**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ**
**И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**
**ФИЗИКА**
**Том 187, № 3**
**июнь, 2016**

 **С. Д. Глызин***, **А. Ю. Колесов***, **Н. Х. Розов**†

# ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ГЕННЫХ СЕТЯХ

Рассматриваются кольцевые цепочки однонаправленно связанных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием, являющиеся математическими моделями искусственных осцилляторных генных сетей. Устанавливается, что при подходящем выборе параметров в этих системах реализуется феномен буферности: сосуществует любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических движений специального вида – так называемых бегущих волн.

**Ключевые слова:** кольцевая цепочка однонаправленно связанных уравнений, искусственная генная сеть, бегущая волна, асимптотика, устойчивость, буферность.

DOI: 10.4213/tmf9052

## 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Простейший кольцевой генетический осциллятор, предложенный в статье [1] и названный репрессилятором, состоит из трех элементов $A$, $B$ и $C$. Характерной его особенностью является тот факт, что элемент $A$ подавляет синтез $B$, элемент $B$ подавляет синтез $C$, а третий элемент $C$, замыкая цикл, подавляет синтез $A$. Далее, согласно [1] каждый элемент осциллятора представляет собой набор из матричной рибонуклеиновой кислоты (мРНК) с концентрацией $m_j$ и белка с концентрацией $u_j$, где $j = 1, 2, 3$. Что касается системы, описывающей эволюцию во времени этих концентраций, то она имеет вид

$$\dot{m}_j = -m_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^{\gamma}} + \alpha_0, \qquad \dot{u}_j = \varepsilon(m_j - u_j), \qquad j = 1, 2, 3, \qquad u_0 = u_3, \quad (1.1)$$

где $\alpha$, $\alpha_0$, $\gamma$, $\varepsilon$ – положительные параметры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-04066_а) и проекта 1875 госзадания на НИР № 2014/258.

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия. E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Как правило, исследование модели (1.1) проводится в предположении о малости значений $\varepsilon$ и $\alpha_0$. В этой ситуации после замены $\varepsilon t \to t$ и отбрасывания параметра $\alpha_0$ получается сингулярно возмущенная система, к которой затем применяется известный принцип сведе́ния Тихонова [2]. Результатом этого сведения оказывается система

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^{\gamma}}, \qquad j = 1, 2, 3, \qquad u_0 = u_3. \tag{1.2}$$

Вопрос об автоколебаниях системы (1.2) изучался многими авторами (см., например, статьи [3]–[5]). В указанных работах рассматривался случай, когда ее устойчивый цикл возникает в результате бифуркации Андронова–Хопфа, а также случай $\gamma \gg 1$.

Для описания интересующей нас математической модели осцилляторной генной сети обратимся сначала к изолированному гену-авторепрессору. Согласно работам [6], [7] изменение во времени концентрации $u = u(t)$ соответствующего ему белка происходит по закону

$$\dot{u} = -u + \frac{\alpha}{1 + u^{\gamma}(t-h)}, \tag{1.3}$$

где $\alpha, \gamma, h = \mathrm{const} > 0$. Далее, предположим, что имеется $m$, $m \geqslant 2$, таких генов, объединенных в кольцо и однонаправленно связанных по описанному выше принципу (см. соотношения (1.2)). В результате приходим к системе

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + \delta_1 u_j^{\gamma_1}(t-h)} + \frac{\beta}{1 + \delta_2 u_{j-1}^{\gamma_2}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.4}$$

где $u_0 = u_m$, а параметры $\alpha$, $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\delta_1$, $\delta_2$, $h$ положительны. Следует отметить, что система (1.4), являющаяся комбинацией уравнений (1.2), (1.3), заведомо попадает в один из общих классов генных моделей, введенных в статьях [6]–[8].

Бегущими волнами системы (1.4) будем называть специальные периодические решения, допускающие представления вида

$$u_j = u(t + (j-1)\Delta), \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \qquad \Delta = \mathrm{const} > 0. \tag{1.5}$$

В настоящей статье вопросы о существовании и устойчивости указанных решений разбираются в случае, когда параметры $\gamma_1, \gamma_2$ велики, а остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее говоря, всюду ниже предполагаем, что

$$\begin{gathered} \gamma_s = \frac{\gamma_s^0}{\varepsilon}, \qquad \gamma_s^0 = \mathrm{const} > 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1, \qquad s = 1, 2, \\ \alpha > \max[1, (\alpha + \beta - 1)e^{-h}], \end{gathered} \tag{1.6}$$

а параметры $\delta_1, \delta_2 > 0$ произвольны. Как показано далее, при условиях (1.6) и при согласованном стремлении $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty$ количество сосуществующих устойчивых периодических решений (1.5) системы (1.4) неограниченно растет.

## 2. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Для удобства дальнейшего анализа выполним в системе (1.4) замены переменных $u_j = e^{x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. В результате с учетом соотношений (1.6) она принимает вид

$$\dot{x}_j = -1 + e^{-x_j}\left(\frac{\alpha}{\Omega_1(x_j(t-h),\varepsilon)} + \frac{\beta}{\Omega_2(x_{j-1},\varepsilon)}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad x_0 = x_m, \tag{2.1}$$

где $\Omega_s(y,\varepsilon) = 1+\delta_s e^{\gamma_s^0 y/\varepsilon}$, $s = 1, 2$. Согласно выражению (1.5) нас будут интересовать периодические решения системы (2.1), допускающие представление

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon), \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.2}$$

где $\Delta > 0$, а функция $x(t,\varepsilon)$ – периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = -1 + e^{-x}\left(\frac{\alpha}{\Omega_1(x(t-h),\varepsilon)} + \frac{\beta}{\Omega_2(x(t-\Delta),\varepsilon)}\right) \tag{2.3}$$

периода $T = m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что при некотором натуральном $k$ уравнение (2.3) имеет требуемое периодическое решение $x(t,\varepsilon)$ периода $T = m\Delta/k$. Тогда вопрос об устойчивости соответствующего цикла (2.2) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{g}_j = A(t+(j-1)\Delta,\varepsilon)g_j + B(t+(j-1)\Delta,\varepsilon)g_j(t-h) + \\ + C(t+(j-1)\Delta,\varepsilon)g_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $g_0 = g_m$, а коэффициенты $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ задаются равенствами

$$A(t,\varepsilon) = -\frac{\alpha e^{-x(t,\varepsilon)}}{\Omega_1(x(t-h,\varepsilon),\varepsilon)} - \frac{\beta e^{-x(t,\varepsilon)}}{\Omega_2(x(t-\Delta,\varepsilon),\varepsilon)}, \tag{2.5}$$

$$B(t,\varepsilon) = -\frac{\alpha e^{-x(t,\varepsilon)}}{\Omega_1^2(x(t-h,\varepsilon),\varepsilon)}\frac{\delta_1\gamma_1^0}{\varepsilon}\, e^{\gamma_1^0 x(t-h,\varepsilon)/\varepsilon}, \tag{2.6}$$

$$C(t,\varepsilon) = -\frac{\beta e^{-x(t,\varepsilon)}}{\Omega_2^2(x(t-\Delta,\varepsilon),\varepsilon)}\frac{\delta_2\gamma_2^0}{\varepsilon}\, e^{\gamma_2^0 x(t-\Delta,\varepsilon)/\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Поясним смысл термина “мультипликатор” применительно к системе (2.4). В связи с этим рассмотрим пространство $E = C([-h,0];\mathbb{R}^m)$ непрерывных при $-h \leqslant t \leqslant 0$ вектор-функций $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_m(t))$ с нормой

$$\|g\|_E = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\ \max_{-h\leqslant t\leqslant 0} |g_j(t)|.$$

Далее, оператором монодромии системы (2.4) назовем ограниченный линейный оператор $\mathscr{V}(\varepsilon)\colon E \to E$, действующий на произвольную функцию $g(t) \in E$ по правилу

$$\mathscr{V}(\varepsilon)g = g\left(t + \frac{m\Delta}{k}, \varepsilon\right), \qquad -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{2.8}$$

где $g(t,\varepsilon) = (g_1(t,\varepsilon),\ldots,g_m(t,\varepsilon))$ – это решение системы (2.4) на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant m\Delta/k$ с начальной функцией $g(t)$, $-h \leqslant t \leqslant 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $m\Delta/k > h$ компактен и сам оператор $\mathscr{V}(\varepsilon)$). Что касается мультипликаторов системы (2.4), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (2.8).

