

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Черняков Глеб Анатольевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ  
ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО АБСОЛЮТНО  
ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ  
МЕТОДОМ КОВАЧИЧА**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:** Кулешов Александр Сергеевич,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

**Официальные оппоненты:** Буров Александр Анатольевич,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
старший научный сотрудник  
Федерального исследовательского центра  
"Информатика и управление"  
Российской академии наук

Родников Александр Владимирович,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
доцент Московского государственного  
технического университета  
имени Н.Э. Баумана

**Ведущая организация:** Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский  
университет)

Защита диссертации состоится 17 июня 2016 г. в 17 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22, созданного на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, по адресу: 119234, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27, и на сайте <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0112diss.pdf>

Автореферат разослан                      мая 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Прошкин Владимир Александрович

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Задача о качении без скольжения тяжёлого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости является одной из классических задач механики неголономных систем. Еще в 1897 году С.А. Чаплыгин установил, что решение данной задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. После того как находится решение соответствующего уравнения, задача сводится к взятию ряда квадратур. С.А. Чаплыгин указал также два случая, когда можно найти общее решение полученного им уравнения второго порядка. В одном из этих случаев движущееся по плоскости тело является неоднородным динамически симметричным шаром, а в другом – круглым диском или обручем. При этом в случае качения по плоскости круглого диска или обруча задача решается с помощью гипергеометрических рядов.

В 1932 году Х.М. Муштари продолжил исследование задачи о движении тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. При дополнительном условии, накладывающем ограничения на распределение масс и форму поверхности движущегося тела, были найдены два новых частных случая, когда движение тела можно исследовать полностью. В первом случае движущееся твёрдое тело ограничено поверхностью, образуемой при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через её фокус (веретенообразное тело), а во втором случае движущееся тело представляет собой параболоид вращения.

Для других тел вращения, катящихся по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, полное решение задачи прежде указано не было. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для каких ещё тел, катящихся без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости, задача описания их движения может быть решена до конца.

**Цель работы.** Диссертация посвящена исследованию существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о движении динамически симметричного тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, для некоторых наиболее характерных форм поверхности движущегося тела (круглый диск, диск со смещённым центром масс, тор, параболоид вращения, веретенообразное тело).

**Методы исследования.** Для получения условий существования лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка,

к интегрированию которого сводится решение задачи о движении динамически симметричного тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, в работе используется так называемый алгоритм Ковачича – метод нахождения лиувиллевых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, впервые предложенный в работе американского математика Дж. Ковачича и детально описанный в Главе 1 данной диссертационной работы. Кроме того, в работе используются методы аналитической механики, качественной теории дифференциальных уравнений, а также теории устойчивости стационарных движений механических систем.

**Достоверность результатов.** Все основные результаты диссертации получены аналитически с помощью методов дифференциальной теории Галуа, качественной теории дифференциальных уравнений и аналитической механики. Часть аналитических результатов подтверждена и проиллюстрирована с помощью численного анализа.

**Научная новизна.** Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые получены результаты о существовании лиувиллевых решений в задаче о движении круглого диска, круглого диска со смещенным центром масс, динамически симметричного тора, динамически симметричного параболоида вращения и веретенообразного тела. Доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка в случае движения по абсолютно шероховатой плоскости круглого диска и диска со смещенным центром масс. В случае движения по абсолютно шероховатой плоскости динамически симметричного тора установлено отсутствие лиувиллевых решений для почти всех значений параметров задачи. Напротив, в случае движения по плоскости динамически симметричного параболоида доказано, что все решения соответствующего дифференциального уравнения второго порядка выражаются через лиувиллевы функции при любых значениях параметров задачи. В случае движения по плоскости веретенообразного тела установлено отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка для почти всех значений параметров задачи, кроме случая, когда эти параметры удовлетворяют условию Х.М. Муштари.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), в Федеральном исследовательском центре "Информатика и управление" Российской академии наук, в Математическом

институте имени В.А. Стеклова Российской академии наук, в Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, в Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук и других научно-исследовательских центрах.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Международная конференция "Моделирование, управление и устойчивость" (MCS-2012). Украина, г. Севастополь, 10 – 14 сентября 2012 г.
2. Международная конференция "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем" (DSMSI-2013). Украина, г. Киев, 29 – 31 мая 2013 г.
3. XLI International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics" (APM-2013). Russia, Saint-Petersburg (Repino), July 1 – 6, 2013.
4. XLII International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics" (APM-2014). Russia, Saint-Petersburg (Repino), June 30 – July 5, 2014.
5. 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC-2014). Austria, Vienna, July 6 – 11, 2014.
6. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Россия, г. Казань, 20 – 24 августа 2015 г.
7. Научная конференция "Ломоносовские чтения", Россия, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова (2013, 2014 гг.)
8. Секция теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН (2012, 2013 гг.)
9. Научный семинар "Динамические системы и механика" кафедр "Теоретическая механика" и "Дифференциальные уравнения" факультета "Прикладная математика и физика" Московского авиационного института (национального исследовательского университета). 2015, 2016 гг.
10. Научно-методический семинар кафедры "Прикладная математика" Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, 2015 г.

