МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Оганесян Вардан Спартакович

Геометрия коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2

Специальность 01.01.04 -
геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор О. И. Мохов

Москва 2016

Содержание

Введение

1. Актуальность темы.

Рассмотрим два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

Условие коммутации операторов L_n и L_m

$$[L_n, L_m] = L_n L_m - L_m L_n = 0$$

представляет собой очень сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты. Теория коммутирующих дифференциальных операторов начала развиваться в начале XX века в работах Валленберга [1], Шура [2] и Бурхналла, Чаунди [3].

Рассмотрим самые простые примеры коммутирующих дифференциальных операторов. Пусть

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} b_i\partial_x^i,$$

где a_i и b_i константы. Очевидно, что операторы L_n и L_m коммутируют. Рассмотрим менее тривиальный пример. Пусть

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i$$

произвольный дифференциальный оператор. Рассмотрим полиномы $R_1(L_n)$ и $R_2(L_n)$ от оператора L_n. Очевидно, что $R_1(L_n)$ коммутирует с $R_2(L_n)$.

Валленберг в 1903 году (см. [1]) исследовал условие коммутации операторов

$$L_1 = \partial_x + u(x), \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} b_i\partial_x^i,$$

где L_m – произвольный дифференциальный оператор. Валленберг доказал, что если L_1 и L_m коммутируют, то L_m обязательно полиномиально выражается через L_1. Он также рассмотрел операторы

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x) \quad L_3 = \partial_x^3 + p(x)\partial_x + q(x)$$

и установил, что операторы

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x) \quad L_3 = \partial_x^3 + \left(\frac{s_2}{4} + \frac{3}{2}u(x)\right)\partial_x + \frac{3}{4}u'(x)$$

коммутируют тогда и только тогда, когда

$$(u'(x))^2 + 2u^3(x) + s_2u^2(x) + s_1u(x) + s_0 = 0, \quad s_i \in \mathbb{C}.$$

Это были первые примеры коммутирующих операторов, не являющиеся полиномами от третьего оператора.

Шур, вдохновленный работами Валленберга, тоже стал изучать коммутирующие дифференциальные операторы. Он рассмотрел три оператора L_n, L_m и L_k, где порядок $ord(L_m) \geqslant 1$, и доказал, что если L_n коммутирует с L_m, а L_m коммутирует с L_k, то L_n коммутирует с L_k (см. [2]). Данный факт совсем не очевиден. Например, для матриц аналог леммы Шура неверен. Лемма Шура показывает, что множество операторов коммутирующих с данным нетривиальным дифференциальным оператором образует коммутативное кольцо.

В 1920-х годах Бурхналл-Чаунди доказали, что если два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

коммутируют, то существует полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. [3]). Кривая Γ, определенная соотношением $R(z,w) = 0$, называется *спектральной кривой.* Если

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то $(z,w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z,w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом.* Ранг является общим делителем порядков операторов m и n. Род спектральной кривой иногда называют родом коммутирующей пары.

Лакс заметил, что многие нелинейные уравнения математической физики эквивалентны условию коммутации некоторых дифференциальных операторов. То есть, если мы будем уметь явно находить коэффициенты коммутирующих дифференциальных операторов, то мы сможем находить решения уравнений математической физики (см. [7], [20], [21], [22]).

Также интересны коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. Алгебра дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами изоморфна первой алгебре Вейля. Первая алгебра Вейля обозначается как A_1. Можно рассматривать и обобщения, дифференциальные операторы от нескольких переменных с полиномиальными коэффициентами. Алгебра дифференциальных операторов от n переменных с полиномиальными коэффициентами изоморфна $n-$ой алгебре Вейля. Через A_n обозначается $n-$ая алгебра Вейля. Существует гипотеза Диксмье, которая утверждает, что гомоморфизм алгебры

$$f : A_n \to A_n$$

такой, что

$$[f(\partial_{x_i}), f(x_j)] = [\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}.$$

является автоморфизмом. Обозначим эту гипотезу, для краткости, через DC_n. А гипотезу о якобиане для $\mathbb{C}^n$ обозначим JC_n. Канель-Белов с Концевичем в [23], и независимо от них, Тсушимото [24] доказали, что из DC_n следует JC_n, а из JC_{2n} следует DC_n. То есть гипотеза Диксмье и гипотеза о якобиане стабильно эквивалентны. Примеры коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами могут помочь сравнить эндоморфизмы алгебр Вейля с их автоморфизмами. Тем самым, поиск примеров коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами является важной и сложной задачей.

Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через тэта-функции Римана [5]. Случай ранга больше 1 значительно сложней. Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены Диксмье [13] для невырожденной эллиптической кривой $w^2 = z^3 - \alpha$ с произвольным числом α:

$$L = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^2 + 2x,$$

$$M = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^3 + 3x\partial_x^2 + 3\partial_x + 3x(x^2 + \alpha),$$

где L и M – коммутирующая пара операторов Диксмье ранга 2 рода 1. Общая классификация коммутирующих операторов ранга больше единицы была получена Кричевером [6]. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена Кричевером и Новиковым [7]. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой (общий вид операторов ранга 3, рода 1 параметризуется двумя произвольными функциями) был найден Моховым [8], [9]. Более того, примеры коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами были построены для произвольного ранга. При этом даже в тех случаях, для которых были получены явные формулы для общего вида коммутирующих операторов, задача выделения коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами является нетривиальной и полностью не решена до сих пор. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами была поставлена и рассмотрена Моховым в [18]. В частности, задача описания всех коммутирующих операторов ранга 2 и рода 1 с полиномиальными коэффициентами рассматривалась Моховым в [19] и [11], где было получено много явных примеров. Миронов в [12] построил примеры коммутирующих операторов L и M ранга 2 и произвольного рода g:

$$L = (\partial_x^2 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)^2 + g(g+1)A_3x,$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + ... + a_1L + a_0,$$

где A_i – произвольные константы, $A_3 \neq 0$, a_i – некоторые константы.
Кроме того, Мироновым в [14] было доказано, что

$$L_1 = (\partial_x^2 + \alpha_1\mathcal{P}(x) + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g_2 g(g+1)\mathcal{P}(x), \quad \alpha_1 \neq 0,$$

$$M_1^2 = L_1^{2g+1} + a_{2g}L_1^{2g} + ... + a_1L_1 + a_0,$$

где $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{P}'(x))^2 = g_2\mathcal{P}^2(x) + g_1\mathcal{P}(x) + g_0, \quad g_2 \neq 0,$$

—коммутирующая пара ранга 2, рода g.
В той же работе доказано, что

$$L_2 = (\partial_x^2 + \alpha_1\wp(x) + \alpha_0)^2 + s_1\wp(x) + s_2\wp^2(x),$$

$$M_2^2 = L_2^{2g+1} + b_{2g}L_2^{2g} + ... + b_1L_2 + b_0,$$

где $\wp(x)$ - эллиптическая функция Вейерштрасса, $\alpha_1 = \frac{1}{4} - 2g^2 - 2g$, $s_1 = \frac{1}{4}g(g+1)(16\alpha_0 + 5g_2)$, $s_2 = -4g(g+2)(g^2-1)$, тоже коммутирующая пара ранга 2, рода g. Примеры коммутирующих операторов произвольного рода и произвольного ранга с полиномиальными коэффициентами были построены Моховым в [19]. Интересные результаты о коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами ранга 2 и рода 1 были получены Мироновым и Жегловым в [18].

В диссертации исследуются коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2. Найдены новые примеры коммутирующих операторов ранга 2 со спектральной кривой произвольного рода. В некоторых частных случаях найдены их общие собственные функции, которые выражаются через функции Бесселя и Гойна. Это единственные, явно найденные, собственные функций у пары коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами с неособой спектральной кривой. Рассмотрим дифференциальный оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ и дифференциальный оператор M порядка $4g+2$. Найдены необходимые условия на функцию $u(x)$, а в некоторых случаях и достаточные, чтобы оператор L_4 коммутировал с оператором M и они образовывали бы пару ранга 2 (см. [33], [34]).

2. Цели работы.

Найти явно примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 с полиномиальными коэффициентами. Вычислить собственные функции некоторых найденных коммутирующих операторов со спектральной кривой рода 1 в точках ветвления. Найти примеры операторов вида $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$, где L_4 коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и операторы L_4 и M образуют пару ранга 2.

3. Научная новизна.

Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены новые коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 со спектральной кривой произвольного рода.

- Вычислены собственные функции некоторых найденных коммутирующих операторов со спектральной кривой рода 1 в точках ветвления.

• Найдены необходимые, а в некоторых случаях и достаточные условия на функцию $u(x)$, что $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и операторы L_4 и M образуют пару ранга 2 рода g.

4. Основные методы исследования.

В работе используются результаты полученные Кричевером и Новиковым в [5], [6] и [7]. Также работа существенно опирается на результаты полученные Мироновым в [12]. Используются некоторые идеи из работ [9], [22].

5. Теоретическая и практическая ценность работы.

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для поиска новых решений уравнений математической физики. Результаты диссертации также могут помочь в доказательстве или опровержении гипотезы Диксмье.

6. Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и общеуниверситетских, всероссийских и международных конференциях.

• Международная конференция «Recent Advances in Complex Differential Geometry», Toulouse, France, July 13–22, 2016
Постер «Commuting differential operators».

• Конференция «Ломоносов - 2016», Московский государственный университет, Москва, Апрель 11-15, 2016
Доклад «Матричные коммутирующие дифференциальные операторы».

• Международная конференция «Integrability in algebra, geometry and physics: new trends», Switzerland, July 13–17, 2015

Постер «New commuting differential operators of rank 2 and arbitrary genus».

• Конференция «Ломоносов - 2015», Московский государственный университет, Москва, Апрель 13-17, 2015

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы».

• Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2014», Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 24 — 27 сентября, 2014, Новосибирск

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами».

• Конференция «Ломоносов - 2014», Московский государственный университет, Москва, Апрель 7-11, 2014

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы».

• Международная конференция «Вероятность, анализ и геометрия», МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, 30 сентября - 4 октября 2014

Доклад «Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2».

• Международная конференция «Геометрия и анализ на метрических структурах», Новосибирск, Россия, 4-7 декабря, 2013.

Доклад «Конечнозонные эллиптические потенциалы оператора Шредингера».

7. Публикации.

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце библиографии.

8. Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Мохову Олегу Ивановичу за постановку задач, помощь и постоянное внимание к работам.

Автор также выражает благодарность Миронову Андрею Евгеньевичу за внимание, помощь и советы.

Автор благодарит Глухова Евгения за очень важные комментарии, существенно улучшившие текст работы.

Глава 1

1 Предварительные сведения

Рассмотрим два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

Условие коммутации операторов L_n и L_m

$$[L_n, L_m] = L_n L_m - L_m L_n = 0$$

представляет собой очень сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов.

Пусть L_k – оператор порядка $k \geqslant 1$. С помощью замены переменной и сопряжения операторов функциями можем без потери общности считать, что операторы L_n и L_m имеют вид (см. [3])

$$L_n = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \partial_x^m + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x)\partial_x^i$$

Верна следующая лемма [2].

Лемма 1.1 *Если $L_n L_k = L_k L_n$ и $L_m L_k = L_k L_m$, то $L_n L_m = L_m L_n$.*

Доказательство.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$S = 1 + s_1(x)\partial_x^{-1} + s_2(x)\partial_x^{-2} + ...,$$

где

$$\partial_x^{-1} f(x) = f(x)\partial_x^{-1} - f'(x)\partial_x^{-2} + f''(x)\partial_x^{-3} - ...$$

Непосредственным вычислением легко доказать, что существует псевдодифференциальный оператор S, что $L_k S = S\partial_x^k$ или, что эквивалентно $S^{-1} L_k S = \partial_x^k$.

По условию L_k коммутирует с L_n и с L_m, а значит ∂_x^k коммутирует с $\widetilde{L_n} = S^{-1}L_nS$ и с $\widetilde{L_m} = S^{-1}L_mS$. Но вычисления показывают, что если ∂_x^k коммутирует с $\widetilde{L_n}$ и $\widetilde{L_m}$, то последние имеют постоянные коэффициенты. Значит $\widetilde{L_n}\widetilde{L_m} = \widetilde{L_m}\widetilde{L_n}$. Следовательно $L_nL_m = L_mL_n$.

Доказательство завершено.

В основе применимости методов алгебраической геометрии лежит следующая теорема, доказанная Бурхналлом и Чаунди (см. [3, 4]).

