

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

КОНОВАЛОВ ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО
НАЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ОСНОВЕ
РАЗРЫВНОГО МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2019

Работа выполнена на кафедре вычислительной механики механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель – **Левин Владимир Анатольевич**, заслуженный деятель науки РФ, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты – **Петров Игорь Борисович**, член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной математики Московского физико-технического института;

Шешенин Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова;

Морозов Евгений Михайлович, заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., профессор, профессор кафедры физики прочности Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ».

Защита диссертации состоится «20» ноября 2019 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, строение 52, факультет ВМК, комната 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.su

С диссертаций можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ им. М.В. Ломоносова (Ломоносовский пр., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА» <http://istina.msu.ru/dissertations/237724819/>

Автореферат разослан «__» _____ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Диссертация посвящена математическому моделированию напряженно-деформированного состояния нелинейно-упругих тел при многократном наложении конечных деформаций. В диссертационной работе предложена дискретизация математической модели нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов.

Актуальность темы работы определяется возможностями современного высокотехнологичного оборудования, позволяющего реализовывать конструкторские решения с необходимой точностью и как следствие необходимостью поиска современных высокоточных подходов к математическому моделированию и решению задач инженерного анализа изделий и конструкций из физически нелинейных материалов, в том числе гиперупругих, и композитных материалов. Появление новых материалов и сложных дизайнов изделий предъявляет новые требования к точности описания геометрии конструкции и определяет необходимость построения неструктурированных криволинейных сеток, содержащих различные типы элементов второго и более высокого порядка - гексаэдральные, тетраэдральные, призматические, пирамидальные, четырехугольные и треугольные, позволяющие аппроксимировать геометрию изделия с более высокой точностью, чем при использовании структурированных сеток или неструктурированных сеток первого порядка.

Актуальность связана также с развитием аддитивных технологий изготовления элементов конструкций, необходимостью учета остаточных напряжений при изготовлении изделий с помощью этих технологий с учетом многократного наложения конечных деформаций.

При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния элементов конструкций на основе нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций можно

использовать аналитические, полуаналитические и численные методы. Недостатком аналитических методов является сложность и невозможность получения решения для нелинейных задач общего вида, поэтому для решения данного класса задач могут применяться различные численные методы, например, метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод конечных элементов и метод спектральных элементов.

В качестве основного подхода к построению численной модели был выбран метод спектральных элементов, который обладает рядом преимуществ по сравнению с классическим методом конечных элементов: высокой точностью аппроксимации решения при существенно меньшем числе необходимых сеточных элементов. Погрешность численного решения можно оценить как: $\|[\mathbf{u}]_h - \mathbf{u}_h\| \leq C(N)$, при этом $C(N) = C_1 h^N e^{-N}$ для метода спектральных элементов и $C(N) = C_2 h^N$ для метода конечных элементов, где C_1 и C_2 – константы, h – характерный размер сетки, N – порядок элемента, $\mathbf{u}_h$ – численное решение. Также при работе с моделью у исследователя отсутствует необходимость перестроения и измельчения сетки для проверки сеточной сходимости, полученного решения, как это было при использовании метода конечных элементов, поскольку при использовании метода спектральных элементов сетка может оставаться изначальной, а изменяться только порядок элементов. Возможность эффективного распараллеливания вычислений для систем с общей или распределенной памятью с помощью технологий OpenMP и MPI делает метод спектральных элементов привлекательным для промышленного применения в различных программных комплексах.

Применение современных численных подходов к математическому моделированию задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций с физически нелинейными материалами, позволяет выявлять новые качественные эффекты поведения конструкции при определенных типах нагружения и подтверждает результаты, которые ранее были получены только с помощью аналитических или

полуаналитических методов для конкретных классов задач, и не позволяют применять полученные решения в рамках промышленных расчетных программных комплексов.

Сложность построения конформных сеток на границе между элементами конструкций приводит к необходимости поиска математических методов, позволяющих сохранять непрерывность параметров на границе между элементами при наличии не конформно стыкованных узлов. Одним из таких наиболее современных и эффективных подходов является разрывный метод Галеркина. В рамках данного исследования разрывный метод Галеркина был адаптирован для использования на не конформно стыкованных спектрально элементных сетках.