11. Научный семинар "Современные геометрические методы" кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2015 г.
12. Научный семинар "Дифференциальная геометрия и приложения" кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2015 г.
13. Научный семинар "Аналитическая механика и теория устойчивости" имени В.В. Румянцева кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2012, 2014, 2016 гг.
14. Научный семинар "Динамика относительного движения" кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2015 г.

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в пяти печатных работах, две из которых [1,2] опубликованы в журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

**Личный вклад.** Работы [1-5] выполнены в соавторстве с научным руководителем к.ф.-м.н. Кулешовым А.С., которому принадлежат постановки задач и методы их исследования, а также консультации в процессе исследования. Все результаты получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 97 наименований, включая работы автора. В диссертации приведено 15 рисунков. Общий объем диссертации – 149 страниц.

## **Содержание работы**

Во **введении** описываются основные результаты, полученные в разные годы в задаче о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Все упомянутые результаты подкреплены ссылками на соответствующие работы, в которых они были получены.

**Первая глава** диссертации посвящена обсуждению теоретических основ алгоритма Ковачича. В ней также даётся описание алгоритма и рассказывается о том, как с его помощью находятся лиувиллевы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное поле  $\mathbb{C}(x)$  рациональных функций одного комплексного переменного  $x$ . Наша задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$z'' + a(x)z' + b(x)z = 0, \quad (1)$$

где  $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$ , причём интересовать нас будут так называемые лиувиллевы решения данного уравнения. Решение называется лиувиллевым, если оно является элементом лиувиллева поля, где лиувиллево поле определяется следующим образом.

**Определение.** Пусть  $F$  – дифференциальное поле функций одного комплексного переменного  $x$ , которое содержит  $\mathbb{C}(x)$ , то есть  $F$  – поле характеристики ноль с операцией дифференцирования  $()'$ , действующей на элементы этого поля по правилу  $(a + b)' = a' + b'$  и  $(ab)' = a'b + ab'$  для любых  $a$  и  $b$  из  $F$ . Поле  $F$  называется лиувиллевым, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей

$$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n = F,$$

получающаяся присоединением одного элемента, такая, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$$

(то есть  $F_i$  образуется присоединением экспоненты неопределённого интеграла над  $F_{i-1}$ )

или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \text{ где } \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть  $F_i$  образуется присоединением интеграла над  $F_{i-1}$ )

или  $F_i$  является конечным алгебраическим расширением над  $F_{i-1}$  (то есть  $F_i = F_{i-1}(\alpha)$  и  $\alpha$  удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0,$$

где  $a_j \in F_{i-1}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  и не все равны нулю).  $\square$

Таким образом, лиувиллевы решения строятся последовательно из рациональных функций при помощи алгебраических операций, неопределённого интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения.

Для того, чтобы привести исходное дифференциальное уравнение к более простому виду, сделаем следующую замену переменных:

$$y(x) = z(x) e^{\frac{1}{2} \int a(x) dx}. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$y'' = h(x)y, \quad h(x) = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b, \quad h(x) \in \mathbb{C}(x). \quad (3)$$

В дальнейшем в работе предполагается, что дифференциальное уравнение второго порядка, с которым имеет дело алгоритм, записывается в виде (3).

Следующая теорема, доказанная Дж. Ковачичем, определяет структуру решения данного дифференциального уравнения.

**Теорема 1.** Для дифференциального уравнения (3) справедливы только следующие 4 случая.

1. Дифференциальное уравнение имеет решение вида  $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$  и  $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$  (лиувиллево решение типа 1).
2. Дифференциальное уравнение имеет решение вида  $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$ , где  $\omega(x)$  – алгебраическая функция степени 2 над  $\mathbb{C}(x)$ , и Случай 1 не имеет места (лиувиллево решение типа 2).
3. Все решения дифференциального уравнения (3) являются алгебраическими над  $\mathbb{C}(x)$  и Случаи 1 и 2 не имеют места. Решение уравнения (3) имеет в данном случае вид  $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$  и  $\omega(x)$  – алгебраическая функция степени 4, 6 или 12 над  $\mathbb{C}(x)$  (лиувиллево решение типа 3).
4. Дифференциальное уравнение (3) не имеет лиувиллевых решений.

□

Следующая теорема, доказанная в работе Дж. Ковачича, определяет условия, необходимые для того, чтобы один из трёх первых случаев, перечисленных в Теореме 1, мог иметь место.

**Теорема 2.** Для дифференциального уравнения (3) следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трёх первых случаев, перечисленных в Теореме 1, имел место, то есть чтобы у уравнения (3) существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.

1. Каждый полюс функции  $h(x)$  имеет порядок 1 или чётный порядок. Порядок  $h(x)$  в точке  $x = \infty$  чётный или выше, чем второй.
2.  $h(x)$  имеет по меньшей мере один полюс или порядка 2 или нечётного порядка, большего чем 2.

3. Функция  $h(x)$  не имеет полюсов порядка большего, чем 2. Порядок  $h(x)$  в  $x = \infty$  по меньшей мере равен 2. Если разложение функции  $h(x)$  в сумму простейших дробей имеет вид

$$h(x) = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$

то

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 4\alpha_i} &\in \mathbb{Q} \quad \text{для любого } i, \\ \sum_j \beta_j &= 0 \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \text{где } \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j.$$

□

Для нахождения лиувиллева решения типа 1 дифференциального уравнения (3) алгоритм Ковачича формулируется следующим образом. Предположим, что необходимые условия существования решения в Случае 1 выполнены, и обозначим через  $\Gamma$  множество конечных полюсов функции  $h(x)$ .

