

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ

М.У. Никабадзе, А.В. Романов

nikabadze@mail.ru, atomicra@yandex.ru

УДК 539.8

Выписаны уравнения для многослойных призматических тел в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов, а также системы полиномов Лежандра. Даны формулировки краевых задач. Из этих уравнений получены уравнения различного приближения. Далее рассмотрена задача об изгибе параллелепипеда, зажатого по торцам, на боковые стороны которого действуют одинаковые сжимающие нагрузки, а на верхнюю лицевую поверхность действует нагрузка, которая приводит к изгибу параллелепипеда. Такой уравновешенной нагрузки классическая теория не может учитывать.

Ключевые слова: микрополярная теория, многослойное тонкое тело, призматическое тело, полиномы Лежандра

On some issues of the micropolar theory of prismatic elastic bodies

We wrote out the equations for multilayer prismatic bodies in the moments of displacement and rotation vectors with respect to an arbitrary system of polynomials, as well as with we wrote them respect to the system of Legendre polynomials. We formulate the boundary value problems. Then from these equations, we obtained equations of various approximations. Next, we considered the problem of bending of the parallelepiped clamped along the ends. The identical compressive loads act on the lateral faces of this parallelepiped, and some load, which leads to the bending of the parallelepiped, acts on the upper front surface of it. It is known that classical theory cannot take into account such a balanced load.

Keywords: micropolar theory, multilayer thin body, prismatic body, Legendre polynomials

Уравнения теории многослойных призматических тел в моментах. Пользуясь правилом, изложенным в [1], для получения искомого соотношения многослойного тонкого тела из соответствующего соотношения однослойного тонкого тела при новой параметризации, система уравнений микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины (каждый слой имеет постоянную толщину) в перемещениях и вращении можно представить в виде

$$\begin{aligned} & [\bar{\Delta}_s^3 + A \bar{\Delta}_s^2 + h^{-2}(3\bar{\Delta}_s + 2A) \bar{\Delta}_s \partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta}_s + A) \partial_3^4 + h^{-6} \partial_3^6] \mathbf{u}_s + \mathbf{S}^{**} = 0, \\ & [\bar{\Delta}_s^3 + (B \bar{\Delta}_s + A) \bar{\Delta}_s + h^{-2}[(3\bar{\Delta}_s + 2B) \bar{\Delta}_s + C] \partial_3^2 + h^{-4}(3\bar{\Delta}_s + B) \partial_3^4 + h^{-6} \partial_3^6] \varphi_s + \\ & + \mathbf{H}_s^{**} = 0, \quad s = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00016-А).

Никабадзе Михаил Ушангиевич, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Mikhail Nikabadze (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Романов Александр Вячеславович, аспирант 4-го года обучения, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Aleksandr Romanov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

где s — номер слоя, K — число слоев, $h_s = \text{const}$ — толщина слоя s
 $(s = \overline{1, K})$, $\bar{\Delta}_s = g^{\bar{I}\bar{J}} \partial_{\bar{I}} \partial_{\bar{J}}$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s^{**} &= \frac{\mathbf{S}_s^*}{(\lambda + 2\mu)_s (\mu + \alpha)_s (\delta + \beta)_s}, \quad \mathbf{H}_s^{**} = \frac{\mathbf{H}_s^*}{(\gamma + 2\delta)_s (\mu + \alpha)_s (\delta + \beta)_s}, \\ A_s &= -\frac{4\alpha\mu_s}{(\mu + \alpha)_s (\delta + \beta)_s}, \quad B_s = -\frac{4\alpha[\mu_s(\gamma + 2\delta)_s + (\mu + \alpha)_s(\delta + \beta)_s]}{(\gamma + 2\delta)_s (\mu + \alpha)_s (\delta + \beta)_s}, \\ C_s &= \frac{16\alpha^2\mu_s}{(\gamma + 2\delta)_s (\mu + \alpha)_s (\delta + \beta)_s}, \quad s = \overline{1, K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* &= 2\alpha Q_1^* (\mathbf{C} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m}) + [\mathbf{E} Q_1^* Q_4^* - (d Q_4^* - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{F}), \\ \mathbf{H}^* &= 2\alpha Q_3^* (\mathbf{C} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F}) + [\mathbf{E} Q_2^* Q_3^* - (m Q_2^* - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{m}), \\ Q_1^* &= (b + d) \Delta, \quad Q_2^* = b \Delta, \quad Q_3^* = (g + m) \Delta - l, \quad Q_4^* = g \Delta - l, \\ d &= l + \mu - \alpha, \quad l = 4\alpha, \quad b = \mu + \alpha, \quad m = \gamma + \delta - \beta, \quad g = \delta + \beta. \end{aligned}$$

Заметим, что с целью сокращения письма под величины, входящие в последние четыре соотношения, индекс s , обозначающий номер слоя, не стали ставить.