Разрывный метод спектральных элементов обеспечивает непрерывность перемещений и напряжений на границе между элементами конструкций, в то время как классический метод спектральных элементов обеспечивает непрерывность только по перемещениям. Задание уравнений связей в узлах граничных поверхностей обеспечивает непрерывность перемещений при решении краевых задач нелинейной теории упругости, а учет равенства нормальных напряжений на границе между контактирующими элементами позволяет обеспечить непрерывность по напряжениям. Разрывный метод спектральных элементов, предложенный для задач с условиями жесткого контакта на границе между элементами конструкций, позволяет расширить область применения метода на задачи с контактным взаимодействием общего вида с трением и без трения, обеспечивая непрерывность перемещений и напряжений на каждой итерации метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений.

Разрывный метод спектральных элементов позволяет проводить расчет послойного наращивания предварительно нагретых или нагруженных слоев в рамках процесса аддитивного производства, в частности методом селективного лазерного спекания. Возможность использования элементов различных порядков на границе между слоями, в зависимости от их

толщины, снимает необходимость перестроения сетки на уже остывших слоях изделия, что позволяет проводить полный цикл виртуального моделирования процесса производства изделия с помощью послойного наращивания.

Степень разработанности темы исследования

Вопросы нелинейной теории упругости подробно исследованы в работах В.И. Блоха, А.И. Лурье, В.В. Новожилова, Б.Е. Победри, Л.И.Седова, Г.С.Тарасьева, М.М. Филоненко-Бородича, М. Муни, Ф. Мурнагана, Р. Огдена, Р. Ривлина, и многих других. Вопросы решения задач теории многократного наложения конечных деформаций для тел из нелинейно упругих материалов исследованы в работах Г.С. Тарасьева, В.А. Левина, К.М. Зингермана, и ряде других.

Математическое моделирование многократного наложения конечных деформаций с использованием метода спектральных элементов ранее не проводилось.

Целями диссертационной работы являются:

1) Разработка математических моделей напряженно-деформированного состояния изделий, изготавливаемых посредством последовательного присоединения предварительно деформированных частей, на основе теории многократного наложения конечных деформаций.

2) Разработка и верификация методики, алгоритмов и программного обеспечения для численного решения задач теории многократного наложения конечных деформаций методом спектральных элементов, решение модельных задач этой теории, анализ результатов.

Задачами диссертационной работы являются:

1) Разработка и исследование математической модели изгиба слоистой предварительно нагруженной балки, изготовленной посредством последовательного соединения слоев, с не полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

2) Разработка варианта алгоритма численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов.

3) Разработка и тестирование модификации разрывного метода спектральных элементов для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями и разработка алгоритма решения задач нелинейной упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе этой модификации

4) Программная реализация разработанных алгоритмов численного решения в составе промышленной системы компьютерного моделирования Фидесис и верификация разработанного программного обеспечения посредством сравнения с известными аналитическими решениями.

5) Проведение серии вычислительных экспериментов и получение новых качественных эффектов от учета наложения конечных деформаций при численном моделировании краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов с применением разработанного комплекса программ.

6) Выполнение численного моделирования процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания и получение результатов, согласующихся с экспериментальными данными.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются краевые задачи нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций. Предметом исследования являются алгоритмы численного решения краевых задач нелинейно теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями.

Научная новизна полученных результатов

В работе впервые представлена модификация разрывного метода спектральных элементов на гибридных неконформных сетках переменного порядка аппроксимации в подобластях для дискретизации геометрических моделей с нестыкованными граничными поверхностями. Также в работе впервые представлено применение разрывного метода спектральных элементов для решения краевых задач нелинейной упругости и теории многократного наложения больших деформаций. На основе разработанной модели и алгоритма решения реализован комплекс программ на языке программирования C++. Предложена и исследована математическая модель деформирования предварительно нагруженной составной балки с частично соединенными слоями с учетом геометрической и физической нелинейности и дополнительного контактного условия.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость диссертационного исследования определяется предложенной и исследованной математической моделью деформирования предварительно нагруженной составной балки с частично соединенными слоями с учетом геометрической и физической нелинейностей и дополнительного контактного условия. Впервые применен разрывный метод спектральных элементов к численному решению краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций. Разработана модификация разрывного метода спектральных элементов на гибридных сетках переменного порядка аппроксимации в подобластях для дискретизации геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями

Практическая значимость работы состоит в создании комплекса программ, с помощью которого можно решать краевые задачи нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций для двумерных и трехмерных не конформно стыкованных сеток из смешанных типов элементов с учетом физической и геометрической

нелинейностей, используя спектральные элементы высокого порядка. Ряд полученных результатов в виде программных модулей используется в программном комплексе прочностного инженерного анализа Фидесис, лицензионная версия которого установлена на промышленных предприятиях.