Наряду с (2.4) в дальнейшем нам понадобится вспомогательное линейное уравнение с запаздываниями

$$\dot{g} = A(t,\varepsilon)g + B(t,\varepsilon)g(t-h) + \varkappa C(t,\varepsilon)g(t-\Delta), \tag{2.9}$$

где $g(t) \in \mathbb{C}$, а $\varkappa$ – произвольный комплексный параметр. Точнее говоря, нас будут интересовать его мультипликаторы $\nu_l(\varkappa)$, $l = 1,2,\ldots$, занумерованные в порядке убывания модулей.

В работе [9] для решения вопроса о связи между мультипликаторами системы (2.4) и уравнения (2.9) был предложен так называемый метод подстройки по параметру $\varkappa$. Суть этого метода состоит в рассмотрении семейства уравнений

$$[\nu_l(\varkappa)]^k = \varkappa^m, \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Оказывается, имеет место определенное соответствие между ненулевыми корнями данных уравнений и мультипликаторами системы (2.4). Точнее говоря, справедливо следующее утверждение [9]–[11].

Лемма 1. *Для каждого мультипликатора $\nu$ системы (2.4) найдется такое натуральное $l_0$, что*

$$\nu = \nu_{l_0}(\varkappa_0), \tag{2.11}$$

*где $\varkappa_0$ – один из корней уравнения (2.10) при $l = l_0$. И обратно, если при некотором $l = l_0$ уравнение (2.10) имеет ненулевой корень $\varkappa = \varkappa_0$, то исходная система (2.4) допускает мультипликатор вида (2.11).*

Итак, проблема существования у системы (2.1) циклов вида (2.2) сводится к поиску периодических решений вспомогательного скалярного уравнения (2.3) с периодами $T = m\Delta/k$. Что касается вопроса об устойчивости бегущих волн, то он решается отдельно и в силу леммы 1 состоит в асимптотическом вычислении корней уравнений (2.10). Ниже оба эти вопроса изучаются для натуральных $m$ и $k$, удовлетворяющих требованиям $m \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$.

## 3. АНАЛИЗ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Наша ближайшая задача – показать, что при любом фиксированном значении параметра $\Delta$ из промежутка

$$\Delta_* < \Delta < h, \qquad \Delta_* = \ln\left[\max\left(1, \frac{\beta-1}{\beta}e^h + \frac{1}{\beta}\right)\right], \tag{3.1}$$

и при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ у вспомогательного уравнения (2.3) существует нетривиальное периодическое решение.

Тот факт, что при $\varepsilon \to 0$ уравнение (2.3) имеет предельный объект, существенным образом упрощает его исследование. Действительно, опираясь на очевидные равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Omega_s(y,\varepsilon)} = R(y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } y > 0, \\ 1 & \text{при } y < 0, \end{cases} \qquad s = 1, 2, \tag{3.2}$$

где $y = \text{const} \neq 0$, нетрудно видеть, что при $\varepsilon \to 0$ уравнение (2.3) переходит в релейное уравнение с запаздываниями:

$$\dot{x} = -1 + e^{-x}[\alpha R(x(t-h)) + \beta R(x(t-\Delta))]. \tag{3.3}$$

Как и в работах [12]–[14], решение уравнения (3.3) определим конструктивно. В связи с этим, принимая во внимание неравенство $\alpha + \beta > 1$ (см. условия (1.6)), зафиксируем некоторое число

$$\sigma_0\colon\ 0 < \sigma_0 < \bar{\sigma} \overset{\text{def}}{=} \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}, \tag{3.4}$$

положим

$$\theta_1(t) = \ln(\alpha+\beta-(\alpha+\beta-1)e^{-t}), \qquad t \in (-\bar{\sigma}, +\infty), \tag{3.5}$$

и рассмотрим при всех $t \in [-h-\sigma_0, -\sigma_0]$ множество функций

$$\varphi(t) \in C[-h-\sigma_0, -\sigma_0], \qquad \varphi(t) < 0, \qquad \varphi(-\sigma_0) = \theta_1(-\sigma_0). \tag{3.6}$$

Подчеркнем, что семейство (3.6) определено корректно, так как

$$\theta_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, +\infty), \quad \theta_1(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in (-\bar{\sigma}, 0). \tag{3.7}$$

Тем самым в силу (3.4) точка $t = -\sigma_0$ принадлежит области определения функции (3.5) и $\theta_1(-\sigma_0) < 0$.

Обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geqslant -\sigma_0$, решение уравнения (3.3) с произвольной начальной функцией (3.6) и будем строить его, рассматривая последовательно отрезки времени длины $\Delta$ и применяя метод шагов.

Обратимся сначала к отрезку $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$ и заметим, что при указанных значениях $t$ выполняются неравенства $\varphi(t-h) < 0$, $\varphi(t-\Delta) < 0$. Поэтому на данном промежутке времени согласно (3.2), (3.3) функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = -1 + (\alpha+\beta)e^{-x}, \qquad x|_{t=-\sigma_0} = \theta_1(-\sigma_0)$$

и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = \theta_1(t). \tag{3.8}$$

Ясно также, что, двигаясь вперед с шагом $\Delta$, можно “протянуть” формулу (3.8) по $t$ до тех пор, пока

$$x_\varphi(t-\Delta) < 0, \qquad x_\varphi(t-h) < 0. \tag{3.9}$$

Тем самым согласно (3.7) она справедлива на полуинтервале $-\sigma_0 \leqslant t < \Delta$.

При $t = \Delta$ нарушается первое из условий (3.9) и происходит переключение. А поскольку на промежутке $t \in (\Delta, \min(2\Delta, h))$ в силу (3.6), (3.8) верны неравенства

$$x_\varphi(t-\Delta) > 0, \qquad x_\varphi(t-h) < 0, \tag{3.10}$$

то здесь решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = -1 + \alpha e^{-x}, \qquad x|_{t=\Delta} = \theta_1(\Delta).$$

Несложный анализ этой задачи приводит к очередному равенству

$$x_\varphi(t) = \theta_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ln[\alpha + (\beta - (\alpha + \beta - 1)e^{-\Delta})e^{-(t-\Delta)}]. \tag{3.11}$$

Как и в предыдущем случае, формулу (3.11) с помощью метода шагов можно продолжить с отрезка $\Delta \leqslant t \leqslant \min(2\Delta, h)$ на более широкий отрезок $\Delta \leqslant t \leqslant h$. Действительно, разобьем промежуток $\min(2\Delta, h) \leqslant t < h$ на части, длина которых не больше $\Delta$, и будем последовательно рассматривать получившиеся участки. В результате, опираясь на свойство $\theta_2(t) > 0$, верное для всех $t \geqslant \Delta$ (имеющее место в силу неравенства $\alpha > 1$), на очередном шаге сначала убеждаемся в справедливости условий (3.10), а затем распространяем соотношение (3.11) на шаг вперед.

При прохождении $t$ через значение $t = h$ нарушается второе неравенство из (3.10) и при $h < t \leqslant h + \Delta$ из формул (3.8), (3.11) вытекает, что

$$x_\varphi(t - \Delta) > 0, \qquad x_\varphi(t - h) > 0. \tag{3.12}$$

А отсюда и из соотношений (3.3), (3.11) заключаем, что на указанном промежутке времени справедливо равенство

$$x_\varphi(t) = t_0 - t, \qquad t_0 = h + \theta_2(h) > h. \tag{3.13}$$

Ясно также, что формула (3.13) справедлива до тех пор, пока остаются в силе условия (3.12). Тем самым, опираясь на описанный выше метод шагов, убеждаемся, что она имеет место на отрезке $h \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta$.

