ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

В.А. Шапошников*

ПРИЗНАВАЛ ЛИ КУН РЕВОЛЮЦИИ В МАТЕМАТИКЕ?

Вышедшая в начале 1960-х гг. книга Томаса Куна «Структура научных революций» вызвала в свое время огромный резонанс в философии науки, да и за ее пределами; отголоски ее влияния можно обнаружить вплоть до самых современных исследований. Сказанное относится также к сфере истории и философии математики, где главным проводником влияния куновских идей оказался *спор о революциях в математике,* возникший в начале 1970-х гг., активно продолжавшийся вплоть до 1990-х гг. и не вполне прекратившийся даже сейчас. В соответствующей литературе почти всегда обходится молчанием вопрос об отношении самого Куна к революциям в математике: он прекрасно знал о происходящем споре, но предпочитал прямо не высказываться по данному вопросу. В статье делается попытка реконструировать позицию Куна и показывается ее неизбежная двусмысленность и переходный характер. В качестве позитивного вклада Куна в спор о революциях в математике выделяется тезис об историческом единстве неформальной математики и естествознания, а также концепция научных революций как радикальных и холистических изменений научной таксономии.

Ключевые слова: философия математики, формальная математика, неформальная математика, соотношение математики и физики.

V.A. Shaposhnikov. Did Kuhn recognize revolutions in mathematics?

Thomas S. Kuhn’s book “The Structure of Scientific Revolutions”, being released in the early 1960s, had in its time a profound impact on the history and philosophy of science and beyond them, while an echo of it can be heard throughout the domain up to the latest publications. It is still true for the subdomain of the history and philosophy of mathematics, where the ideas of Kuhn’s masterpiece peaked in its influence within *the debate on the revolutions in mathematics* that emerged in the early 1970s, continued into 1990s and even now cannot be called quite settled or dead. Nevertheless, the appropriate literature has been mostly passing it over in silence whether Kuhn himself recognized revolutions in mathematics or not. He was aware of the ongoing debate but preferred to avoid

---

* *Шапошников Владислав Алексеевич* — кандидат философских наук, доцент, доцент кафедры философии естественных факультетов философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (119991, Ленинские горы, МГУ, учебно-научный корпус «Шуваловский», г. Москва, Россия), тел.: +7 (495) 939-13-46; *e-mail*: shaposhnikov@philos.msu.ru

expressing his opinion on the subject straight. In this paper, an attempt is made to reconstruct Kuhn's position and bring up the issues of its inevitable ambiguity and transitional character. His emphasis on historical unity between informal mathematics and natural science and his concept of scientific revolutions as radical and holistic taxonomic changes are shown to be his contributions to the debate on the revolutions in mathematics.

Keywords: philosophy of mathematics, formal mathematics, informal mathematics, relationship between mathematics and physics.

Отдельные упоминания о революциях в математике время от времени встречаются начиная с XVIII в. [*I.B. Cohen,* 1985, p. 488–491]. Так, Бернар де Фонтенель утверждал революционный характер математического анализа[1], а Иммануил Кант — древнегреческой геометрии[2]. Уильям Клиффорд в лекции 1873 г. «Постулаты науки о пространстве» сопоставил Николая Лобачевского с Николаем Коперником, поскольку «[к]аждый из них произвел революцию в научных идеях настолько великую, что по своему воздействию их можно сравнить лишь между собой» [*P. Pesic*, 2007, p. 74]. Слова Клиффорда сделали популярным именование Лобачевского «Коперником геометрии» [*Э.Т. Белл*, 1979, с. 218]. Такие математики, как Георг Кантор[3] и Бенуа Мандельброт[4], считали революционными собственные достижения.

С другой стороны, многие ученые и историки были убеждены в чисто кумулятивном характере развития математики, а следовательно,

---

[1] В «Éloge de M. Rolle» (1719) Фонтенель писал, что «новая геометрия бесконечного», представленная Маркизом де Лопиталем в его «Анализе бесконечно малых» (1696), «совершила в мире геометрии несомненную революцию (une révolution bien marquée)» [*B. Fontenelle*, 1767, p. 81–82; *D. Gillies*, 1992, p. 51–52].