Методология диссертационного исследования

Методология исследования основана на применении нелинейной теории упругости и термоупругости и теории многократного наложения больших деформаций к разработке математических моделей, применении разрывного метода спектральных элементов к численному исследованию процессов многоэтапного деформирования нелинейно-упругих тел на основе этих моделей.

Основные положения, выносимые на защиту

1) Математическая модель изгиба слоистой предварительно нагруженной балки, изготовленной посредством последовательного соединения слоев, с не полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

2) Алгоритм численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов, модифицированного для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями, и программная реализация в составе промышленной системы компьютерного моделирования Фидесис.

3) Количественная оценка нелинейных эффектов от учета наложения конечных деформаций в задачах об образовании отверстия в телах из материалов Муни-Ривлина и Мурнагана.

4) Немонотонность зависимости угла поворота конца балки от предварительного растяжения первого слоя в задаче об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями.

5) Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния изделия в процессе аддитивного производства методом

селективного лазерного спекания с помощью разработанного комплекса программ и его результаты, согласующиеся с экспериментальными данными.

Степень достоверности результатов

Обоснованность полученных результатов следует из корректности постановки задачи, использования уравнений нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций, граничных условий и определяющих соотношений, опубликованных ранее другими авторами, а также применения апробированных численных методов.

Достоверность результатов подтверждается результатами верификационных расчетов, которые хорошо согласуются с известными аналитическими, полуаналитическими и численными решениями.

Апробация результатов диссертации

Основные положения диссертации обсуждались на следующих научных конференциях: «Ломоносовские чтения», МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014; Международный молодежный форум «Ломоносов - 2014» », МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014; XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015; 26-й Симпозиум (международная конференция) проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов, Москва, 2015; «Ломоносовские чтения» », МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2019; NAFEMS World Congress 2019, Quebec, 2019; XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 15 работах, в том числе в 3 статьях в научных журналах, входящих в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК. 3 статьи опубликованы в изданиях, индексируемых в базах Scopus, WoS, RSCI. На модули

программного комплекса получены 11 свидетельств о государственной регистрации прав на программное обеспечение.

Личный вклад

Все приведенные в диссертации результаты получены самим автором, либо в рамках сотрудничества. В работах, опубликованных в соавторстве, общая механическая постановка в задачах нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций принадлежит в равной доле В.А. Левину и К.М. Зингерману, математическая постановка, включая выбор определяющих соотношений для материалов и граничных условий, принадлежит автору диссертации, общий алгоритм численного решения нелинейных задач теории упругости на основе метода спектральных элементов принадлежит А.В. Вершинину, алгоритм численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций на основе метода спектральных элементов с использованием гибридных криволинейных сеток, программная реализация алгоритмов, результаты вычислительных экспериментов принадлежат автору диссертации. Механическая постановка задачи о численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях принадлежит М.Я. Яковлеву, математическая постановка в равных долях принадлежит М.Я. Яковлеву и автору диссертации, алгоритм численного решения на основе метода спектральных элементов и программная реализация алгоритмов принадлежат автору диссертации, результаты вычислительных экспериментов в равных долях принадлежат М.Я. Яковлеву и автору диссертации. Механическая постановка задач нелинейной теории упругости с контактом принадлежит в равных долях А.В. Вершинину и В.А. Левину, математическая постановка задачи принадлежит автору диссертации, формулировка общего подхода к решению задач нелинейной теории упругости с контактом принадлежит А.В. Кукушкину, алгоритмы численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций на основе

разрывного метода спектральных элементов, модифицированного для геометрических моделей с неконформно стыкованными граничными поверхностями принадлежит автору диссертации, программная реализация алгоритмов принадлежит автору диссертации, результаты вычислительных экспериментов принадлежат автору диссертации. Разработанные автором диссертации программные модули, на основе предложенных алгоритмов, вошли в состав программного комплекса прочностного инженерного анализа Фидесис.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 111 страницах и содержит 30 рисунок. Список литературы включает 155 источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы диссертационной работы. Сформулированы цели и задачи исследования. Дана общая характеристика работы и краткое содержание результатов по основным разделам.