При $t = t_0 + \Delta$ нарушается первое условие из (3.12) и происходит очередное переключение. Далее, при $t_0 + \Delta < t < t_0 + \min(2\Delta, h)$ из уже полученных соотношений (3.8), (3.11), (3.13) следует, что

$$x_\varphi(t - \Delta) < 0, \qquad x_\varphi(t - h) > 0. \tag{3.14}$$

А отсюда и из соотношений (3.3), (3.11), (3.13) вытекает, что на промежутке времени $t_0 + \Delta \leqslant t \leqslant t_0 + \min(2\Delta, h)$ справедливо равенство

$$x_\varphi(t) = \theta_3(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ln[\beta - (\beta - e^{-\Delta})e^{-(t-t_0-\Delta)}]. \tag{3.15}$$

Для продолжения формулы (3.15) на более широкий промежуток времени заметим, что $\theta_3(t) < 0$ при всех $t \in [t_0 + \Delta, t_0 + h]$ (данное свойство эквивалентно требованию $\Delta > \Delta_*$ из (3.1)). Учитывая это обстоятельство и опираясь на метод шагов, нетрудно убедиться, что условия (3.14) сохраняются на промежутке $t_0 + \Delta < t < t_0 + h$, а само равенство (3.15) имеет место при $t_0 + \Delta \leqslant t \leqslant t_0 + h$.

На заключительном этапе обратимся к промежутку $t_0 + h < t \leqslant T_0$, где

$$\begin{aligned} T_0 = 2h + \ln[\alpha + (\beta - (\alpha + \beta - 1)e^{-\Delta})e^{-(h-\Delta)}] + \\ + \ln\left[1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta - 1}(1 - e^{-(h-\Delta)}) + \frac{1 - e^{-h}}{\alpha + \beta - 1}\right], \end{aligned} \tag{3.16}$$

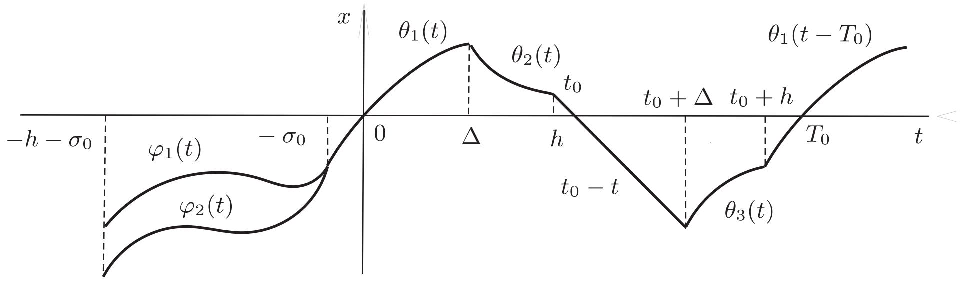


Рис. 1

и предположим, что на нем выполнены априорные условия (3.9). Учитывая их вместе с соотношением (3.15) в (3.3), получаем очередную задачу Коши вида

$$\dot{x} = -1 + (\alpha+\beta)e^{-x}, \qquad x|_{t=t_0+h} = \theta_3(t_0+h).$$

Далее, опираясь на формулы (3.11), (3.13), (3.15), (3.16), нетрудно убедиться, что ее решение задается равенством

$$x_\varphi(t) = \theta_1(t-T_0), \tag{3.17}$$

где $\theta_1(t)$ – функция (3.5). Что касается условий (3.9), то их проверка на данном промежутке времени, как обычно, осуществляется методом шагов.

Для завершения построения решения $x_\varphi(t)$ уточним способ выбора параметра $\sigma_0$ из выражения (3.6). Будем считать, что помимо (3.4) он удовлетворяет оценке

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 - h. \tag{3.18}$$

Подчеркнем, что условия (3.4), (3.18) совместны, так как в силу неравенства $\Delta > \Delta_*$ правая часть (3.18) положительна.

Указанный способ выбора $\sigma_0$ и полученные ранее формулы (3.8), (3.11), (3.13), (3.15), (3.17) гарантируют принадлежность функции $x_\varphi(t+T_0)$, $-h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$, начальному множеству (3.6). А это означает, что при $t \geqslant T_0-\sigma_0$ весь процесс построения $x_\varphi(t)$ циклически повторяется. Более того, каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (3.6) при всех $t \geqslant -\sigma_0$ совпадает с одной и той же $T_0$-периодической функцией

$$x_0(t) = \begin{cases} \theta_1(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ \theta_2(t) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant h, \\ t_0 - t & \text{при } h \leqslant t \leqslant t_0+\Delta, \\ \theta_3(t) & \text{при } t_0+\Delta \leqslant t \leqslant t_0+h, \\ \theta_1(t-T_0) & \text{при } t_0+h \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases} \qquad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t). \tag{3.19}$$

Пример графика функции $x_0(t)$ и процесс построения решения $x_\varphi(t)$ представлены на рис. 1.

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (2.3) и (3.3). Из общих результатов статьи [12] и из аналогичных результатов, содержащихся в работах [9]–[11], [13], [14], вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнены неравенство $\alpha > 1$ и условия (3.1), (3.4), (3.18) для параметров $\Delta$, $\sigma_0$. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ уравнение (2.3) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл $x = x_*(t,\varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0,\varepsilon) \equiv \theta_1(-\sigma_0)$, периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{0\leqslant t\leqslant T_*(\varepsilon)}|x_*(t,\varepsilon)-x_0(t)| = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}T_*(\varepsilon) = T_0. \tag{3.20}$$

На доказательстве сформулированной леммы мы не останавливаемся, отсылая к упомянутым статьям [9]–[14], где аналогичные утверждения подробно обоснованы. Ограничимся лишь минимальной сводкой результатов об асимптотическом поведении цикла $x_*(t,\varepsilon)$. Помимо общих свойств (3.20) далее нам потребуются следующие факты:

1) на отрезке $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_0 - \sigma_0/2$ уравнение $x_*(t,\varepsilon) = 0$ имеет ровно два простых корня $\tau_j = \tau_j(\varepsilon)$, $j = 1,2$, допускающих асимптотику

$$\tau_1 = O(\varepsilon), \qquad \tau_2 = t_0 + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon\to 0; \tag{3.21}$$

2) справедливы асимптотические равенства

$$\begin{gathered}\max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_0-\sigma_0/2}|x_*(t,\varepsilon)-x_0(t)| = O(\varepsilon), \qquad \max_{t\in\Sigma}|\dot x_*(t,\varepsilon)-\dot x_0(t)| = O(\varepsilon),\\ T_*(\varepsilon) = T_0 + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon\to 0,\end{gathered} \tag{3.22}$$

где множество $\Sigma$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T_0-\sigma_0/2]$ с выброшенными интервалами

$$(\Delta+\tau_j(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}, \Delta+\tau_j(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\,), \qquad (h+\tau_j(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}, h+\tau_j(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\,), \qquad j=1,2.$$

## 4. АНАЛИЗ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В данном разделе мы исследуем вопрос об асимптотическом поведении мультипликаторов аналогичного (2.9) линейного уравнения

$$\dot g = A_*(t,\varepsilon)g + B_*(t,\varepsilon)g(t-h) + \varkappa C_*(t,\varepsilon)g(t-\Delta), \tag{4.1}$$

коэффициенты которого задаются формулами (2.5)–(2.7) при $x(t,\varepsilon) = x_*(t,\varepsilon)$, а $\varkappa$ – произвольный комплексный параметр.

