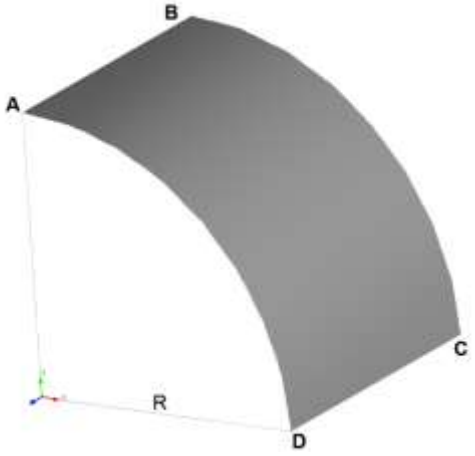
Величина	Теоретическое значение	Стержневая схема			
		FIDESYS (элементы Beam2)		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
P_{crit}, Н	41.124	41.1244	<0.01%	41.172	0.12%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема					
		FIDESYS				ANSYS	
		TriShell3		TriShell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
P_{crit},Н	41.124	41.172	0.12%	41.129	0.01%	41.172	0.12%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема							
		FIDESYS						ANSYS	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
P_{crit},Н	41.124	41.163	0.09%	41.132	0.02%	41.134	0.02%	41.172	0.12%

<u>Устойчивость цилиндрической оболочки</u>

Рассматривается задача об устойчивости прямоугольной пластины с жесткой заделкой на одном крае и подвижной заделкой на другом при действии продольной нагрузки.



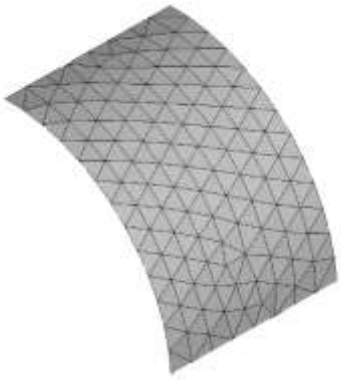
Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть оболочки

- Длина L=2 м
- Радиус R=2 м
- Толщина h=0.02 м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB (U_x=R_y=R_z=0)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой DC (U_y=R_x=R_z=0)
- Равномерно распределенная нагрузка по поверхности ABCD q=1 кПа



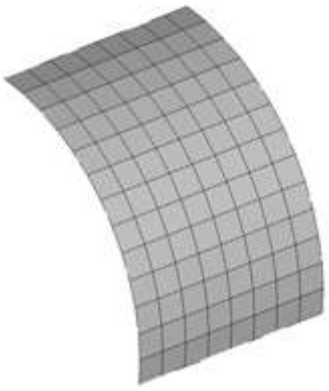
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 200 Гпа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Сетка:

Два типа элементов (два отдельных теста):

- 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 394 элемента)
- 6-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 394 элемента)
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (888 элементов)
- 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (45 элементов)
- 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (45 элементов)



Критерий прохождения теста:

Первое критическое значение нагрузки q_1^{crit} =73.260 кПа с точностью 3%

Третье критическое значение нагрузки q_3^{crit}=293.040 кПа с точностью 3%

Пятое критическое значение нагрузки q_5^{crit}=659.341 кПа с точностью 3%

Седьмое критическое значение нагрузки q_7^{crit}=1 172.16 кПа с точностью 3%

Девятое критическое значение нагрузки q_9^{crit}=1 831.5 кПа с точностью 3%

Одиннадцатое критическое значение нагрузки q_{11}^{crit}=2 637.36 кПа с точностью 3%

Значения вычислены по формуле [738]: $q_{crit} = \frac{n^2 D}{L^3}$, где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $n = 2,4,6,8,10,12$

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, CODE_ASTER[814]:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				CODE_ASTER	
		TriShell3		TriShell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit},кПа	73.260	72.444	1.1%	72.199	1.4%	72.492	1%
q_3^{crit},кПа	293.040	290.812	0.76%	288.4	1.6%	293.481	0.87%
q_5^{crit},кПа	659.341	658.03	0.2%	647.31	1.8%	673.600	2%
q_7^{crit},кПа	1 172.16	1 179.21	0.6%	1 146.8	2.2%	-	-
q_9^{crit},кПа	1 831.5	1 863.04	1.7%	1 785.42	2.5%	-	-
q_{11}^{crit},кПа	2 637.36	2 722.25	3.2%	2 561.78	2.9%	-	-

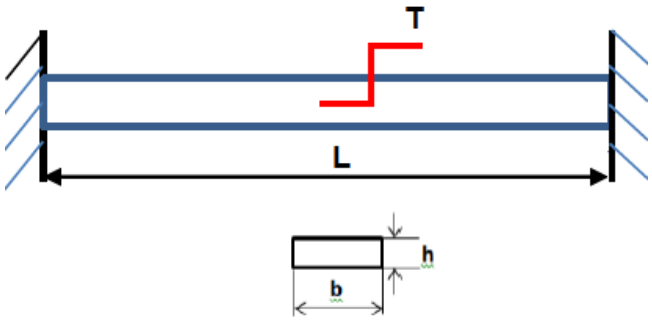
Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						CODE_ASTER	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit},кПа	73.260	72.3937	1.18%	72.3608	1.2%	72.3791	1.2%	72.492	1%
q_3^{crit},кПа	293.040	290.533	0.86%	289.47	1.2%	289.622	1.2%	293.481	0.87%
q_5^{crit},кПа	659.341	657.111	0.34%	651.856	1.1%	652.765	1.0%	673.600	2%
q_7^{crit},кПа	1 172.16	1 176.66	0.38%	1 161.81	0.9%	1 166.87	0.5%	-	-
q_9^{crit},кПа	1 831.5	1 857.03	1.39	1 824.54	0.4%	1 844.86	0.7%	-	-
q_{11}^{crit},кПа	2 637.36	2 709.32	2.73%	2 638.3	0.0%	2 715.36	3.0%	-	-

<u>Устойчивость балки, закрепленной на концах, от температурного воздействия</u>

Рассматривается задача об устойчивости тела, защемленного на торцах и подверженного равномерному температурному нагреву.

Геометрическая модель:

- Длина L=200 мм
- Сечение высота b=10 мм, толщина h=1 мм



Граничные условия:

- Оба конца балки жестко закреплены по всем перемещениям и поворотам

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 2 000 000 Н/мм^2
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3
- Коэффициент температурного расширения α=11.7·10^{-6} C^{-1}

Сетка:

Рассматривалось два варианта расчетной схемы:

Стержневая схема (один отдельный тест):

– Линейные балочные элементы Beam2 (20 элементов)

Оболочечная схема (два отдельных теста):

– 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (276 элементов)

– 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (276 элементов)

– 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4 (94 элемента)

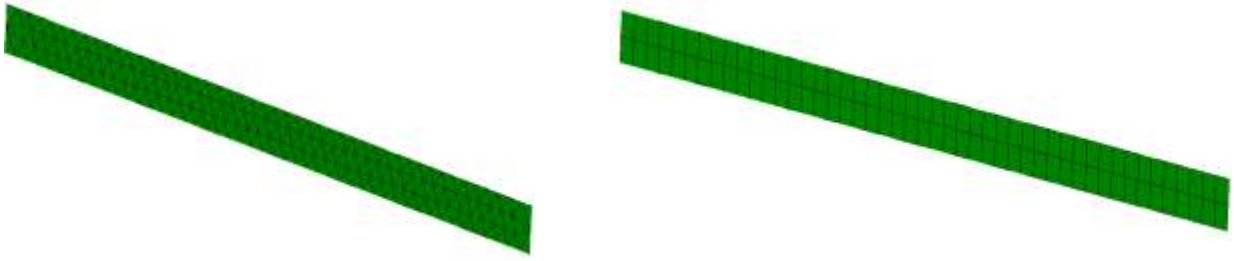
– 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (94 элемента)

– 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (94 элемента)

Стержневая схема:



Оболочечная схема:



Критерий прохождения теста:

Критическая температура T_{crit} = 7.028^o C с точностью 1%

Значение вычислено по формуле [738]: $T_{crit} = \frac{\pi^2 h^2}{3\alpha L^2}$.

Результаты:

В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS[29]:

Величина	**Теоретическое значение**	**Стержневая схема**			
		FIDESYS (элементы Beam2)		ANSYS	
		Значение	**Ошибка**	**Значение, Па**	**Ошибка**
T_{crit}, ° C	7.028	7.029	0.01%	7.052	0.34%

Величина	**Теоретическое значение**	**Оболочечная схема**					
		FIDESYS				**ANSYS**	
		TriShell3		**TriShell6**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
T_{crit}, ° C	7.028	7.072	0.63%	7.037	0.13%	7.052	0.34%

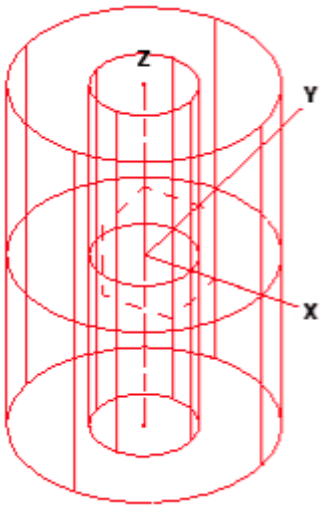
Величина	**Теоретическое значение**	**Оболочечная схема**							
		FIDESYS						ANSYS	
		Shell4		**Shell8**		**Shell9**			
		Значение	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**	**Значение**	**Ошибка**
T_{crit}, ° C	7.028	7.055	0.31%	7.045	0.28%	7.046	0.26%	7.052	0.34%

На рисунке ниже представлена первая форма потери устойчивости



[29] Анализ проводился на десяти балочных элементах BEAM2

Задачи теплопроводности и термоупругости



Полый цилиндр под воздействием постоянной температуры на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA01/89.

Рассматривается двумерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием постоянных температур.

Геометрическая модель:

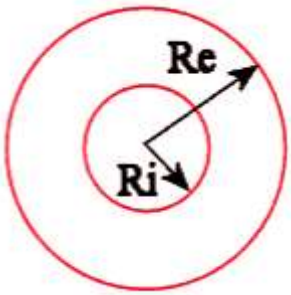
- R_i= 0.30 м, R_e = 0.35 м.

Граничные условия:

- Внутренняя температура T_i = 100 °C;
- Внешняя температура T_e = 20 °C.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности V = 1 Вт/(м ·°C).



Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):

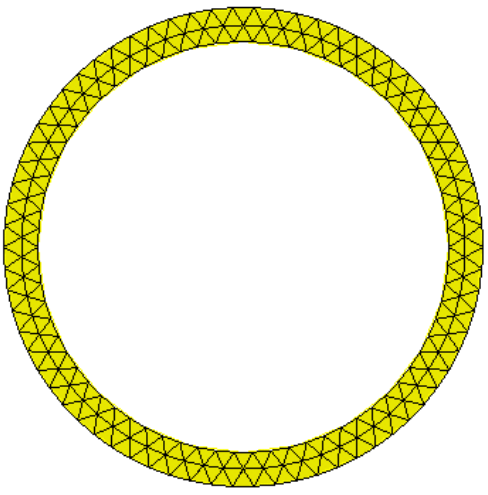
– 3-узловые треугольники Tri3 (2 400 элементов);

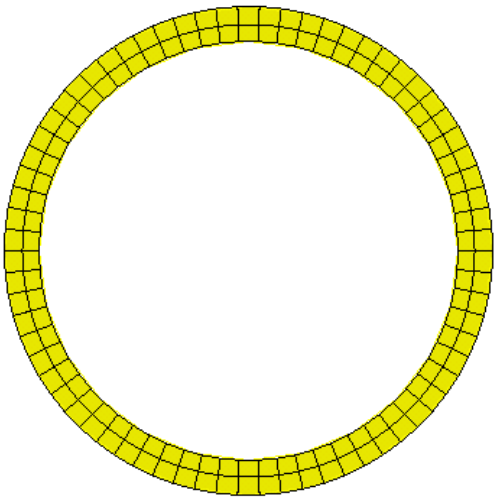
– 6-узловые треугольники Tri6 (2 400 элементов);

– 4-узловые четырёхугольники Quad4 (922 элементов);

– 8-узловые четырёхугольники Quad8 (922 элементов);

– 9-узловые четырёхугольники Quad9 (922 элементов).





Критерий прохождения теста:

Сравнение значений температуры T и теплового потока φ в точках на поверхности цилиндра и внутри него [818]:

- В точке (0.3;0;0) T = 100.0 °C, φ = 1 730 Вт/м^2 с точностью 2%;
- В точке (0.31;0;0) T = 82.98 °C, φ = 1 674 Вт/м^2 с точностью 2%;
- В точке (0.32;0;0) T = 66.51 °C, φ = 1 622 Вт/м^2 с точностью 2%;
- В точке (0.33;0;0) T = 50.54 °C, φ = 1 573 Вт/м^2 с точностью 2%;
- В точке (0.34;0;0) T = 35.04 °C, φ = 1 526 Вт/м^2 с точностью 2%;
- В точке (0.35;0;0) T = 20.00 °C, φ = 1 483 Вт/м^2 с точностью 2%.