Приведен обзор работ посвященных математическим моделям напряженно-деформированного состояния нелинейно-упругих тел при конечных деформациях и их наложении. Дан обзор литературы по аналитическим, полуаналитическим и численным подходам к решению трехмерных и двумерных задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций, в том числе методу конечных элементов. Приведен обзор исследований, посвященных решению нелинейных задач теории упругости с помощью метода спектральных элементов. Выделены работы, предлагающие подходы к обеспечению неразрывности решений на не конформно стыкованных сетках.

В первой главе представлены основные уравнения и определяющие соотношения нелинейной теории упругости и теории многократного

наложения конечных деформаций, приведены постановки задач и описание математических моделей, используемых в исследовании.

В параграфе 1.1 описываются основные уравнения и определяющие соотношения нелинейной теории упругости. Уравнение равновесия в координатах начального состояния записывается в следующем виде:

$$\overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{P}(u(x, t))) = \mathbf{f}(x, t),$$

u – вектор перемещений,

$\mathbf{P}$ – первый (несимметричный) тензор Пиолы,

$\mathbf{f}$ – заданный вектор внешних нагрузок.

Аффинор деформаций имеет вид:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{F}^T,$$

$\mathbf{F}$ – градиент деформаций.

Тензор истинных напряжений Коши выражается через первый (несимметричный) тензор Пиолы в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \det(\boldsymbol{\Psi})^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{P}.$$

Второй тензором Пиолы-Кирхгофа выражается через первый (несимметричный) тензором Пиолы в следующем виде:

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1}.$$

Поведение нелинейных гиперупругих слабосжимаемых материалов можно описать, используя определяющие соотношения, которые задаются с помощью следующих функций плотности энергии деформаций.

Для материала Муни-Ривлина функция плотности энергии деформаций имеет вид:

$$\mathbf{W} = C_{10} \left(J^{-\frac{2}{3}} I_1 - 3 \right) + C_{10} \left(J^{-\frac{4}{3}} I_2 - 3 \right) + \frac{1}{2} (J - 1)^2,$$

I_1, I_2 – первый и второй инварианты тензора меры деформаций Грина

J – определитель градиента деформаций, $J = \det(\mathbf{F})$.

Для материала Блейца-Ко функция плотности энергии деформаций может быть представлена в виде:

$$\mathbf{W} = \frac{\mu\alpha}{2} \left[(I_1 - 3) + \beta J^{-\frac{2}{\beta}} - 1 \right] + \frac{\mu(1-\alpha)}{2} \left[\left(\frac{I_2}{I_3} - 3 \right) + \beta J^{\frac{2}{\beta}} - 1 \right],$$

I_3 – третий инвариант тензора меры деформаций Грина, $J = \sqrt{I_3}$.

Связь напряжений и деформаций для потенциала Мурнагана представляется в следующем виде:

$$\overset{0}{\Sigma}(\overset{0}{\mathbf{E}}) = \lambda(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2G\overset{0}{\mathbf{E}} + 2C_3(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I})^2 \mathbf{I} + C_4(\overset{0}{\mathbf{E}^2} : \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2C_4(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I}) \overset{0}{\mathbf{E}} + 3C_5\overset{0}{\mathbf{E}}^2,$$

λ – модуль Ламэ, G – модуль сдвига, $\mathbf{I}$ – единичный тензор,

$(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I})$ – двойная свертка тензоров,

$\overset{0}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ – тензор деформаций Грина,

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ – тензор меры деформаций Грина.