Остановимся сначала на некоторых необходимых для дальнейшего анализа свойствах коэффициентов этого уравнения. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются оценки вида*

$$\max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_*(\varepsilon)-\sigma_0}|A_*(t,\varepsilon)| \leqslant M_1, \qquad \max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant h-\sigma_0}|B_*(t,\varepsilon)| \leqslant M_2e^{-q_1/\varepsilon}, \tag{4.2}$$

$$\max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant \Delta-\sigma_0}|C_*(t,\varepsilon)| \leqslant M_3e^{-q_2/\varepsilon}, \qquad \max_{t\in\Sigma_1}|B_*(t,\varepsilon)| \leqslant M_4e^{-q_3/\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.3}$$

$$\max_{t\in\Sigma_2}|C_*(t,\varepsilon)| \leqslant M_5e^{-q_4/\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.4}$$

*где*

$$\Sigma_1 = [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus \bigcup_{s=1}^{2} (h + \tau_s(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, h + \tau_s(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,),$$
$$\Sigma_2 = [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus \bigcup_{s=1}^{2} (\Delta + \tau_s(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_s(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,), \tag{4.5}$$

*а постоянные* $M_s > 0$, $s = 1, \dots, 5$, $q_s > 0$, $s = 1, \dots, 4$, *не зависят от* $\varepsilon$. *Кроме этого, при* $\varepsilon \to 0$ *имеют место асимптотические представления*

$$\int_{h+\tau_s(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{h+\tau_s(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}} B_*(t,\varepsilon)\,dt = a_s + O(\varepsilon), \qquad \int_{\Delta+\tau_s(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_s(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}} C_*(t,\varepsilon)\,dt = b_s + O(\varepsilon), \tag{4.6}$$

*где* $s = 1, 2$,

$$a_1 = -\frac{\alpha e^{-\theta_2(h)}}{\alpha + \beta - 1}, \qquad a_2 = -\alpha e^{-\theta_3(t_0+h)}, \tag{4.7}$$

$$b_1 = -\frac{\beta e^{-\theta_1(\Delta)}}{\alpha + \beta - 1}, \qquad b_2 = -\beta e^{\Delta}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что первая оценка из (4.2) – это очевидное следствие формулы (2.5) и общих асимптотических свойств (3.20) периодического решения $x_*(t,\varepsilon)$. Далее, обратим внимание, что в силу формул (2.6), (3.20) при тех $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$, для которых $x_0(t-h) \neq 0$ (т. е. вне некоторых фиксированных окрестностей точек $t = h$ и $t = t_0 + h$), коэффициент $B_*(t,\varepsilon)$ допускает оценку вида

$$|B_*(t,\varepsilon)| \leqslant M e^{-q/\varepsilon}, \qquad M, q = \mathrm{const} > 0. \tag{4.9}$$

Аналогичная (4.9) оценка имеет место и для $C_*(t,\varepsilon)$ вне некоторых фиксированных окрестностей точек $t = \Delta$ и $t = t_0 + \Delta$. А отсюда автоматически следуют второе неравенство из (4.2) и первое неравенство из (4.3).

Для получения оценок из (4.3), (4.4) на множествах (4.5) обратимся к более тонким асимптотическим свойствам (3.21), (3.22) функции $x_*(t,\varepsilon)$ и учтем их в формулах (2.6), (2.7). В результате убеждаемся, что

$$|B_*(t,\varepsilon)| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}\, e^{-\gamma_1^0\,|x_0(t-h)|/\varepsilon}, \qquad t \in \Sigma_1,$$
$$|C_*(t,\varepsilon)| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}\, e^{-\gamma_2^0\,|x_0(t-\Delta)|/\varepsilon}, \qquad t \in \Sigma_2,$$

где $M = \mathrm{const} > 0$. А так как $x_0(0) = 0$, $\dot{x}_0(0) > 0$, $x_0(t_0) = 0$, $\dot{x}_0(t_0) = -1$ (см. выражение (3.19)), требуемые неравенства (4.3), (4.4) вытекают отсюда очевидным образом.

Обратимся теперь к асимптотическим представлениям (4.6)–(4.8) и докажем, например, асимптотическую формулу для интеграла от $B_*(t,\varepsilon)$ по отрезку

$$[h + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, h + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}]$$

(остальные случаи доказываются аналогично). С этой целью перейдем на упомянутом отрезке к новой переменной $\tau$ по формуле $\tau = (t - \tau_1 - h)/\varepsilon$. В результате функция $x_*(t-h,\varepsilon)/\varepsilon$ записывается в виде функции $x_*(\tau_1+\varepsilon\tau,\varepsilon)/\varepsilon$, для которой с учетом равенства $x_*(\tau_1,\varepsilon)=0$ получаем представление

$$\frac{x_*(\tau_1+\varepsilon\tau,\varepsilon)}{\varepsilon}=\dot{x}_*(\tau_1+\varepsilon\bar{\tau},\varepsilon)\tau, \tag{4.10}$$

где значение $\bar{\tau}$ таково, что $|\bar{\tau}|\leqslant|\tau|$. Учитывая, далее, в (4.10) асимптотические формулы (3.21), (3.22), приходим к выводу, что

$$\frac{x_*(\tau_1+\varepsilon\tau,\varepsilon)}{\varepsilon}=(\alpha+\beta-1)(1+(|\tau|+1)O(\varepsilon))\tau, \tag{4.11}$$

где остаток равномерен по $\tau\in[-1/\sqrt{\varepsilon},1/\sqrt{\varepsilon}\,]$.

На заключительном этапе подставим в равенство для $B_*(t,\varepsilon)$ (см. формулу (2.6)) соотношение (4.11). В результате убеждаемся, что

$$\begin{gathered}|\varepsilon B_*(\tau_1+h+\varepsilon\tau,\varepsilon)+\widetilde{B}(\tau)|\leqslant M\varepsilon(|\tau|+1)^2e^{-\gamma_1^0(\alpha+\beta-1)|\tau|},\\ -1/\sqrt{\varepsilon}\leqslant\tau\leqslant1/\sqrt{\varepsilon},\qquad M=\text{const}>0,\end{gathered} \tag{4.12}$$

где

$$\widetilde{B}(\tau)=\frac{\alpha\delta_1\gamma_1^0e^{-\theta_2(h)}e^{\gamma_1^0(\alpha+\beta-1)\tau}}{(1+\delta_1e^{\gamma_1^0(\alpha+\beta-1)\tau})^2}.$$

Применим затем оценку (4.12) непосредственно к вычислению нужного интеграла. В итоге убеждаемся, что

$$\int_{h+\tau_1(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}}^{h+\tau_1(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}}B_*(t,\varepsilon)\,dt=-\int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}}\widetilde{B}(\tau)\,d\tau+O(\varepsilon)=a_1+O(\varepsilon).$$

Лемма доказана.

Еще одно вспомогательное утверждение касается асимптотического поведения решения $\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon)$ уравнения (4.1) с произвольной не зависящей от $\varkappa$ начальной функцией $g_0(t)$ из пространства (над полем комплексных чисел)

$$C_0=\{g_0(t)\in C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]\colon g_0(-\sigma_0)=0\}. \tag{4.13}$$

Норму в пространстве (4.13), как обычно, зададим равенством

$$\|g_0\|=\max_{-h-\sigma_0\leqslant t\leqslant-\sigma_0}|g_0(t)|.$$

Лемма 4. *Для каждого $r>0$ можно указать такие положительные постоянные $M=M(r)$, $\varepsilon_0=\varepsilon_0(r)$, $q=q(r)$, что при всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $g_0(t)\in C_0$, $\varkappa\in B(r)$, $B(r)\overset{\text{def}}{=}\{\varkappa\in\mathbb{C}\colon|\varkappa|\leqslant r\}$ имеет место оценка*

$$\max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_*(\varepsilon)-\sigma_0}\biggl(|\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon)|+\biggl|\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\varkappa}(t,\varkappa,\varepsilon)\biggr|\biggr)\leqslant Me^{-q/\varepsilon}\|g_0\|. \tag{4.14}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0\leqslant t\leqslant\Delta-\sigma_0$, на котором для решения $\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon)$ справедлива явная формула

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon)=\int_{-\sigma_0}^{t}\exp\biggl(\int_s^tA_*(\sigma,\varepsilon)\,d\sigma\biggr)\times\\ \times\bigl[B_*(s,\varepsilon)g_0(s-h)+\varkappa C_*(s,\varepsilon)g_0(s-\Delta)\bigr]\,ds.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Из этой формулы следует в первую очередь аналитичность $\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon)$ по переменной $\varkappa \in B(r)$. Далее, учитывая в (4.15) соответствующие оценки для $A_*(t,\varepsilon)$, $B_*(t,\varepsilon)$, $C_*(t,\varepsilon)$ из соотношений (4.2)–(4.4), убеждаемся, что

$$\max_t \biggl(|\tilde{g}| + \biggl|\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varkappa}\biggr|\biggr) \leqslant M e^{-q/\varepsilon}\|g_0\|, \tag{4.16}$$

где $M, q > 0$ – некоторые универсальные постоянные.