Теорема 1.2 Если операторы L_n и L_m коммутируют, то существует ненулевой полином $R(z, w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$.

Доказательство.

Возьмем какое-нибудь решение $L_n\psi = z\psi$, где z—произвольное комплексное число. Так как $L_nL_m = L_mL_n$, то $L_n(L_m\psi) = z(L_m\psi)$. То есть L_m является линейным оператором на пространстве собственных функций оператора L_n. Выберем базис на пространстве решений уравнения $L_n\psi(x, z; x_0) = z\psi(x, z; x_0)$

$$\frac{d^j}{dx^j}\psi_i(x, z; x_0)|_{x=0} = \delta_{ij}, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 0, ..., n-1, \tag{1.1}$$

где x_0 - некоторая точка. Соответственно

$$\begin{gathered} L_m\psi_1(x, z; x_0) = \alpha_1^1(x_0)\psi_1(x, z; x_0) + ... + \alpha_1^n(x_0)\psi_n(x, z; x_0) \\ ... \\ L_m\psi_n(x, z; x_0) = \alpha_n^1(x_0)\psi_1(x, z; x_0) + ... + \alpha_n^n(x_0)\psi_n(x, z; x_0), \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\alpha_j^i(x_0)$ – комплексные числа, зависящие от точки нормировки x_0. Оператор L_m в базисе (1.1) записывается матрицей $\alpha_i^j(x_0)$. Обозначим матрицу $\alpha_i^j(x_0)$ через $C(x_0)$. Так как $L_n\psi_i(x, z; x_0) = z\psi_i(x, z; x_0)$, то мы знаем значение функции $\psi_i^{(n)}(x, z; x_0)$ в точке x_0. Дифференцируя выражение $L_n\psi_i(x, z; x_0) = z\psi_i(x, z; x_0)$ и, подставляя точку $x = x_0$, найдем $\psi_i^{(l)}(x_0, z; x_0)$ для любого i и l. То есть мы можем для любого i вычислить $L_m\psi_i(x, z; x_0)|_{x=x_0}$. Учитывая нормировку (1.1), из выражений (1.2) получим, что матрица $C(x_0)$ полиномиально зависит от z.

Рассмотрим характеристическое уравнение оператора $C(x_0)$

$$R(z,w) = det|C(x_0) - wE| = 0. \tag{1.3}$$

Характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса и соответственно от точки x_0. При каждом фиксированном z мы имеем хотя бы одно w, что

$$L_n\psi = z\psi(x,z;x_0), \quad L_m\psi = w\psi(x,z;x_0). \tag{1.4}$$

Рассмотрим $R(L_n, L_m)$ и заметим, что $R(L_n, L_m)$ является линейным дифференциальным оператором. Но при каждом z существует хотя бы одно решение (1.4) и тем самым на каждом таком решении $R(L_n, L_m)\psi(x,z;x_0) = 0$. Но чисел z бесконечно и тем самым ядро линейного дифференциального оператора $R(L_n, L_m)$ бесконечномерно, а значит $R(L_n, L_m) \equiv 0$.

Доказательство завершено.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_n = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x)\partial_x^i.$$

Здесь мы на L_n не накладываем никаких ограничений и не требуем, чтобы он с чем-то коммутировал. Если допустить, что коэффициентами оператора L_n являются константы, то почти всегда собственные функции оператора L_n будут экспонентами. И естественно попытаться найти формальную собственную функцию в виде

$$\psi(x,k;x_0) = (\sum_{s=N}^{\infty} \frac{\xi_0(x)}{k^s})e^{k(x-x_0)}, \tag{1.5}$$

где $k^n = z$, а N – произвольное целое число, не обязательно положительное. Отметим, что мы ищем лишь формальное решение.

Теорема 1.3 *Существует единственное решение уравнения*

$$L_n\psi(x,k;x_0) = k^n\psi(x,k;x_0) \tag{1.6}$$

в пространстве формальных рядов вида (1.5) *с условиями нормировки* $\xi_s(x) = 0$ *при* $s < 0$, $\xi_0(x_0) = 1$ *и* $\xi_s(x_0) = 0$ *при* $s > 0$. *Формальные решения с такой нормировкой будем обозначать* $\psi_0(x,k,x_0)$.

Доказательство.

Подставим ряд (1.5) в уравнение (1.6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k. Получим дифференциальные уравнения, которые при указанной нормировке решаются однозначно.

Доказательство завершено.

Пусть $\psi(x,k;x_0)$ — любое другое решение уравнения (1.6) в виде ряда (1.5). Рассмотрим ряд $\frac{\psi(x,k;x_0)}{\psi(x_0,k;x_0)}$. Тогда $\frac{\psi(x,k;x_0)}{\psi(x_0,k;x_0)}$ удовлетворяет условиям нормировки из теоремы 1.3 и

$$L_n\frac{\psi(x,k;x_0)}{\psi(x_0,k;x_0)} = \frac{1}{\psi(x_0,k;x_0)}L_n\psi(x,k;x_0) = k^n\frac{\psi(x,k;x_0)}{\psi(x_0,k;x_0)}.$$

Но по теореме 1.3 решение определяется однозначно и тем самым

$$\frac{\psi(x,k;x_0)}{\psi(x_0,k;x_0)} = \psi_0(x,k;x_0).$$

То есть

$$\psi(x,k;x_0) = \psi(x_0,k;x_0)\psi_0(x,k;x_0).$$

Формальный ряд $\psi(x_0,k;x_0)$ обозначим через $A(x_0,k)$. Так как $L_m\psi_0(x,k;x_0)$ является решением L_n и имеет вид (1.5), то

$$L_m\psi_0(x,k;x_0) = A(x_0,k)\psi_0(x,k;x_0).$$

Докажем следующую важную лемму.

Лемма 1.4 *Ряд $L_m\psi_0(x,k;x_0)$ имеет вид $A(k)\psi_0(x,k;x_0)$, где $A(k)$ – формальный ряд Лорана, зависящий только от k.*

Доказательство.

Мы уже доказали, что $L_m\psi_0(x,k;x_0) = A(x_0,k)\psi_0(x,k;x_0)$. Докажем, что $A(x_0,k)$ не зависит от x_0.

$$\psi_0(x,k;x_1)e^{k(x_1-x_0)} = B(x_0,x_1,k)\psi_0(x,k;x_0),$$

$$B(x_0,x_1,k) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} B_s(x_0,x_1)k^{-s}.$$

Тогда

$$A(x_1,k) = (L_m\psi_0(x,k,x_1))\psi_0^{-1}(x,k;x_1) =$$

$$= (L_m(e^{-k(x_1-x_0)}B(x_0,x_1,k)\psi_0(x,k;x_0))e^{k(x_1-x_0)}B^{-1}(x_0,x_1,x)\psi_0^{-1}(x,k;x_0) =$$

$$= A(x_0,k).$$

Таким образом, $A(x_0,k)$ не зависит от x_0.

Доказательство завершено.

Заметим, что все производные $\frac{\partial^r\psi_0(x,l;x_0)}{\partial x^r}$ полиномиально зависят от коэффициентов $u_i(x)$ и их производных. Мы видим, что

$$L_m\psi(x,k;x_0) = k^m + \sum_{s=-m+1}^{\infty} A_s k^s.$$

Сравнивая коэффициенты по k, легко видеть, что все коэффициенты оператора L_m полиномиально зависят от коэффициентов $u_i(x)$ и их производных.

2. Классификация коммутирующих дифференциальных операторов

Кривая Γ, определенная соотношением $R(z,w) = 0$, называется *спектральной кривой*. Если

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то $(z,w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z,w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций пары коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом.*

Мы установили существования формального решения $\psi_0(x,k;x_0)$ и доказали, что любое формальное решение (1.5) имеет вид $A(k)\psi(x,k;x_0)$. Рассмотрим характеристическое уравнение (1.3). Уравнение $R(z,w)=0$ не зависит от выбора базиса в пространстве решений уравнения $L_n\psi = z\psi$. Формальные решения $\psi_0(x,k;x_0)$, где $k^n = z$ — линейно независимы над полем формальных Лорановских рядов по k. И ничто не мешает рассмотреть действие оператора L_n на пространстве формальных рядов над полем Лорановских рядов. Ряды $\psi_0(x,k;x_0)$ являются собственными функциями для оператора L_m с собственным значением $A(k)$. Следовательно,

$$R(z,w) = \prod_{j=0}^{n-1}(z - A(k^j)),$$

где

$$w(z) = (k^j)^m + \sum_{s=-m+1}^{\infty} A_s(k^j)^s$$

— разложение в ряд по k^{-1} ветвей алгебраической функции $w(z)$: $R(z,w) = 0$; $k^n = z$. Если ряды $A(k^j)$ различны при $0 \leqslant j \leqslant n-1$, то при больших z, а тогда и при почти всех z, собственные значения $w_j(z)$ различны. В этом случае для точки общего положения $(z, w_j(z))$ кривой $R(z,w)=0$ существует единственная собственная функция $\psi(x,z,w)$ операторов L_n и L_m, то есть ранг коммутирующей пары равен 1. Этот случай полностью разобран в [5], [6], где получены явные формулы для $\psi(x,z,w)$ и для коэффициентов оператора L_n

в терминах тэта-функций Римана. Если ряды $A(k^j)$ совпадают при некоторых различных j, то $A(k)=\widetilde{A}(k^l)$. Очевидно, что l является общим делителем m и n. При этом

$$R(z,w)=\prod_{j=0}^{j=n-1}(z-A(k^j))=\prod_{j=0}^{j=n-1}(z-\widetilde{A}((k^l)^j))=$$
$$=\prod_{j=0}^{j=\widetilde{n}-1}(z-\widetilde{A}((k^l)^j))^l=\widetilde{R}^l(z,w),$$

где $\widetilde{n}l=n$. Кривая Γ: $\widetilde{R}(z,w)=0$ неприводима, пополняется в бесконечности единственной точкой P_0, в окрестности которой локальным параметром является $z(P)^{-\frac{1}{\widetilde{n}}}$. Каждой точке общего положения $P=(z,w)$ кривой Γ отвечает l — мерное пространство собственных функций оператора L_m с собственным значением $w=w(P)$, то есть l — ранг коммутирующей пары L_n, L_m.

Приведем классификацию скалярных коммутирующих операторов ранга $l>1$ [6]. Нормируем общие собственные функции условием

$$\frac{d^i}{dx^i}\psi_j(x,P;x_0)|_{x=x_0}=\delta_{ij},\quad 0\leqslant i,j\leqslant l-1.$$

В работе [6] доказано, что функции $\psi_j(x,P;x_0)$ обладает следующими аналитическими свойствами:

1. $\psi_j(x,P;x_0)$ мероморфны на кривой Γ вне P_0 и имеют по lg простых полюсов $\gamma_i(x_0)$,

$$\psi_j(x,z;x_0)\backsim\frac{\psi_{ij}(x,x_0)}{z-\gamma_i(x_0)}\quad 1\leqslant i\leqslant lg,$$

в окрестности полюса $\gamma_i(x_0)$.

2. Все вычеты $\psi_{ij}(x,x_0)$ пропорциональны одному: $\psi_{i,j}=\alpha_{i,j}(x_0)\psi_{i,l-1}$, $0\leqslant j\leqslant l-2$.

3. Если $k^{-1}(P)$ – локальный параметр на Γ в окрестности P_0, то имеет место

асимптотика:

$$\overrightarrow{\psi}(x,P;x_0) = (\sum_{s=0}^{\infty} \overrightarrow{\xi}_s(x)k^{-s})\Phi_0(x,k;x_0),$$

где $\overrightarrow{\psi}(x,P;x_0) = (\psi_0(x,P;x_0),...,\psi_{l-1}(x,P;x_0))$, $\overrightarrow{\xi}_0(x) = (1,0...,0)$, $\overrightarrow{\xi}_s(x_0) = \overrightarrow{0}$, $s \geqslant 1$, $\Phi_0(x,k;x_0) = (\Phi_0^{ij})$ – решение уравнения $\frac{d}{dx}\Phi_0 = S\Phi_0$, $\Phi_0^{ij}(x_0,k;x_0) = \delta^{ij}$, $0 \leqslant i,j \leqslant l-1$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ k+w_0(x) & w_1(x) & w_2(x) & ... & w_{l-2}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.7 [6] *Аналитические свойства 1,2,3, произвольные константы* (γ_i,α_{ij}) *и произвольные функции* $w_0(x),...,w_{l-2}(x)$ *определяют вектор-функцию* $\psi(x,P;x_0)$ *и коммутирующую пару* L_n, L_m *ранга* l *общего положения.*

Доказательство основано на сведении к задаче Римана на кривой Γ и не дает эффективных формул для коэффициентов коммутирующих операторов. В [6], [20] предложен метод деформации параметров (γ_i,α_{ij}), позволяющий в ряде случаев получить точные решения.