В параграфе 1.2 изложены основные уравнения и определяющие соотношения теории многократного наложения конечных деформаций. Приводится запись уравнений и граничных условий, входящих в постановку задачи в координатах различных состояний. В качестве тензорных характеристик деформаций используется тензор меры деформаций Грина $\mathbf{C}_{q,p}$, описывающий изменение деформаций при переходе из q -го в p -ое состояние:

$$\mathbf{C}_{q,p} = \mathbf{F}_{q,p}^T \mathbf{F}_{q,p},$$

$\mathbf{F}_{q,p}$ – градиент деформаций при переходе между q -ым и p -ым состояниями, $\mathbf{F}_{q,p} = \mathbf{I} + \sum_{n=q+1}^p \nabla^q u_n$

u_n – перемещения при переходе из $(n - 1)$ -го и n -е состояние,

∇^q – оператор градиента относительно q -го состояния модели.

При расчете в текущем n -ом состоянии относительно начального состояния в определяющих соотношениях и уравнениях используются тензор меры деформаций Грина в виде $\mathbf{C}_{0,n}$ и градиент деформаций в виде $\mathbf{F}_{0,n}$.

В параграфе 1.3 приведено описание граничных условий. На внутренних границах модели для обеспечения непрерывности перемещений в любой точке на границе Γ между не конформно стыкованными

подобластями и соседними спектральными элементами различных порядков накладываются дополнительные условия, уравнения связей. Эти условия задаются на области контакта подобластей. Таким образом, если участки границы, задающие контактную границу между двумя подобластями, обозначить Γ^1 и Γ^2 , то требование равенства координат в координатах любого деформированного состояния можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}|_{\Gamma^1} = \mathbf{x}|_{\Gamma^2},$$

$\mathbf{x}$ – координаты точек на границе не конформно стыкованных подобластей или соседних спектральных элементов различных порядков в деформированном состоянии.

Вторым важным требованием для обеспечения непрерывности напряжений в любой точке на границах между двумя не конформно стыкованными подобластями и соседними спектральными элементами различных порядков является условие равенства нормальных напряжений:

$$\mathbf{t}|_{\Gamma^1} = \mathbf{t}|_{\Gamma^2},$$

$\mathbf{t}$ – нормальное напряжение на границе не конформно стыкованных подобластей или соседними спектральными элементами различных порядков в деформированном состоянии.

В параграфе 1.4 описывается постановка задачи о послойном наращивании изделия аддитивного производства на основе теории многократного наложения конечных деформаций.

Во второй главе приводится описание численной модели, используемой для решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

В параграфе 2.1 описывается переход от дифференциальной к численной (дискретной) постановке задачи с использованием метода Галеркина для решения краевых задач, учитывающий заданные граничные условия типа Неймана и поправки, возникающие от учета равенства нормальных напряжений на границе не конформно стыкованных подобластей в разрывном методе Галеркина.

В параграфе 2.2 предлагается модификация метода спектральных элементов для сеток, состоящих из смешанных типов элементов, в трехмерном (гексаэдры, тетраэдры, призмы, пирамиды) и двумерном (четырёхугольники и треугольники) случаях, при наличии не конформно стыкованных узлов элементов в модели. Также описывается преобразование уравнений вариационной постановки из непрерывной в дискретную форму с использованием дискретизации области интегрирования с помощью спектральных элементов смешанных типов и построения на них линейно независимых функций формы. Для каждого типа элемента приводится подробное описание методики выбора опорных точек (узлов) элементов, алгоритма построения функций формы для соответствующих элементов и отображений из локальных координат элементов в глобальные координаты. Далее описывается алгоритм вычисления интегралов для произвольных функций по элементам, необходимый для вычисления коэффициентов дискретизированной системы уравнений, приводится анализ и выбор наиболее подходящих квадратурных формул с учетом требований к точности интегрирования.

В параграфе 2.3 приводится описание методов учета контактных граничных условий и обоснование выбора метода прямого исключения неизвестных для программной реализации. Также приведены варианты алгоритмов учета дополнительных соотношений между неизвестными в узлах элементов, накладываемыми в виде условий Дирихле и уравнений связей при построении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Далее описываются методы обеспечения равенства нормальных напряжений на границе не конформно стыкованных подобластей и между соседними спектральными элементами различных порядков.