[2] В предисловии ко второму изданию «Критики чистого разума» (1787) Кант говорил о переходе от математики догреческой (в особенности древнеегипетской) к греческой (начиная с Фалеса) как о «революции в способе мышления» (die Revolution der Denkart) (B XI). Однако Кант считал, что революция в математике, как и в любой другой области знания, происходит лишь единожды (это момент рождения соответствующей области в качестве подлинной науки), после чего «надежный путь науки проложен и предначертан на все времена и в бесконечную даль», т.е. дальнейшее развитие математики виделось ему строго кумулятивным [*И. Кант*, 2006, с. 10–13].

[3] В письме к Полю Таннери от 8 декабря 1895 г. Г. Кантор говорил о построении им теории трансфинитных чисел как о «самом важном и самом революционном нововведении (wichtigste und revolutionärste Neuerung)» в рамках его теории множеств [*I.B. Cohen*, 1985, p. 491]. На оценке достижений Кантора как революции в математике особенно настаивает Джозеф Даубен [*J.W. Dauben*, 1979, p. 138, 297–299].

[4] Создатель теории фракталов Бенуа Мандельброт с одобрением цитирует отзыв Фримена Дайсона на его книгу о фракталах 1975 г.: «Великая революция идей отделяет классическую математику девятнадцатого века от современной математики века двадцатого» [*Б. Мандельброт*, 2002, с. 16; *F.J. Dyson*, 1978, p. 677; *I.B. Cohen*, 1985, p. 491]. Правда, фрактальная геометрия Мандельброта есть для Дайсона лишь частное проявление этой масштабной революции, полностью освободившей чистую математику от ограничений, налагаемых на нее связью с природой.

в *отсутствии* в математике революций: Жан-Батист Фурье, Герман Ганкель, Клиффорд Трусделл, Карл Б. Бойер и многие другие [*I.B. Cohen*, 1985, p. 489-491; *D. Gillies*, 1992, p. 19]. «В течение девятнадцатого и значительной части двадцатого веков математика рассматривалась как наука, в которой революций не бывает никогда», — констатируют Карен Франсуа и Жан-Поль ван Бендегем [*K. François*, *J.-P.* van *Bendegem*, 2010, p. 109]. Последнее связано, по-видимому, с глубоко укорененным в европейской культуре убеждением в неизменном (вечном) и абсолютном характере математических истин[5]. В XX в. сохранению этого убеждения весьма способствовали влияние аксиоматического подхода Давида Гильберта и популярность структуралистских идей Николя Бурбаки [*L. Corry*, 1997]. Следует отметить также, что многие авторы употребляют слово «революция» в применении к тому или иному событию в истории математики без уточнения его смысла и какой-либо специальной рефлексии по этому поводу (in a colloquial way) [*E. Kenney*, 1990, p. 114, 118]. Они просто желают подчеркнуть *особую важность* определенного события для развития математики, важность, которая вовсе не обязательно подразумевает нарушение кумулятивности. Герберт Мертенс справедливо обращает внимание на методологическую опасность подобного невнятного словоупотребления [*D. Gillies*, 1992, p. 26].

* * *

Спор о революциях в математике[6] возник в начале 1970-х гг. на фоне широкой популярности книги Томаса Куна «Структура научных революций» (первое издание — 1962 г., второе дополненное — 1970 г.). А как сам Кун относился к революциям в математике? Некоторые (почти случайные) упоминания математики в книге Куна [*T.S. Kuhn*, 1970, p. 15, 20, 156, 158, 179] могут быть поняты как указание на то, что его подход применим и к математике, а не только к естествознанию, однако справедливость или ложность этого тезиса так и остались в его знаменитой книге непроясненными[7].

Рассмотрим эти упоминания, если можно так сказать, под увеличительным стеклом. Кун говорит, что в *математике и астрономии* «первые четко определенные парадигмы относятся к доисторической

---

[5] См. по этому поводу мою статью: [*V. Shaposhnikov*, 2016].

[6] Об этом споре см.: [*D. Gillies*, 1992, p. 1–6; *З.А. Сокулер*, 1995, с. 43–56].

[7] При желании, из книги Куна можно было сделать и противоположный вывод: а именно, что он исключил (exempted) математику из сферы действия своего тезиса, согласно которому революции представляют собой неотъемлемую часть научного развития [*T. Tymoczko*, 1986, p. 201]. Эмили Кенни отмечает, что перечень научных революций и их обсуждение у Куна «не включает каких-либо математических примеров», а первое упоминание математики она обнаруживает лишь в самом конце его книги (что, как мы увидим далее, не вполне точно) [*E. Kenney*, 1990, p. 119].