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [818]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	T = 100.0	100	0.00%	100	0.00%	100	0.00%	100.0	0%
(0.31;0;0)	T = 82.98	83	0.02%	82.983	0.00%	82.983	0.00%	82.98	0%
(0.32;0;0)	T = 66.51	66.532	0.03%	66.507	0.00%	66.506	0.01%	66.51	0%
(0.33;0;0)	T = 50.54	50.562	0.04%	50.537	0.01%	50.537	0.01%	50.54	0%
(0.34;0;0)	T = 35.04	35.061	0.06%	35.044	0.01%	35.044	0.01%	35.04	0%
(0.35;0;0)	T = 20.00	20	0.00%	20	0.00%	20	0.00%	20.00	0%

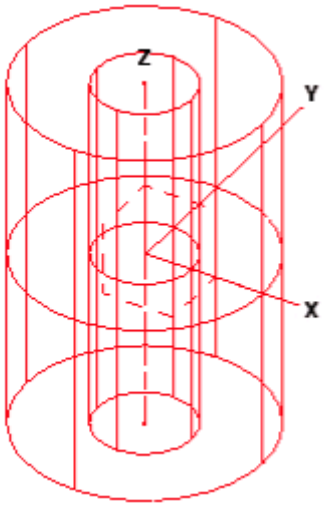
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ		
		FIDESYS		NASTRAN
		Tri3	Tri6	

		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	T = 100.0	100	0.00 %	100	0.00%	100.0	0 %
(0.31;0;0)	T = 82.98	82.965	0.02 %	82.983	0.00%	82.98	0 %
(0.32;0;0)	T = 66.51	66.519	0.01 %	66.506	0.01%	66.51	0 %
(0.33;0;0)	T = 50.54	50.553	0.03 %	50.537	0.01%	50.54	0 %
(0.34;0;0)	T = 35.04	35.01	0.09 %	35.043	0.01%	35.04	0 %
(0.35;0;0)	T = 20.00	20	0.00 %	20	0.00%	20.00	0 %

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м^2	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 1 730	1 704.01	1.50 %	1 729.5	0.03%	1 729.6	0.02%	1 702	1.62%
(0.31;0;0)	φ = 1 674	1 652.9	1.26 %	1 673.9	0.01%	1 674	0.00%	1 666	0.48%
(0.32;0;0)	φ = 1 622	1 602.9	1.18 %	1 621.7	0.02%	1 621.7	0.02%	1 614	0.49%
(0.33;0;0)	φ = 1 573	1 553.89	1.21 %	1 572.5	0.03%	1 572.5	0.03%	1 565	0.51%
(0.34;0;0)	φ = 1 526	1 506.28	1.29 %	1 526.4	0.03%	1 526.2	0.01%	1 519	0.46%
(0.35;0;0)	φ = 1 483	1 506.285	1.57 %	1 482.4	0.04%	1 482.5	0.03%	1 505	1.48%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м^2	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 1 730	1 699.11	1.79%	1 729.9	0.01%	1 702	1.62%
(0.31;0;0)	φ = 1 674	1 654.4	1.17%	1 674	0.00%	1 666	0.48%
(0.32;0;0)	φ = 1 622	1 627.6	0.35%	1 621.9	0.01%	1 614	0.49%
(0.33;0;0)	φ = 1 573	1 571.5	0.10%	1 572.8	0.01%	1 565	0.51%
(0.34;0;0)	φ = 1 526	1 547.4	1.40%	1 526.2	0.01%	1 519	0.46%
(0.35;0;0)	φ = 1 483	1 494.3	0.76%	1 482.8	0.01%	1 505	1.48%

Полый цилиндр под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)



Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA03/89.

Рассматривается трёхмерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием конвекции.

Геометрическая модель (размеуказаны в метрах):

- R_i= 0.30 м, R_e = 0.391 м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:

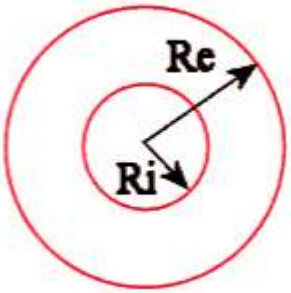
– h_i = 150 Вт/м^2/°C;

– T_i = 500 °C;

- Конвекция на внешней поверхности:

– h_e = 142 Вт/м^2/°C;

– T_e = 20 °C.



Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности V = 40 Вт/(м ·°C).

Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):

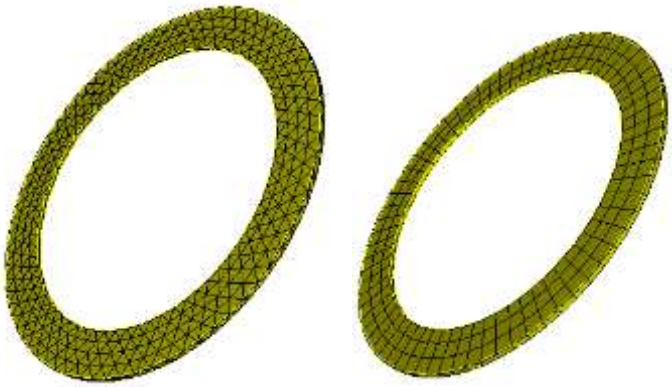
– 4-узловые тетраэдры Tetra4 (10 837 элементов);

– 10-узловые тетраэдры Tetra10 (10 837 элементов);

– 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 588 элементов);

– 20-узловые гексаэдры Hex20 (1 588 элементов);

– 27-узловые гексаэдры Hex27 (1 588 элементов).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значений температуры T и теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра [818]:

- В точке (0.3;0;0) T = 272.3 °C, φ = 3.416E4 Вт/м^2 с точностью 2%;
- В точке (0.391;0;0) T = 205.1 °C, φ = 2.628E4 Вт/м^2 с точностью 2%.

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [818]:

Координаты точки	**Критерий прохождения теста, °C**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**NASTRAN**	
		HEX8		**HEX20**		**HEX27**			
		Значение, °C	**Ошибка**	**Значение, °C**	**Ошибка**	**Значение, °C**	**Ошибка**	**Значение, °C**	**Ошибка**
(0.3;0;0)	**T = 272.3**	**272.34**	**0.01 %**	**272.35**	**0.02%**	**272.353**	**0.02%**	**272.5**	**0.07%**
(0.391;0;0)	**T = 205.1**	**204.58**	**0.25 %**	**204.58**	**0.25%**	**204.57**	**0.26%**	**204.6**	**0.24%**

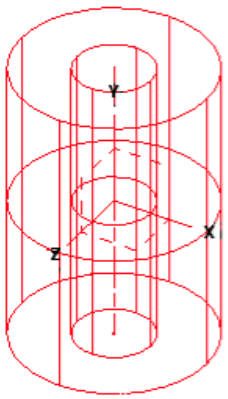
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	T = 272.3	272.35	0.02%	272.34	0.01%	272.5	0.07%
(0.391;0;0)	T = 205.1	204.58	0.25%	204.58	0.25%	204.6	0.24%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, $Вт/м^2$	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27			
		Значение, $Вт/м^2$	Ошибка	Значение, $Вт/м^2$	Ошибка	Значение, $Вт/м^2$	Ошибка	Значение, $Вт/м^2$	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 3.416E4	33 693.05	1.37 %	34 131.00	0.08%	34 140.7	0.06%	3.38E+04	1.11%
(0.391;0;0)	φ = 2.628E4	26 570.54	1.11 %	26 201	0.30%	26 202	0.30%	2.64E+04	0.53%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, $Вт/м^2$	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, $Вт/м^2$	Ошибка	Значение, $Вт/м^2$	Ошибка	Значение, $Вт/м^2$	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 3.416E4	33 813.18	1.02%	34 144	0.05%	3.38E+04	1.11%
(0.391;0;0)	φ = 2.628E4	26 340.658	0.23%	26 209	0.27%	2.64E+04	0.53%

Полый цилиндр из двух материалов под воздействием конвективного теплообмена, заданного на внутренней и внешней поверхностях (2D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA08/89.



Рассматривается двумерная задача о полом цилиндре, сделанном из двух материалов, на внутренную и внешнюю поверхности которого действует

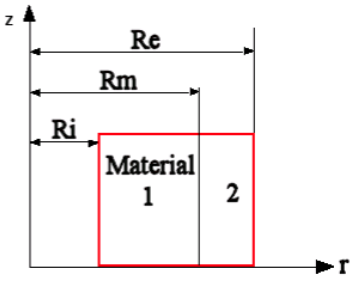
конвекция.

Геометрическая модель:

- R_i= 0.30 м, R_m = 0.35 м, R_e = 0.37 м.

Граничные условия:

- Конвекция на внешней поверхности:
  - h_i = 150 Вт/м^2/°C;
  - T_i = 70 °C.
- Конвекция на внешней поверхности:
  - h_e = 200 Вт/м^2/°C;
  - T_e = -15 °C.



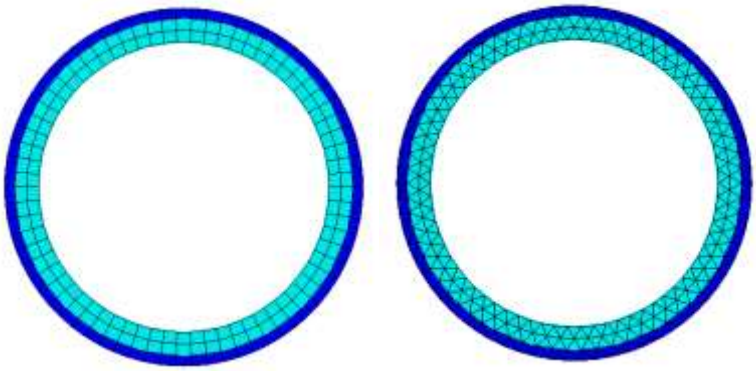
Параметры материалов:

- Изотропные;
- Коэффициент теплопроводности материала №1 V_1 = 40 Вт/(м ·°C);
- Коэффициент теплопроводности материала №2 V_2 = 20 Вт/(м ·°C).

Сетка:

Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):

- 3-узловые треугольники Tri3 (49 600 элементов);
- 6-узловые треугольники Tri6 (49 600 элементов);
- 4-узловые четырёхугольники Quad4 (21 083 элемента);
- 8-узловые четырёхугольники Quad8 (21 083 элемента);
- 9-узловые четырёхугольники Quad9 (21 083 элемента).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значений теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра, а также в точке стыка материалов [818]:

- В точке (0.3;0;0) φ = 6 687 Вт/м^2 с точностью 4%;
- В точке (0.35;0;0) φ = 5 732 Вт/м^2 с точностью 4%.

- В точке (0.37;0;0) φ = 5 422 Вт/м^2 с точностью 4%.

Результаты:

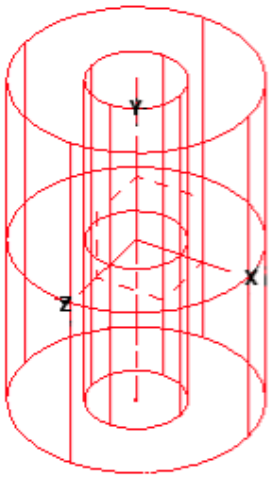
В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [818]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м^2	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 6 687	6887.255	2.99%	6914	3.39%	6914.1	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	φ = 5 732	5949.946	3.80%	5926.3	3.39%	5926.4	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	φ = 5 422	5629.443	3.83%	5628.9	3.82%	5628.9	3.82%	5 497	1.38%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м^2	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 6 687	6882.453	2.92%	6914.1	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	φ = 5 732	5938.9	3.61%	5926.4	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	φ = 5 422	5618.4	3.62%	5607.6	3.42%	5 497	1.38%

Полый цилиндр из двух материалов под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA08/89.



Рассматривается трёхмерная задача о полом цилиндре, сделанном из двух материалов, на внутреннюю и внешнюю поверхность которого действует конвекция.

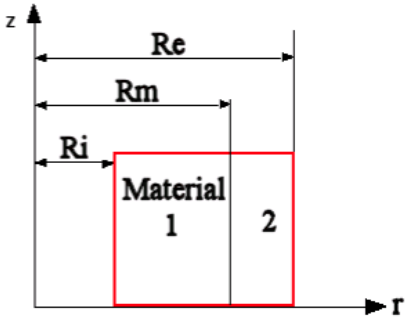
Геометрическая модель:

- R_i= 0.30 м, R_m = 0.35 м, R_e = 0.37 м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:
  - h_i = 150 Вт/м^2/°C;
  - T_i = 70 °C.
- Конвекция на внешней поверхности:
  - h_e = 200 Вт/м^2/°C;
  - T_e = -15 °C.

Параметры материалов:

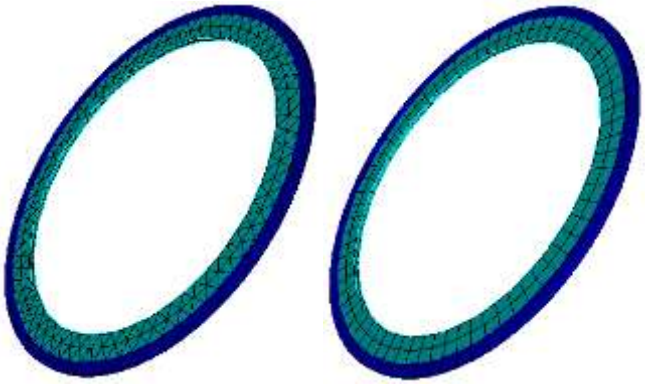


- Изотропные;
- Коэффициент теплопроводности материала №1 V_1 = 40 Вт/(м ·°C);
- Коэффициент теплопроводности материала №2 V_2 = 20 Вт/(м ·°C).