**Шаг 1.** Для каждого  $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$  определим рациональную функцию  $[\sqrt{h}]_c$  и два комплексных числа  $\alpha_c^+$  и  $\alpha_c^-$  так, как описано ниже.

(c<sub>1</sub>) Если  $c \in \Gamma$  и  $c$  – полюс порядка 1, то

$$[\sqrt{h}]_c = 0, \quad \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

(c<sub>2</sub>) Если  $c \in \Gamma$  и  $c$  – полюс порядка 2, то

$$[\sqrt{h}]_c = 0.$$

Пусть  $b$  – коэффициент при  $\frac{1}{(x-c)^2}$  в разложении функции  $h(x)$  в сумму простейших дробей. Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

(c<sub>3</sub>) Если  $c \in \Gamma$  и  $c$  – полюс порядка  $2\nu \geq 4$  (необходимо чётного порядка в силу соответствующих условий Теоремы 2), тогда функция  $[\sqrt{h}]_c$  представляет собой сумму членов, которые включают в себя

все  $\frac{1}{(x-c)^i}$  для  $2 \leq i \leq \nu$  в разложении функции  $\sqrt{h(x)}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $c$ . Причём для функции  $\left[\sqrt{h}\right]_c$  имеются два значения, различающиеся знаком; любое из них может быть выбрано. Таким образом,

$$\left[\sqrt{h}\right]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \dots + \frac{d}{(x-c)^2}.$$

Пусть  $b$  – коэффициент при  $\frac{1}{(x-c)^{\nu+1}}$  у функции  $h - \left[\sqrt{h}\right]_c^2$ . Тогда

$$\alpha_c^\pm = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{b}{a} + \nu \right).$$

( $\infty_1$ ) Если порядок функции  $h(x)$  в точке  $x = \infty$  больше, чем 2, то

$$\left[\sqrt{h}\right]_\infty = 0, \quad \alpha_\infty^+ = 0, \quad \alpha_\infty^- = 1.$$

( $\infty_2$ ) Если порядок функции  $h(x)$  в точке  $x = \infty$  равен 2, то

$$\left[\sqrt{h}\right]_\infty = 0.$$

Пусть  $b$  – коэффициент при  $\frac{1}{x^2}$  в разложении в ряд Лорана функции  $h(x)$  в окрестности точки  $x = \infty$ . Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4b}.$$

( $\infty_3$ ) Если порядок функции  $h(x)$  в точке  $x = \infty$  равен  $-2\nu \leq 0$  (и является чётным в силу условий Теоремы 2), тогда функция  $\left[\sqrt{h}\right]_\infty$  представляет собой сумму членов со степенями  $x^i$ ,  $0 \leq i \leq \nu$  разложения в ряд Лорана функции  $\sqrt{h(x)}$  в точке  $x = \infty$  (может быть выбрана любая из двух возможностей). Тогда

$$\left[\sqrt{h}\right]_\infty = ax^\nu + \dots + d.$$

Пусть  $b$  – коэффициент при  $x^{\nu-1}$  в  $h - \left(\left[\sqrt{h}\right]_\infty\right)^2$ . Тогда

$$\alpha_\infty^\pm = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{b}{a} - \nu \right).$$

**Шаг 2.** Для каждого семейства  $s = (s(c))_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$ , где  $s(c)$  может быть как знаком  $+$ , так и знаком  $-$ , положим

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}. \quad (4)$$

Если  $d$  является неотрицательным целым числом, то для данного семейства  $s$  введем функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left( s(c) \left[ \sqrt{h} \right]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x - c} \right) + s(\infty) \left[ \sqrt{h} \right]_\infty.$$

Если  $d$  не является неотрицательным целым числом, то соответствующее семейство  $s$  исключается из рассмотрения. Если таким образом из рассмотрения будут исключены все возможные семейства  $s$ , значит Случай 1 не имеет места.

**Шаг 3.** Для каждого семейства  $s$ , сохраненного на предыдущем шаге, будем искать многочлен  $P$  степени  $d$  (постоянная  $d$  определяется формулой (4)) с комплексными коэффициентами, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$P'' + 2\theta P' + (\theta' + \theta^2 - h) P = 0.$$

Если такой многочлен отыщется для какого-либо из семейств  $s$ , то

$$\eta = P e^{\int \theta(x) dx}$$

является искомым решением дифференциального уравнения (3). Если ни для одного из семейств  $s$  многочлен  $P$  найти не удалось, то Случай 1 не имеет места для дифференциального уравнения (3).

Аналогично алгоритм Ковачича формулируется для поиска лиувиллевых решений типа 2 и типа 3 у дифференциального уравнения (3).

**Вторая глава** диссертации посвящена доказательству отсутствия лиувиллевых решений в задачах о движении круглого диска и круглого диска со смещенным центром масс, движущихся по абсолютно шероховатой плоскости.