В параграфе 2.4 приводятся алгоритмы решения систем дискретных уравнений, при этом особое внимание уделено методу Ньютона и критериям сходимости итерационных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений, к которым сводятся после дискретизации задачи

нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

В пункте 2.4.1 приводится описание метода Ньютона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Описывается алгоритм и варианты его модификаций с учетом особенностей краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

В пункте 2.4.2 приводятся критерии сходимости итерационных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Выбор наиболее подходящих критериев сходимости при численном решении систем нелинейных алгебраических уравнений является одним из наиболее существенных моментов, влияющих на скорость расчета и точность полученных решений.

В пункте 2.4.3 приводится краткий обзор методов решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих на каждой итерации в процессе решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Выбор типа решателя существенно влияет на скорость решения и необходимое количество вычислительных ресурсов для его получения.

В третьей главе приводятся особенности программной реализации и примеры верификационных расчетов, сравнение полученных для них результатов с известными, опубликованными и апробированными результатами.

В параграфе 3.1 описываются особенности программной реализации метода спектральных элементов для гибридных не конформно стыкованных сеток с поддержкой различного порядка соседних элементов. Приводятся подробности реализации структурных модулей в рамках разработанного комплекса программ.

В параграфе 3.2 описываются примеры верификационных краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций, имеющих известные аналитические решения.

Приводится сопоставление результатов, полученных численно с использованием разработанного программного комплекса, с аналитическими решениями.

В пункте 3.2.1 приведены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии, возникающем при вставке цилиндра из гиперупругого материала Блейтца-Ко в предварительно деформированный цилиндр из такого же материала. Эта задача представляет собой обобщение задачи Ламе-Гадолина для случая наложения конечных деформаций.

В пункте 3.2.2 приведены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии, возникающем при образовании отверстия в предварительно нагруженном образце из слабосжимаемого материала Муни-Ривлина. Эта задача представляет собой обобщение задачи Кирша на случай образования отверстия в одноосно нагруженном образце при конечных деформациях.

В пункте 3.2.3 приведены результаты расчетов задачи о напряженно-деформированном состоянии, возникающем при образовании отверстия в предварительно нагруженном образце из нелинейно упругого материала Мурнагана. Эта задача также представляет собой обобщение задачи Кирша на случай образования отверстия в одноосно нагруженном образце при конечных деформациях.

В параграфе 3.3 приведен анализ эффективности программной реализации разработанных моделей, методов и алгоритмов. Проведен сравнительный анализ, демонстрирующий преимущества метода спектральных элементов в сравнении с методом конечных элементов по точности и скорости вычислений.

В четвертой главе приведено описание численного моделирования многократного наложения конечных деформаций при послойном наращивании изделия аддитивного производства, позволившего выявить качественные эффекты, некоторые из которых являются новыми.

В параграфе 4.1 приведены описание модели и постановка задачи. В рамках модели происходит послойное наращивание предварительно нагруженных слоев с учетом контактного взаимодействия между ними.

В параграфе 4.2 приведены результаты расчетов для задачи о чистом изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

В параграфе 4.3 приведены решения задачи об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки, слои которой соединены не полностью (в центральной части балки соединение отсутствует), при конечных деформациях.

В параграфе 4.4 приведены результаты расчетов задачи об изгибе слоистой балки предварительно нагруженной балки, слои которой соединены не полностью (в торцевой части балки соединение отсутствует), при конечных деформациях.

В результате решения задачи об изгибе слоистой балки предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями были выявлены новые качественные эффекты, которые ранее не были получены ни в аналитическом, ни в численном виде, для данной постановки задачи:

1) Существование предельного изгибающего момента, который зависит от предварительного нагружения слоев (начальной деформации).

2) Наличие предельной кривизны балки, которая может быть достигнута за счет предварительного нагружения слоев (начальной деформации).

В параграфе 4.5 приведены результаты численного моделирования процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания. В результате вычислительных экспериментов были получены результаты, согласующиеся с экспериментальными данными.

В параграфе 4.6 сделаны выводы о применимости разработанного программного комплекса для моделирования многократного наложения

конечных деформаций при послойном наращивании изделия аддитивного производства.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы:

1) Разработана и исследована математическая модель изгиба слоистой предварительно нагруженной балки, изготовленной посредством последовательного соединения слоев, с не полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

2) Разработан вариант алгоритма численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов.