Сетка:

Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):

- 4-узловые тетраэдры Tetra4 (742 829 элементов);
- 10-узловые тетраэдры Tetra10 (742 829 элементов);
- 8-узловые гексаэдры Hex8 (21 083 элементов);
- 20-узловые гексаэдры Hex20 (21 083 элементов);
- 27-узловые гексаэдры Hex27 (21 083 элементов).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значений теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра, а также в точке стыка материалов [818]:

- В точке (0.3;0;0) φ = 6 687 Вт/м^2 с точностью 4%;
- В точке (0.35;0;0) φ = 5 732 Вт/м^2 с точностью 4%.
- В точке (0.37;0;0) φ = 5 422 Вт/м^2 с точностью 4%.

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [818]:

Координаты точки	**Критерий прохождения теста, Вт/м^2**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**NASTRAN**	
		HEX8		**HEX20**		**HEX27**			
		Значение, Вт/м^2	**Ошибка**	**Значение, Вт/м^2**	**Ошибка**	**Значение, Вт/м^2**	**Ошибка**	**Значение, Вт/м^2**	**Ошибка**
(0.3;0;0)	**φ = 6 687**	**6887.215**	**2.99 %**	**6914**	**3.39%**	**6914.1**	**3.40%**	**6 609**	**1.17%**
(0.35;0;0)	**φ = 5 732**	**5949.966**	**3.80 %**	**5926.4**	**3.39%**	**5926.36**	**3.39%**	**5 768**	**0.63%**
(0.37;0;0)	**φ = 5 422**	**5628.305**	**3.80 %**	**5607.6**	**3.42%**	**5606.02**	**3.39%**	**5 497**	**1.38%**

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м^2	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка	Значение, Вт/м^2	Ошибка
(0.3;0;0)	φ = 6687	6886.503	2.98%	6914.12	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	φ = 5732	5951.204	3.82%	5926.48	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	φ = 5422	5607.507	3.42%	5606.23	3.40%	5 497	1.38%

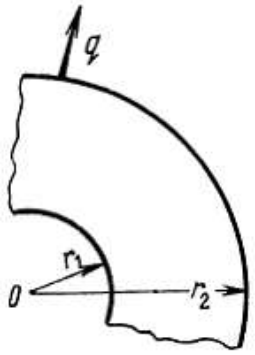
Теплопроводность цилиндрической трубы (2D)

Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.

Рассматривается двумерная задача о цилиндрической трубы, внутри которой равномерно распределены источники тепла; генерируемое ими тепло рассеивается в окружающую среду через внешнюю поверхность трубки.

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус $r_1 = 0.1$ м;
- Внешниий радиус $r_2 = 0.25$ м;
- Длина стены L = 1 м.



Граничные условия:

- Температура на внутренней поверхности $T_i = 373.15$ К;
- Тепловой поток на внешней поверхности: φ = -15 000 Вт/м^2.

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности V = 43 Вт/(м ·К).

Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):

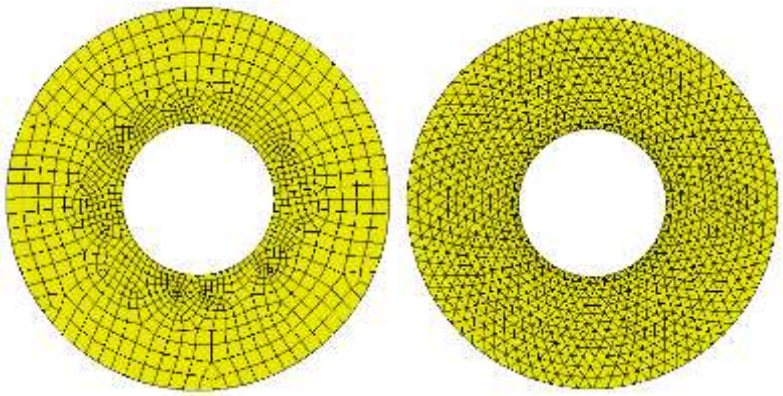
– 3-узловые треугольники Tri3 (6 372 элемента);

– 6-узловые треугольники Tri6 (6 372 элемента);

– 4-узловые четырёхугольники Quad4 (3 142 элемента);

– 8-узловые четырёхугольники Quad8 (3 142 элемента);

– 9-узловые четырёхугольники Quad9 (3 142 элемента).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значения температуры T в точке на внешней поверхности стены [173]:

- В точке (0.25;0;0) T = 21.71 K с точностью 4%.

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и AutoFEM[173, 815]:

Координаты точки	**Критерий прохождения теста, К**	**Численный анализ**							
		FIDESYS						**AutoFEM**	
		Quad4		**Quad8**		**Quad9**			
		Значение, К	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**
(0.25;0;0)	**T = 303.081513**	**293.28**	**3.23 %**	**293.24**	**3.25 %**	**293.24**	**3.25 %**	**303.7442**	**0.21%**

Координаты точки	**Критерий прохождения теста, К**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**AutoFEM**	
		Tri3		**Tri6**			
		Значение, К	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**
(0.25;0;0)	**T = 303.081513**	**293.28**	**3.23%**	**293.24**	**3.25%**	**303.7442**	**0.21%**

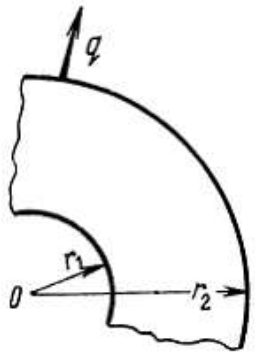
<u>Теплопроводность цилиндрической трубы (3D)</u>

Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.

Рассматривается трёхмерная задача о цилиндрической трубе, внутри которой равномерно распределены источники тепла; генерируемое ими тепло рассеивается в окружающую среду

через внешнюю поверхность трубки.

Геометрическая модель:



- Внутренний радиус r_1 = 0.1 м;
- Внешниий радиус r_2 = 0.25 м;
- Длина стены L = 1 м.

Граничные условия:

- Температура на внутренней поверхности T_i = 373.15 К;
- Тепловой поток на внешней поверхности: φ = -15 000 Вт/м^2.

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности V = 43 Вт/(м ·°С).

Сетка:

Пять типов элементов (пять отдельных тестов):

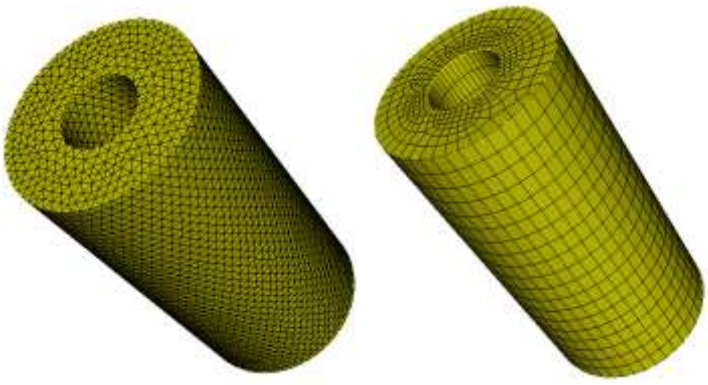
– 4-узловые тетраэдры Tetra4 (104 848 элементов);

– 10-узловые тетраэдры Tetra10 (104 848 элементов);

– 8-узловые гексаэдры Hex8 (6 327 элементов);

– 20-узловые гексаэдры Hex20 (6 327 элементов);

– 27-узловые гексаэдры Hex27 (6 327 элементов).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значения температуры T в точке на внешней поверхности стены[173]:

- В точке (0.25;0;0) T = 21.71 К с точностью 4%.

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и AutoFEM[173, 815]:

Координаты точки	**Критерий прохождения теста, К**	**Численный анализ**			
		FIDESYS			**AutoFEM**
		HEX8	**HEX20**	**HEX27**	

		Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка
(0.25;0;0)	**T = 303.081513**	**293.9**	**3.03 %**	**293.6**	**3.13 %**	**293.241**	**3.25%**	**303.7442**	**0.21 %**

Координаты точки	**Критерий прохождения теста, К**	**Численный анализ**					
		FIDESYS				**AutoFEM**	
		TETRA4		**TETRA10**			
		Значение, К	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**	**Значение, К**	**Ошибка**
(0.25;0;0)	**T = 303.081513**	**293.63**	**3.12%**	**293.59**	**3.13%**	**303.7442**	**0.21%**

<u>Цилиндрический стержень под воздействием теплового потока (балочная модель)</u>

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA05/89.

Рассматривается трёхмерная задача о цилиндрическом стержне, на оба торца которого воздействует температура, а на внешнюю поверхность воздействует тепловой поток.

Геометрическая модель:

- L = 1 м, r = 0.01 м.

Граничные условия:

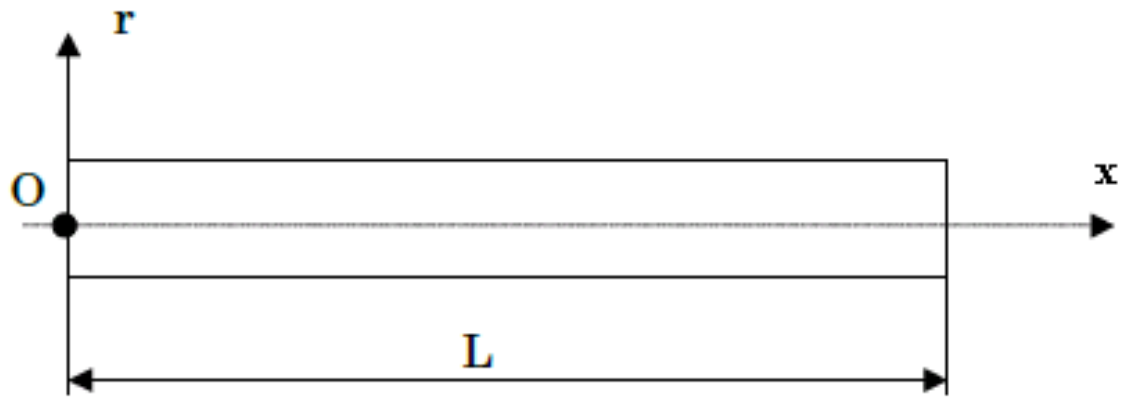
- Температура T_1 = 0 °C;
- Температура T_2 = 500 °C;
- Тепловой поток φ = -200 Вт/м^2.

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности материала V = 33.33 Вт/(м ·°C).

Сетка:

Линейные балки Beam2 (50 элементов).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значений температуры T в точках, находящихся на стержне, с точностью 1%. [817]

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и SolidWorks[817]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	FIDESYS		SolidWorks	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0;0;0)	T = 0.00	0.00	0.00%	0.00	0.00%
(0.1;0;0)	T = -4.00	-4.00541	0.14%	-4	0.00%
(0.2;0;0)	T = 4.00	3.99038	0.24%	4	0.00%
(0.3;0;0)	T = 24.00	23.9874	0.05%	24	0.00%
(0.4;0;0)	T = 56.00	55.9856	0.03%	56	0.00%
(0.5;0;0)	T = 100.00	99.985	0.02%	100	0.00%
(0.6;0;0)	T = 156.00	155.986	0.01%	156	0.00%
(0.7;0;0)	T = 224.00	223.987	0.01%	224	0.00%
(0.8;0;0)	T = 304.00	303.99	0.00%	304	0.00%
(0.9;0;0)	T = 396.00	395.995	0.00%	396	0.00%
(1.0;0;0)	T = 500.00	500	0.00%	500	0.00%

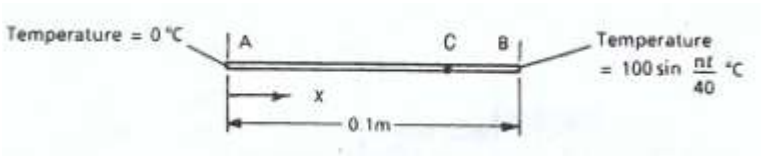
Одномерная нестационарная теплопередача

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis "One-Dimensional Transient Heat Transfer", Test No T3 [811].

Рассматривается трёхмерная задача об одномерной нестационарная теплопередаче внутри балки.

Геометрическая модель:

- Длина балки L = 0.1 м;
- Сечение балки квадратное, 0.01x0.01м.



Граничные условия:

- Температура в точке A $T_A = 0$ °C;
- Температура в точке B изменяется по гармоническому закону: $T_B = 100 \sin \frac{nt}{40}$ °C;

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности V = 35 Вт/(м ·°C);
- Удельная теплоёмкость C= 440.5 Дж/(кг ·°C);
- Плотность ρ = 7 200 кг/м^3.