В §2.1 дана общая постановка задачи о качении тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Пусть твёрдое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси  $G\zeta$ , проходящей через центр тяжести  $G$  тела, опирается в точке

$M$  о неподвижную горизонтальную плоскость  $Oxy$ . Обозначим:  $\theta$  – угол между осью симметрии тела и вертикалью,  $\varphi$  – угол между меридианом  $M\zeta$  тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью,  $\psi$  – угол между горизонтальной касательной  $MQ$  меридиана  $M\zeta$  тела и осью  $Ox$ . Положение тела будет вполне определено углами  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  и координатами  $x$  и  $y$  точки  $M$ .

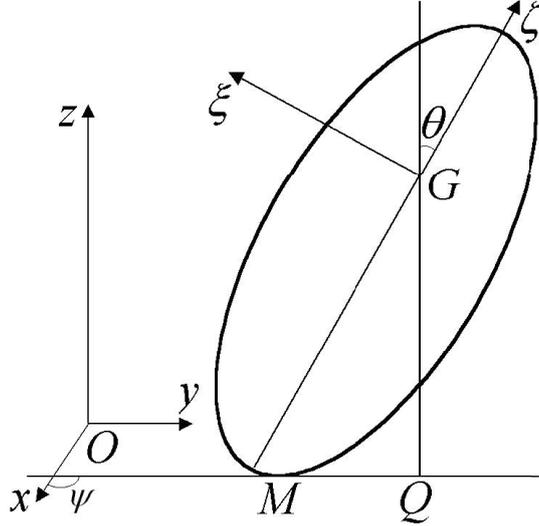


Рис. 1. Качение тела вращения: основные системы координат.

Кроме того, введём систему координат  $G\xi\eta\zeta$ , движущуюся и в пространстве и в теле так, что ось  $G\xi$  все время лежит в плоскости вертикального меридиана  $M\zeta$ , а ось  $G\eta$  перпендикулярна этой плоскости (Рис. 1). Пусть векторы скорости  $\mathbf{v}$  центра масс  $G$ , угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  тела, угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  трехгранника  $G\xi\eta\zeta$  и реакции плоскости  $\mathbf{R}$  задаются в системе координат  $G\xi\eta\zeta$  компонентами  $v_\xi, v_\eta, v_\zeta; p, q, r; \Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$  и  $R_\xi, R_\eta, R_\zeta$  соответственно. Пусть  $m$  – масса тела,  $A_1$  – его момент инерции относительно осей  $G\xi$  и  $G\eta$ , а  $A_3$  – момент инерции относительно оси симметрии  $G\zeta$ .

Заметим, что расстояние  $GQ$  от центра тяжести  $G$  до плоскости  $Oxy$  будет функцией угла  $\theta$ , т.е.  $GQ = f(\theta)$ . Координаты  $\xi, \eta, \zeta$  точки  $M$  касания тела и опорной плоскости в системе координат  $G\xi\eta\zeta$  также будут функциями только угла  $\theta$ , причем  $\eta = 0$ , а

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta. \quad (5)$$

Так как ось  $G\zeta$  неподвижна в теле, то  $\Omega_\xi = p, \quad \Omega_\eta = q$ . Плоскость  $G\xi\zeta$  все время остается вертикальной, поэтому  $\Omega_\zeta = \Omega_\xi \operatorname{ctg} \theta$ . Скорость точки тела, находящейся в соприкосновении с опорной плоскостью, равна нулю, поэтому

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.$$

Закон изменения импульса в проекции на ось  $G\eta$  и закон изменения кинетического момента относительно осей  $G\xi$  и  $G\zeta$  после простых преобразований

дают:

$$\frac{d(p\zeta - r\xi)}{dt} - (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) pq = \frac{R_\eta}{m}, \quad (6)$$

$$A_1 \frac{dp}{dt} + (A_3 r - A_1 p \operatorname{ctg} \theta) q = -\zeta R_\eta, \quad A_3 \frac{dr}{dt} = \xi R_\eta.$$

Отбрасывая в дальнейшем частный случай  $\theta = \operatorname{const}$  и имея в виду, что  $q = -\dot{\theta}$ , после исключения  $R_\eta$  из системы (6) получим

$$A_1 \frac{dp}{d\theta} + A_3 \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A_1 p \operatorname{ctg} \theta + A_3 r, \quad (7)$$

$$\zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{A_3 + m\xi^2}{m\xi} \frac{dr}{d\theta} = -(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi + \zeta') p + \xi' r.$$

Два линейных дифференциальных уравнения первого порядка (7) относительно  $p$  и  $r$  можно свести к одному уравнению второго порядка относительно  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{3m(A_1 \xi \xi' + A_3 \zeta \zeta')}{\Delta} - \frac{\frac{d}{d\theta}(\xi(\xi + \zeta'))}{\xi(\xi + \zeta')} \right] \frac{dr}{d\theta} + \\ + \frac{m\xi(\xi + \zeta')}{\Delta \sin \theta} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{(A_1 \xi' - A_3 \zeta) \sin \theta}{\xi + \zeta'} \right) - A_3 \sin \theta \right] r = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Delta = A_1 A_3 + A_1 m \xi^2 + A_3 m \zeta^2$ .

Дальнейшее решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (8). В работе рассматривается движение по горизонтальной плоскости различных тел, для каждого из которых выписывается соответствующее уравнение вида (8) и с помощью алгоритма Ковачича выясняется, допускает ли полученное линейное уравнение второго порядка лиувиллевы решения.