3) Разработана и протестирована модификация разрывного метода спектральных элементов для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями, разработан алгоритм решения задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе этой модификации.

4) Выполнена программная реализация разработанных алгоритмов численного решения в виде модулей, вошедших в состав промышленной системы компьютерного моделирования Фидесис, и выполнена верификация разработанного программного обеспечения посредством сравнения с известными аналитическими решениями.

5) Установлено, что поправка от учета эффектов наложения конечных деформаций для максимальной концентрации напряжений в задачах об образовании кругового отверстия в предварительно деформированных телах достигает 8 % для тел из материала Муни-Ривлина и 16 % для тел из материала Мурнагана в исследованном диапазоне нагрузок для выбранных параметров материалов.

6) Результаты численного моделирования изгиба слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями

показали, что зависимость угла поворота конца балки от предварительного растяжения первого слоя немонотонна.

7) Выполнено численное моделирование процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания и получены результаты, согласующиеся с экспериментальными данными.

Результаты диссертационного исследования использованы при выполнении научно-исследовательских работ в рамках Федеральной целевой программы "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы" по Соглашению о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 с Министерством образования и науки Российской Федерации (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации по теме диссертации в журналах Scopus, WoS, RSCI

1. Konovalov D. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M., Levin V. A. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes. // Modeling and Simulation in Engineering 2017 (2017), DOI:10.1155/2017/1797561, Quartile: Q3 (SJR 0.181)

2. Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys. // Чебышевский сборник, том 18, 3 (2017), 316–329, DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329, Quartile: Q4 (SJR 0.19), Импакт-фактор по РИНЦ 0.401

3. Kukushkin A. V., Konovalov D. A., Vershinin A. V., Levin V. A., Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. // Journal of Physics: Conference Series, Volume 1158, Issue 3 (2019), DOI:10.1088/1742-6596/1158/3/032022, Quartile: Q3 (SJR 0.221)

Остальные публикации

4. Yakovlev M. Y., Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., and Konovalov D. A. Application of finite and spectral element methods for rock modeling at different scales // Proceedings of the International SPDM Conference NAFEMS World Congress. Quebec City, Canada, 2019

5. Vershinin A. V., Levin V. A., Kukushkin A. V., and Konovalov D. A.. Application of variable order spectral element method on non-conformal unstructured meshes for an engineering analysis of assemblies with geometric inaccuracies // Proceedings of the International SPDM Conference NAFEMS World Congress. Quebec City, Canada, 2019

6. Левин В. Ан, Зингерман К. М., Вершинин А. В., Коновалов Д. А. Многократное наложение конечных упругих деформаций. Аддитивные технологии // Современные проблемы математики и механики, том 2, Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко, 2019, МАКС Пресс Москва, с. 718–721

7. Вершинин А. В., Левин В. Ан, Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. Трехмерное геомеханическое моделирование на основе метода спектральных элементов переменного порядка аппроксимации // Новые идеи в геологии нефти и газа 2019, N76, Издательство Перо Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2019, с. 74–78

8. Вершинин А. В., Коновалов Д. А., Кукушкин А. В., Левин В. Ан. Моделирование контактного взаимодействия методом спектральных элементов на неконформных сетках // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, республика Башкортостан, Россия. Аннотации докладов, РИЦ БашГУ Уфа, 2019, с. 248–248

9. Вершинин А. В., Зингерман К. М., Коновалов Д. А., Левин В. Ан. Численное моделирование в CAE Fidesys процесса аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках // Современные проблемы математики и механики, том 2, Материалы

международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко, МАКС Пресс Москва, 2019, с. 642–647

10. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. Ан. Численное моделирование послойной 3d-печати с учётом наложения конечных деформаций на неконформных сетках // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, республика Башкортостан, Россия. Аннотации докладов, РИЦ БашГУ Уфа, 2019. с. 85–185

11. Яковлев М. Я., Коновалов Д. А., Лукьянчиков И. С., Левин В. А. К вопросу о численной оценке нелинейно-упругих характеристик предварительно нагруженных композитов с эластичной матрицей // Сборник трудов 28 Международного симпозиума «Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов», 2018, ООО НКПЦ Веском Москва, с. 381-390