Для распространения оценки (4.16) на отрезок времени $[\Delta - \sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$, как обычно, воспользуемся методом шагов. В связи с этим разобьем данный промежуток на отрезки $[\Delta - \sigma_0 + s\Delta, 2\Delta - \sigma_0 + s\Delta]$, $s = 0, 1, \dots, s_0$, и $[2\Delta - \sigma_0 + s_0\Delta, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$, где $s_0 = \lfloor (T_*(\varepsilon) - 2\Delta)/\Delta \rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ – целая часть. Далее, выписывая аналогичное (4.15) равенство на $s$-м отрезке, сначала убеждаемся в аналитичности $\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon)$. Затем, опираясь на свойство интегральной ограниченности

$$\int_{-\sigma_0}^{T_*(\varepsilon)-\sigma_0} (|A_*(t,\varepsilon)| + |B_*(t,\varepsilon)| + |C_*(t,\varepsilon)|)\,dt \leqslant M, \qquad M = \mathrm{const} > 0,$$

справедливое в силу (4.2)–(4.8), и уже установленные оценки вида (4.16) на предыдущих шагах, получаем требуемую оценку на текущем шаге. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к интересующему нас вопросу об асимптотическом вычислении мультипликаторов уравнения (4.1). С этой целью рассмотрим оператор монодромии $U(\varkappa,\varepsilon)$ данного уравнения, действующий в пространстве $C[-h-\sigma_0, -\sigma_0]$ (над полем комплексных чисел) по правилу:

$$U(\varkappa,\varepsilon)g_0 = g(t + T_*(\varepsilon), \varkappa, \varepsilon), \qquad -h - \sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0, \tag{4.17}$$

где $g(t,\varkappa,\varepsilon)$, $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_*(\varepsilon) - \sigma_0$, – решение уравнения (4.1) с начальной функцией $g_0(t)$, $-h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$. Далее, обозначим через $\nu_s(\varkappa,\varepsilon)$, $s \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора (4.17), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любого $r > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r) > 0$, $q = q(r) > 0$, $M = M(r) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\varkappa \in B(r)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{s \geqslant 2} |\nu_s(\varkappa,\varepsilon)| \leqslant M e^{-q/\varepsilon}. \tag{4.18}$$

*Что касается мультипликатора $\nu_1(\varkappa,\varepsilon)$, то он допускает при $\varepsilon \to 0$ равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое представление*

$$\nu_1(\varkappa,\varepsilon) = [1 + \psi_1(\varkappa - 1)][1 + \psi_2(\varkappa - 1)] + O(\varepsilon), \tag{4.19}$$

*где*

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\beta e^{-(h-\Delta)}}{\alpha + (\beta - e^{-\Delta})e^{-(h-\Delta)}}, \\ \psi_2 &= \frac{\beta e^{-(h-\Delta)}}{\alpha + (\beta - (\alpha+\beta-1)e^{-\Delta})e^{-(h-\Delta)}}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное положительное $r$ и будем считать, что параметр $\varkappa$ из (4.1) принадлежит множеству $B(r)$. Далее, введем в рассмотрение конечномерный оператор

$$V(\varkappa,\varepsilon)g_0 = g_0(-\sigma_0)g_*(t+T_*(\varepsilon),\varkappa,\varepsilon), \qquad -h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0, \tag{4.21}$$

где $g_*(t,\varkappa,\varepsilon)$ – решение уравнения (4.1) на отрезке $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_*(\varepsilon)-\sigma_0$ с начальной функцией $g_* \equiv 1$, $-h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$.

Остановимся на вопросе о связи между операторами (4.17) и (4.21). С этой целью рассмотрим функцию

$$\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon) = g(t,\varkappa,\varepsilon) - g_0(-\sigma_0)g_*(t,\varkappa,\varepsilon) \tag{4.22}$$

и заметим, что при $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon)-\sigma_0]$ она также является решением уравнения (4.1). А поскольку при $-h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$ очевидно следующее равенство: $\tilde{g}(t,\varkappa,\varepsilon) = g_0(t) - g_0(-\sigma_0) \in C_0$, где $C_0$ – пространство (4.13), мы вправе применить к (4.22) оценку (4.14). Из упомянутой оценки следует, что для оператора

$$W(\varkappa,\varepsilon) = U(\varkappa,\varepsilon) - V(\varkappa,\varepsilon)$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\|W(\varkappa,\varepsilon)\|_{C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]\to C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]} + \\ &\qquad + \left\|\frac{\partial}{\partial\varkappa}W(\varkappa,\varepsilon)\right\|_{C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]\to C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]} \leqslant Me^{-q/\varepsilon},\end{aligned} \tag{4.23}$$

где универсальные константы $M, q > 0$ зависят лишь от выбора $r$.

На следующем этапе доказательства мы изучим спектральные свойства оператора (4.21). Нетрудно видеть, что спектр этого оператора состоит из двух точек – собственного значения $\nu = \nu_*(\varkappa,\varepsilon)$, где $\nu_*(\varkappa,\varepsilon) = g_*(T_*(\varepsilon)-\sigma_0,\varkappa,\varepsilon)$, и собственного значения $\nu = 0$ бесконечной кратности. Что касается собственного значения $\nu_*(\varkappa,\varepsilon)$, то для него, как будет показано ниже, при $\varepsilon \to 0$ имеет место равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое равенство

$$\nu_*(\varkappa,\varepsilon) = [1+\psi_1(\varkappa-1)][1+\psi_2(\varkappa-1)] + O(\varepsilon), \tag{4.24}$$

где $\psi_1$, $\psi_2$ – постоянные (4.20). Кроме того, это равенство сохраняется (вместе со свойствами остатка) при дифференцировании по $\varkappa$.

Для обоснования соотношения (4.24) необходимо знать асимптотическое поведение решения $g_*(t,\varkappa,\varepsilon)$. В связи с этим дополним уравнение (4.1) начальным условием $g \equiv 1$, $-h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0$, и проинтегрируем его на отрезке времени $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_*(\varepsilon)-\sigma_0$ методом шагов, учитывая, что коэффициенты $B_*(t,\varepsilon)$, $C_*(t,\varepsilon)$ меняются $\delta$-образно (см. формулы (4.2)–(4.8)), а для коэффициента $A_*(t,\varepsilon)$ справедливо вытекающее из равенств (2.5), (3.22) равномерное по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ асимптотическое представление

$$A_*(t,\varepsilon) = A_0(t) + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0,$$

где

$$A_0(t) = \begin{cases} -(\alpha+\beta)e^{-x_0(t)} & \text{при } t \in [-\sigma_0, \Delta) \cup (t_0+h, T_* - \sigma_0/2], \\ -\alpha e^{-x_0(t)} & \text{при } t \in (\Delta, h), \\ -\beta e^{-x_0(t)} & \text{при } t \in (t_0+\Delta, t_0+h), \\ \ 0 & \text{при } t \in (h, t_0+\Delta). \end{cases}$$

В результате убеждаемся, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_*(\varepsilon)-\sigma_0} \left( |g_*(t,\varkappa,\varepsilon)| + \left| \frac{\partial g_*}{\partial \varkappa}(t,\varkappa,\varepsilon) \right| \right) \leqslant M, \qquad M = \mathrm{const} > 0; \tag{4.25}$$

во-вторых, равномерно по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\varkappa \in B(r)$

$$g_*(t,\varkappa,\varepsilon) = g(t,\varkappa) + O(\varepsilon), \qquad \frac{\partial g_*}{\partial \varkappa}(t,\varkappa,\varepsilon) = \frac{\partial g}{\partial \varkappa}(t,\varkappa) + O(\varepsilon), \tag{4.26}$$

где, напомним, $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ – множества (4.5), а через $g(t,\varkappa)$, $t \geqslant -\sigma_0$, обозначено решение импульсной задачи Коши

$$\dot g = A_0(t) g, \qquad g|_{t=-\sigma_0} = 1, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} \delta g(t)|_{t=h} &= a_1 g(0), & \delta g(t)|_{t=t_0+h} &= a_2 g(t_0), \\ \delta g(t)|_{t=\Delta} &= \varkappa b_1 g(0), & \delta g(t)|_{t=t_0+\Delta} &= \varkappa b_2 g(t_0), \end{aligned} \tag{4.28}$$

в которой $\delta g(t) \overset{\text{def}}{=} g(t+0) - g(t-0)$. Что касается асимптотического представления (4.24) и аналогичного представления для $\partial \nu_*/\partial \varkappa$, то они очевидным образом следуют из (4.26) и из равенства

$$g(t,\varkappa)|_{t=T_0-\sigma_0} = [1 + \psi_1(\varkappa - 1)][1 + \psi_2(\varkappa - 1)],$$

проверяемого посредством интегрирования системы (4.27), (4.28) (соответствующие вполне понятные выкладки опустим).