**§2.2** диссертации посвящен задаче о движении по абсолютно шероховатой плоскости круглого диска. Будем предполагать, что центр масс диска совпадает с его геометрическим центром, радиус диска равен  $R$ . Тогда расстояние от центра масс диска до опорной плоскости выражается формулой

$$f(\theta) = R \sin \theta.$$

По формулам (5) получаем  $\xi = -R$ ,  $\zeta = 0$ , и в результате уравнение (8) для круглого диска принимает вид

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dr}{d\theta} - \frac{A_3 m R^2}{A_1 (A_3 + m R^2)} r = 0, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (9)$$

В уравнении (9) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\cos \theta = x$ . Введем следующие обозначения:

$$B = \frac{A_3 m R^2}{A_1 (A_3 + m R^2)}, \quad z(x) = r(\theta(x)).$$

В результате замены уравнение (9) переписывается в виде

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dz}{dx} - \frac{B}{1-x^2} z = 0. \quad (10)$$

Полученное уравнение (10) является исходным для применения алгоритма Ковачича. Если положить

$$a(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad b(x) = -\frac{B}{1-x^2},$$

то уравнение (10) будет в точности иметь вид уравнения (1). При помощи замены вида (2) уравнение (10) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D(x)y, \quad (11)$$

$$D(x) = \frac{2B-1}{4(x+1)} - \frac{2B-1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{4(x-1)^2}.$$

Разложение функции  $D(x)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $x = \infty$  имеет вид

$$D(x)|_{x=\infty} = -\frac{B}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (11) приводит к следующему результату.

**Теорема 3.** При всех физически допустимых значениях параметров задачи уравнение (11) не имеет лиувиллевых решений.  $\square$

**§2.3** диссертации посвящен задаче о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости круглого диска со смещенным центром масс. Пусть снова по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости движется динамически симметричный диск. Однако теперь предположим, что центр масс диска не совпадает с его геометрическим центром, а отстоит от него на некоторое расстояние  $h$  вдоль оси симметрии. Радиус диска по-прежнему будем обозначать через  $R$ . Расстояние от центра масс диска до опорной плоскости выражается формулой

$$f(\theta) = R \sin \theta + h \cos \theta.$$

По формулам (5) получаем  $\xi = -R$ ,  $\zeta = -h$ , и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dr}{d\theta} - \frac{A_3 m R (R \sin \theta + h \cos \theta)}{(A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2) \sin \theta} r = 0, \quad (12)$$

$$\theta \in \left( 0, \pi - \arccos \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right).$$

В уравнении (12) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\operatorname{ctg} \theta = x$ . Введём следующие обозначения:

$$A = \frac{A_3 m h R}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2}, \quad B = \frac{A_3 m R^2}{A_1 A_3 + A_1 m R^2 + A_3 m h^2},$$

$$z(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (12) переписывается в виде

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \frac{dz}{dx} - \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} z = 0. \quad (13)$$

При помощи замены вида (2) уравнение (13) записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D_1(x) y, \quad (14)$$

$$D_1(x) = \frac{(4B + 1)i}{16(x + i)} - \frac{3 + 4B - 4Ai}{16(x + i)^2} - \frac{(4B + 1)i}{16(x - i)} - \frac{3 + 4B + 4Ai}{16(x - i)^2}.$$

Разложение функции  $D_1(x)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $x = \infty$  имеет вид

$$D_1(x)|_{x=\infty} = -\frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (14) приводит к следующему результату.

**Теорема 4.** При всех физически допустимых значениях параметров задачи уравнение (14) не имеет лиувиллевых решений.  $\square$

**Третья глава** диссертации посвящена задаче о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора. Пусть  $R$  – радиус меридиана тора на экваторе, и  $a + R$  – радиус экваториальной окружности, центр которой совпадает с центром масс тора. Тогда высота центра масс тора над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = R + a \sin \theta.$$

В соответствии с (5) имеем  $\xi = -a - R \sin \theta$ ,  $\zeta = -R \cos \theta$  и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad \theta \in (0, \pi), \quad (15)$$

$$b_1 = \frac{a \cos \theta}{(R \sin \theta + a) \sin \theta} + \frac{3mR((A_1 - A_3)R \sin \theta + A_1 a) \cos \theta}{\Delta},$$

$$b_2 = \frac{m(R \sin \theta + a)(R(A_1 - A_3)(1 - 2 \sin^2 \theta) - A_3 a \sin \theta)}{\Delta \sin \theta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3) m R^2 \sin^2 \theta + 2A_1 m R a \sin \theta + A_1 A_3 + A_1 m a^2 + A_3 m R^2.$$

В уравнении (15) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\sin \theta = x$  и введём обозначение

$$B = \frac{a}{R}, \quad z(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (15) переписется в виде

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + d_1(x) \frac{dz}{dx} + d_2(x) z = 0, \quad (16)$$

$$d_1(x) = \frac{B}{x(x+B)} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{3mR^2((A_1 - A_3)x + A_1 B)}{\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{mR^2(x+B)((A_1 - A_3)(2x^2 - 1) + A_3 B x)}{x(x^2 - 1)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 - A_3) m R^2 x^2 + 2A_1 B m R^2 x + A_1 A_3 + A_1 B^2 m R^2 + A_3 m R^2.$$