Рассмотрим матрицу Вронского

$$\Psi(x,P;x_0) = \begin{pmatrix} \psi_0 & \psi_1 & ... & \psi_{l-1} \\ \psi_0' & \psi_1' & ... & \psi_{l-1}' \\ ... & ... & ... & ... \\ \psi_0^{l-1} & \psi_1^{l-1} & ... & \psi_{l-1}^{l-1} \end{pmatrix}$$

вектор функции $\overrightarrow{\psi}(x,P;x_0)$. Заметим, что $\Psi_x\Psi^{-1}$ не зависит от x_0 и

$$\Psi_x \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 & \chi_2 & \ldots & \chi_{l-1} \end{pmatrix},$$

где $\chi_i(x,P)$ — мероморфные функции на кривой Γ. При $x = x_0$ полюсы $\chi_i(x,P)$ совпадают с $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_{lg}(x_0)$, а отношения вычетов функции $\chi_i(x,P)$ в точках $\gamma_j(x_0)$ совпадают с параметрами $\alpha_{i,j}(x_0)$:

$$\alpha_{j,i}(x_0) res_{\gamma_j(x_0)}(\chi_{l-1}) = res_{\gamma_j(x_0)}(\chi_i).$$

В окрестности P_0 на Γ функции $\chi_j(x,P)$ имеют вид

$$\begin{cases} \chi_0(x,P) = k + w_0(x) + O(k^{-1}), \\ \chi_s(x,P) = w_s(x) + O(k^{-1}), \quad 1 \leqslant s \leqslant l-2, \\ \chi_{l-1}(x,P) = O(k^{-1}). \end{cases}$$

Разложение $\chi_j(x,P)$ в окрестности полюса $\gamma_i(x)$ имеет вид

$$\chi_j(x,P) = \frac{c_{i,j}(x)}{k - \gamma_j(x)} + d_{i,j}(x) + O(k - \gamma_i(x)),$$

$$c_{ij} = \alpha_{i,j} c_{i,l-1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant l-1, \quad 1 \leqslant i \leqslant lg.$$

Теорема 1.8 [6], [7] *Параметры $\gamma_i(x)$, $\alpha_{i,j}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant lg$, $0 \leqslant j \leqslant l-2$, удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} \gamma_i' = -c_{i,l-1}, \\ \alpha_{i,0}' = \alpha_{i,0}\alpha_{i,l-2} + \alpha_{i,0} d_{i,l-1} - d_{i,0}, \\ \alpha_{i,j}' = \alpha_{i,j}\alpha_{i,l-2} - \alpha_{i,j-1} + \alpha_{i,j} d_{il-1} - d_{i,j}, \quad j \geqslant 1. \end{cases}$$

Общие собственные функции коммутирующих операторов ранга l опреде-

ляются из уравнения

$$\psi^{(l)}(x,P) = \chi_{l-1}(x,P)\psi^{(l-1)}(x,P) + ... + \chi_0\psi(x,P), \tag{1.7}$$

Для произвольных функций $w_i(x), 0 \leqslant i \leqslant l-2$, решение системы однозначно определяет набор мероморфных функций $\chi_j(x,P)$ с необходимыми аналитическими свойствами. По асимптотикам $\chi_j(x,P)$ в окрестности P_0 на Γ восстанавливаются коммутирующие операторы. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена Кричевером и Новиковым [7]. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой (общий вид операторов ранга 3, рода 1 параметризуется двумя произвольными функциями) был найден Моховым [8], [9]. Более того, примеры коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами были построены для произвольного ранга. При этом даже в тех случаях, для которых были получены явные формулы для общего вида коммутирующих операторов, задача выделения коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами является нетривиальной и полностью не решена до сих пор. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами была поставлена и рассматривалась Моховым в [18].

3. Коммутирующие операторы ранга 2

Рассмотрим оператор

$$L = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x). \tag{1.8}$$

Из работы [12] известно, что этот оператор коммутирует с некоторым оператором M порядка $4g+2$, причем спектральная кривая пары L, M имеет род g, тогда и только тогда, когда найдется полином

$$Q = z^g + a_1(x)z^{g-1} + a_2(x)z^{g-2} + ... + a_{g-1}(x)z + a_g(x),$$

для которого выполняется следующее соотношение:

$$Q^{(5)} + 4VQ''' + 6V'Q'' + 2Q'(2z - 2W + V'') - 2QW' \equiv 0, \tag{1.9}$$

Q' здесь означает $\partial_x Q$. Спектральная кривая и коэффициенты в уравнении общих собственных функций имеют вид

$$4w^2 = 4F(z) = 4(z - W)Q^2 - 4V(Q')^2 + (Q'')^2 - 2Q'Q'''+$$
$$+2Q(2V'Q' + 4VQ'' + Q^{(4)}),$$
$$\chi_1 = \frac{Q'}{Q}, \quad \chi_0 = -\frac{Q''}{2Q} + \frac{w}{Q} - V.$$

Перепишем (1.9) в виде

$$4Q'z \equiv -Q^{(5)} - 4VQ''' - 6V'Q'' - 2Q'V'' + 2QW' + 4Q'W.$$

Получаем следующую систему на $a_i(x)$:

$$\begin{cases} a_1 = W/2 + C_1 \\ 4a_2' = -a_1^{(5)} - 4Va_1''' - 6V'a_1'' - 2a_1'V'' + 2a_1W' + 4a_1'W \\ ... \\ 4a_{i+1}' = -a_i^{(5)} - 4Va_i''' - 6V'a_i'' - 2a_i'V'' + 2a_iW' + 4a_i'W \\ ... \\ 4a_g' = -a_{g-1}^{(5)} - 4Va_{g-1}''' - 6V'a_{g-1}'' - 2a_{g-1}'V'' + 2a_{g-1}W' + 4a_{g-1}'W \\ 0 = -a_g^{(5)} - 4Va_g''' - 6V'a_g'' - 2a_g'V'' + 2a_gW' + 4a_g'W \end{cases}$$

Из этой системы видно, что результат в [12] можно переформулировать следующим образом. Пусть $a_1 = W/2 + C_1$, где C_1 – произвольная константа. Определим a_i рекуррентным соотношением

$$a_{i+1} = \frac{1}{4}\int(-a_i^{(5)} - 4Va_i''' - 6V'a_i'' - 2a_i'V'' + 2a_iW' + 4a_i'W)dx. \qquad (1.10)$$

Следовательно, оператор (1.8) коммутирует с оператором порядка $4g+2$ и составляет с ним пару операторов ранга 2 тогда и только тогда, когда $a_{g+1} \equiv const$. Например

$$a_2 = -\frac{1}{8}W^{(4)} - \frac{1}{2}VW'' - \frac{1}{4}V'W' + \frac{3}{8}W^2 + \frac{1}{2}WC_1 + C_2,$$

где C_2 – константа, которая появляется после интегрирования. Вообще, a_i содержит i констант интегрирования, то есть $a_i(x) = a_i(x; C_1, ..., C_i)$.

Глава 2

1. Коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами

Рассмотрим оператор

$$L = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x). \tag{2.1}$$

Доказаны следующие три теоремы.

Теорема 2.1 *Оператор* $L = (\partial_x^2 + A_6x^6 + A_2x^2)^2 + 16g(g+1)A_6x^4$, *где* $g \in \mathbb{N}$, $A_6 \neq 0$, *а* A_2 *– произвольное число, коммутирует с некоторым дифференциальным оператором* M *порядка* $4m+2$ *при любом* $m \geqslant g$. *Пара операторов* L, M *имеет ранг 2, а ее спектральная кривая имеет вид* $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + ... + a_1z + a_0$.

Теорема 2.2 *Оператор* $L = (\partial_x^2 + A_4x^4 + A_2x^2 + A_0)^2 + 4g(g+1)A_4x^2$, *где* $g \in \mathbb{N}$, $A \neq 0$ *и* A_2, A_0 *– произвольные числа, коммутирует с некоторым дифференциальным оператором* M *порядка* $4m+2$ *при любом* $m \geqslant g$. *Пара операторов* L, M *имеют ранг 2, а ее спектральная кривая имеет вид* $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + ... + a_1z + a_0$.

Теорема 2.3

1) *Если* $L = (\partial_x^2 + A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)^2 + B_kx^k + B_{k-1}x^{k-1} + ... + B_0$, где $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \neq 0$, $B_k \neq 0$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *и пара* M, L *имеет ранг 2, то* $k = n-2$ и $B_k = (n-2)^2m(m+1)A_n$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

2) *Если* $L = (\partial_x^2 + Ax^n)^2 + Bx^{n-2}$, $A \neq 0, B \neq 0$, *то при* $n > 6$, $n \in \mathbb{N}$, *не существует дифференциального оператора* M *порядка* $4g+2$, *коммутирующего с* L, *такого, что пара* M, L *имела бы ранга 2.*

3) *Если* $n = 5$, *то оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 18Ax^3$, $A \neq 0$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *для любого* g *и* M, L *– пара операторов ранга 2.*
4) *Оператор* $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 9m(m+1)Ax^3$ *при* $m > 1$, $A \neq 0$, *не коммутирует ни с каким оператором* M *порядка* $4g+2$, *с которым он образовывал бы пару ранга 2.*

Отметим, что как показывают выкладки, в случае рода меньше 9 при $m = g$ спектральная кривая пары операторов из теоремы 2.1 невырожденна для любого ненулевого A_6 и почти всех A_2. По-видимому, при $m = g$ спектральная кривая невырожденна для любого рода g, но пока это не доказано. При $m > g$, по-видимому, спектральная кривая получается всегда вырожденной. Приведем несколько примеров. При $m = g = 1$ спектральная кривая пары операторов из теоремы 1 имеет вид

$$w^2 = (z + 16A_2)(z^2 + 16A_2 z + 192A_6).$$

При $g = 1, m = 3$ это

$$w^2 = (z+16A_2)(z^2+16A_2z+192A_6)(256A_2^2+C_2-16A_2C_1-(16A_2-C_1)z+z^2)^2,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные константы. При $m = g = 3$ и $A_2 = 0$ это

$$w^2 = z(z^2 + 288000A_6)(273715200A_6^2 + 289152A_6z^2 + z^4).$$

У пары операторов из теоремы 2.2 для почти всех A_2, A_0 спектральная кривая является невырожденной для $m = g < 9$. По-видимому, спектральная кривая является невырожденной при любых $m = g$. Приведем несколько примеров. При $m = g = 1$ получается спектральная кривая следующего вида:

$$w^2 = z^3 + 8A_2z^2 + 16(A_2^2 + A_0A_4)z + 64A_0A_2A_4 + 16A_4^2.$$

При $g = 1, m = 3$ и $A_2 = A_0 = 0$

$$w^2 = (z^3 + 16A_4^2)(C_2 + C_1 z + z^2)^2,$$

где C_1, C_2 – произвольные константы. При $g = m = 3$ и $A_2 = A_0 = 0$ это

$$w^2 = z(3382560000A_4^4 + 117216A_4^2 z^3 + z^6).$$

Теорема 2.3 не выполняется для полиномов более общего вида $A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$ и $Bx^{n-2} + B_{n-1}x^{n-1} + ... + B_1 x + B_0$. Например, для любого n существует дифференциальный оператор порядка 6, с которым L коммутирует (см. [15]). Есть основания полагать, что L коммутирует с оператором порядка $4g + 2$ при $g > 1$ только при $n = 3, 4, 5, 6$, но пока это не доказано.