Обратимся теперь к исходному оператору $U$ и заметим, что в силу равенств

$$U = V + W, \qquad (\nu I - U)^{-1} = (I - (\nu I - V)^{-1} W)^{-1} (\nu I - V)^{-1}$$

любое значение $\nu \in \mathbb{C}$, для которого

$$\|(\nu I - V)^{-1} W\|_{C[-h-\sigma_0,-\sigma_0] \to C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]} < 1, \tag{4.29}$$

принадлежит резольвентному множеству этого оператора. Напомним, далее, что оператор $W$ допускает оценку (4.23). В случае оператора $(\nu I - V)^{-1}$, опираясь на соотношение

$$(\nu I - V)^{-1} g_0 = \frac{g_0(t)}{\nu} + \frac{g_0(-\sigma_0)}{\nu(\nu - \nu_*(\varkappa,\varepsilon))} g_*(t + T_*(\varepsilon), \varkappa, \varepsilon), \qquad -h-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -\sigma_0,$$

и оценку (4.25), для всех $\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \neq 0, \nu_*(\varkappa,\varepsilon)$ получаем неравенство

$$\|(\nu I - V)^{-1}\|_{C[-h-\sigma_0,-\sigma_0] \to C[-h-\sigma_0,-\sigma_0]} \leqslant \frac{M(1+|\nu|)}{|\nu|\,|\nu - \nu_*(\varkappa,\varepsilon)|}, \tag{4.30}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$.

На завершающем этапе обоснования настоящей леммы объединим оценки (4.23), (4.30) с асимптотическим представлением (4.24). В результате убеждаемся, что любая точка $\nu \in \mathbb{C}$ из множества $\mathbb{C}\backslash\{O_1 \cup O_2\}$, где

$$O_1 = \{\nu\colon |\nu| < e^{-q_1/\varepsilon}\}, \qquad O_2 = \{\nu\colon |\nu - \nu_*(\varkappa,\varepsilon)| < e^{-q_2/\varepsilon}\}, \tag{4.31}$$

а постоянные $q_1, q_2 > 0$ подходящим образом малы, удовлетворяет условию (4.29) и, следовательно, является регулярной для оператора $U(\varkappa,\varepsilon)$. Что касается спектра этого оператора, то он заведомо принадлежит шарам (4.31). А отсюда и из равенства (4.24) требуемые соотношения (4.18)–(4.20) вытекают очевидным образом. Лемма доказана.

Сделаем одно полезное наблюдение. Пусть параметр $\varkappa$ пробегает множество

$$B_\delta(r) = B(r)\backslash \bigcup_{s=1}^{2} \{\varkappa \in \mathbb{C}\colon |\varkappa - 1 + 1/\psi_s| < \delta\}, \tag{4.32}$$

где $\delta > 0$. Тогда мультипликатор $\nu_1(\varkappa,\varepsilon)$ уравнения (4.1) является простым, аналитическим по $\varkappa$, а представление (4.19) сохраняется при дифференцировании по $\varkappa$.

Действительно, при $\varkappa \in B_\delta(r)$ собственное значение $\nu = \nu_*(\varkappa,\varepsilon)$ оператора (4.21) оказывается простым, поскольку в этом случае

$$[1 + \psi_1(\varkappa - 1)][1 + \psi_2(\varkappa - 1)] \neq 0.$$

Далее, при возмущении оператора $V$ аналитической по $\varkappa$ добавкой $W$ порядка $e^{-q/\varepsilon}$, $q = \mathrm{const} > 0$, собственное значение $\nu = \nu_*(\varkappa,\varepsilon)$ перейдет в простое и аналитически зависящее от $\varkappa$ собственное значение $\nu = \nu_1(\varkappa,\varepsilon)$, причем

$$\nu_1(\varkappa,\varepsilon) - \nu_*(\varkappa,\varepsilon) = O(e^{-q/\varepsilon})$$

(в $C^1$-метрике по $\varkappa \in B_\delta(r)$). А отсюда и из (4.24) заключаем, что при $\varkappa \in B_\delta(r)$ мультипликатор $\nu_1(\varkappa,\varepsilon)$ обладает перечисленными выше свойствами.

Завершая изложение подготовительных построений, остановимся еще на одном утверждении. В связи с равенством (4.19) и предстоящим в дальнейшем анализом уравнений вида (2.10) оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 6. *При каждом $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем требованию $k < m/2$, и при любых значениях параметров $\psi_1, \psi_2 \in (0,1)$ уравнение*

$$P(\varkappa) \stackrel{\text{def}}{=} [1 + \psi_1(\varkappa - 1)]^k [1 + \psi_2(\varkappa - 1)]^k - \varkappa^m = 0 \tag{4.33}$$

*имеет простой корень, равный единице, а все остальные его корни лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C}\colon |\varkappa| < 1\}$.*

На доказательстве сформулированной леммы мы не останавливаемся, поскольку в статье [15] показано, что в несколько более простой ситуации справедливо аналогичное утверждение.

## 5. ИТОГОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним, что проблема существования у системы (2.1) бегущих волн (2.2) сводится к отысканию периодических решений вспомогательного уравнения (2.3), имеющих периоды $m\Delta/k$, $k \in \mathbb{N}$. В связи с этим в дальнейшем периодическое решение уравнения (2.3), доставляемое леммой 2, и его период будем обозначать через $x_*(t,\varepsilon,\Delta)$ и $T_*(\varepsilon,\Delta)$ соответственно, подчеркивая зависимость этих функций от $\Delta$ в явном виде. Аналогичным образом, обозначим через $T_0(\Delta)$ период функции (3.19).

Изучим сначала вопрос о существовании периодического решения с периодом $T = m\Delta/k$ у релейного уравнения (3.3). С этой целью для нахождения фазового сдвига $\Delta > 0$ обратимся к уравнению

$$\omega(\Delta) = \frac{m}{k}, \tag{5.1}$$

где $\omega(\Delta) = T_0(\Delta)/\Delta$. При его анализе нам потребуются следующие свойства функций $T_0(\Delta)$, $\omega(\Delta)$: при всех $\Delta \in (\Delta_*, h)$

$$T_0(\Delta) > 2h, \qquad T_0'(\Delta) < 2, \qquad \omega'(\Delta) < 0. \tag{5.2}$$

Для проверки первого неравенства из (5.2) заметим, что при рассматриваемых значениях $\Delta$ каждое из выражений, стоящих под знаком логарифмов в (3.16), строго больше единицы. Далее, в силу условия из (1.6) на $\alpha$, $\beta$, $h$ производные по $\Delta$ упомянутых логарифмов строго меньше единицы, а значит, справедливо и второе неравенство из (5.2). Что касается третьего неравенства, то оно вытекает из первых двух и из очевидной формулы $\Delta^2\omega'(\Delta) = \Delta T_0'(\Delta) - T_0(\Delta)$.

Перечисленные факты позволяют без труда разобраться с вопросом о разрешимости уравнения (5.1). Для того чтобы сделать это, введем в рассмотрение функции

$$\omega_1(\alpha,\beta,h) = \omega(\Delta)|_{\Delta=h}, \qquad \omega_2(\alpha,\beta,h) = \begin{cases} \omega(\Delta)|_{\Delta=\Delta_*} & \text{при } \beta > 1, \\ +\infty & \text{при } \beta \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

(усложненный вариант формулы для $\omega_2(\alpha,\beta,h)$ обусловлен теми обстоятельствами, что $\Delta_* = 0$ при $\beta \leqslant 1$ и $\omega(0) = +\infty$). Из третьего неравенства (5.2) вытекает, что, во-первых, $\omega_1(\alpha,\beta,h) < \omega_2(\alpha,\beta,h)$; во-вторых, при любом натуральном $k$ из множества

$$k\colon\ \omega_1(\alpha,\beta,h) < \frac{m}{k} < \omega_2(\alpha,\beta,h) \tag{5.4}$$

уравнение (5.1) имеет единственный простой корень $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)} \in (\Delta_*, h)$.