При  $A_3 \neq A_1$  многочлен  $\Delta$ , входящий в знаменатели коэффициентов  $d_1(x)$  и  $d_2(x)$ , имеет два корня, которые мы обозначим  $x_1$  и  $x_2$ . При помощи замены вида (2) уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = T(x)y, \quad (17)$$

$$T(x) = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x+1} + \frac{\alpha_2}{(x+1)^2} + \frac{\beta_3}{x-x_1} + \frac{\alpha_3}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_4}{x-x_2} + \frac{\alpha_4}{(x-x_2)^2} + \frac{\beta_5}{x+B} + \frac{\alpha_5}{(x+B)^2} + \frac{\beta_6}{x} + \frac{\alpha_6}{x^2}, \quad (18)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{4},$$

а коэффициенты  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) имеют достаточно громоздкий вид и поэтому не выписаны. Легко видеть, что функция  $T(x)$  имеет шесть конечных полюсов в точках  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = -B$ ,  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . В общем случае эти полюса не совпадают друг с другом. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных условиях на параметры задачи функция  $T(x)$  имеет вид, отличный от (18). Перечислим далее все возможные случаи, когда структура функции  $T(x)$  меняется.

1. При выполнении условия

$$A_3 = A_1 \tag{19}$$

степень многочлена  $\Delta$  меняется со второй на первую. Единственным корнем многочлена  $\Delta$  в этом случае будет значение  $x_0$ , равное

$$x_0 = -\frac{A_1 + mR^2 + mR^2B^2}{2mBR^2}.$$

2. При выполнении условия

$$A_3 = A_1 = mR^2(B^2 - 1) = m(a^2 - R^2) \tag{20}$$

мы получаем, что  $x_0 = -B$ .

3. При выполнении условий

$$A_3 \neq A_1, \quad A_1 = m(a^2 - R^2) \tag{21}$$

будем иметь совпадение значений  $x_1 = -B$ .

4. При выполнении условия

$$A_3 = \frac{A_1}{A_1 + mR^2} (A_1 + mR^2 - ma^2) \tag{22}$$

будем иметь совпадение значений  $x_1 = x_2$ , которые будут при этом равны

$$x_1 = x_2 = -\frac{A_1 + mR^2}{mBR^2}.$$

Таким образом, для полного исследования вопроса о существовании ливиллевых решений у дифференциального уравнения (17) понадобится не только изучение общего случая, когда функция  $T(x)$  имеет вид (18), но и четырёх частных случаев, когда параметры задачи удовлетворяют одному

из соотношений (19) – (22). Окончательно, исследование существования лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (17) приводит к следующему результату.

**Теорема 5.** Для почти всех физически допустимых значений параметров задачи уравнение (17) не имеет лиувиллевых решений.  $\square$

**Четвертая глава** диссертации посвящена задаче о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида. Пусть по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости катится тело, меридиан поверхности которого – парабола с параметром  $2\lambda$ . Пусть центр тяжести тела находится в фокусе этой параболы. Тогда высота центра масс параболоида над опорной плоскостью равна

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\cos \theta},$$

и по формулам (5) имеем

$$\xi = -\frac{2\lambda \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = \frac{\xi^2}{4\lambda} - \lambda.$$

Уравнение (8) в случае качения по плоскости динамически симметричного параболоида вращения принимает вид

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (23)$$

$$b_1 = \frac{\cos^2 \theta - 4}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{6(A_3 - 2(A_3 - A_1) \cos^2 \theta)m\lambda^2 \sin \theta}{\Delta \cos \theta},$$

$$b_2 = \frac{2m\lambda^2(A_3 - 2A_1)(1 + \cos^2 \theta)}{\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2(A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3 m\lambda^2.$$

В уравнении (23) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\cos^2 \theta = x$ . Введем также следующие обозначения:

$$B = m\lambda^2, \quad z(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (23) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + d_1(x) \frac{dz}{dx} + d_2(x) z = 0, \quad (24)$$

$$d_1(x) = \frac{5 - 3x}{2x(1 - x)} - \frac{3(A_3 - 2(A_3 - A_1)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(A_3 - 2A_1)B(x + 1)}{2x(1 - x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1A_3 + 4(A_3 - A_1)B)x^2 - 4(A_3 - A_1)Bx + A_3B.$$

Обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  корни многочлена  $\Delta$ . Замена вида (2) приводит уравнение (24) к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(x)y, \quad (25)$$

$$\Pi(x) = \frac{\beta_1}{x - 1} + \frac{\alpha_1}{(x - 1)^2} + \frac{\beta_0}{x} + \frac{\alpha_0}{x^2} + \frac{\beta_2}{x - x_1} + \frac{\alpha_2}{(x - x_1)^2} + \frac{\beta_3}{x - x_2} + \frac{\alpha_3}{(x - x_2)^2},$$

$$\alpha_0 = \frac{5}{16}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{3}{16},$$

$$\beta_0 = \frac{x_1 + x_2 + 2x_1x_2}{8x_1x_2}, \quad \beta_1 = \frac{4x_1 + 4x_2 - 3x_1x_2 - 5}{4(x_1 - 1)(x_2 - 1)},$$

$$\beta_2 = -\frac{4x_1 + x_2 - 7x_1x_2 - 2x_1^2 + 4x_1^2x_2}{8x_1(x_1 - x_2)(x_1 - 1)}, \quad \beta_3 = \frac{x_1 + 4x_2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2^2}{8x_2(x_1 - x_2)(x_2 - 1)}.$$

Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (25) приводит к следующему результату.

