О Т З Ы В

официального оппонента
на диссертацию Фуфаева Дениса Владимировича
«Тензорные произведения операторов и сходимость почти всюду»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 -
« вещественный, комплексный и функциональный анализ »

В работе обобщаются результаты о сходимости и о суммируемости рядов Фурье (одномерных, кратных и счетнократных) с помощью исследования действия на функции тензорных произведений направленностей операторов, имеющих мажоранту слабого типа $(1,1)$ и (∞,∞). В 1915г. в своей диссертации Н.Н. Лузин высказал гипотезу о сходимости почти всюду ряда Фурье функции из $L^2(\mathbb{T})$. Справедливость этой гипотезы доказал в 1966г. Л. Карлесон. Это явилось импульсом для дальнейшего развития вопросов о сходимости одномерных и кратных рядов Фурье. В 1970г. Ч. Феферман построил пример непрерывной функции двух переменных, ряд Фурье которой расходится всюду по прямоугольникам. В 1970г. Н.Р. Тевзадзе доказал, что ряд Фурье функции двух переменных из $L^2(\mathbb{T}^2)$ почти всюду сходится по квадратам. Феферман в 1971г. обобщил этот результат на функции из $L^p(\mathbb{T}^d), p > 1, d \in \mathbb{N}$ (случай $d = 1$ доказал Р. Хант). В том же году П. Шелин доказал, что если $f \in L(\log^+ L)^d(\log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^N)$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится по кубам почти всюду. Его усилил Н.Ю. Антонов, показав, что этот же результат справедлив для более широкого класса функций, а именно для класса $L(\log^+ L)^d(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^N)$. Помимо сходимости рядов Фурье рассматривались вопросы об их суммируемости. Еще в 1905г. А. Лебег доказал, что ряд Фурье функции одной переменной суммируется методом средних арифметических к этой функции почти всюду. Для кратных рядов Фурье и сходимости по кубам и для сходимости по Прингсхейму (или по прямоугольникам) результаты о суммируемости методами средних арифметических и Абеля-Пуассона были получены Б. Йессеном, Дж. Марцинкевичем и А. Зигмундом (1935, 1939 гг.). Причем для сходимости по кубам результат вполне аналогичен результату Лебега, а для сходимости средних по Прингсхейму требуется принадлежность функции классу $L(\log^+ L)^{N-1}(\mathbb{T}^N)$.

В первой главе диссертации исследуется сходимость направленностей операторов и тензорных произведений направленностей операторов на пространствах интегрируемых функций.

Известна следующая

Теорема. *Пусть последовательность линейных операторов* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такова, что сублинейный оператор* $Tf(x) = \sup_n |T_n f(x)|$ *имеет слабый тип* $(p,p), 1 \leqslant p < \infty$ *и пусть для любой функции* ϕ *из всюду плотного в* $L^p[0,1)$ *множества* $\lim_{n\to\infty} T_n\phi(x) = \phi(x)$ *п.в. на* $[0,1)$. *Тогда для всякой функции* $f \in L^p[0,1)$ *имеем* $\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ *п.в. на* $[0,1)$.

В диссертации рассматривается обобщение этой теоремы для $p = 1$ в различных направлениях. Первой доказана

Теорема 1.1.1. *Пусть* $(X,\mu), (Y,\nu)$ *пространства с мерой,* $\{T_n\}_{n\in A}$ *- направленность ограниченных операторов, переводящих* $L^1(X,\mu)$ *в* $L^1(Y,\nu)$, *причем соответствующий максимальный оператор имеет слабый тип* $(1,1), U : L^1(X,\mu) \to L^1(Y,\nu)$ *- ограниченный линейный оператор и пусть для любой функции* ϕ *из всюду плотного в* $L^1(X,\mu)$ *множества выполнено* $\lim_{n\in A} T_n\phi(y) = U\phi(y)$ *п.в. на* (Y,ν). *Тогда для всякой функции* $f \in L^1(X,\mu)$ *имеем* $\lim_{n\in A} T_n f(y) = Uf(y)$ *п.в. на* (Y,ν).

Таким образом рассматриваются более общие пространства с мерой, соответственно, более общие классы операторов, вместо тождественного оператора рассматривается оператор U, а также рассматривается сходимость не по последовательности операторов, а сходимость по направленности операторов.

Важность этого направления исследований видна, например, при изучении вопросов сходимости и суммируемости рядов Фурье функций различных классов. Действительно, нередко в качестве всюду плотного множества в данном функциональном классе выступают полиномы по некоторому базису, для которых вопрос о сходимости очевидным образом решается. Тогда применение сформулированных теорем и их обобщений позволяет сделать вывод о сходимости или суммируемости рядов Фурье уже для произвольных функций данного класса.

Теоремы 1.1.2 и 1.1.3 представляют собой обобщения неравенства Харди-Литтлвуда об оценке мажорантной функции средних арифметических частичных сумм ряда Фурье через норму в L^1 функции $|f|\ln^+|f|$.

Теорема 1.1.3. *Пусть* $(X,\mu), (Y,\nu)$ *- пространства с мерой,* $\nu(Y) < \infty, f \in L^1(X,\mu),\ f \geqslant 0, f\ln(f+1) \in L^1(X,\mu), T : L^0(X) \to L^0(Y)$ *- оператор слабого типа* $(1,1)$ *и* (∞,∞) *и задано* $\varepsilon > 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\int_Y |Tf(y)|d\nu(y) \leqslant A_\varepsilon \int_X f(x)\ln(f(x)+1)d\mu(x) + \varepsilon.$$

Далее в разделе 1.2 эти результаты переносятся на проективные тензорные произведения пространств $L(X^i, \mu^i), i = 1, ..., k$ и направленности ограниченных линейных интегральных операторов, имеющих максимальные операторы слабого типа $(1,1)$ и (∞, ∞) .