Доказательство теоремы 2.1

Пусть $V = A_6 x^6 + A_2 x^2$, а $W = 16A_6 g(g+1)x^4$, где $g \in \mathbb{N}$, то есть оператор имеет вид

$$L = (\partial_x^2 + A_6 x^6 + A_2 x^2)^2 + 16A_6 g(g+1)x^4. \tag{2.2}$$

Докажем, что константы $C_1, C_2, ..., C_g$ можно выбрать таким образом, что $a_{g+1} = const$. Прямым подсчетом получаем, что

$$a_1 = C_1 + 8A_6 g(g+1)x^4.$$

Из преобразования (1.10) видно, что a_{i+1} всегда является полиномом и зависит от a_i линейно. Применим (1.10) к $a_i = x^{4k}$ и получим

$$a_{i+1} = C_{i+1} - k(4k-1)(4k-2)(4k-3)x^{4k-4} - 16A_2 k^2 x^{4k} +$$
$$+ \frac{8A_6}{k+1}(2k+1)(g-k)(g+k+1)x^{4k+4}.$$

Далее вычисляем с помощью найденного выше закона преобразования

$$a_2 = \widetilde{C}_2 + 8A_6(\widetilde{C}_1 - 16A_2)g(g+1)x^4 + 96A_6^2 g(g+1)(g-1)(g+2)x^8,$$

$$a_3 = \widetilde{C_3} + 8A_6 g(g+1)(256A_2^2 - 16A_2\widetilde{C_1} + \widetilde{C_2} - 5040A_6(g-1)(g+2))x^4 -$$

$$-96A_6^2(80A_2 - \widetilde{C}_1)g(g+1)(g-1)(g+2)x^8 + 1280A_6^3 g(g+1)(g-1)(g+2)(g-2)(g+3)x^{12},$$

где $\widetilde{C}_i$ – константы, зависящие от C_i. У полинома a_3 есть свободный член $\widetilde{C}_3$. При преобразовании (1.10) он умножится на $8A_6 g(g+1)x^4$ и из него вычтется $16A_2 \cdot const \cdot x^4$ и четвертая производная члена $const \cdot x^8$. Полином a_4 содержит свободный член $\widetilde{C}_4$.

В общем случае пусть $a_i = \widetilde{C_i} + K_i^1 x^4 + K_i^2 x^8 + ... + K_i^i x^{4i}$. Тогда

$$a_{i+1} = \widetilde{C}_{i+1} + (8A_6 g(g+1)\widetilde{C_i} - 16A_2 K_i^1 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 K_i^2)x^4 +$$

$$+(const \cdot K_i^1 - const \cdot K_i^2 - const \cdot K_i^3)x^8 + .. + \tfrac{8A_6(2i+1)}{i+1}(g-i)(g+i+1)K_i^i x^{4i+4}.$$

Также заметим, что все слагаемые, кроме старшего члена, содержат константы $C_1, C_2, C_3, ...$ Причем K_i^{i-1} содержит только C_1, K_i^{i-2} содержит только C_1, C_2, а K_i^{i-3} только C_1, C_2, C_3 и.т.д. Самый старший член не содержит констант интегрирования.

У a_{g+1} старший член $const \cdot x^{4(g+1)}$ обращается в нуль, так как он домножается на $\frac{8A_6(2g+1)}{g+1} \cdot (g-g)(g+g+1) = 0$. Таким образом, необходимо выбрать константы $C_1, C_2, ...$, так чтобы $K_{g+1}^m = 0$ для всех m. Это всегда можно сделать, так как старший член у a_{g+1}, равный $const \cdot x^{4g}$ зависит только от C_1, предпоследний от C_1 и C_2 и.т.д.

Пусть мы не стали обращать в нуль a'_{g+1}, а продолжили применять преобразование (1.10). Рассмотрим a_{g+1+m}, $m > 0$. Заметим, что a_{g+1+m} имеет такое же строение, что и a_{g+1}, с той лишь разницей, что a_{g+1+m} зависит от констант $C_1, C_2, ..., C_{g+m}, C_{g+1+m}$. Значит, мы можем выбрать константы $C_1, ..., C_{g+1+m}$ такими, чтобы $a'_{g+1+m} \equiv 0$. А это значит, что найдется дифференциальный оператор порядка $4(g+m)+2$ который будет коммутировать с L и вместе они будут составлять пару операторов ранга 2.

Доказательство теоремы 2.2

Наш оператор имеет вид

$$L = (\partial_x^2 + A_4x^4 + A_2x^2 + A_0)^2 + 4g(g+1)A_4x^2. \tag{2.3}$$

Как и в предыдущем доказательстве, докажем, что константы $C_1, C_2, ..., C_g$ можно выбрать таким образом, что $a_{g+1} = const$.

Прямым подсчетом получаем, что

$$a_1 = C_1 + 2A_4g(g+1)x^2.$$

Как и в предыдущем доказательстве, заметим, что a_{i+1} является всегда многочленом и зависит от a_i линейно. Применим (1.10) к $a_i = x^{2k}$.

$$a_{i+1} = C_{i+1} - k(2k-1)(k-1)(2k-3)x^{2k-4} - 2A_0k(2k-1)x^{2k-2} -$$
$$-4A_2k^2x^{2k} + \frac{2A_4(2k+1)(g-k)(g+k+1)x^{2k+2}}{k+1}. \tag{2.4}$$

Далее вычисляем, с помощью закона преобразования, написанного выше:

$$a_2 = \widetilde{C_2} + 2A_4(C_1 - 4A_2)g(g+1)x^2 + 6A_4^2g(g+1)(g-1)(g+2)x^4,$$

$$a_3=\widetilde{C_3}+2A_4g(g+1)(16A_2^2-4A_2\widetilde{C}_1+\widetilde{C_2}-36A_0A_4(g-1)(g+2))x^2-$$

$$-6A_4^2(20A_2-C_1)g(g+1)(g-1)(g+2)x^4+20A_4^3g(g+1)(g-1)(g+2)(g-2)(g+3)x^6,$$

где $\widetilde{C}_i$ – константы, зависящие от C_i.

В общем случае, пусть $a_i=\widetilde{C}_i+K_i^1x^2+K_i^2x^4+...+K_i^ix^{2i}$. Тогда

$$a_{i+1}=\widetilde{C}_{i+1}+(2A_4g(g+1)\widetilde{C}_i-4A_2K_i^1-12A_0K_i^2-90K_i^3)x^2+$$

$$+(const\cdot K_i^1-const\cdot K_i^2-const\cdot K_i^3-const\cdot K_i^4)x^4+..+$$

$$+\tfrac{2A_4(2i+1)}{i+1}(g-i)(g+i+1)K_i^ix^{2i+2}.$$

Все слагаемые кроме старшего члена содержат константы $C_1,C_2,...$ Причем K_i^{i-1} содержит только C_1, K_i^{i-2} содержит только C_1,C_2, а K_i^{i-3} только C_1,C_2,C_3 и.т.д. Самый старший член не содержит констант интегрирования.

У a_{g+1} старший член $const\cdot x^{2(g+1)}$ обращается в нуль, так как он домножается на $\frac{2A_4(2g+1)}{g+1}(g-g)(g+g+1)=0$. Таким образом, необходимо выбрать константы $C_1,C_2,...$, так чтобы $K_{g+1}^m=0$ для всех m. Это всегда можно сделать, так как старший член у a_{g+1}, равный $const\cdot x^{2(g-1)}$ зависит только от C_1, предпоследний от C_1 и C_2 и.т.д.

Пусть мы не стали обращать в нуль a'_{g+1}, а продолжили применять преобразование (1.10). Рассмотри a_{g+1+m}, $m>0$. Заметим, что a_{g+1+m} имеет такое же строение, что и a_{g+1}, с той лишь разницей, что a_{g+1+m} зависит от констант $C_1,C_2,...,C_{g+m},C_{g+1+m}$. Следовательно, мы можем выбрать константы $C_1,C_2,...,C_{g+1+m}$ такими, что $a'_{g+1+m}\equiv 0$. А это значит, что найдется дифференциальный оператор порядка $4(g+m)+2$ который будет коммутировать с L

и вместе они составляют пару ранга 2.

Доказательство теоремы 2.3

Наш оператор имеет вид

$$L = (\partial_x^2 + A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_0)^2 + B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + ... B_0.$$

Докажем пункт 1.

Пусть L коммутирует с оператором порядка $4g+2$, а это значит, что $a'_{g+1} \equiv 0$. Рассмотрим внимательно выражение (1.10), учитывая, что все a_i – полиномы по x. Пусть степень полинома a_g равна l. Слагаемые в $-4Va'''_g - 6V'a''_g - 2a'_gV''$ имеют степень $n+l-3$. Сумма $-4Va'''_i - 6V'a''_i - 2a'_iV''$ не может равняться нулю так как все коэффициенты при старших членах одного знака. Сумма $2a_gW' + 4a'_gW$ также не может равняться нулю, так как коэффициенты при старших членах одного знака. Степень полинома $2a_gW' + 4a'_gW$ равна $k+l-1$. Таким образом, если $a'_{g+1} \equiv 0$, то $n+l-3 = k+l-1$, то есть $k = n-2$

Теперь докажем, что $B_{n-2} = (n-2)^2 m(m+1) A_n$ для некоторого m. Будем следить за коэффициентом при старшем члене у полинома a_i. Для упрощения выкладок можно без ограничения общности положить, что

$$L = (\partial_x^2 + A_n x^n)^2 + B_{n-2} x^{n-2},$$

так как из (1.10) видно, что остальные члены на коэффициент у старшей степени в a_i не влияют. Имеем

$$a_1 = C_1 + \frac{1}{2} B x^{n-2}.$$

Как и в предыдущих доказательствах, используем то, что (1.10) зависит от a_i

линейно. Применим (1.10) к $a_i = x^k$ и получим, что

$$\begin{gathered}a_{i+1} = -\frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}+ \\ +\frac{(n+2k-2)}{2(n+k-2)}(B - Ak(n+k-2))x^{n+k-2} + C_{i+1}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что старший член у a_i имеет степень $(n-2)i$.

Так как найдется такое g, что $a'_{g+1} \equiv 0$, то при некотором $m \leqslant g$ старший член у a_{m+1} должен обратиться в нуль. Применим (1.10) к $a_i = x^{i(n-2)}$.

$$a_{i+1} = -\frac{1}{4}i(n-2)(i(n-2)-1)(i(n-2)-2)(i(n-2)-3)x^{i(n-2)-4}+$$

$$+\frac{(2i+1)}{2(i+1)}(B_{n-2} - Ai(i+1)(n-2)^2)x^{i(n-2)+n-2} + C_{i+1}.$$

Из этого выражения получаем, что

$$B_{n-2} = (n-2)^2 m(m+1)A_n.$$

Пункт 1 доказан.

Докажем пункты 2–4. Пусть далее

$$L = (\partial_x^2 + Ax^n)^2 + (n-2)^2 m(m+1)Ax^{n-2}.$$

Выражение (2.5) перепишется в виде:

$$\begin{gathered}a_{i+1} = -\frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}+ \\ +\frac{A(n+2k-2)}{2(n+k-2)}(m(n-2)-k)((m+1)(n-2)+k)x^{n+k-2} + C_{i+1}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Пусть $n > 6$.

Тогда коэффициент старшего члена $x^{(n-2)i}$ у a_i при $i < m$ будет положительный, так как из (2.6) видно, что при переходе к a_{i+1} он будет домножаться на

$$\frac{A(2i+1)}{2(i+1)}(n-2)^2(m-i)(m+i+1)x^{n-2}.$$

Число $\frac{(n+2k-2)}{2(n+k-2)}(m(n-2)-k)((m+1)(n-2)+k)$ обозначим через N_k. Как было замечено выше, $N_{i(n-2)} \geqslant 0$ при $i \leqslant m$. Также легко проверить, что $N_{i(n-2)-4} > 0$ при $i \leqslant m$, $i \geqslant 1$. Далее,

$$a_2 = \widetilde{C}_2 - \frac{1}{8}Am(m+1)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)^3x^{n-6} + const \cdot x^{n-2} + \\ + \frac{3}{8}A^2(m-1)m(m+1)(m+2)(n-2)^4x^{2n-4},$$

где $\widetilde{C}_i$ – константа, зависящая от C_i. Обратим внимание на то, что коэффициент при x^{n-6} отрицательный. Из (2.6) видно, что при переходе к a_3 член $A \cdot const \cdot x^{n-6}$ умножится на $AN_{n-6}x^{n-2} = AN_{(n-2)-4}x^{n-2}$ и из него вычтется четвертая производная члена $A^2 \cdot const \cdot x^{2n-4}$. Значит коэффициент при x^{2n-8} будет иметь вид $A^2 \cdot const \cdot x^{2n-8}$, где константа отрицательное число. И далее при $i \leqslant m$, при переходе от a_i к a_{i+1} коэффициент при $x^{(i-1)(n-2)-4}$ умножается на $AN_{(i-1)(n-2)-4}x^{n-2}$ и из него вычитается положительно число(четвертая производная от $const \cdot x^{i(n-2)}$).

Таким образом, при $i \leqslant m$, член $A^{i-1} \cdot const \cdot x^{(i-1)(n-2)-4}$ может обратиться в нуль только при $A = 0$, так как $const < 0$.