**Теорема 6.** При любых физически допустимых значениях параметров задачи все решения уравнения (23) являются лиувиллевыми.  $\square$

Общее решение уравнения (23) в явном виде записывается следующим образом:

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{K_1(\theta)}{K_2(\theta)}} (c_1 \cos \Phi(\theta) + c_2 \sin \Phi(\theta)),$$

$$\Phi(\theta) = 2m\lambda^2 D \int_0^\theta \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{K_1(\varphi) \sqrt{K_2(\varphi)}}, \quad D = \sqrt{2A_1A_3(A_3 + 4m\lambda^2)(2A_1 - A_3)},$$

$$K_1(\theta) = (A_1A_3 + 4A_1m\lambda^2) \cos^4 \theta - 2A_3m\lambda^2 \cos^2 \theta + A_3m\lambda^2,$$

$$K_2(\theta) = (A_1A_3 + 4m\lambda^2(A_3 - A_1)) \cos^4 \theta - 4m\lambda^2(A_3 - A_1) \cos^2 \theta + A_3m\lambda^2.$$

Кроме того, в четвертой главе диссертации на основе полученного общего решения дифференциального уравнения (23) дано качественное описание

движения по плоскости динамически симметричного параболоида. Установлено, что следом точки касания параболоида с плоскостью на поверхности параболоида является кривая, состоящая из периодически повторяющихся волн и прикасающаяся поочередно к двум параллелям параболоида. След точки касания на неподвижной плоскости образует кривую такого же характера, заключенную между двумя концентрическими окружностями. Также в этой главе дано описание всех стационарных движений параболоида (перманентных вращений и регулярных прецессий) и доказано, что все они являются устойчивыми. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

Последняя, **пятая глава** диссертации посвящена исследованию задачи о движении веретенообразного тела. Пусть по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости катится тело, поверхность которого образована вращением дуги параболы относительно оси, параллельной директрисе и проходящей через фокус параболы. Тогда высота его центра масс над опорной плоскостью выражается формулой

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}, \quad \lambda = \text{const.}$$

В соответствии с (5) имеем

$$\xi = \frac{\lambda \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \lambda, \quad \zeta = -\frac{2\lambda \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \zeta^2 = 4\lambda(\xi + \lambda),$$

и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + b_1 \frac{dr}{d\theta} + b_2 r = 0, \quad (26)$$

$$b_1 = \frac{(4 \sin^4 \theta - 24 \sin^2 \theta + 15) \cos \theta}{(1 - 2 \sin^2 \theta)(3 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta} - \frac{6(A_1 - 2(A_1 - A_3) \sin^2 \theta) m \lambda^2 \cos \theta}{\Delta \sin \theta},$$

$$b_2 = \frac{(3A_3 - 2A_1) m \lambda^2 (1 - 2 \sin^2 \theta)^2}{\Delta (3 - 2 \sin^2 \theta)},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4m\lambda^2(A_1 - A_3)) \sin^4 \theta - 4m\lambda^2(A_1 - A_3) \sin^2 \theta + A_1 m \lambda^2.$$

В уравнении (26) сделаем замену независимой переменной по формуле  $\sin^2 \theta = x$  и введем обозначения

$$B = m\lambda^2, \quad z(x) = r(\theta(x)).$$

В результате уравнение (26) примет вид

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + d_1(x) \frac{dz}{dx} + d_2(x) z = 0, \quad (27)$$

$$d_1(x) = \frac{18 - 53x + 48x^2 - 12x^3}{2x(1-x)(1-2x)(3-2x)} - \frac{3(A_1 - 2(A_1 - A_3)x)B}{x\Delta},$$

$$d_2(x) = \frac{(3A_3 - 2A_1)(1-2x)^2 B}{4x(1-x)(3-2x)\Delta},$$

$$\Delta = (A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3))x^2 - 4B(A_1 - A_3)x + A_1 B.$$

При  $A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0$  многочлен  $\Delta$ , входящий в знаменатели коэффициентов  $d_1(x)$  и  $d_2(x)$ , имеет два корня, которые мы обозначим  $x_1$  и  $x_2$ . При помощи замены вида (2) уравнение (27) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = S(x)y, \quad (28)$$

$$S(x) = \frac{\beta_0}{x} + \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\alpha_1}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{(x-\frac{1}{2})^2} + \frac{\beta_3}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\alpha_3}{(x-\frac{3}{2})^2} + \frac{\beta_4}{x-x_1} + \frac{\alpha_4}{(x-x_1)^2} + \frac{\beta_5}{x-x_2} + \frac{\alpha_5}{(x-x_2)^2}, \quad (29)$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\frac{3}{16}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{4},$$

а коэффициенты  $\beta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) имеют достаточно громоздкий вид и поэтому не выписаны. Легко видеть, что функция  $S(x)$  имеет шесть конечных полюсов в точках  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 1/2$ ,  $x = 3/2$ ,  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . В общем случае эти полюса не совпадают друг с другом. Однако возможны ситуации, когда при дополнительных условиях на параметры задачи функция  $S(x)$  имеет вид отличный от (29). Перечислим далее все возможные случаи, когда структура функции  $S(x)$  меняется.