Сетка:

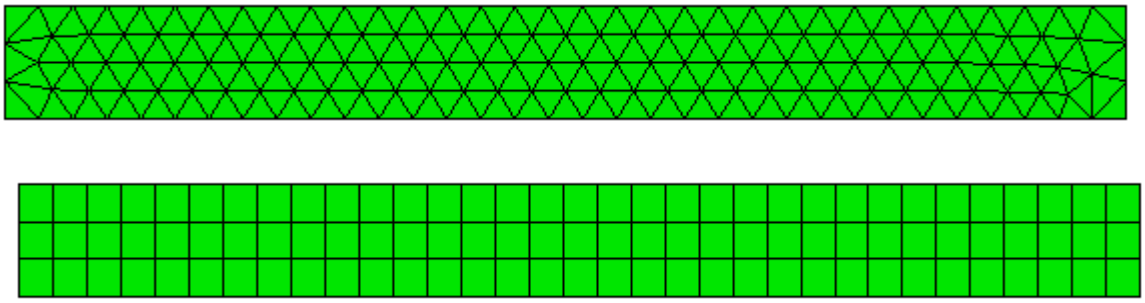
Рассматривалось три варианта расчетной схемы:

- Балочная схема (один отдельный тест):
  - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)
- Оболочечная схема (два отдельных теста):
  - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (258 элементов)
  - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (258 элементов)
  - 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4 (99 элементов)
  - 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (99 элементов)
  - 9-узловые четырехугольные оболочки Shell9 (99 элементов)
- Объемная схема (одиннадцать отдельных тестов):
  - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (1 352 элемента)
  - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (1 352 элемента)
  - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 200 элементов)
  - 20-узловые гексаэдры Hex20 (1 200 элементов)
  - 27-узловые гексаэдры Hex27 (1 200 элементов)
  - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 3го порядка (288 элементов)
  - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 4го порядка (84 элемента)
  - Спектральные элементы гексаэдры Hex20s 3го порядка (288 элементов)

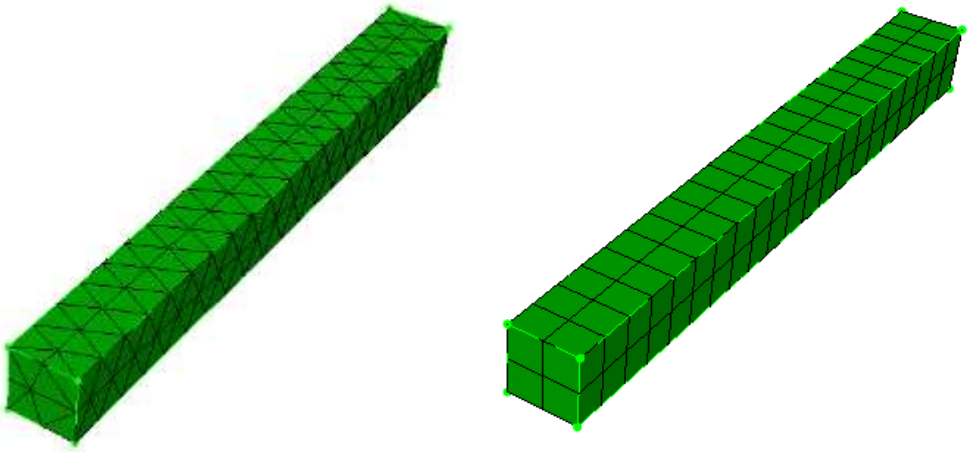
– Спектральные элементы гексаэдры Hex20s 4го порядка (84 элемента)
– Спектральные элементы гексаэдры Hex27s 3го порядка (288 элементов)
– Спектральные элементы гексаэдры Hex27s 4го порядка (84 элемента)

Балочная схема:

Оболочечная схема:



Объёмная схема:



Критерий прохождения теста:

Температура T в точке C (0.8;0;0) в некоторый момент времени t = 32c равна 36.60 °C с погрешностью 3% [811].

Результаты:

В таблицах приведены результаты расчёта в FIDESYS:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Балочная схема	
		FIDESYS (элементы Beam2)	
		Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.8738	0.75%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Оболочечная схема			
		FIDESYS			
		Треугольные (TriShell3)		Треугольные (TriShell6)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.2863	0.86%	36.3292	0.74%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Оболочечная схема					
		FIDESYS					
		Четырехугольные (Shell4)		Четырехугольные (Shell8)		Четырехугольные (Shell9)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.2241	1.03 %	36.94	0.93%	36.94	0.93%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Объемная схема (тетраэдры)			
		FIDESYS			
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.2302	1.01%	36.1248	1.30%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Объемная схема (гексаэдры)					
		FIDESYS					
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.1676	1.18 %	36.1202	1.31 %	36.1169	1.32 %

- Спектральные элементы:

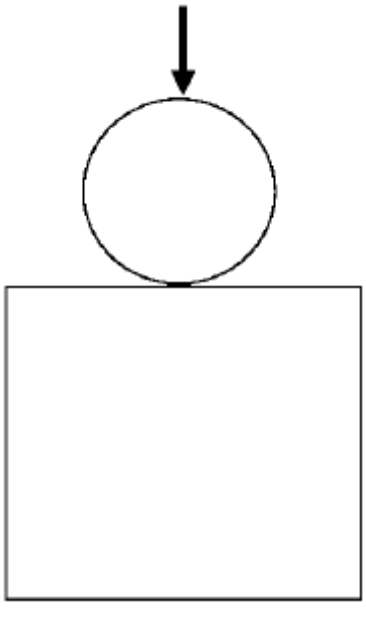
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ FIDESYS (HEX8s)				Численный анализ FIDESYS (HEX20s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.1254	1.30 %	36.1209	1.31 %	36.1254	1.30 %	36.1209	1.31 %

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ FIDESYS (HEX27s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.1254	1.30%	36.1209	1.31%

Контактные задачи

Контакт цилиндрического ролика (2D)

«Benchmark 1: 2D Cylinder Roller Contact» NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

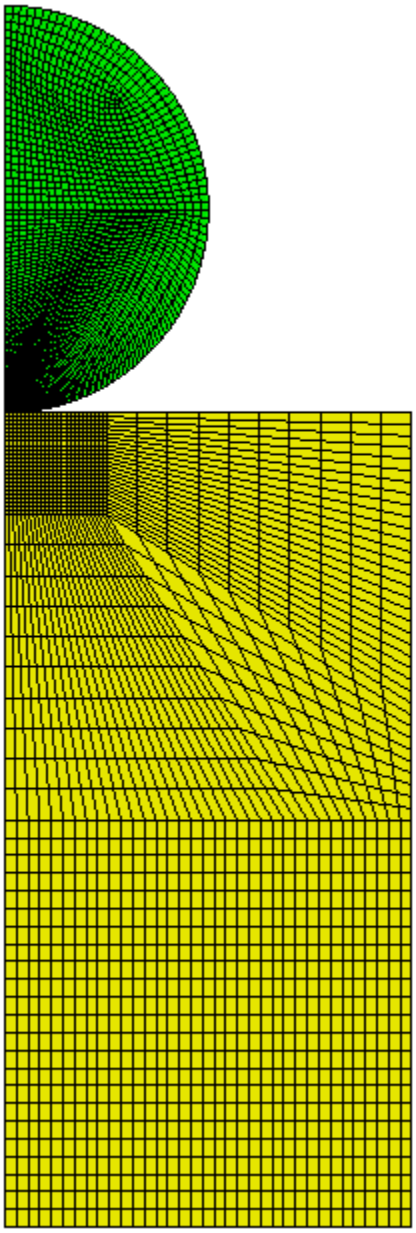


Рассматривается задача о вдавливании цилиндра в алюминевый блок. Цилиндр нагружается силой 35 кН в вертикальном

направлении. В данном тесте приведено решение для 2D случая для плоско-деформированного состояния с коэффициентом трения 0 и 0.1 (два отдельных теста).

Геометрическая модель:

- Высота блока H = 200 мм
- Ширина блока t = 200 мм
- Диаметр цилиндра D = 100 мм
- В виду симметрии рассматривается ½ часть модели



Параметры материалов:

- Изотропный
- Модуль упругости цилиндра $E_{цил} = 210$ кН/мм^2
- Модуль упругости блока $E_{блока} = 70$ кН/мм^2
- Коэффициент Пуассона $\nu_{цил} = \nu_{блока} = 0.3$

Граничные условия:

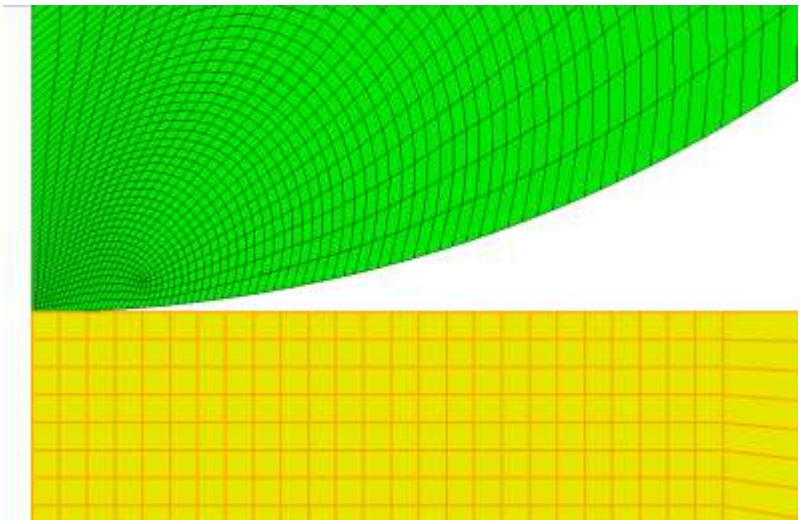
- Левые боковые поверхности цилиндра и блока закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- Нижняя грань блока жестко закреплена $u_x = u_y = 0$
- К верхней точки цилиндра приложена сила F = 35 кН (для симметричного случая F = 17.5 кН)

Сетка:

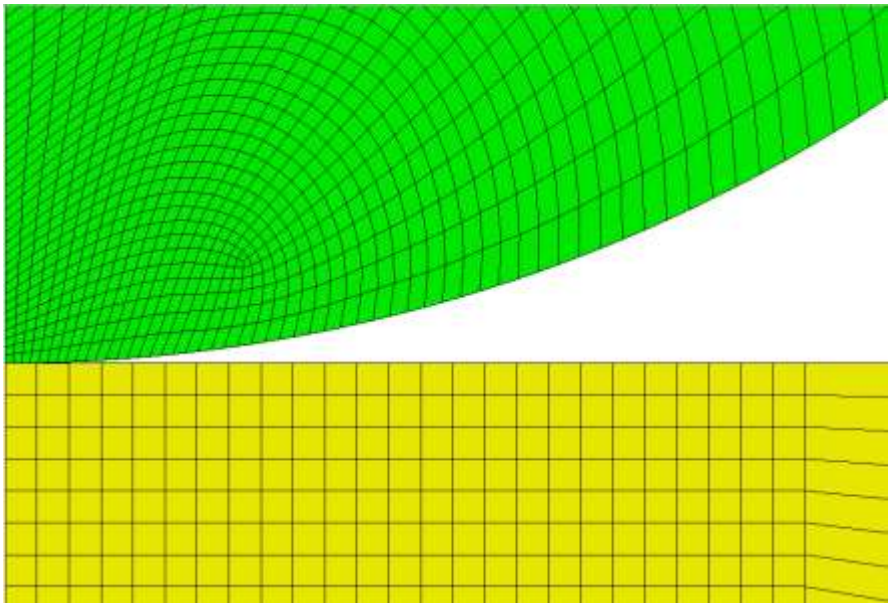
Пять типов конечных элементов (пять отдельных теста):

- 4-узловые четырехугольники Quad4
- 8-узловые четырехугольники Quad8
- 9-узловые четырехугольники Quad9
- 3-узловые треугольники Tri3
- 6-узловые треугольники Tri6

Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов QUAD4



Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов QUAD8/QUAD9



Критерий прохождения теста:

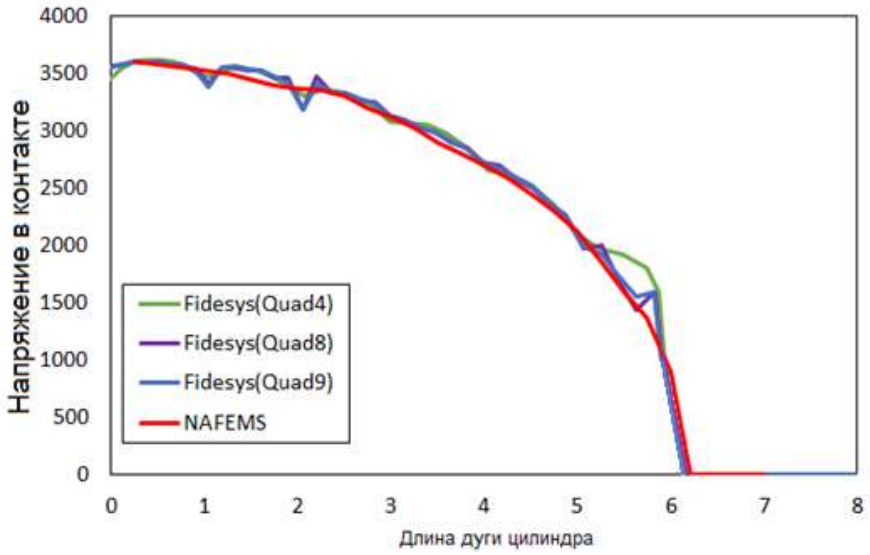
- Длина зоны контакта 6.21 мм
- Максимальное напряжение в контакте p_{max} = 3 585.37 Н/мм^2