Обратимся теперь к периодическому решению $x_*(t,\varepsilon,\Delta)$ уравнения (2.3) и рассмотрим соответствующее ему уравнение

$$\omega(\varepsilon,\Delta) \overset{\text{def}}{=} \frac{T_*(\varepsilon,\Delta)}{\Delta} = \frac{m}{k}. \tag{5.5}$$

Заметим, далее, что в силу (3.20) функция $\omega(\varepsilon,\Delta)$ допускает асимптотическое представление $\omega(\varepsilon,\Delta) = \omega(\Delta) + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, равномерное по $\Delta$ из любого компакта $K \subset (\Delta_*, h)$. А отсюда и из простоты корня $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$ уравнения (5.1) очевидным образом следует, что при любом $k$ из множества (5.4) уравнение (5.5) имеет хотя бы один корень $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ такой, что

$$\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon) = \hat{\Delta}_{(k)} + O(\varepsilon). \tag{5.6}$$

Опираясь на проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие на* $\alpha$, $\beta$, $h$ *из* (1.6), *а натуральные* $m$, $k$ *удовлетворяют неравенствам из* (5.4). *Тогда найдется такое достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *система* (2.1) *допускает цикл* (*бегущую волну*)

$$C_k\colon\ x_j = \hat{x}_{(k)}(t + (j-1)\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon), \varepsilon), \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.7}$$

*где* $\hat{x}_{(k)}(t,\varepsilon) = x_*(t,\varepsilon,\Delta)|_{\Delta=\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)}$, *а* $\hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ – *корень* (5.6) *уравнения* (5.5).

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости цикла (5.7). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Каждый цикл* (5.7) *с номером* $k$ *из множества* (5.4) *экспоненциально орбитально устойчив.*

Доказательство. Согласно лемме 1 любой мультипликатор $\nu$ цикла (5.7) задается равенством $\nu = \hat{\nu}_{l_0}(\varkappa_0, \varepsilon)$, где $\hat{\nu}_l(\varkappa, \varepsilon)$, $l \geqslant 1$, – мультипликаторы вспомогательного уравнения (4.1) при $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$, а $\varkappa_0$ – некоторый ненулевой корень уравнения

$$[\hat{\nu}_l(\varkappa, \varepsilon)]^k = \varkappa^m, \qquad l \in \mathbb{N}, \tag{5.8}$$

при $l = l_0$. В связи с этим обратим внимание, что для оператора монодромии $\mathscr{V}(\varepsilon)$ системы в вариациях (2.4), отвечающей циклу (5.7), имеет место оценка

$$\|\mathscr{V}(\varepsilon)\|_{E\to E} \leqslant M, \qquad M = \mathrm{const} > 0, \tag{5.9}$$

справедливость которой вытекает из свойств (4.2)–(4.8) коэффициентов этой системы. Таким образом, при рассмотрении уравнений (5.8) в силу очевидного неравенства $|\nu| \leqslant \|\mathscr{V}(\varepsilon)\|$, где $\nu$ – любой мультипликатор цикла (5.7), мы вправе ограничиться значениями $\varkappa \in \mathbb{C}\colon |\varkappa| \leqslant r$, где $r = (M+1)^{k/m}$, $M$ – константа из (5.9).

Итак, при условии $\varkappa \in B(r)$ подставим в уравнение (4.1) $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ и воспользуемся леммой 5. В результате убеждаемся, что все возможные решения $\varkappa \in \mathbb{C}$ уравнений (5.8) при $l \geqslant 2$, а значит, и отвечающие им мультипликаторы $\nu = \varkappa^{m/k}$ цикла (5.7) допускают оценку вида $|\nu| \leqslant Me^{-q/\varepsilon}$ с некоторыми универсальными постоянными $M, q > 0$. Таким образом, проблема устойчивости цикла (5.7) сводится к анализу расположения корней уравнения (5.8) при $l = 1$.

Опираясь на асимптотическое представление (4.19), приходим к выводу, что интересующее нас уравнение записывается в виде

$$\widehat{P}(\varkappa) + O(\varepsilon) = 0, \tag{5.10}$$

где $\widehat{P}(\varkappa)$ – полином (4.33) при $\psi_1 = \hat{\psi}_1$, $\psi_2 = \hat{\psi}_2$, а $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$ – величины (4.20) при $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}$. Заметим, далее, что для $\widehat{P}(\varkappa)$ выполняются условия леммы 6.

Действительно, требования $\hat{\psi}_s < 1$, $s = 1, 2$, вытекают из неравенства, связывающего параметры $\alpha$, $\beta$, $h$ (см. формулу (1.6)). Что касается условия $m/k > 2$, то оно следует из (5.4) и из очевидного свойства

$$\omega_1(\alpha, \beta, h) = 2 + \frac{1}{h} \ln\left[\left(\frac{1}{\alpha+\beta-1} + 1 - e^{-h}\right)(\alpha + \beta - e^{-h})\right] > 2.$$

Лемма 6 гарантирует, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (5.10) имеет простой корень $\varkappa = 1$, а остальные его корни (обозначим их через $\varkappa_j$, $j = 1, \ldots, m-1$) лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C}\colon |\varkappa| < 1\}$.

В случае $\varepsilon > 0$ будем рассматривать уравнение (5.10) при $\varkappa \in B_\delta(r)$, где $B_\delta(r)$ – множество (4.32), в определении которого $\psi_s$, $s = 1, 2$, следует заменить на $\hat{\psi}_s$, $s = 1, 2$. Обратим внимание, что значения $\varkappa = 1 - 1/\hat{\psi}_s$, $s = 1, 2$, не являются корнями полинома $\widehat{P}(\varkappa)$. Тем самым при подходящем уменьшении $\delta$ уравнение (5.10) не имеет корней в шарах $\{\varkappa \in \mathbb{C}\colon |\varkappa - 1 + 1/\hat{\psi}_s| \leqslant \delta\}$, $s = 1, 2$, а значит, эти шары мы можем исключить из рассмотрения и ограничиться множеством $B_\delta(r)$. Преимущество последнего заключается в том, что на нем мультипликатор $\hat{\nu}_1(\varkappa, \varepsilon)$ является простым, аналитическим по $\varkappa$, а аналогичное (4.19) асимптотическое представление имеет место в $C^1$-метрике по $\varkappa \in B_\delta(r)$.

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > 0$ уравнение (5.10) по-прежнему допускает решение $\varkappa = 1$, поскольку при $\varkappa = 1$, $\Delta = \hat{\Delta}_{(k)}(\varepsilon)$ уравнение (4.1) заведомо имеет единичный мультипликатор (в этом случае оно представляет собой линеаризацию уравнения (2.3) на цикле $x = \hat{x}_{(k)}(t, \varepsilon)$). Добавим еще, что в силу отмеченного выше свойства аналитичности функции $\hat{\nu}_1(\varkappa, \varepsilon)$ уравнение (5.10) отличается от уравнения $\widehat{P}(\varkappa) = 0$ аналитической добавкой порядка $\varepsilon$ (в $C^1$-метрике). Тем самым, как и при $\varepsilon = 0$, количество его корней в множестве $B_\delta(r)$ равно $m$, причем корень $\varkappa = 1$ является простым. Что касается остальных $m - 1$ корней этого уравнения, то они при $\varepsilon \to 0$ стремятся к корням $\varkappa_j\colon |\varkappa_j| < 1$, $j = 1, \ldots, m-1$, полинома $\widehat{P}(\varkappa)$.