При переходе от a_m к a_{m+1} старший член $x^{m(n-2)}$ умножиться на 0 и исчезнет. Если $i > m$, то при переходе от a_i к a_{i+1} из члена $A^{i-1} \cdot const \cdot x^{(i-1)(n-2)-4}$ уже ничего вычитаться не будет. Из (9) видно, что при этом переходе в случае $i > m$, член $const \cdot x^{(i-1)(n-2)-4}$ может обратиться в нуль только из-за множителя $m(n-2) - (i-1)(n-2) + 4$. Когда $i - m \geqslant 2$, учитывая, что $n > 6$ получаем

$$m(n-2) - (i-1)(n-2) + 4 = (n-2)(m-i+1) + 4 \leqslant -(n-2) + 4 < 0,$$

а когда $i - m = 1$, то

$$m(n-2) - (i-1)(n-2) + 4 = 4.$$

Таким образом, при $n > 6$ не будет существовать такого g, что $a'_{g+1} \equiv 0$.

Пусть теперь $n = 5$. Рассмотрим оператор

$$L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 18Ax^3. \tag{2.7}$$

Прямым подсчетом убеждаемся, что

$$a_2 = \widetilde{C}_2 + 9A\widetilde{C}_1 x^3.$$

То есть при $\widetilde{C}_1 = 0$, $a'_2 \equiv 0$. Следовательно, существует оператор порядка 6, который коммутирует с L, и вместе они составляют пару операторов ранга 2. Далее,

$$a_3 = \widetilde{C}_3 + 9A\widetilde{C}_2 x^3.$$

При $\widetilde{C}_2 = 0$ существует оператор порядка 10, коммутирующий с L, и они вместе составляют пару операторов ранга 2. В общем случае

$$a_{g+1} = \widetilde{C}_{g+1} + 9A\widetilde{C}_g x^3.$$

Следовательно, при $\widetilde{C}_g = 0$ существует оператор порядка $4g+2$, коммутирующий с L, и вместе они составляют пару операторов ранга 2.

Пусть теперь $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 9m(m+1)Ax^3$, где $m > 1$. Тогда

$$a_2 = \widetilde{C}_2 + 9\widetilde{C}_1 m(m+1)x^3 + \frac{243}{8}A^2 m(m+1)(m+2)(m-1)x^6,$$

$$a_3 = \widetilde{C}_3 - \frac{10935}{4}A^2 m(m+1)(m+2)(m-1)x^2 + const \cdot x^3 + const \cdot x^6 + A^3 \cdot const \cdot x^9$$

Рассуждая, как выше, придем к выводу, что коэффициент при члене x^{3i-7} у a_i при $i > 3$ никогда не будет равен нулю.

2. Собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2

Рассмотрим оператор

$$L = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x). \tag{2.8}$$

Как уже отмечалось, известно, что этот оператор коммутирует с некоторым оператором M порядка $4g+2$, причем спектральная кривая пары L, M имеет род g, тогда и только тогда, когда найдется полином

$$Q = z^g + a_1(x)z^{g-1} + a_2(x)z^{g-2} + ... + a_{g-1}(x)z + a_g(x),$$

для которого выполняется следующее соотношение:

$$Q^{(5)} + 4VQ''' + 6V'Q'' + 2Q'(2z - 2W + V'') - 2QW' \equiv 0, \tag{2.9}$$

Спектральная кривая и коэффициенты в уравнении общих собственных функций имеют вид

$$4w^2 = 4F(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q')^2 + (Q'')^2 - 2Q'Q''' +$$
$$+2Q(2V'Q' + 4VQ'' + Q^{(4)}),$$
$$\chi_1 = \frac{Q'}{Q}, \quad \chi_0 = -\frac{Q''}{2Q} + \frac{w}{Q} - V.$$

Напомним некоторые определения. Функциями Бесселя J_α называют решения следующего уравнения

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0.$$

Если α не целое число, то уравнение Бесселя удовлетворяется двумя независимыми решениями J_α, $J_{-\alpha}$, где

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2^2 1!(\alpha+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(\alpha+2)} - ...\right).$$

Если α целое число, то $J_{\pm\alpha}$ перестают быть независимыми. Известно свойство

$$J'_\alpha = \frac{\alpha J_\alpha(x)}{x} - J_{\alpha+1}(x).$$

Функции

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{sin(\alpha\pi)}$$

называют функциями Бесселя второго рода. Для Y_α верно следующее

$$Y'_\alpha(x) = \frac{\alpha Y_\alpha(x)}{x} - Y_{\alpha+1}(x).$$

Функциями Гойна $H(a, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ называют решения уравнения

$$y''(x) + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta+1}{x-a}\right) y'(x) + \frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)} y(x) = 0.$$

Данное уравнение имеет 4 регулярные особые точки $0, 1, a, \infty$. Конфлюэнтным уравнением Гойна называется уравнение Гойна после процедуры конфлюэнции, при которой сливаются точки $x = a$ и $x = \infty$ (см. [25]). Через $CH(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x)$ обозначим решение конфлюэнтного уравнения

$$y''(x) + \left(\frac{\beta+\gamma-\alpha+2}{x-1} + \frac{x\alpha}{x-1} - \frac{\beta+1}{x(x-1)}\right) y'(x) +$$
$$+ \left(\frac{\alpha(\beta+\gamma+2)+2\delta}{2(x-1)} - \frac{\alpha(\beta+1)-\beta(\gamma+1)-2\eta-\gamma}{2x(x-1)}\right) y(x) = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\beta(\gamma-\alpha+1)+\gamma-\alpha+2\eta}{2(\beta+1)}.$$

Существует следующая связь с функциями Бесселя (см. [25])

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha(2ix+1)CH(1,2,\alpha,1,0,\frac{1}{2};-2ix)}{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha e^{ix}}.$$

Нам известно, что $L = (\partial_x^2 + Ax^6 + Bx^2)^2 + 16g(g+1)Ax^4$ коммутирует с неким оператором порядка $4g+2$. Мы знаем, что при $g=1$ и $B=0$ спектральная кривая коммутирующей пары и уравнение на общие собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} w^2 = z(192A + z^2), \\ \psi'' - \frac{64Ax^3}{16Ax^4+z}\psi' - \left(\frac{w-96Ax^2}{16Ax^4+z} - Ax^6\right)\psi = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Утверждение 2.4.

Пусть $z = 0, \pm\sqrt{-192A}$, тогда $w=0$. Если $z=0$, то решениями (2.10) будут

$$x^{\frac{5}{2}}J_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right), \quad x^{\frac{5}{2}}Y_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right).$$

Решениями уравнения (2.10) при $z = \pm\sqrt{-192A}$ являются

$$\begin{gathered} e^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}}CH\left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, -\frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z}\right), \\ xe^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}}CH\left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, \frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z}\right). \end{gathered}$$

Проинтегрировать уравнение (2.10) для произвольных z пока не удается.

Доказательство

Утверждение проверяется прямой выкладкой.

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}J_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)\right) = x^{\frac{3}{2}}\left(J_{-\frac{7}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)\sqrt{A}x^4 + 2J_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}Y_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)\right) = x^{\frac{3}{2}}\left(Y_{-\frac{7}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)\sqrt{A}x^4 + 2Y_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)\right).$$

Дифференцируя еще раз и подставляя в уравнение (2.10), получим, что функции $x^{\frac{5}{2}}J_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)$ и $x^{\frac{5}{2}}Y_{\frac{1}{8}}\left(\frac{x^4\sqrt{A}}{4}\right)$ являются решениями уравнения (2.10) при $z = 0, w = 0$.

Далее, при $z = \pm\sqrt{-192A}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}}CH\left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, -\frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z}\right)\right) =$$
$$= -\frac{Ae^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}}x^3}{z}\left(CH\left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, -\frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z}\right)\sqrt{-\frac{1}{A}}z+\right.$$
$$\left.+64CH'\left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, -\frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z}\right)\right).$$

Если продифференцируем еще раз и подставим в (2.10), то увидим, что функция $e^{-\frac{Ax^4}{4\sqrt{-A}}}CH\left(\frac{z}{32\sqrt{-A}}, -\frac{1}{4}, -2, 0, \frac{5}{4}, -\frac{16Ax^4}{z}\right)$ является решением уравнения (2.10). Аналогично и с другим решением.

Утверждение доказано.

Рассмотрим общие собственные функции при $g = 2$. В этом случае спектральная кривая имеет вид $w^2 = z(20160A + z^2)(20736A + z^2)$. Уравнением на собственные функции, при $z = 0$, является уравнение

$$(4Ax^8 + 35)\psi'' - 32Ax^7\psi' + (147Ax^6 + 4A^2x^{14})\psi = 0. \qquad (2.11)$$

Утверждение 2.5.

Решениями уравнения (2.12) являются функции

$$CH(0, -\frac{1}{8}, -2, -\frac{35}{256}, \frac{387}{256}, -\frac{4Ax^8}{35}),$$
$$xCH(0, \frac{1}{8}, -2, -\frac{35}{256}, \frac{387}{256}, -\frac{4Ax^8}{35}).$$

3. Об операторах вида $\partial_x^4 + u(x)$ из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода g

Рассмотрим оператор

$$L_4 = \partial_x^4 + u(x).$$

Допустим, что $u(x)$ имеет изолированные полюса в точках $a_1, a_2, ...$. Пусть в окрестности точки a_i ряд Лорана функции $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \frac{\varphi_{i,-k}}{(x-a_i)^k} + \frac{\varphi_{i,-k+1}}{(x-a_i)^{k-1}} + ... + \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x-a_i) + O((x-a_i)^2).$$

Верны следующие теоремы:

Теорема 2.5 *Если* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *и дифференциальный оператор* M *порядка* $4g+2$ *образуют пару коммутирующих операторов ранга 2, то* $u(x)$ *может иметь изолированный полюс порядка не более* 4, $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, *где* $k = 0, ..., n_i$, $l = 1,2,3$. *Также* $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, *где* $r = n_i+1, ..., g$. *Функция* $u(x)$ *не может иметь изолированного полюса в бесконечности.*

Следствие 2.6 *Предположим, что* $u(x)$ *— эллиптическая, периодическая или рациональная функция и не имеет изолированной особенности в бесконечности. Пусть* a_1 *— единственный полюс в фундаментальном параллелограмме, в периодической ленте или на комплексной плоскости соответственно. Тогда оператор* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *и оператор* M *порядка* $4g+2$ *образуют пару ранга 2 тогда и только тогда, когда* $\varphi_{1,-4} = g(4g+1)(4g+3)(4g+4)$, $\varphi_{1,4k-l} = 0$, *где* $k = 0, ..., g$, $l = 1,2,3$.

Следствие 2.7 *Допустим, что* $\wp(x)$ *— эллиптическая функция Вейерштрас-*

са, удовлетворяющая уравнению $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x)+g_2\wp(x)+g_3$. *Тогда оператор*

$$L_4 = \partial_x^4 + n(4n+1)(4n+3)(4n+4)\wp^2(x),$$

где $n \in \mathbb{N}$, *коммутирует с оператором порядка* $4n+2$ *тогда и только тогда, когда* $g_3 = 0$. *Из вычислений видно, что для* n *меньших* 8 *спектральная кривая является гладкой для почти всех* g_2.

Пример 2.8 *Допустим, что* $\wp(x)$ *— эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению* $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) + g_2\wp(x) + g_3$. *Рассмотрим оператор*

$$L_4 = \partial_x^4 + 280\wp^2(x) + 280\wp^2(x-a).$$

Предположим, что $g_3 = 0$ *и* $a = \omega_1$, ω_2 *или* $\omega_1+\omega_2$, *где* ω_i *— полупериоды. Тогда* L_4 *коммутирует с оператором порядка* 6.

Анализируя доказательство теоремы 2.4 можно выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза *Пусть* $u(x)$ *— эллиптическая функция с конечным числом полюсов в фундаментальном параллелограмме, периодическая функция с конечным числом полюсов в ленте периодов или рациональная функция без изолированной особенности в бесконечности. Пусть* $S = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i + 1$, *где* m *является числом полюсов. Если* $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, *где* $k = 0, ..., n_i$, $r = n_i+1, ..., S$ *и* $l = 1, 2, 3$, *то* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *коммутирует с неким дифференциальным оператором порядка* $4S+2$.