Применяя к уравнениям (1) оператор моментов k -го порядка какой-нибудь системы ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева), получим для микрополярной теории призматических тел постоянной толщины следующие уравнения в моментах векторов перемещений и вращений:

$$\begin{aligned} [\bar{\Delta}_s^3 + A_s \bar{\Delta}_s^2] \mathbf{u}_s^{(k)} + h_s^{-2} (3\bar{\Delta}_s + 2A_s) \bar{\Delta}_s \mathbf{u}_s^{(k)''} + h_s^{-4} (3\bar{\Delta}_s + A_s) \mathbf{u}_s^{(k)IV} + h_s^{-6} \mathbf{u}_s^{(k)VI} + \mathbf{S}_s^{**} &= 0, \\ [\bar{\Delta}_s^3 + (B_s \bar{\Delta}_s + A_s) \bar{\Delta}_s] \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)} + h_s^{-2} [(3\bar{\Delta}_s + 2B_s) \bar{\Delta}_s + C_s] \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)''} + h_s^{-4} (3\bar{\Delta}_s + B_s) \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)IV} + \\ + h_s^{-6} \boldsymbol{\varphi}_s^{(k)VI} + \mathbf{H}_s^{**} &= 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad s = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}_s^{(k)''}$, $\mathbf{u}_s^{(k)IV}$ и $\mathbf{u}_s^{(k)VI}$ выражаются через моменты вектора перемещений относительно данной системы полиномов, а $\boldsymbol{\varphi}_s^{(k)''}$, $\boldsymbol{\varphi}_s^{(k)IV}$ и $\boldsymbol{\varphi}_s^{(k)VI}$ — через моменты вектора вращений. Например, при применении системы полиномов Лежандра имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(n)(2m)}(x') &= (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+2m-2}^{2m-1} \prod_{s=1}^{2m-1} (2n+2k+2s-1) \mathbf{v}^{(n+2k+2m-2)} = \\ &= \frac{2n+1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} [(\partial_3^{2m-k} \mathbf{v})^+ + (-1)^{n+k} (\partial_3^{2m-k} \mathbf{v})^-] P_n^{k-1}(1) + \mathbf{v}^{(k)(2m)}, \quad (3) \\ \mathbf{v}^{(k)(2m)} &= (2n+1) \sum_{k=1}^{[n/2-m+1]} C_{k+2m-2}^{2m-1} \prod_{s=1}^{2m-1} (2n-2k-2s+3) \mathbf{v}^{(n-2k-2m+2)}, \end{aligned}$$

$$-1 \leq x^3 \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ или $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}$, $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, C_{k+2m-2}^{2m-1} — биномиальные коэффициенты, $(\partial_3^s \mathbf{u})^- = (\partial_3^s \mathbf{u})|_{x^3=-1}$, $(\partial_3^k \mathbf{u})^+ = (\partial_3^k \mathbf{u})|_{x^3=1}$, $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что с целью сокращения письма в формулах (3) под $\mathbf{v}$ и $\underline{\mathbf{v}}$, индекс s , обозначающий номер слоя, не стали ставить.

В силу (3) из (2) можно получить различные представления системы уравнений микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений относительно полиномов Лежандра, а также системы уравнений различных приближений.

Следует отметить, что как в случае однослойного призматического тела, так и в случае многослойного призматического тела уравнения в моментах при любом приближении расщепляются и для каждого момента неизвестных функций $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ получается эллиптическое уравнение высокого порядка, для которого, используя метод Векуа [3], можно выписать аналитическое решение. Следовательно, для корректной постановки краевых задач к уравнениям (2) надо добавить граничные условия в моментах и межслойные контактные условия (см. в [1,2]). Кроме того, для удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях строятся корректирующие слагаемые. При этом аналитическое решение каждого слоя (кроме первого и последнего) с учетом корректирующих слагаемых записывается так, что оно удовлетворяет межслойным контактным условиям. Для первого (последнего) слоя аналитическое решение посредством корректирующих слагаемых представляется так, что оно удовлетворяет граничным условиям на внутренней (внешней) поверхности, а межслойным контактными условиям на внешней (внутренней) поверхности. Следовательно, чем больше порядок приближения, можно полагать, что тем лучше (близко к реальной картине) можно учитывать межслойные контактные условия, что очень важно в теории многослойных конструкций. Следует заметить, что в связи с ограниченностью объема работы решение задачи не приводится

Литература

1. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ. 2014. 515 с.
2. Nikabadze M.U., Ulukhanyan A.R. Analytical solutions in the theory of thin bodies// H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials **42**, (2016), 319-361. DOI: 10.1007/978-3-319-31721-2_15
3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.: ОГИЗ, 1948. 296 с.