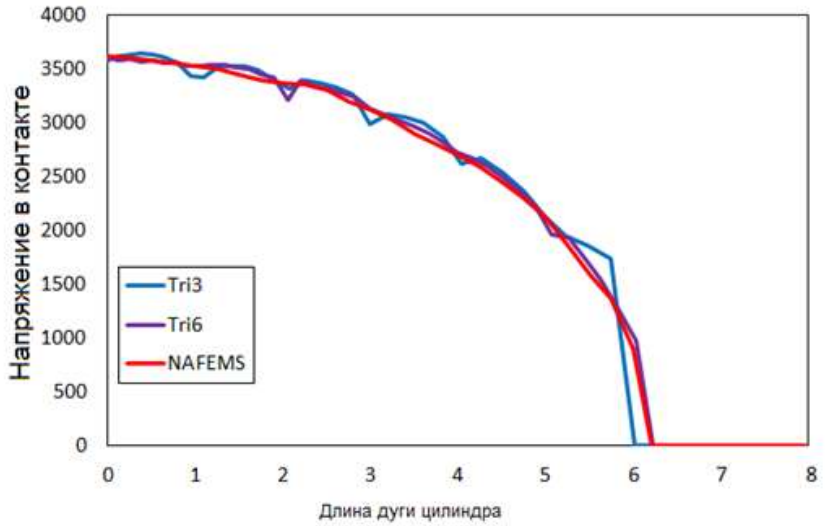
Результаты:

На следующих графиках приведены зависимости напряжений в контакте для данных NAFEMS[30] [813], FIDESYS.

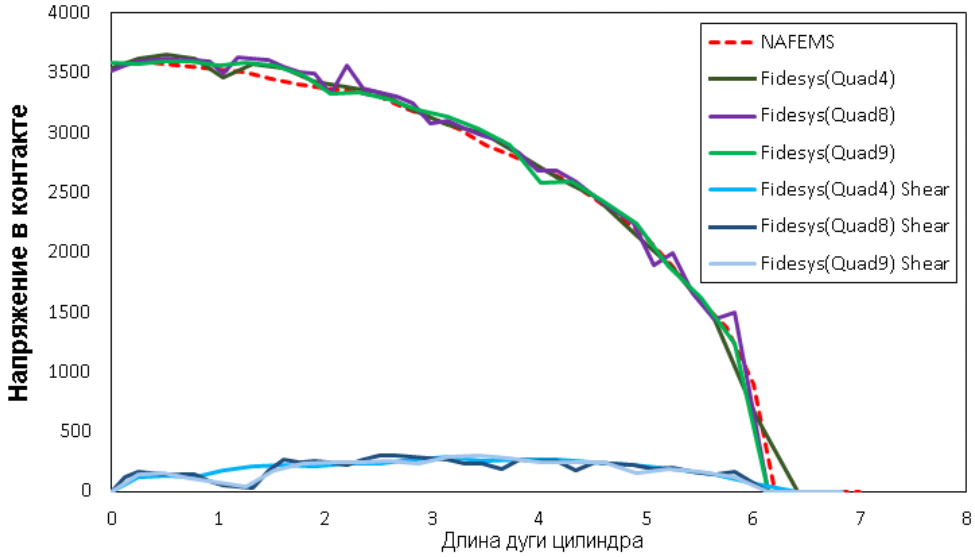
Распределение напряжений в контакте на поверхности цилиндра вблизи контакта (случай без трения):

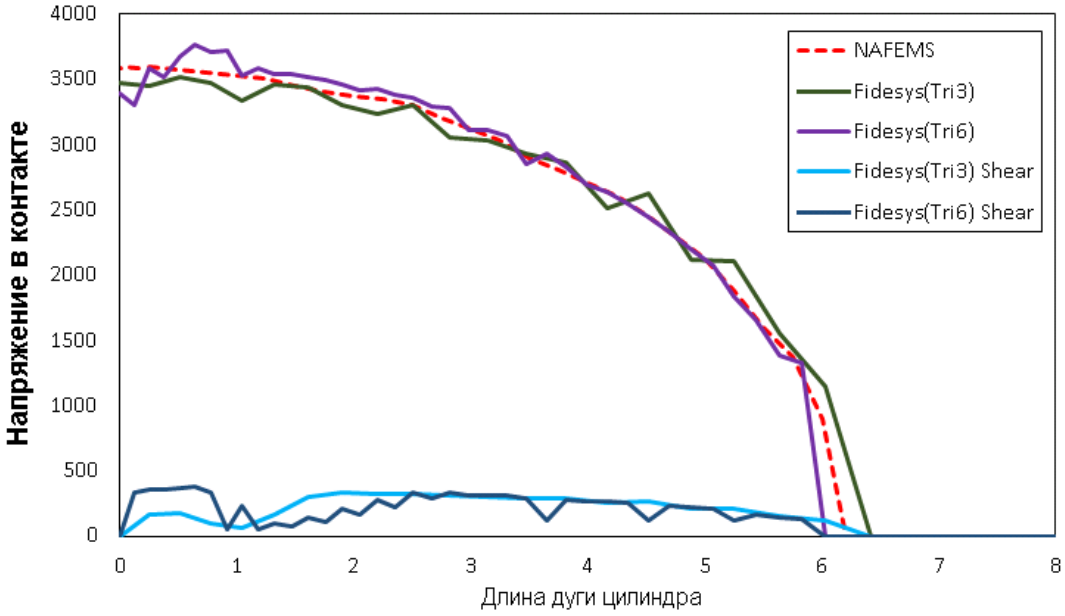
[30] Численные решения в указанном источнике NAFEMS получены при помощи программ ABAQUS и MSC.MARC.



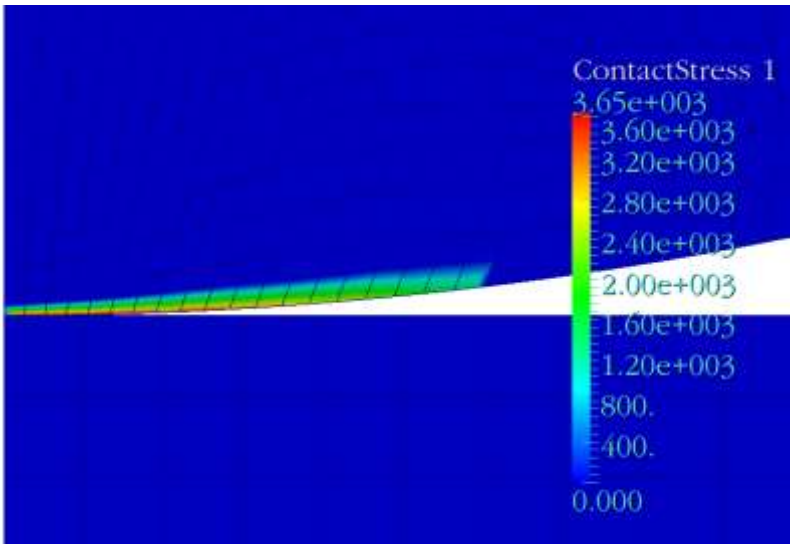


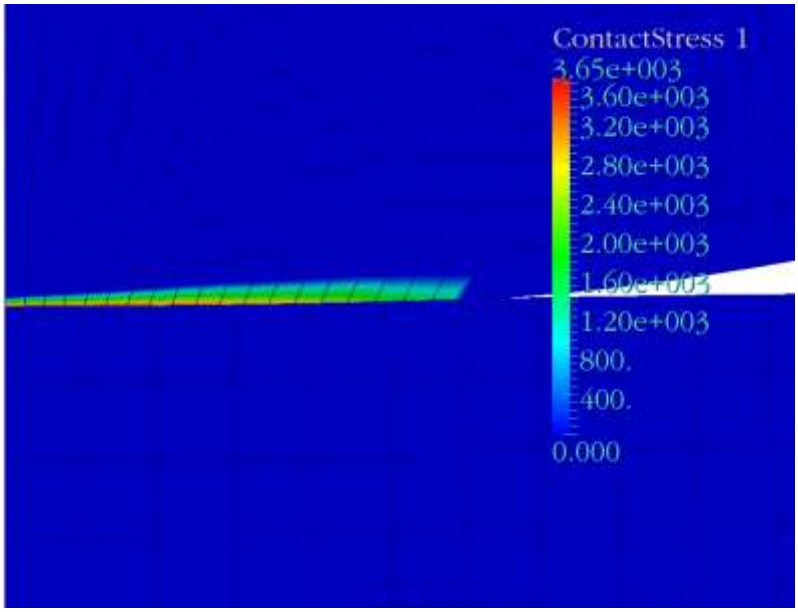
Распределение напряжений в контакте на поверхности цилиндра вблизи контакта (коэффициент трения 0.1):



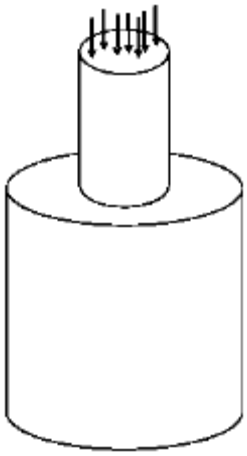


На рисунках ниже представлены распределения напряжений в контакте, полученные для элементов quad9, на недеформированном и деформированном видах модели соответственно.





<u>3Д-Штамп (цилиндр с закругленными гранями)</u>



«Benchmark 2: 3D Punch (Rounded Edges)» NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

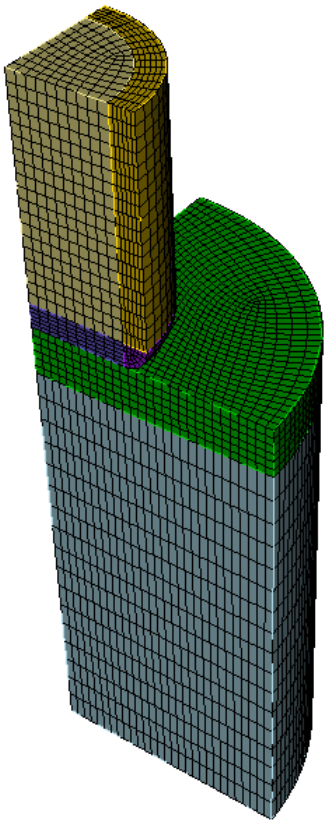
Рассматривается задача о вдавливании стального штампа с закругленными гранями в алюминивое основание. Штамп нагружается равномерным давлением в вертикальном направлении. В данном тесте приведено решение для 3D случая с учетом и без учета трения (коэффициент трения 0 и 0.1 - два отдельных теста).

Геометрическая модель:

- Диаметр штампа $D_{штампа}$ = 100 мм
- Высота штампа $H_{штампа}$ = 100 мм
- Диаметр основания $D_{осн}$ = 200 мм

- Высота основания $H_{осн}$ = 200 мм
- В виду симметрии рассматривается ¼ часть модели

Параметры материалов:



- Изотропный
- Модуль упругости штампа $E_{штампа}$ = 210 кН/мм^2
- Модуль упругости основания $E_{осн}$ = 70 кН/мм^2
- Коэффициент Пуассона $\nu_{цил} = \nu_{блока}$ = 0.3

Граничные условия:

- Внутренние боковые поверхности штампа и основания закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- Нижняя грань основания жестко закреплена $u_x = u_y = u_z = 0$
- На верхнюю поверхность штампа приложено равнометрное давление P = 100 Н/мм^2

Сетка:

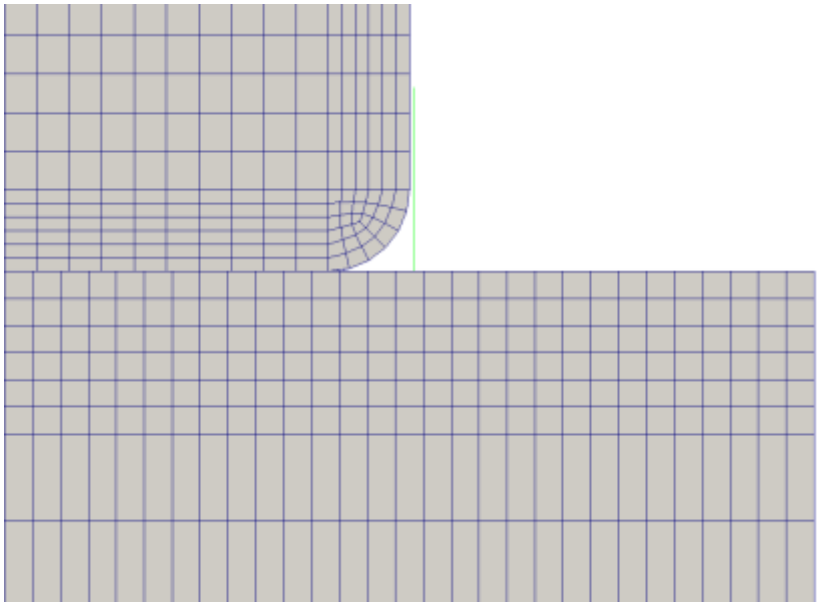
Примерные размеры элементов:

- Для штампа 4 мм
- Для основания 3.5 мм

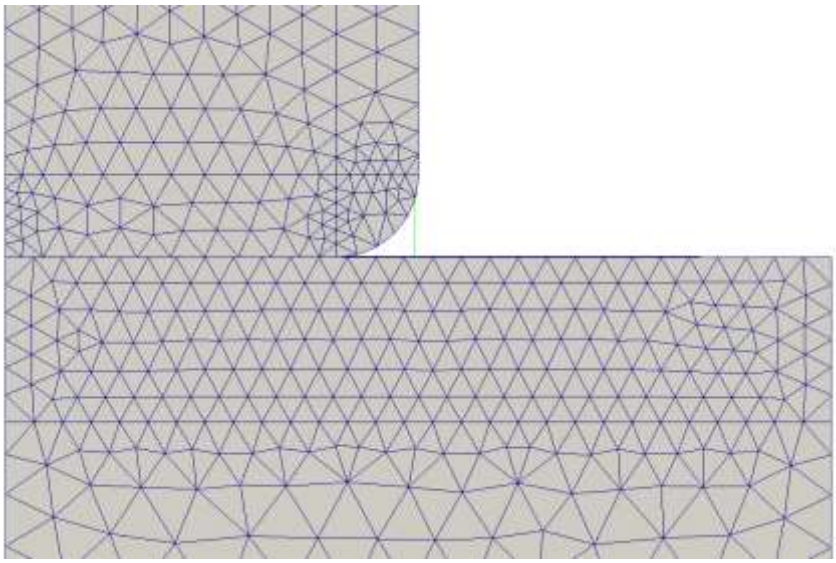
Два типа конечных элементов (два отдельных теста):

- 8-узловые гексаэдры Hex8 (штамп 4 656 элементов, основание 18 515 элементов)
- 4-узловые тетраэдры Tetra4 (штамп 23 007 элементов, основание 57 828 элементов)

Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов Hex8:



Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов Tetra4:



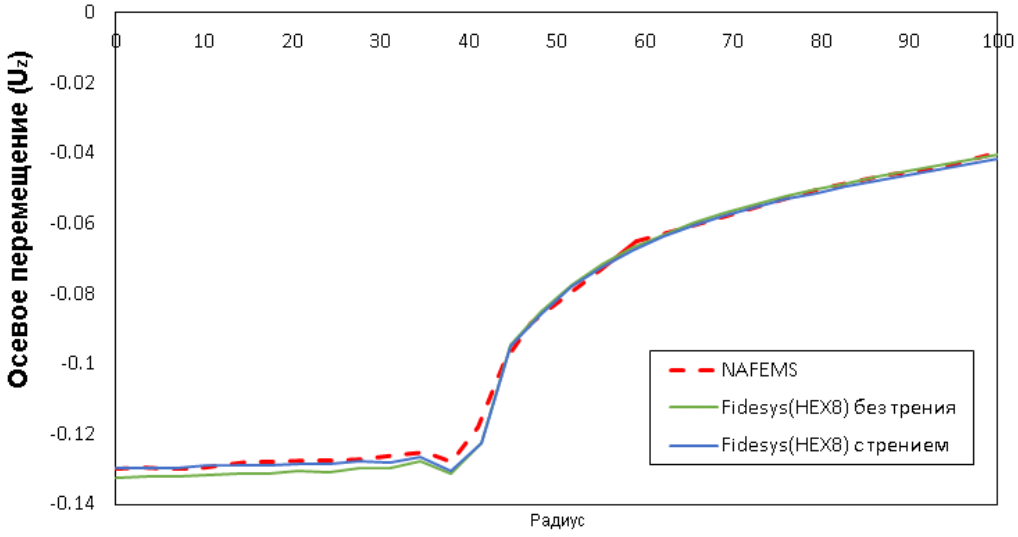
Критерий прохождения теста:

Малые отличия перемещений и напряжений в контакте, полученных в CAE Fidesys, от приведенных в NAFEMS[31]

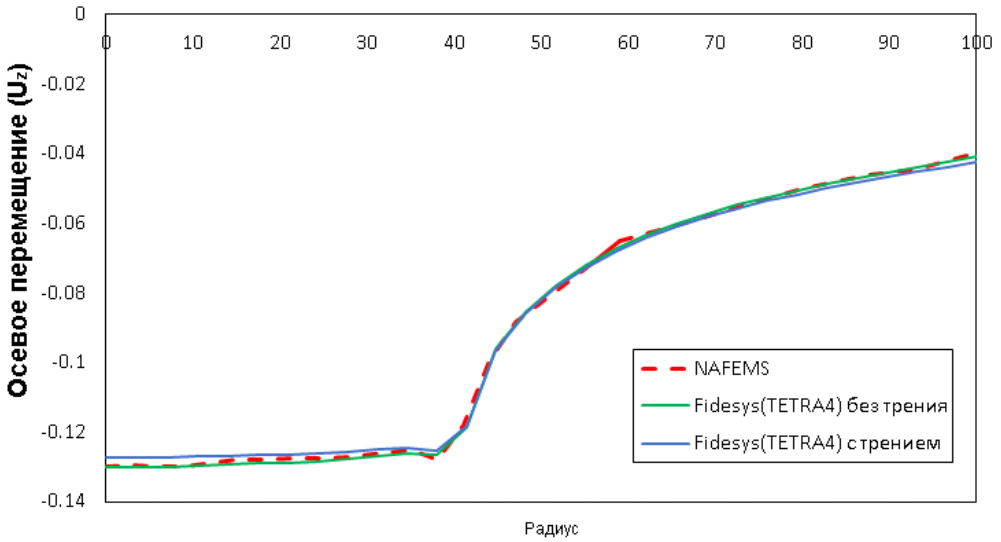
Результаты:

На следующих графиках приведены зависимости напряжений в контакте для данных NAFEMS [813], FIDESYS.

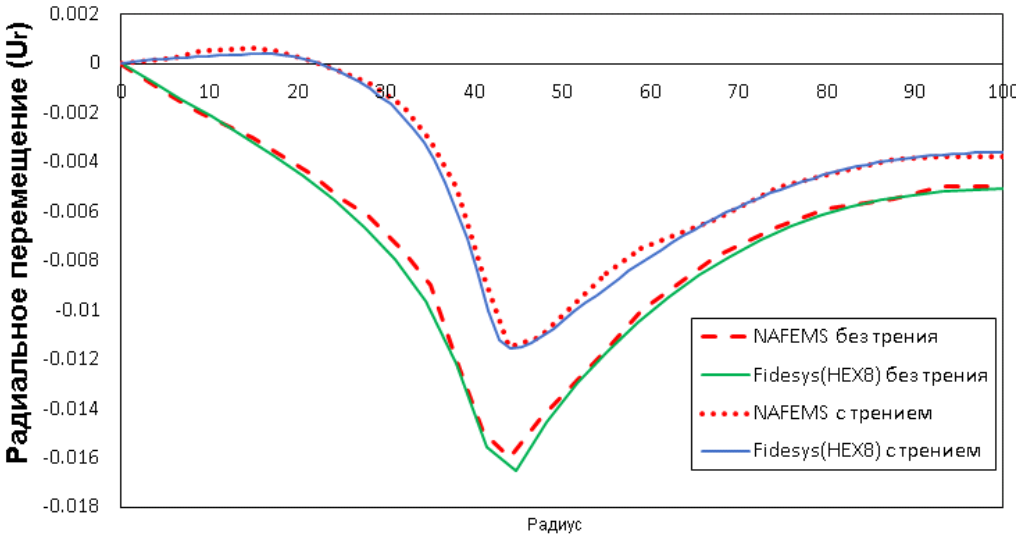
Распределение перемещений Uz вдоль радиуса основания:

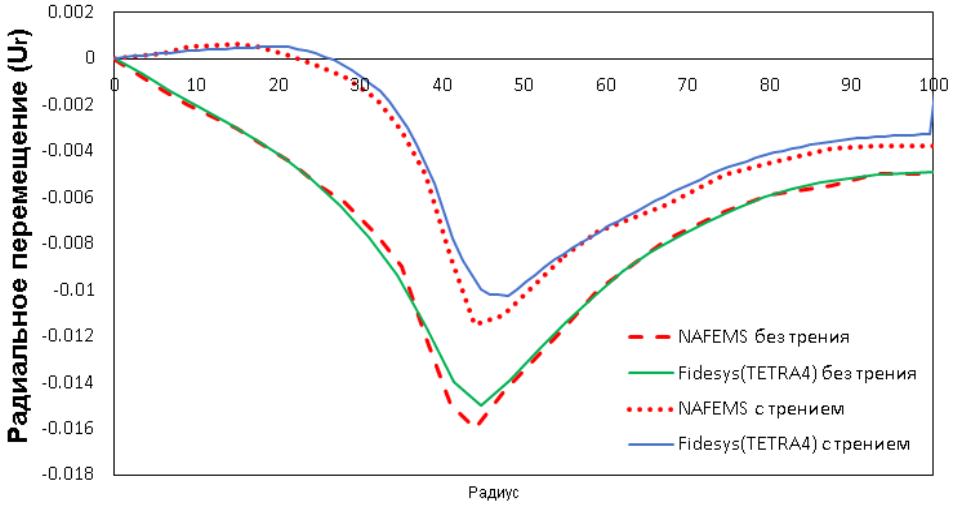


[31] Численные решения в указанном источнике NAFEMS получены при помощи программ ABAQUS и MSC.MARC..

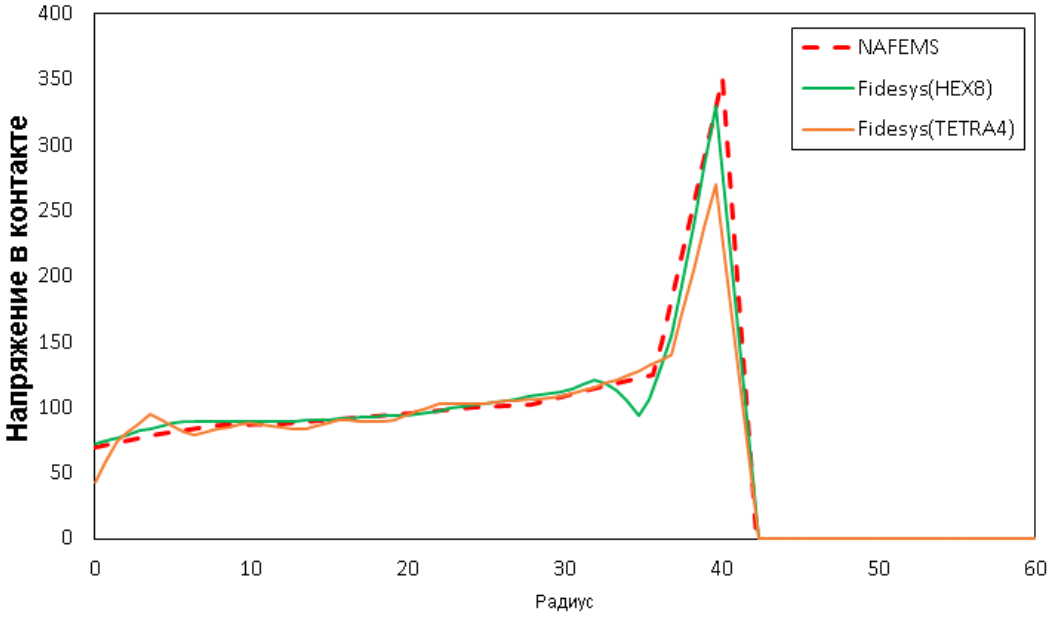


Распределение перемещений Ur вдоль радиуса основания:

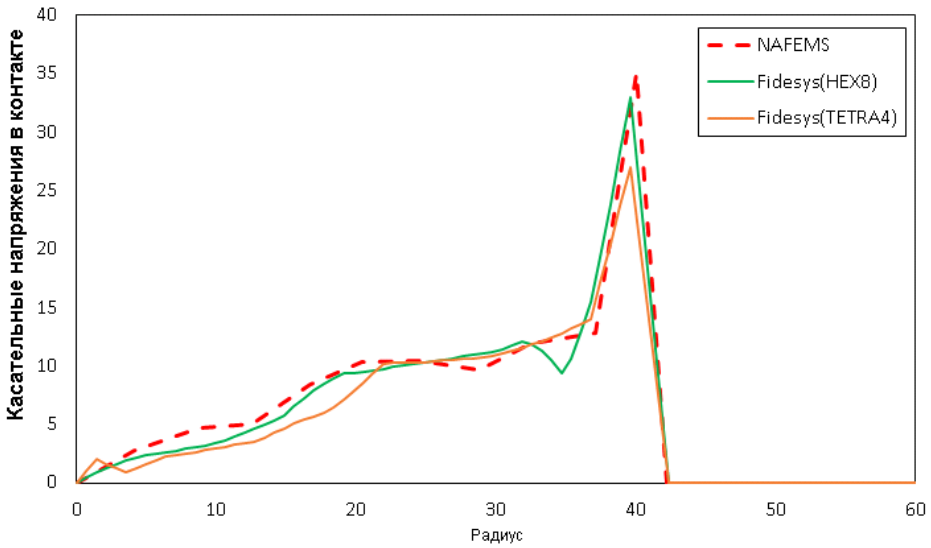




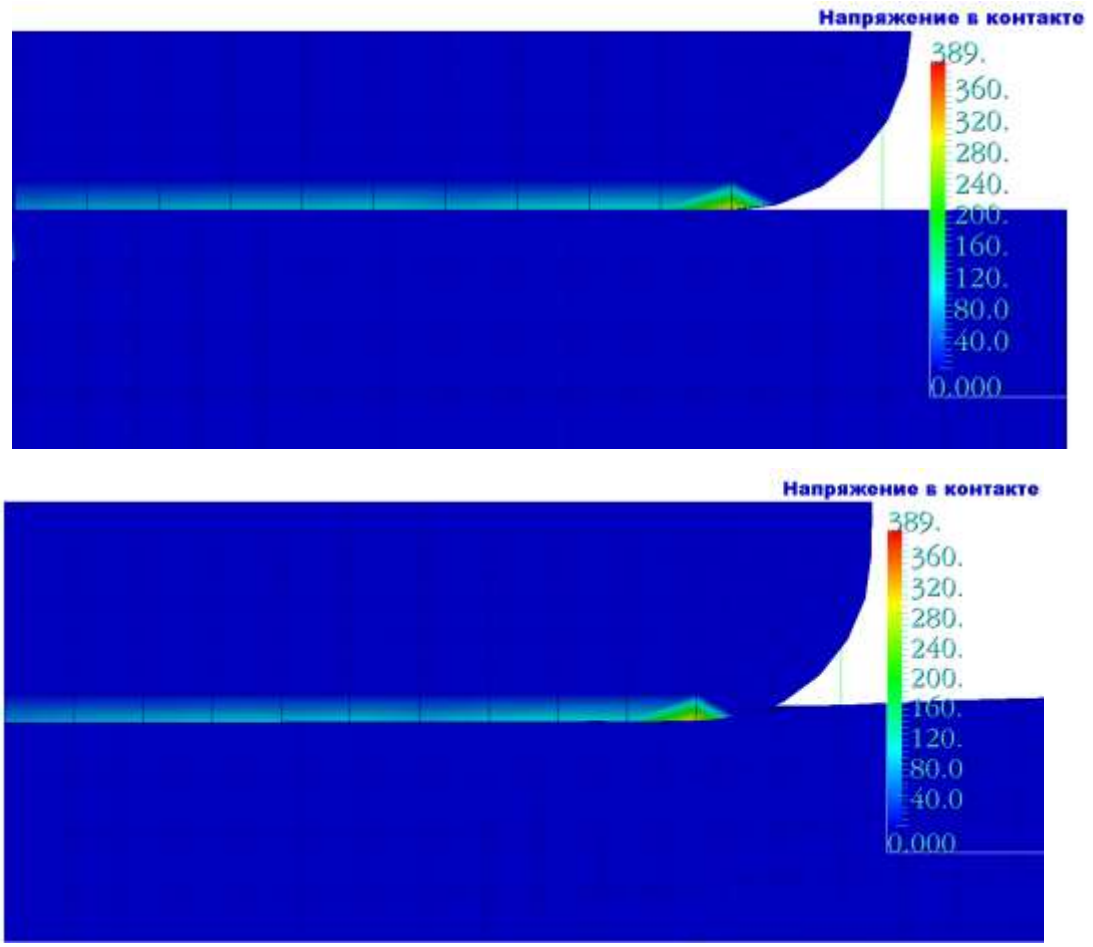
Распределение напряжений в контакте вдоль радиуса штапма с учетом трения 0.1:



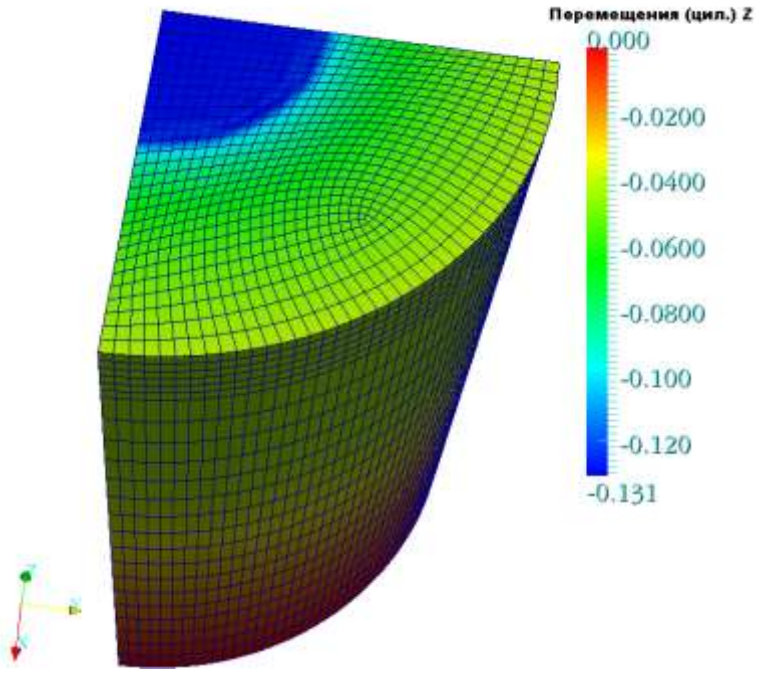
Распределение напряжений в контакте вдоль радиуса штапма с учетом трения 0.1:



На рисунках ниже представлено распределение напряжения в контакте, полученное для элементов HEX8, на недеформированном и деформированном видах для фрагмента модели.



На рисунке ниже представлено распределения осевых перемещений для основания и напряжения в контакте для штампа, полученные для элементов HEX8.

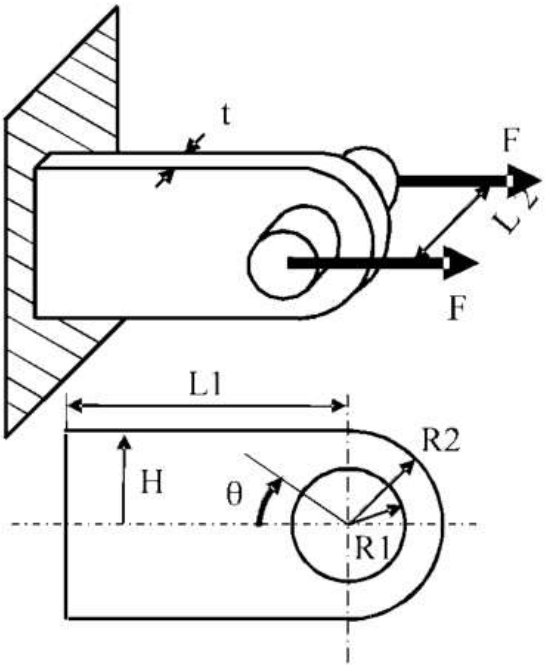


Нагружение штифта (3Д)

«Benchmark 5: 3D Loaded Pin)» NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

Рассматривается задача о нагружении стального штифта силой 100 кН. В данном тесте приведено решение для 3D случая с учетом трения 0.1.

Геометрическая модель:



- L1 = 200 мм
- L2 = 20 мм
- H = 100 мм
- t = 10 мм
- R1 = 50 мм
- R2 = 100 мм

Параметры материала:

- Изотропный
- Материал штифта:
  - Модуль упругости $E_{штифта} = 210x10^3$ Н/мм^2
  - Коэффициент Пуассона $\nu_{штифта} = 0.3$
- Материал полосы:
  - Модуль упругости $E_{полосы} = 1.85x10^4$ Н/м^2
  - Коэффициент Пуассона $\nu_{полосы} = 0.3$

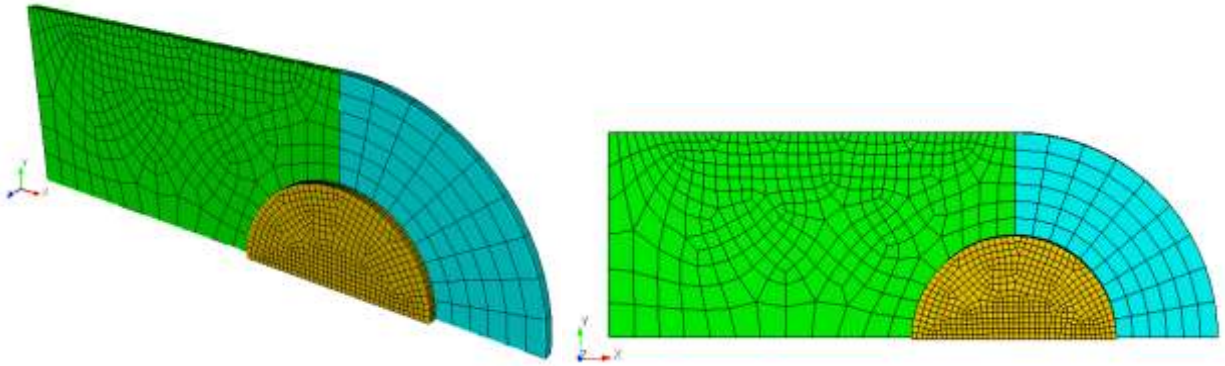
Граничные условия:

- Рассматривается ¼ часть модели
- Внутренние боковые поверхности штампа и основания закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- Нижняя грань основания жестко закреплена $u_x = u_y = u_z = 0$
- На верхнюю поверхность штампа приложена сила P = 50 кН (с учетом симметрии прикладывается суммарная сила 25 кН)

Сетка:

27-узловые гексаэдры HEX27

Конечно-элементная сетка для элементов Hex27:



Настройки контактной пары:

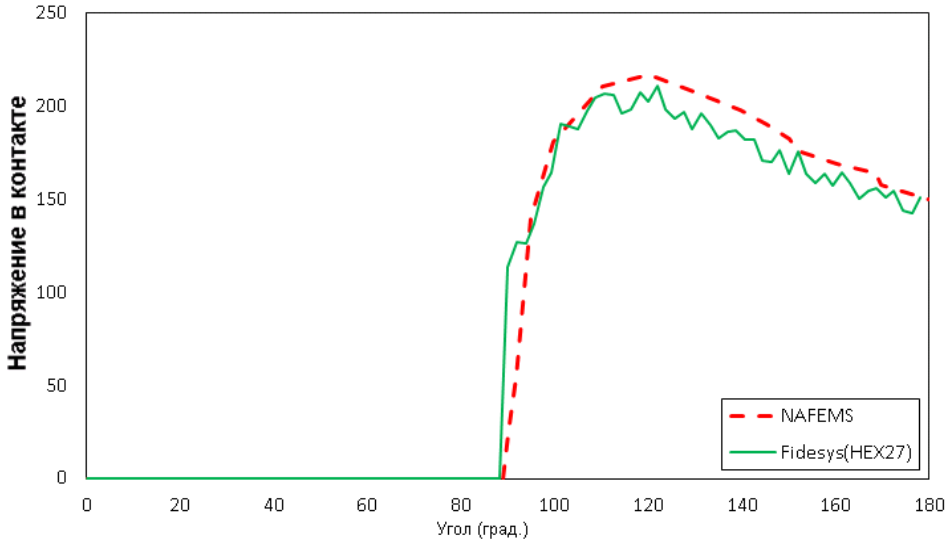
- Ведущий регион: внутренняя вогнутая поверхность полосы
- Ведомый регион: внешняя выпуклая поверхность штифта
- Коэффициент трения 0.1
- Коэффициент жесткости по нормали 0.05
- Коэффициент жесткости по касательной 0.5
- Точность определения контакта 0.1

Критерий прохождения теста:

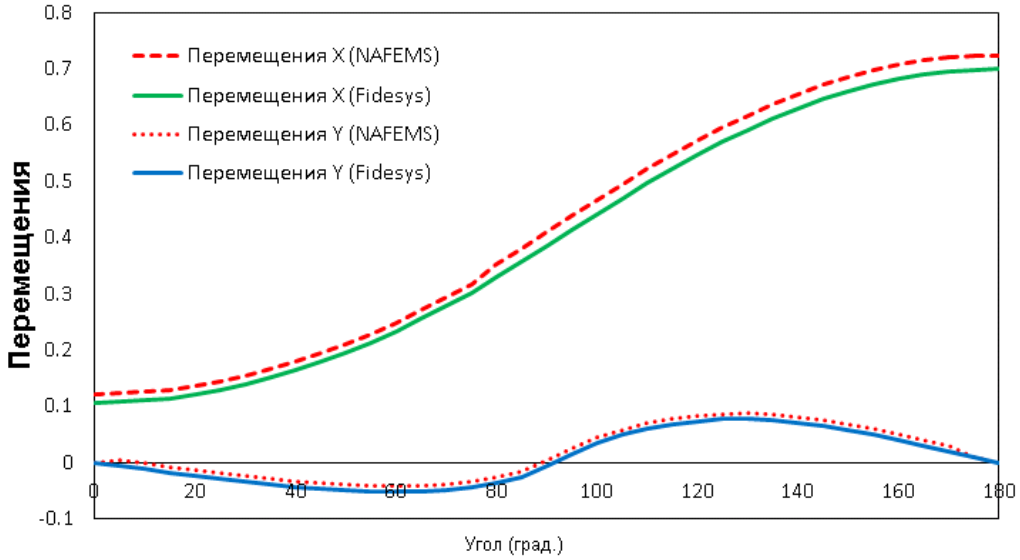
Малые отличия перемещений и напряжений в контакте, полученных в CAE Fidesys, от приведенных в NAFEMS