Теорема 2.9 *Пусть* L_4 *и оператор* M *порядка* $4g+2$ *образуют пару коммутирующих операторов ранга* 2. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет изолированный* *полюс в точке a_i. Тогда решения уравнения $\psi^{(4)}(x)+u(x)\psi(x)=\lambda\psi(x)$ имеют особенности в точках a_i следующего вида $x^{\sigma_{i,r}}g(x)$, где $r=1,2,3,4$ и $g(x)$ голоморфная функция в окрестности a_i,*

$\sigma_{i,1}=\frac{1}{2}(1-4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$

$\sigma_{i,2}=\frac{1}{2}(1-4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$

$\sigma_{i,3}=\frac{1}{2}(5+4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$

$\sigma_{i,4}=\frac{1}{2}(5+4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$.

То есть собственные функции всегда имеют точки ветвления. Следовательно, L_4 не коммутирует с оператором нечетного порядка так как общие собственные функции операторов взаимно простого порядка всегда мероморфны.

Рассмотрим

$$L=(\partial_x^2+V(x))^2+W(x) \qquad (2.12)$$

Опять вспомним, что этот оператор коммутирует с некоторым оператором M порядка $4g+2$, причем спектральная кривая пары L, M имеет род g, тогда и только тогда, когда найдется полином (см. [12])

$$Q=z^g+a_1(x)z^{g-1}+a_2(x)z^{g-2}+...+a_{g-1}(x)z+a_g(x),$$

для которого выполняется следующее соотношение:

$$Q^{(5)}+4VQ'''+6V'Q''+2Q'(2z-2W+V'')-2QW'\equiv 0, \qquad (2.13)$$

Если $V(x)\equiv 0$, то

$$Q^{(5)}+2Q'(2z-2W)-2QW'\equiv 0, \qquad (2.14)$$

$$4w^2=4F(z)=4zQ^2+(Q'')^2-2Q'Q'''+2QQ^{(4)}.$$

Из (2.14) имеем

$$4Q'z \equiv -Q^{(5)} + 2QW' + 4Q'W.$$

Таким образом, мы получили следующую систему :

$$\begin{cases} a_1 = W/2 + C_1 \\ 4a_2' = -a_1^{(5)} + 2a_1W' + 4a_1'W \\ \ldots \\ 4a_{i+1}' = -a_i^{(5)} + 2a_iW' + 4a_i'W \\ \ldots \\ 4a_g' = -a_{g-1}^{(5)} + 2a_{g-1}W' + 4a_{g-1}'W \\ 0 = -a_g^{(5)} + 2a_gW' + 4a_g'W \end{cases}$$

Таким образом результат в [12] может быть переформулирован следующим образом. Пусть $a_1 = W/2 + C_1$, где C_1 — произвольная константа. Определим a_i с помощью рекурсии

$$a_{i+1} = C_{i+1} + \frac{1}{4}\int(-a_i^{(5)} + 2a_iW' + 4a_i'W)dx. \tag{2.15}$$

Мы видим, что если $V(x) \equiv 0$, то оператор (2.12) коммутирует с неким оператором порядка $4g+2$ и эти операторы образуют пару операторов ранга 2 тогда и только тогда, когда $a_{g+1} \equiv const$.

Обозначим

$$L_4 = \partial_x^4 + u(x).$$

Условием коммутации оператора L_4 и оператора M порядка 6, где L_4, M образуют пару ранга 2, является уравнение на функцию $u(x)$

$$4C_1u'(x) + 6u(x)u'(x) - u^{(5)}(x) = 0,$$

для некоторой константы C_1. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$f_{j+1}(x) = C_{i+1} + \int (u(x)f'_j(x) + \frac{u'(x)f_j(x)}{2} - \frac{f_j^{(5)}(x)}{4})dx, \tag{2.16}$$

где

$$f_1 = C_1 + \frac{u(x)}{2}.$$

Мы видим, что L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$ тогда и только тогда, когда существуют такие константы $C_1, ..., C_g$, что $f_{g+1} \equiv const$.

Доказательство теоремы 2.5

Допустим, что $u(x)$ имеет полюса в точках $a_1, a_2, ...$ из $\mathbb{C}$.

Лемма 1

Если L_4 коммутиует с неким оператором порядка $4g+2$, то $u(x)$ может иметь полюса в $\mathbb{C}$ только четвертого порядка.

Доказательство

Предположим, что $u(x)$ имеет полюс порядка k в точке a_i. Так как L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то $f'_{g+1} \equiv 0$. Предположим, что f_g имеет изолированный полюс в точке a_i порядка m, то $u(x)f'_g(x) + \dfrac{u'(x)f_g(x)}{2}$ имеет полюс порядка $k+m+1$ и $f_g^{(5)}(x)$ имеет полюс порядка $m+5$. Следовательно, если $f'_{g+1} \equiv 0$, то $k+m+1 = m+5$. То есть $k = 4$.

Доказательство завершено

Обозначим через $A^k_{i,m}$ коэффициент при члене $(x-a_i)^m$ в ряде Лорана функции f_k в окрестности a_i. Мы видим, что f_k имеет полюс порядка $4k$ в точке a_i. Пусть ряд Лорана функции $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,-3}}{(x-a_i)^3} + \frac{\varphi_{i,-2}}{(x-a_i)^2} + \frac{\varphi_{i,-1}}{x-a_i} +$$

$$+\varphi_{i,0}+\varphi_{i,1}(x-a_i)+\varphi_{i,2}(x-a_i)^2+\varphi_{i,3}(x-a_i)^3+\varphi_{i,4}(x-a_i)^4++O((x-a_i)^5).$$

Лемма 2

Если L_4 коммутирует с неким оператором порядка $4g+2$, то

$\varphi_{i,-4}=n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, где $n_i\in\mathbb{N}$, а

$$A^{k+1}_{i,-4k-4}=\frac{(2k+1)A^k_{i,-4k}(\varphi_{i,-4}-k(4k+1)(4k+3)(4k+4))}{2k+2},\quad k\geqslant 1.$$

Доказательство

В окрестности a_i имеем

$$f_j=\frac{A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j}}+O((x-a_i)^{-4j+1}).$$

Легко заметить, что

$$f'_{j+1}=(\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4}+O(\frac{1}{(x-a_i)^3}))(-\frac{4jA^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j+1}}+O((x-a_i)^{-4j})+$$

$$+(-\frac{2\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^5}+O(\frac{1}{(x-a_i)^4}))(\frac{A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j}}+O((x-a_i)^{-4j+1})+$$

$$+\frac{j(4j+1)(4j+2)(4j+3)(4j+4)A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j+5}}+O((x-a_i)^{-4j-4})=$$

$$=-\frac{(4j+2)(\varphi_{i,-4}-j(4j+1)(4j+3)(4j+4))A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j+5}}+O((x-a_i)^{-4j-4}).$$

Интегрируя последнее выражение получим

$$A^{j+1}_{i,-4j-4}=\frac{(2j+1)(\varphi_{i,-4}-j(4j+1)(4j+3)(4j+4))A^j_{i,-4j}}{2j+2}.$$

Если $f'_{g+1}\equiv 0$, то старший член главной части Лорановского ряда должен стать равным нулю. Следовательно, $\varphi_{i,-4}=n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$ для некоторого n_i.

Доказательство завершено.

Лемма 3

Предположим, что $j < n_i + 1$ и в окрестности точки a_i

$$f_j = \frac{A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j}} + O((x-a_i)^{-4j+1}),$$

тогда $A^j_{i,-4j} > 0$ и если $j \geqslant n_i + 1$, то $A^j_{i,-4j} = 0$.

Доказательство.

Так как $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$ и

$$A^{j+1}_{i,-4j-4} = \frac{(2j+1)(\varphi_{i,-4} - j(4j+1)(4j+3)(4j+4))A^j_{i,-4j}}{2j+2}, \tag{2.17}$$

мы видим, что если $j < n_i + 1$, то $A^j_{i,-4j} > 0$.

Если $j \geqslant n_i + 1$, то $A^j_{i,-4j} = 0$.

Доказательство завершено.

Докажем, что $u(x)$ не может иметь изолированного полюса в бесконечности. Предположим обратное. Пусть $u(x)$ имеет полюс в бесконечности порядка m. Мы имеем

$$f_1 = A^1_{\infty,m}x^m + O(x^{m-1}) = \frac{\varphi_{\infty,m}}{2} + O(x^{m-1})$$

Но f_2 имеет полюс в бесконечности порядка $2m$ и $A^2_{\infty,2m} = \frac{2mA^1_{\infty,m}\varphi_{\infty,m} + m\varphi_{\infty,m}A^1_{\infty,m}}{4m} \neq 0$. В общем случае $A^{k+1}_{\infty,(k+1)m} = \frac{2kmA^k_{\infty,km}\varphi_{\infty,m} + m\varphi_{\infty,m}A^k_{\infty,km}}{2m(k+1)} = \frac{\varphi_{\infty,m}A^k_{\infty,mk}(2k+1)}{2(k+1)} \neq 0$. Таким образом, не существует такого k, что f_k обращается в нуль.

Лемма 4.

Если L_4 коммутирует с неким дифференциальным оператором порядка $4g+2$, то $\varphi_{i,-3} = \varphi_{i,-2} = \varphi_{i,-1} = 0$ для всех i.

Доказательство.

По определению, $f_1(x) = C_1 + \dfrac{u(x)}{2}$ в окрестности точки a_i имеет вид

$$f_1 = \frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,-l}}{2(x-a_i)^l} + O((x-a_i)^{-l+1}),$$

где $l = 3, 2, 1$. Следовательно, $f_2'(x) = u(x) f_1'(x) + \dfrac{u'(x) f_1(x)}{2} - \dfrac{f_1^{(5)}(x)}{4}$ в окрестности точки a_i имеет вид

$$\left(\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,-l}}{(x-a_i)^l} + O((x-a_i)^{-l+1})\right)\left(-\frac{2\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^5} - \frac{l\varphi_{i,-l}}{2(x-a_i)^{l+1}} + O((x-a_i)^{-l})\right)+$$

$$+\left(-\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^5} - \frac{l\varphi_{i,-l}}{4(x-a_i)^{l+1}} + O((x-a_i)^{-l})\right)\left(\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,-l}}{(x-a_i)^l} + O((x-a_i)^{-l+1})\right)+$$

$$+\frac{840\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^9} + \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)\varphi_{i,-l}}{8(x-a_i)^{l+5}} + O((x-a_i)^{-l-4}) =$$

$$= -\frac{3\varphi_{i,-4}(\varphi_{i,-4}-280)}{(x-a_i)^9} - \frac{\varphi_{i,-l}(4+l)(6\varphi_{i,-4} - l(l+1)(l+2)(l+3))}{8(x-a_i)^{l+5}} + O((x-a_i)^{-l-4})$$

Интегрируя, мы получим

$$f_2(x) = \frac{3\varphi_{i,-4}(\varphi_{i,-4}-280)}{8(x-a_i)^8} + \frac{\varphi_{i,-l}(6\varphi_{i,-4} - l(l+1)(l+2)(l+3))}{8(x-a_i)^{l+4}} + O((x-a_i)^{-l-3})$$

Заметим, что $6\varphi_{i,-4} - l(l+1)(l+2)(l+3) > 0$. Рассмотрим f_k, где $k \leqslant n_i$.

$$f_k = \frac{A^k_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k}} + \frac{A^k_{i,-4k+4-l}}{(x-a_i)^{4k-4+l}} + O((x-a_i)^{-4k+3-l}).$$

Докажем, что

$$A^{k+1}_{i,-4k-l} = \varphi_{i,-l} K^{k+1}_{i,-4k-l} \qquad k \leqslant n_i, \tag{2.18}$$

где $K^{k+1}_{i,-4k-l} > 0$ и не зависит от $\varphi_{i,-l}$. Доказывать будем индукцией по k. Мы уже проверили это для $k = 2$. По предположению индукции $A^k_{i,-4k+4-l} = \varphi_{i,-l} K^k_{i,-4k+4-l}$ и $K^k_{i,-4k+4+l} > 0$.

Легко увидеть, что

$$f_{k+1} = \frac{(2k+1)(\varphi_{i,-4} - k(4k+1)(4k+3)(4k+4))A^k_{i,-4k}}{(2k+2)(x-a_i)^{4k+4}} +$$

$$+\frac{\varphi_{i,-l}A^k_{i,-4k}(8k+l)}{2(4k+l)(x-a_i)^{4k+l}}+$$

$$\frac{(4k-2+l)(4\varphi_{i,-4}-(4k-4+l)(4k-3+l)(4k-1+l)(4k+l))A^k_{i,-4k+4-l}}{4(4k+l)(x-a_i)^{4k+l}}+...$$

$$=\frac{A^{k+1}_{i,-4k-4}}{(x-a_i)^{4k+4}}+\frac{A^{k+1}_{i,-4k-l}}{(x-a_i)^{4k+l}}+O((x-a_i)^{-4k+1-l})$$

Мы видим, что $A^{k+1}_{i,-4k-l}=\varphi_{i,-l}K^{k+1}_{i,-4k-l}$. Получили, что $K^{k+1}_{i,-4k-l}>0$ так как $A^k_{i,-4k}>0$, где $k\leqslant n_i$. Таким образом, утверждение (2.18) доказано.