1. При выполнении условия

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) = 0 \quad (30)$$

степень многочлена  $\Delta$  меняется со второй на первую. Единственным корнем многочлена  $\Delta$  в этом случае будет значение  $x_0$ , равное

$$x_0 = \frac{A_1}{4(A_1 - A_3)} = -\frac{m\lambda^2}{A_3}.$$

2. При выполнении условий

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0, \quad B = \frac{9A_1 A_3}{4(3A_3 - 4A_1)} \quad (31)$$

будем иметь совпадение значений  $x_1 = 3/2$ .

3. При выполнении условий

$$A_1 A_3 + 4B(A_1 - A_3) \neq 0, \quad B = \frac{A_1^2}{4(A_3 - A_1)} \quad (32)$$

будем иметь совпадение значений  $x_1 = x_2$ , которые будут при этом равны

$$x_1 = x_2 = \frac{A_1}{2(A_1 - A_3)}.$$

4. При выполнении условия

$$3A_3 - 2A_1 = 0 \quad (33)$$

равен нулю коэффициент  $\beta_0$  в разложении (29) функции  $S(x)$  на простейшие дроби и, следовательно, в этом разложении отсутствует полюс первого порядка  $x = 0$ . В этом случае решения уравнения (28) являются лиувиллевыми, что следует из результатов работы Х. М. Муштари.

Таким образом, для полного исследования вопроса о существовании лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (28) потребуются не только изучение общего случая, когда функция  $S(x)$  имеет вид (29), но и трёх частных случаев, когда параметры задачи удовлетворяют одному из соотношений (30) – (32). Окончательно, исследование существования лиувиллевых решений у дифференциального уравнения (28) приводит к следующему результату.

**Теорема 7.** Для почти всех физически допустимых значений параметров задачи, при которых условие (33) не выполнено, уравнение (28) не имеет лиувиллевых решений.  $\square$

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. С помощью алгоритма Ковачича проведено исследование линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи о движении динамически симметричного тяжёлого твёрдого тела по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Для ряда наиболее характерных форм поверхности движущегося тела: круглого диска, круглого диска со смещенным центром масс, тора, параболоида и тела веретенообразной формы, – изучен вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего уравнения второго порядка, получающегося для каждого из рассматриваемых тел.

2. Применение алгоритма Ковачича в задачах о движении круглого диска и круглого диска со смещённым центром масс позволило доказать отсутствие лиувиллевых решений у уравнения второго порядка, получающегося для каждого из указанных тел при всех физически допустимых значениях параметров задачи. Тем самым, в частности, доказано, что гипергеометрические функции, представляющие решения в случаях круглого диска и круглого диска со смещённым центром масс, не допускают упрощения до лиувиллевых функций ни при каких физически допустимых значениях параметров задачи.
3. В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного тора с помощью алгоритма Ковачича доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка для почти всех физически допустимых значений параметров задачи.
4. В случае качения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного параболоида вращения с помощью алгоритма Ковачича доказано, что при всех физически допустимых значениях параметров задачи все решения соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка являются лиувиллевыми. Получен явный вид этих решений. На основе найденных решений путем анализа квадратур проведено качественное исследование движения параболоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости. В частном случае качения по шероховатой плоскости однородного параболического сегмента представлены наиболее характерные траектории точки касания поверхности параболического сегмента с опорной плоскостью для различных начальных условий. Описаны стационарные движения параболоида на абсолютно шероховатой плоскости (перманентные вращения и регулярные прецессии) и доказано, что они являются устойчивыми. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы.
5. В задаче о качении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости веретенообразного тела с помощью алгоритма Ковачича доказано отсутствие лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка для почти всех физически допустимых значений параметров задачи, за исключением случая, когда параметры задачи удовлетворяют условию Х.М. Муштари.

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2013. Вып. 4. С. 93–102.
2. *Кулешов А.С., Черняков Г.А.* О качении параболоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2014. Вып. 4. С. 624–631.
3. *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Investigation of the problem of motion of a heavy dynamically symmetric body on a perfectly rough plane by the Kovacic algorithm // Proceedings of the XLI Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM – 2013)". Saint – Petersburg (Repino), July 1–6, 2013. SPb: Polytechnical University Publishing House. 2013. P. 310–320.
4. *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Motion of a dynamically symmetric paraboloid on a perfectly rough plane // Proceedings of the XLII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics (APM – 2014)". Saint – Petersburg (Repino), June 30 – July 5, 2014. SPb: Polytechnical University Publishing House. 2014. P. 177–183.
5. *Chernyakov G.A., Kuleshov A.S.* Investigation of the Problem of Motion of a Heavy Dynamically Symmetric Body on a Perfectly Rough Plane by the Kovacic Algorithm // ENOC 2014 – Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference. Vienna: Institute of Mechanics and Mechatronics, Vienna University of Technology. 2014. P. 453–458.