Результаты:

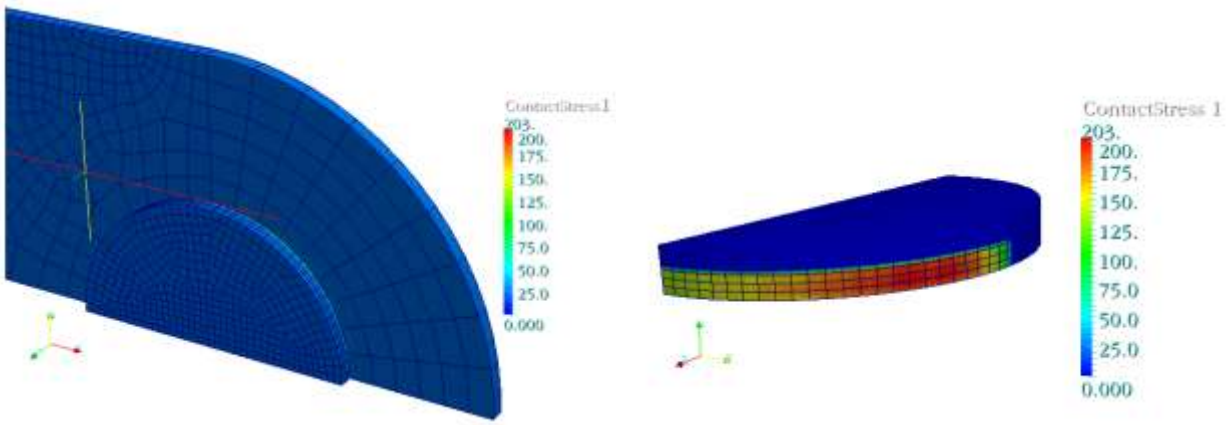
На следующих графиках приведены зависимости напряжений в контакте и перемещений (в элементах ведущего региона) для данных NAFEMS[32] [813], FIDESYS.



[32] Численные решения в указанном источнике NAFEMS получены при помощи программ ABAQUS и MSC.MARC.



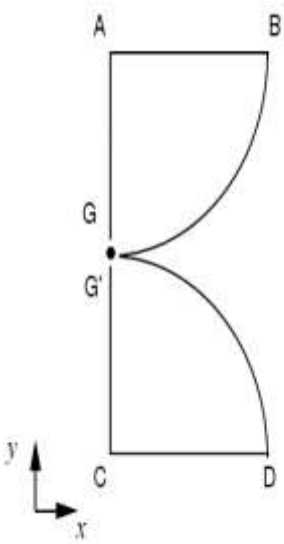
На рисунках ниже представлено распределение напряжения в контакте, полученные для элементов HEX27, на недеформированном виде для фрагмента модели.



<u>Задача Герца для двух полусфер</u>

G. DUMONT: "Method of the active stresses applied to the unilateral contact" Note HI-75/93/016

Решается задача Герца для двух полуфер. На верхнюю и нижнюю грани полусфер прикладывается перемещение Uy, равное 2 и -2, соответственно. В данном тесте приведено решение для 3D случая без учета трения.



Геометрическая модель:

- Радиус сфер R = 50 мм

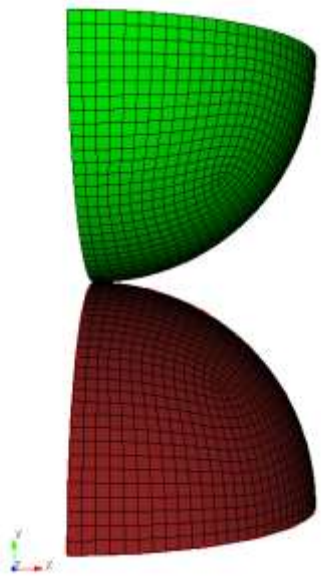
- В виду симметрии рассматривается ¼ часть модели

Параметры материалов:

- Изотропный
- Модуль упругости E = 20 000 МПа
- Коэффициент Пуассона ν = 0.3

Граничные условия:

- Боковые поверхности закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- К верхней поверхности верхней полусферы приложено перемещение Uy = -2 мм
- К нижней поверхности нижней полусферы приложено перемещение Uy = 2 мм



Сетка:

8-узловые гексаэдры HEX8

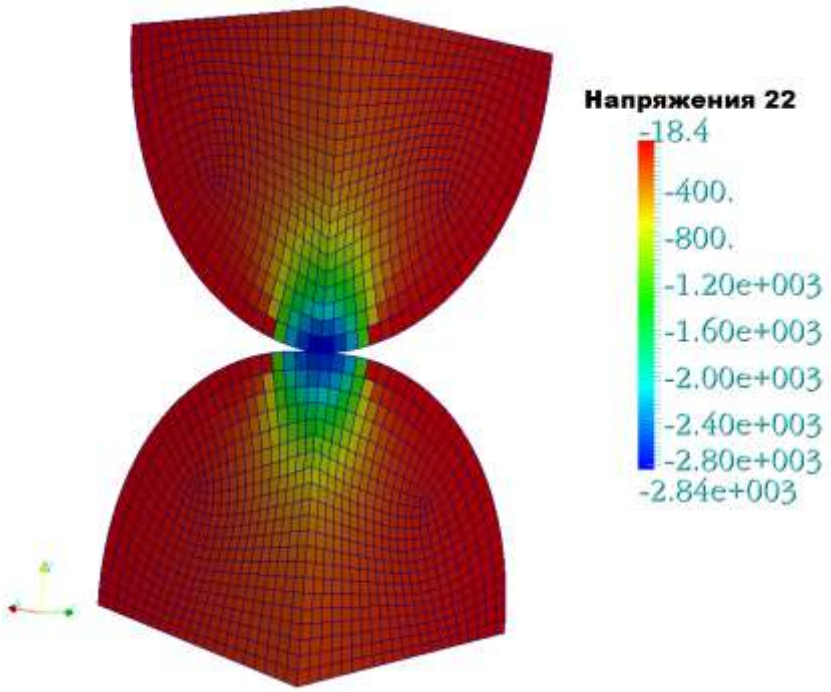
Критерий прохождения теста:

Напряжение σ_{22} в точке G равно -2 798.3 МПа [814]

Результаты:

Полученное в результате решения значение напряжения σ_{22} в точке G равно -2 837.1 МПа и отличается от исходного на 1.4%.

На рисунке ниже представлено распределение напряжения σ_{22} в контакте, полученные для элементов HEX8.



Расчет эффективных свойств композитов

Однослойный волокнистый композит ($N_{нитией}$=1)

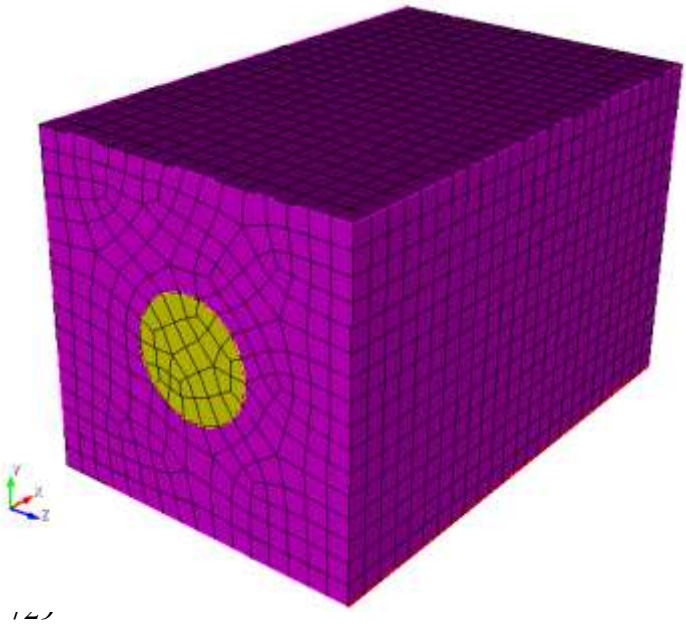
Решается задача о нахождении эффективных свойств материала для однослойного волокнистого композита. Модель представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами 25x16x16 мм. По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 мм и радиусом 2.85459861019 мм (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%). Решение задачи взято из источника [115].

Геометрическая модель:

- Параллелепипед 25 мм x 16 мм x 16 мм

Материал:

- Свойства материала нити:
  - Модуль упругости E=2 000 МПа
  - Коэффициент Пуассона ν=0.2
- Свойства материала матрицы:
  - Модуль упругости E=2 МПа
  - Коэффициент Пуассона ν=0.3



Граничные условия:

Периодические

Сетка:

8-узловые гексаэдры Hex8

Критерий прохождения теста (точность 3%):

- C_1111 = 202.48 МПа
- C_1122 = 1.22711 МПа
- C_1133 = 1.22711 МПа
- C_1212 = 0.938421 МПа
- C_1313 = 0.938421 МПа
- C_2222 = 3.11029 МПа
- C_2233 = 1.33286 МПа
- C_2323 = 0.888717 МПа
- C_3333 = 3.11029 МПа

Результаты:

В таблице ниже представлено сравнение значений для критерия прохождения теста и результаты расчёта, полученные FIDESYS.

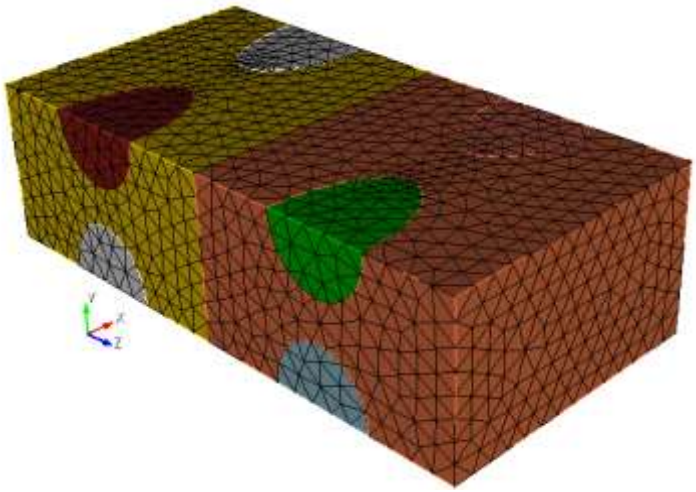
Величина	Критерий прохождения теста	FIDESYS	
		Hex8	
		Значение	Ошибка
C_1111	1.2	1.2	<0.01%
C_1122	0.4	0.4	<0.01%
C_1133	0.4	0.4	<0.01%
C_1212	0.4	0.4	<0.01%
C_1313	0.4	0.4	<0.01%
C_2222	1.2	1.2	<0.01%
C_2233	0.4	0.4	<0.01%
C_2323	0.4	0.4	<0.01%
C_3333	1.2	1.2	<0.01%

Двуслойный слоисто-волокнистый композит.

Решается задача о нахождении эффективных свойств материала для двуслойного слоисто-волокнистого композита. Модель имеет следующие параметры: диаметр нити 6.0 мм, угол наклона нитей 30^{o}, шаг нитей 8.0 мм, толщина слоя 16.0 мм. Решение задачи взято из источника [115].

Геометрическая модель:

- Диаметр нити 6.0 мм
- Угол наклона нитей 30^{o}
- Шаг нитей 8.0 мм
- Толщина слоя 16.0 мм



Параметры материала:

- Свойства материала нити:

  - Модуль упругости E=200 000 МПа

  - Коэффициент Пуассона ν=0.25
- Свойства материала матрицы:

  - Модуль упругости E=2 МПа

  - Коэффициент Пуассона ν=0.49

Граничные условия:

Периодические

Сетка:

4-узловые тетраэдры Tetra4.

Критерий прохождения теста (точность 3%):

- C_1111 = 24 852.4 МПа
- C_1122 = 8 281.54 МПа
- C_2222 = 2 763.12 МПа
- C_1212 = 8 283.5

Результаты:

В таблице ниже представлено сравнение значений для критерия прохождения теста и результаты расчёта, полученные FIDESYS.

Величина	Критерий прохождения теста	FIDESYS	
		Tetra4	
		Значение	Ошибка
C_1111	24 852.4	24 852.4	<0.01%
C_1122	8 281.54	8 281.54	<0.01%
C_2222	2 763.12	2 763.12	<0.01%
C_1212	8 283.5	8 283.5	<0.01%