В разделе 1.3 вводится понятие локально интегрируемой на разложимом пространстве функции и понятие операторов слабого типа для разложимых пространств. Теоремы 1.3.1, 1.3.2 и 1.3.3 являются обобщениями на случай таких пространств соответствующих теорем раздела 1.2.

Разработанный в первой главе математический аппарат применяется в главе 2 к кратным рядам Фурье и к дифференцированию кратных интегралов.

Рассматривается представление N - мерного тора T^N в виде произведения D конечномерных торов $T^{M_i}(i = 1, 2, ..., D)$ и определяется D - регулярное возрастание мультииндексов.

Для средних Чезаро и Абеля доказана

Теорема 2.1.1. *Пусть* $f \in L(\log^+ L)^{D-1}(\mathbb{T}^N)$. *Тогда средние Фейера и Абеля-Пуассона функции* f *сходятся* D *- ограниченно к* f *почти всюду на* $\mathbb{T}^N$.

В следующей теореме для функций этого же класса получен результат о сходимости по Прингсхейму D-кратных средних Марцинкевича.

Раздел 2.2 посвящен дифференцированию кратных интегралов и сходимости орторекурсивных разложений по системе характеристических функций брусов.

В третьей главе диссертации рассматривается суммируемость рядов Фурье функций, определенных на бесконечномерном торе T^∞. Вопросы гармонического анализа на T^∞ начал рассматривать Б.Йессен в 30-е годы прошлого века. Системой Йессена называется тригонометрическая системе функций счетного множества переменных, являющаяся системой характеров на T^∞:

$$\prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r} = \theta_{n_1,\dots,n_p}(x), \quad p \in \mathbb{N},\ n_r \in \mathbb{Z}.$$

В работе доказана

Теорема 3.1.1. *Пусть $f \in L(\mathbb{T}^\infty)$. Тогда средние Фейера сходятся в усиленном смысле к f по кубам п.в. на $\mathbb{T}^\infty$.*

В теореме 3.1.2 доказано, что если $f \in \cap_{r=1}^{\infty} L(\log^+ L)^r(\mathbb{T}^\infty)$, то средние Фейера сходятся в усиленном смысле к f по Прингсхейму почти всюду на $\mathbb{T}^\infty$.

В следующей теореме 3.1.3 рассматривается промежуточный случай регулярности возрастания индексов.

В разделе 3.2 обсуждается построение более общих, чем $\mathbb{T}^\infty$, абстрактных пространств с мерой и аналоги теорем 3.1.1-3.1.3 в этом случае.

В диссертации имеется некоторое количество опечаток и неточностей.

1. В предложении на С.5 (1-7 строчки сверху) вместо «сходимости» рядов лучше написать «суммируемости», чтобы эта фраза, взятая изолированно, на вызывала недоумения.

2. На С.14 (в середине стр.) следует уточнить определение "сублинейного"оператора в соответствии с современной терминологией. Там же в выносной формуле слева должна быть мера ν, а не μ.

3. На С.24-25 есть неточности в формулировке теоремы 1.2.1.

4. На С.37 (после 2.1) сказано, что мера Лебега тора $\mathbb{T}^N$ берется равной единице, тогда вместо функций $\{e^{i(nx)}\}$ надо взять $\{e^{2\pi i(nx)}\}$.

5. На С.38 дается определение D - регулярной сходимости, а в теореме 2.1.2 говорится о D - ограниченной сходимости.

6. На С.39 (5 строка сверху) в формуле для $\Phi(n)$ в сумме справа верхний индекс суммирования должен быть n, а не r. Там же (середина стр.) сказано, что получаем "квадратные"средние Чезаро (C, α), т.к. термин, видимо, введен автором, следовало его пояснить.

7. На С. 42 (10-я строка снизу) должно быть: пространство со скалярным произведением, вместо "определением".

8. В первый разделе главы 1 рассматриваются обобщения неравенства Харди-Литлвуда, названные неравенствами Харди-Литлвуда. Надо было написать само это неравенство хотя бы один раз.

Высказанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Результаты диссертации являются новыми, они относятся к актуальной области исследований математического анализа.

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задач, имеющих существенное значение для теории функций и функционального анализа.

Результаты диссертации представляют интерес для специалистов по теории функций и функциональному анализу и могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В.Ломоносова, Математическом институте РАН им. В.А.Стеклова, Саратовском, Воронежском, Уральском и других университетах, а также при чтении спецкурсов.

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них две в журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, и одна входит в перечень ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к кандидатским диссертациям. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена, согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Фуфаев Денис Владимирович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
ФГБОУ ВО МГТУ “Станкин”
Холщевникова Наталья Николаевна

Контактные данные: Тел.: 8(499) 9729460; e-mail: primat@stankin.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.01 – математический анализ

Адрес места работы: 127055, г. Москва, Вадковский пер., д. 1,
ФГБОУ ВО МГТУ «Станкин», кафедра прикладной математики,
Тел.: 8(499) 9729460; e-mail: primat@stankin.ru