12. Левин В. А., Веселов И. В., Гамлицкий Ю. А., Вершинин А. В., Коновалов Д. А. Промышленный пакет прочностного инженерного анализа CAE Fidesys. Разработка отраслевых специализированных решений в интересах шинной промышленности // Сборник докладов 26 Международного симпозиума «Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов», 2015, ООО НКПЦ Веском Москва

13. Петровский К. А., Коновалов Д. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции при конечных деформациях с учетом изменения толщины оболочечного элемента // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов, Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015, с. 222

14. Вершинин А. В., Коновалов Д. А., Левин В. А., Неугодов, Д. А. Математическое моделирование двумерных и трёхмерных нестационарных задач линейной теории упругости с использованием метода спектральных элементов. // Волны напряжения в сплошных средах. К 100-летию со дня рождения профессора А.Я. Сагомоняна. Тезисы докладов подсекции "Газовая

и волновая динамика" секции "Механика" научной конференции "Ломоносовские чтения", 2014, Издательство Московского университета Механико-математический факультет, НИИ механики МГУ, г. Москва, с. 41–42

15. Коновалов, Д. А. Математическое моделирование двумерных и трехмерных нестационарных задач линейной теории упругости с использованием метода спектральных элементов. // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ-2014, МАКС Пресс Москва, 2014

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

1. Вершинин А. В., Привалов А. Н., Левин В. А., Коновалов Д. А., Козлов В. В., Кукушкин А. В., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа расчета на основе метода конечных элементов тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений в изделии в процессе его создания методом селективного лазерного спекания в трёхмерном случае // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018664109, 12 ноября 2018 г.

2. Привалов А. Н., Вершинин А. В., Левин В. А., Коновалов Д. А., Комолова Е. Д., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа расчета на основе метода конечных элементов скалярного поля температуры в изделии в процессе его создания методом селективного лазерного спекания в трёхмерном случае // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663890, 6 ноября 2018 г.

3. Привалов А. Н., Вершинин А. В., Левин В. А., Коновалов Д. А., Комолова Е. Д., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа расчета на основе метода спектральных элементов скалярного поля температуры в изделии в процессе его создания методом селективного лазерного спекания в трёхмерном случае // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663889, 6 ноября 2018 г.

4. Вершинин А. В., Привалов А. Н., Левин В. А., Коновалов Д. А., Зингерман К. М., Кукушкин А. В., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа задания механических и теплофизических свойств материалов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663472, 29 октября 2018 г.

5. Левин В. А., Вершинин А. В., Яковлев М. Я., Юшутин В. С., Петровский К. А., Коновалов Д. А. Программа прочностных расчётов "CAE Fidesys" - расчёт вязкоупругости // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018610690, 16 января 2018 г.

6. Левин В. А., Вершинин А. В., Коновалов Д. А., Петровский К. А. Программа прочностных расчётов «CAE - Fidesys» - расчёт тонкостенных конструкций // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018610686, 15 января 2018 г.

7. Левин В. А., Коновалов Д. А., Вершинин А. В. Модуль расчета напряженно-деформированного состояния для задач термоупругости в "CAE Fidesys" // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017611119, 19 января 2017 г.

8. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. А. Модуль расчета методом спектральных элементов собственных частот и форм колебаний линейно упругих тел в "CAE Fidesys" v.1 // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015662988, 8 декабря 2015 г.

9. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. А. Модуль расчета методом спектральных элементов линейных статических задач в «CAE Fidesys» v.1 // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20155662987 , 8 декабря 2015 г.

10. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. А. Модуль расчета методом спектральных элементов линейных динамических задач в «CAE Fidesys» v.1 // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015662738, 30 ноября 2015 г.

11. Зингерман К. М., Вершинин А. В., Яковлев М. Я., Янгирова А. В., Никифоров И. В., Стёпин Н. Е., Громов И. М., Фрейман Е. И., Кукушкин А. В., Улькин Д. А., Юшутин В. С., Коновалов Д. А. Полнофункциональная многоплатформенная система прочностного инженерного анализа с реализацией при конечных деформациях учета перераспределения деформаций, дискретного или непрерывного изменения массы, формы, свойств части материала элемента конструкции, адаптация под гибридные супер-ЭВМ // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013617002, 30 июля 2013 г.