Из леммы 2 мы знаем, что $A^{n_i+1}_{i,-4n_i-4}=0$. Если $k\geqslant n_i+1$, то

$$A^{k+1}_{i,-4k-l}=\frac{A^k_{i,-4k+4-l}(4k-2+l)}{4(4k+l)}\times$$

$$\times(4\varphi_{i,-4}-(4k-4+l)(4k-3+l)(4k-1+l)(4k+l)).$$

Легко заметить, что если $k\geqslant n_i+1$, то

$$4n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)-(4k-4+l)(4k-3+l)(4k-1+l)(4k+l))<0.$$

Окончательно получим,что если существует такое g, что $f_{g+1}\equiv 0$, то $A^k_{i,-4k+4-l}=\varphi_{i,-l}K^k_{i,-4k+4-l}=0$ для некоторого k. Но $K^k_{i,-4k+4-l}\neq 0$ для всех k. Следовательно, $\varphi_{i,-l}=0$.

Доказательство завершено.

Докажем теперь основную часть теоремы 2.4.

Из леммы 4 мы видим, что функция $f_1(x)=C_1+\frac{u(x)}{2}$ в окрестности точки a_i имеет вид

$$f_1=\frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4}+\frac{\varphi_{i,0}}{2}+C_1+\frac{\varphi_{i,4-l}(x-a_i)^{4-l}}{2}+O((x-a_i)^{5-l}),$$

где $l=3,2,1$. Тогда $f_2'(x)=u(x)f_1'(x)+\dfrac{u'(x)f_1(x)}{2}-\dfrac{f_1^{(5)}(x)}{4}$ в окрестности точки a_i

$$f_2=\frac{3(\varphi_{i,-4}-280)\varphi_{i,-4}}{8(x-a_i)^8}+\frac{\varphi_{i,-4}(3\varphi_{i,0}+2C_1)}{4(x-a_i)^4}+\frac{3\varphi_{i,-4}\varphi_{i,4-l}}{4(x-a_i)^l}+O((x-a_i)^{-l+1}). \tag{2.19}$$

Мы видим,что коэффициент при члене $(x-a_i)^{-l}$ равен $\varphi_{i,l}\frac{3\varphi_{i,-4}}{4}$. Рассмотрим f_k

$$f_k=\frac{A^k_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k}}+\frac{A^k_{i,-4k+4}}{(x-a_i)^{4k-4}}+\frac{A^k_{i,-4k+8-l}}{(x-a_i)^{4k-8+l}}+O((x-a_i)^{-4k+9-l})$$

Покажем, что $A^k_{i,-4k+8-l}=\varphi_{i,l}K^k_{i,-4k+8-l}$, где $K^k_{i,-4k+8-l}\neq 0$ и не зависит от $\varphi_{i,4-l}$. Доказывать будем индукцией по k. Мы проверили утверждение при $k=2$.

$$\begin{gathered}f_{k+1}=\frac{A^{k+1}_{i,-4k-4}}{(x-a_i)^{4k+4}}+\frac{A^{k+1}_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k}}+\frac{(8k-4+l)\varphi_{i,4-l}A^k_{i,-4k}}{2(4k-4+l)(x-a_i)^{4k-4+l}}+\\+\frac{(4k-6+l)(4\varphi_{i,-4}-(4k-8+l)(4k-7+l)(4k-5+l)(4k-4+l))A^k_{i,-4k+8-l}}{4(4k-4+l)(x-a_i)^{4k-4+l}}\\+O((x-a_i)^{-4k+5-l})\end{gathered} \tag{2.20}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}K^{k+1}_{i,-4k+4-l}=\frac{(8k-4+l)A^k_{i,-4k}}{2(4k-4+l)}+\\\frac{(4k-6+l)(4\varphi_{i,-4}-(4k-8+l)(4k-7+l)(4k-5+l)(4k-4+l))K^k_{i,-4k+8-l}}{4(4k-4+l)}\end{gathered}$$

Мы видим, что если $k\leqslant n_i+1$, то $K^{k+1}_{i,-4k+4-l}>0$. Если $k>n_i+1$, то из леммы 3 получим, что $A^k_{i,-4k}=0$. Следовательно, если $k>n_i+1$, то $K^k_{i,-4k+8-l}<0$. Но $A^k_{i,-4k+8-l}=\varphi_{i,l}K^k_{i,-4k+8-l}$, а мы должны найти такое g при котором $f_{g+1}\equiv 0$. Мы получаем $A^k_{i,-4k+8-l}=0$ для некоторого $k\Leftrightarrow\varphi_{i,l}=0$.

В общем случае предположим, что $\varphi_{i,4k-l}=0$, где $k=1,...,m-1$, $l=1,2,3$ и $m\leqslant n_i$. Мы уже доказали это утверждение для $m=2$. Докажем,что $\varphi_{i,4m-l}=0$.

Имеем

$$f_1 = \frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,0}}{2} + C_1 + \sum_{t=1}^{t=m-1} \frac{\varphi_{i,4t}(x-a_i)^{4t}}{2} + \frac{\varphi_{i,4m-l}(x-a_i)^{4m-l}}{2} + \ldots \quad (2.21)$$

Далее

$$f_k = \sum_{t=-k}^{t=m-k} A^k_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + A^k_{i,4m-4k+4-l}(x-a_i)^{4m-4k+4-l} + \ldots$$

$$f_{k+1} = \sum_{t=-k-1}^{t=m-k-1} A^{k+1}_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + A^{k+1}_{i,4m-4k-l}(x-a_i)^{4m-4k-l} + \ldots$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} A^{k+1}_{i,4m-4k-l} = \\ = \frac{(4m-4k+2-l)A^k_{i,4m-4k+4-l}}{4(4m-4k-l)} \times \\ \times (4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l)) + \\ + \frac{(4m-8k-l)\varphi_{i,4m-l}A^k_{i,-4k}}{2(4m-4k-l)}. \end{gathered} \quad (2.22)$$

Если мы возьмем $m = 1$ в (2.22), то получим (2.20).

Так как $A^1_{i,4m-l} = \frac{\varphi_{i,4m-l}}{2}$, то из (2.22) получим $A^{k+1}_{i,4m-4k-l} = \varphi_{i,4m-l}K^{k+1}_{i,4m-4k-l}$, где $K^{k+1}_{i,4m-4k-l}$ не зависит от $\varphi_{i,4m-l}$.

$$\begin{gathered} K^{k+1}_{i,4m-4k-l} = \\ = \frac{(4m-4k+2-l)K^k_{i,4m-4k+4-l}}{4(4m-4k-l)} \times \\ \times (4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l)) + \\ + \frac{(4m-8k-l)A^k_{i,-4k}}{2(4m-4k-l)}. \end{gathered} \quad (2.23)$$

Лемма 5.

Число $K^{n_i+1}_{i,4m-4k-l} \neq 0$ *for* $m \leqslant n_i$.

Доказательство.

Рассмотрим два случая.

1) $l = 2$.

Из (2.23) мы видим, что

$$A^{m+1}_{i,-2} = \frac{(4m+2)\varphi_{i,4m-2}A^{m}_{i,-4m}}{4} = \varphi_{i,4m-2}\frac{(4m+2)A^{m}_{i,-4m}}{4} = \varphi_{i,4m-l}K^{m+1}_{i,-2}.$$

Из леммы 2 получаем,что если $m \leqslant n_i$, то $K^{m+1}_{i,-2} > 0$. Но для $k > m$ выражение (2.23) положительно. То есть $K^{k+1}_{i,4m-4k-2} > 0$ для всех $k > m$.

2) $l = 1$ или $l = 3$.

Если $K^{n_i+1}_{i,4m-4n_i-l} = 0$, то из (2.23) получим,что

$$\frac{(4m-8n_i-l)A^{n_i}_{i,-4n_i}}{2(4m-4n_i-l)} =$$

$$= -\frac{(4m-4n_i+2-l)A^{n_i}_{i,4m-4n_i+4-l}}{4(4m-4n_i-l)}\times$$

$$\times(4\varphi_{i,-4} - (4m-4n_i+4-l)(4m-4n_i+3-l)(4m-4n_i+1-l)(4m-4n_i-l)).$$

Но, вычисляя $A^{n_i}_{i,4m-4n_i+4-l}$ рекуррентно с помощью (2.23), получим что выражение, написанное выше, не верно.

Доказательство завершено.

Из леммы 3 нам известно, что $A^{k}_{i,-4k} = 0$ для всех $k \geqslant n_i + 1$. То есть при $k \geqslant n_i + 1$ имеем

$$K^{k+1}_{i,4m-4k-l} =$$

$$= \frac{(4m-4k+2-l)K^{k}_{i,4m-4k+4-l}}{4(4m-4k-l)}\times$$

$$(4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l)) \neq 0$$

Таким образом, если существует такое g, что $f_{g+1} = 0$, то для некоторого k

коэффициент $A^{k+1}_{i,4m-4k-l} = \varphi_{i,4m-l} K^k_{i,4m-4k-l} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{i,4m-l} = 0.$

Далее предположим, что $g > n_i$. Имеем

$$f_1 = \frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,0}}{2} + C_1 + \sum_{t=1}^{t=m-1} \frac{\varphi_{i,4t}(x-a_i)^{4t}}{2} + \frac{\varphi_{i,4m-l}(x-a_i)^{4m-l}}{2} + ...,$$

где $m \geqslant n_i + 1$. Видим, что

$$f_k = \sum_{t=-k}^{t=m-k} A^k_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + A^k_{i,4m-4k+4-l}(x-a_i)^{4m-4k+4-l} + ...$$

Если $k > n_i$, то

$$K^{k+1}_{i,4m-4k-l} =$$
$$\frac{(4m-4k+2-l)K^k_{i,4m-4k+4-l}}{4(4m-4k-l)} \times$$
$$(4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l)).$$

То есть мы получили, что $K^{k+1}_{i,4m-4k-l} \neq 0$ для $l = 1, 3$ и $k > n_i$ так как

$$4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l)) \neq 0,$$

Если $k = m > n_i$ и $l = 2$, то $K^{m+1}_{i,-2} = 0$ из-за множителя $(4m-4k+2-l)$. Но если L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то найдется такое $k \leqslant g+1$, что $A^k_{i,4m-4k+3} = A^k_{i,4m-4k+1} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{i,4m-1} = \varphi_{i,4m-3} = 0.$

Теорема 2.5 доказана.

Доказательство следствий и примеров

Мы знаем, что

$$f_2 = \frac{3(\varphi_{i,-4} - 280)\varphi_{i,-4}}{8(x-a_i)^8} + \frac{\varphi_{i,-4}(3\varphi_{i,0} + \widetilde{C}_1)}{4(x-a_i)^4} + \widetilde{C}_2 + O((x-a_i)),$$

где $\widetilde{C}_i$– константы и зависят от C_i. Также $A^{n_i+1}_{i,-4(n_i+1)} = 0$ и следовательно

$$f_{n_i+1} = \sum_{t=n_i}^{t=1} \frac{A^{n_i+1}_{i,-4t}}{(x-a_i)^{4t}} + \widetilde{C}_{n_i+1} + O((x-a_i)).$$

Мы должны выбрать константы $C_1, ...C_g$, чтобы главная часть ряда Лорана функции f_{n_i+1} оказалась равна нулю. Но это всегда возможно так как $A^{n_i+1}_{i,-4n_i}$ линейно зависит C_1, $A^{n_i+1}_{i,-4n_i+4}$ линейно зависит от C_1 и C_2, $A^{n_i+1}_{i,-4n_i+8}$ зависит от C_1, C_2, C_3, $A^{n_i+1}_{i,-4}$ зависит от $C_1, ..., C_{n_i}$. Но известно, что только постоянная функция может быть голоморфной и быть ограниченной на $\mathbb{C}$. Следовательно, $f'_{n_i+1} \equiv 0$.

Следствия 2.6 и 2.7 доказаны.

Если мы возьмем $C_1 = -42g_2$, то получим пример 2.8.

Гипотеза.