Подведем итог. Из проведенного анализа следует, что за исключением простого, равного единице мультипликатора все другие мультипликаторы $\nu \in \mathbb{C}$ цикла (5.7) по модулю меньше единицы. Действительно, имеется $m - 1$ так называемых критических мультипликаторов $\nu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \ldots, m-1$, стремящихся при $\varepsilon \to 0$ к величинам $\nu = \varkappa_j^{m/k}$, где $\varkappa_j$, $j = 1, \ldots, m-1$, – уже упоминавшиеся выше корни полинома $\widehat{P}(\varkappa)$. Остальные мультипликаторы $\nu$ рассматриваемого цикла лежат в круге вида $|\nu| \leqslant Me^{-q/\varepsilon}$, $M, q = \mathrm{const} > 0$. Теорема доказана.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратим внимание, что при $m \to \infty$ количество номеров $k$, принадлежащих множеству (5.4), стремится к бесконечности. А отсюда и из теоремы 2 вытекает, что при согласованном стремлении $\varepsilon \to 0$, $m \to \infty$ неограниченно возрастает количество сосуществующих в системе (2.1) устойчивых бегущих волн (5.7), т. е. имеет место известное явление буферности.

Остановимся на биологическом смысле полученных результатов. Отметим прежде всего, что системы вида (1.4) являются упрощенными моделями таких ключевых биологических процессов, как клеточный цикл и циркадные ритмы. Поэтому биологическая интерпретация феномена буферности представляет несомненный интерес.

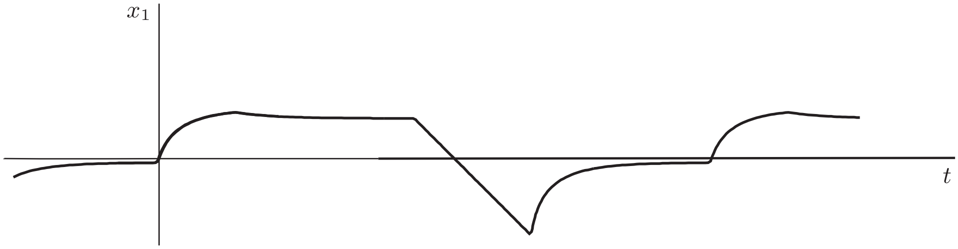


Рис. 2. Случай $k = 1$.

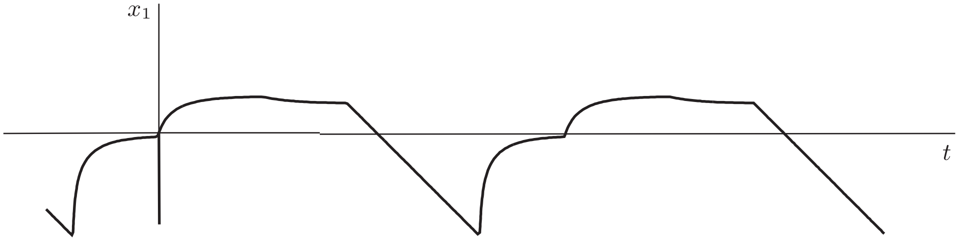


Рис. 3. Случай $k = 2$.

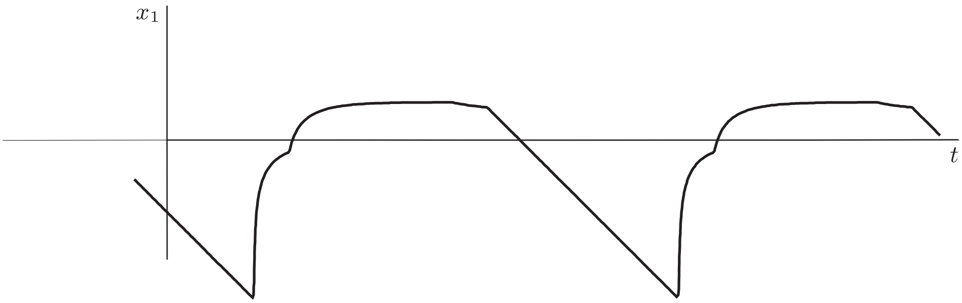


Рис. 4. Случай $k = 3$.

Итак, предположим, что система (1.4) моделирует некий биологический организм, который может функционировать в целом наборе различных потенциально реализующихся устойчивых периодических режимов. При этом смена устойчивых режимов возможна только насильственным путем за счет резкого изменения условий внешней среды обитания (в математическом плане такая смена означает изменение начальных условий системы (1.4) и перебрасывание их из бассейна притяжения одного устойчивого периодического решения в бассейн притяжения другого). Тем самым буферность представляет собой механизм адаптации организма к меняющимся внешним факторам: на изменение условий обитания система реагирует переходом от одного устойчивого режима к другому, более адекватному изменившейся внешней среде.

В заключение проиллюстрируем наши теоретические результаты численным анализом системы (2.1) при $\alpha > 1$, $\beta \leqslant 1$ (в этом случае условие из (1.6) на $\alpha$, $\beta$, $h$

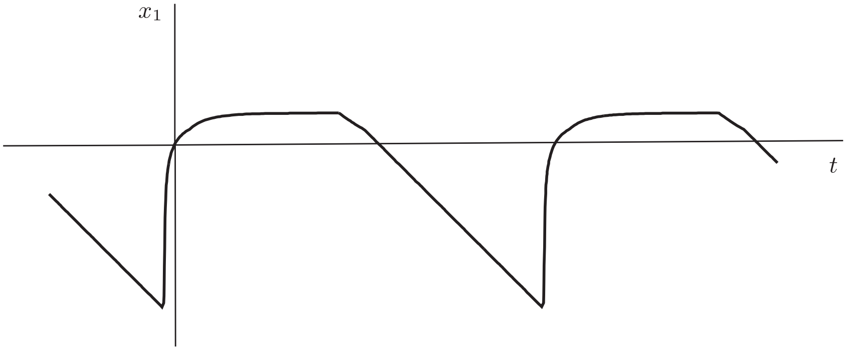


Рис. 5

автоматически справедливо при всех $h > 0$). Точнее говоря, будем считать, что

$$m = 8, \qquad \alpha = 3, \qquad \beta = 0.9, \qquad h = 7, \qquad \delta_1 = \delta_2 = \gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 1, \qquad \varepsilon = 0.01.$$

При указанном выборе параметров имеем $\omega_1(\alpha, \beta, h) \approx 2.236$, $\omega_2(\alpha, \beta, h) = +\infty$, а значит, в силу теорем 1, 2 система (2.1) допускает устойчивые циклы (5.7) с номерами $k = 1, 2, 3$. Зависимости от $t$ компоненты $x_1$ для каждого из этих циклов представлены на рис. 2, 3, 4 соответственно. Данные графики были построены с помощью численного интегрирования системы (2.1) методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности с постоянным шагом $10^{-4}$.

Интересно отметить, что у системы (2.1) могут существовать и бегущие волны (2.2) с фазовым сдвигом $\Delta > h$. Для этих циклов строится теория, аналогичная изложенной выше, однако строгое рассмотрение данного вопроса выходит за рамки настоящей статьи. Отметим лишь, что при указанных выше значениях параметров существует по крайней мере один устойчивый цикл такого типа. График зависимости его компоненты $x_1$ от $t$ изображен на рис. 5.

## Список литературы


[1] M. B. Elowitz, S. Leibler, *Nature*, **403**:6767 (2000), 335–338.

[2] А. Н. Тихонов, *Матем. сб.*, **31(73)**:3 (1952), 575–586.

[3] Е. П. Волокитин, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **7**:3 (2004), 57–65.

[4] O. Buse, A. Kuznetsov, R. A. Pérez, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **19**:12 (2009), 4097–4106.

[5] O. Buse, R. Pérez, A. Kuznetsov, *Phys. Rev. E*, **81**:066206 (2010), 066206, 7 с.

[6] В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6**:2 (2003), 64–80.

[7] Г. В. Демиденко, Н. А. Колчанов, В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:12 (2004), 2276–2295.

[8] С. И. Фадеев, В. А. Лихошвай, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6**:3 (2003), 134–153.

[9] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96.

[10] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 62–83.

[11] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 73–108.

[12] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Реле с запаздыванием и его $C^1$-аппроксимация”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сб. статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 126–153.

[13] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:12 (2010), 2099–2112.

[14] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Дифференц. уравн.*, **47**:7 (2011), 919–932.

[15] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Дифференц. уравн.*, **49**:10 (2013), 1227–1244.

Поступила в редакцию 4.10.2015