Рассмотрим f_k, где $k \geqslant n_i+1$. Допустим, что $u(x)$ имеет m полюсов в фундаментальном параллелограмме, в ленте периодов или на комплексной плоскости. Пусть $S = \sum\limits_{i=1}^{i=m} n_i + 1$. Если $\varphi_{i,4k-l} = 0$, $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, где $k = 0, ..., n_i$ и $r = n_i + 1, ..., S$. Из леммы 3 видно, что степень полюса в точке a_i не превосходит n_i для всех k . Но $A^k_{i,-4n_i}$ линейно зависит от $C_1, ..., C_{k-n_i}$, $A^k_{i,-4n_i+4}$ линейно зависит от $C_1, ..., C_{k-n_i+1}$, $A^k_{i,-4}$ линейно зависит от $C_1, ..., C_k$. Мы должны выбрать константы таким образом, чтобы обратить в нуль $S-1$ выражений и у нас есть S переменных. Скорее всего данная система всегда имеет решения, но это пока не доказано.

Доказательство теоремы 2.9

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n w(x)}{dx^n} + \widetilde{P}_1(x)\frac{d^{n-1}w(x)}{dx^{n-1}} + ... + \widetilde{P}_{n-1}(x)\frac{dw(x)}{dx} + \widetilde{P}_n(x)w(x) = 0. \qquad (2.24)$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что (см. [32] глава 16) если $w(x)$ имеет особенность в точке a, то $P_i(x)$ имеет особенность в точке a для некоторого i. Особенность называется регулярной если функция P_k имеет полюс порядка не более чем k для всех k. Без потери общности будем считать, что $a = 0$ и мы можем переписать (2.24) в следующем виде:

$$x^n \frac{d^n w(x)}{dx^n} + x^{n-1} P_1(x) \frac{d^{n-1} w(x)}{dx^{n-1}} + ... + x P_{n-1}(x) \frac{dw(x)}{dx} + P_n(x) w(x) = 0,$$

где коэффициенты $P_i(x)$ не имеют полюса в точке a. Решения в окрестности регулярной особой точки имеют вид (см. [32] глава 16)

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\sigma}. \tag{2.25}$$

Обозначим через L оператор $x^n \frac{d^n w(x)}{dx^n} + x^{n-1} P_1(x) \frac{d^{n-1} w(x)}{dx^{n-1}} + ... + x P_{n-1}(x) \frac{dw(x)}{dx} + P_n(x) w(x) = 0$ и

$[\sigma + m]_n = (\sigma + m)(\sigma + m - 1)...(\sigma + n - m + 1)$. Имеем

$$Lw = L(\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\sigma}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\sigma} f(x, m + \sigma),$$

где $f(x, m + \sigma) = [\sigma + m]_n + P_1(x)[\sigma + m]_{n-1} + [\sigma + m]_1 P_{n-1}(x) + P_n(x) = \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(m + \sigma) x^\lambda$. Если $Lw = 0$, то

$c_0 f_0(\sigma) = 0$

$c_1 f_0(\sigma + 1) + c_0 f_1(\sigma) = 0$

....

$c_m f_0(\sigma + m) + c_{m-1} f_1(\sigma + m - 1) + ... + c_0 f_m(\sigma) = 0.$

Так как $c_0 \neq 0$, то мы имеем

$$f_0(\sigma) = [\sigma]_n + [\sigma]_{n-1} P_1(0) + ... + [\sigma]_1 P_{n-1}(0) + P_n(0) = 0. \tag{2.26}$$

Пусть σ–(2.26). Если $f_0(\sigma + m) \neq 0$, где m–целое число, то можно вычислить константы c_m по следующим формулам (см. [32] глава 16)

$$c_m = \frac{(-1)^m c_0 F_m(\sigma)}{f_0(\sigma+1)f_0(\sigma+2)...f_0(\sigma+m)},$$

где

$$F_m(\sigma) = \begin{vmatrix} f_1(\sigma+m-1), & f_2(\sigma+m-2), & ..., & f_{m-1}(\sigma+1), & f_m(\sigma) \\ f_0(\sigma+m-1), & f_1(\sigma+m-2), & ..., & f_{m-2}(\sigma+1), & f_{m-1}(\sigma) \\ 0, & f_0(\sigma+m-2), & ..., & f_{m-3}(\sigma+1), & f_{m-2}(\sigma) \\ ...... & ...... & ..., & ...., & ...... \\ 0, & 0, & ..., & f_0(\sigma+1), & f_1(\sigma) \end{vmatrix}$$

То есть, если σ_i, σ_j являются корнями $f_0(\sigma) = 0$ и $\sigma_i - \sigma_j$ – не целое число для любого $i \neq j$, то все решения (2.24) имеют вид $x^\sigma g(x)$, где $g(x)$–голоморфная функция. Если для некоторых i, j число $\sigma_i - \sigma_j \in \mathbb{Z}$, то решения могут иметь вид $g_0(x)ln^k x + g_1(x)ln^{k-1}x + ... + g_k(x)$, где $g_i(x)$ могут быть равны нулю.

Рассмотрим оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$. Мы доказали, что если L_4 коммутирует с неким оператором порядка $4g+2$, то $u(x)$ может иметь полюса только четвертого порядка и $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$. Это значит, что собственные функции L_4 имеют регулярные особенности. Решения (2.26) имеют вид

$\sigma_{i,1} = \frac{1}{2}(1 - 4n_i - \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$

$\sigma_{i,2} = \frac{1}{2}(1 - 4n_i + \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$

$\sigma_{i,3} = \frac{1}{2}(5 + 4n_i - \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$

$\sigma_{i,4} = \frac{1}{2}(5 + 4n_i + \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$.

То есть решения могут иметь логарифмические слагаемые так как $\sigma_{i,3} - \sigma_{i,1} = \sigma_{i,4} - \sigma_{i,2} = 4n_i + 2$. Но мы доказали,что если L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то $\varphi_{4k-l} = 0$, $k = 0, ..., n_i$, $l = 1, 2, 3$. Следовательно, собственные функции в окрестности a_i имеют вид

$$\psi_{i,k}(x) = \alpha_0 x^{\sigma_{i,k}} + \alpha_4 x^{\sigma_{i,k}+4} + ... + \alpha_{4n_i} x^{\sigma_{i,k}+4n_i} + \alpha_{4n_i+1} x^{\sigma_{i,k}+4n_i+1} + \alpha_{4n_i+2} x^{\sigma_{i,k}+4n_i+2} + ...$$

Легко проверить,что мы можем явно найти все коэффициенты. То есть логарифмических слагаемых не будет.

Теорема 2.8 доказана.

Заключение

В этом разделе мы опишем возможные обобщения полученных в работе результатов и направления дальнейших исследований.

1. Если проанализировать доказательство теоремы 2.1, 2.2 и 2.3, то можно выдвинуть следующую гипотезу

Гипотеза. *Если оператор*

$$L = (\partial_x^2 + A_n x^n + ... + A_0) + B_{n-2}x^{n-2} + ... + B_0, \quad A_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

коммутирует с оператором M порядка $4g+2$, $g > 1$, то $n \leqslant 6$.

При попытке построить оператор M мы получим систему алгебраических уравнений, где уравнений намного больше чем переменных. Из этих систем видно, что они наверняка не имеют решений.

2. Было бы интересно узнать каким спектральным кривым соответствуют коммутирующие операторы с полиномиальными или рациональными коэффициентами. На данный момент известно, что любая эллиптическая кривая вида

$$w^2 = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

является спектральной кривой пары коммутирующих операторов ранга 2 с полиномиальными или рациональными коэффициентами. Также известно, что любая гиперэллиптическая кривая вида

$$w^2 = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

является спектральной кривой пары операторов ранга 2 с рациональными коэффициентами.

3. Необходимо найти эффективные методы поиска несамосопряженных операторов ранга 2.

Литература

Список литературы

[1] Wallenberg G. Uber die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrucke //Arch. Math. Phys. 4 (1903), 252–268.

[2] Schur J. Uber vertauschbare lineare Differentialausdrucke //Sitzungsber. der Berliner Math. Gesell. 4 (1905), 2–8.

[3] Burchnall J. L., Chaundy I. W. Commutative ordinary differential operators //Proc. Royal Soc. London. 1928. Ser. A. V. 118. P. 557—583.

[4] Burchnall J. L., Chaundy I. W. Commutative ordinary differential operators //Proc. Royal Soc. London. 1931. Ser. A. V. 134. P. 471—485.

[5] Кричевер И. М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии //Функц. анализ и его приложения, 11:1 (1977), 15–31.

[6] Кричевер И. М. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов //Функциональный анализ и его приложения, 12:3 (1978), 20–31.

[7] Кричевер И. М. , Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения //УМН, 35:6(216) (1980), 47–68.

[8] Мохов О. И. Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой //УМН, 37:4(226) (1982), 169–170

[9] Мохов О. И. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения //Известия АН СССР. Сер. матем., 53:6 (1989), 1291–1315

[10] Mokhov O. I. On commutative subalgebras of Weyl algebra, which are associated with an elliptic curve //International Conference on Algebra in Memory of A.I. Shirshov (1921-1981). Barnaul, USSR, 20-25 August 1991. Reports on theory of rings, algebras and modules. 1991. P. 85.

[11] Mokhov O. I. On the commutative subalgebras of Weyl algebra, which are generated by the Chebyshev polynomials //Third International Conference on Algebra in Memory of M.I.Kargapolov (1928-1976). Krasnoyarsk, Russia, 23-28 August 1993. Krasnoyarsk: Inoprof, 1993. P. 421.

[12] Mironov A. E. Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra //Inventiones Mathematicae 197, no. 2 (2014), 417–431.

[13] Dixmier J. Sur les algbres de Weyl //Bull. Soc. Math. France 96 (1968), 209-242

[14] Mironov A. E. Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators //American Mathematical Society Translations: Series 2, 234 (2014): 309–322.

[15] Mironov A. E., Zheglov A. B. Commuting Ordinary Differential Operators with Polynomial Coefficients and Automorphisms of the First Weyl Algebra //International Mathematics Research Notices (2015) doi: 10.1093/imrn/rnv218.

[16] Mironov A. E. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2 //Функциональный анализ и его приложения, 39:3 (2005), 91–94.

[17] Миронов А. Е. О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 //Сиб. электрон. матем. изв., 6 (2009), 533–536.

[18] Мохов О. И. О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с ком-

мутирующими операторами произвольного ранга и рода //Матем. заметки, 94:2 (2013), 314–316

[19] Mokhov O. I. Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients //American Mathematical Society Translations, Volume 234 (2014), 323-336.

[20] Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I //Функциональный анализ и его приложения, 12:4 (1978), 41–52.

[21] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия //УМН, 31:1(187) (1976), 55–136.

[22] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса //ТМФ, 23:1 (1975), 51–68.

[23] Belov-Kanel A., Kontsevich M. The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture //Moscow Mathematical Journal 7 (2): 209–218.

[24] Tsuchimoto Y. Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures //Osaka J. Math. 42: 435–452.

[25] Славянов С. Ю., Лай В. //Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей //Невский Диалект, 2002.

[26] Grunbaum F. Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six //Phys. D, 31:3 (1988), 424–433.

[27] Previato E., Wilson G. Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves //Compositio Math. 81:1 (1992), 107-119.

[28] Mumford D. An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation //Korteweg deVries equation and related nonlinear equation. Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), pp. 115–153, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.

[29] Gesztesy F., Unterkofler K., Weikard R. An explicit characterization of Calogero–Moser systems //transactions of the American mathematical society 358, no 2, 603–656.

[30] Weikard R. On commuting matrix differential operators //New York Journal of Mathematics.

[31] Gesztesy F., Weikard R. A characterization of all elliptic algebro-geometric solutions of the AKNS hierarchy //Acta Mathematica, September 1998,181, Issue 1, 63-108.

[32] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения //Харьков: ОНТИ, 1939.

Публикации автора по теме диссертации

[33] Оганесян В. С. Об операторах вида $\partial_x^4 + u(x)$ из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода g //Успехи математических наук, 71:3(429) (2016), 201–202.

[34] Oganesyan V. Explicit characterization of some commuting differential operators of rank 2 //International Mathematics Research Notices (2016), doi:10.1093/imrn/rnw085.

[35] Оганесян В. С. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с

полиномиальными коэффициентами //Функциональный анализ и его приложения, 50:1 (2016), 67–75.

[36] Оганесян В. С. Общие собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 //Математические заметки, 99:2 (2016), 283–287.

[37] Оганесян В. С. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами //Успехи математических наук, 70:1(421) (2015), 179–180.