эпохе» [ibid., p. 15], а исследовательские работы перестали быть доступными для понимания просто общеобразованных читателей еще в древности [ibid., p. 20]. Он также неоднократно говорит о *математизированных* в разной степени естественно-научных дисциплинах, разработке связанных с ними *математических* техник и необходимости решать *математические* задачи-головоломки [ibid., p. 12, 23, 26–27, 32–33, 36, 81]. Например, релятивистская механика предполагает не только специфический набор физических законов, но и «определенный логико-математический аппарат» [ibid., p. 101]; вообще включение в дисциплинарную матрицу как можно большего числа «символических обобщений» так важно, поскольку позволяет использовать для решения задач-головоломок «мощные техники логической и математической манипуляции» [ibid., p. 182–183, 188]. Принятие парадигмы, пишет он, задает стандарт, который позволяет отличать «подлинные научные решения» от метафизических спекуляций, игры словами и «математической игры» [ibid., p. 103]. В книге Куна имеется также несколько случаев различения и мягкого противопоставления естествознания и математики [ibid., p. 123, 156].

Особый интерес среди таких упоминаний представляет сравнение Куном споров, связанных с выбором теории в естествознании и споров вокруг процедуры логического или математического доказательства [ibid., p. 199–200]. Вот что Кун говорит дословно о разрешении споров в логике и математике (отметим, что этот текст взят из «Дополнения 1969 года», т.е. был добавлен лишь во втором издании книги): «[П]осылки и правила вывода (premises and rules of inference) оговариваются (are stipulated) с самого начала. Если имеется разногласие в отношении заключений (conclusions), стороны назревающего спора имеют возможность проследить шаги в обратном порядке один за другим, проверяя каждый из них на предмет соответствия принятым ранее договоренностям (against prior stipulation). В конце этого процесса та или другая из сторон должна признать, что она допустила ошибку, нарушив принятое до того правило (a previously accepted rule). После такого признания отступать больше некуда, и доказательство, предложенное оппонентом, признается убедительным. Только в случае, когда обе стороны обнаруживают вместо этого, что они расходятся в вопросе о значении или способе применения оговоренных заранее правил (the meaning or application of stipulated rules) и что их предварительная договоренность не обеспечивает достаточного основания для доказательства (their prior agreement provides no sufficient basis for proof), спор все-таки продолжается в той форме, которую он неизбежно принимает в период научной революции. Это спор о предпосылках, и он ведет вспять к той процедуре убеждения, которая предшествует самой возможности проведения доказательства (That debate is about premises, and its recourse is to persuasion as a prelude to the possibility of proof)» [ibid., p. 199][8]. В противоположность этому, продолжает Кун, в случае спора вокруг выбора естественно-научной теории «не существует нейтрального алгоритма для выбора теории, нет систематической процедуры принятия решения, которая, будучи должным образом примененной, должна приводить каждого индивида из данной группы к одному и тому же решению» [ibid., p. 200].

Что приведенные упоминания могут нам сказать о куновском понимании математики? На мой взгляд, в них отчетливо просматривается *противопоставление.* Это противопоставление *формальной* математики (неизменно выступающей в этом смысле в паре с логикой!), которая есть «набор техник манипуляции», «математическая игра», и математики *содержательной* или *неформальной*, которая есть органическая часть естествознания. Внимательное чтение opus magnum Куна наводит на мысль, что разрабатываемый им понятийный инструментарий («смена парадигм», «несоизмеримость», «революции») применим, по мнению автора, к содержательной математике и не применим к математике формальной, в которой господствует «нейтральный алгоритм», не оставляющий места для спора о предпосылках.

Насколько оправдано переносить такой вывод, сделанный исключительно на основе упоминаний математики в «Структуре на-

---

[8] Приведенный фрагмент не до конца прозрачен по своему смыслу; ср. стандартный русский перевод И.З. Налетова [*Т. Кун*, 1977, с. 259–260]. Означают ли последние два предложения, что в логике и математике все-таки возможны, пусть и в редких случаях, споры, подобные тем, что происходят в естествознании в период научных революций? И если «да», то можно ли истолковать это место как свидетельство в пользу того, что Кун все-таки признавал возможность революций в логике и математике? Почти идентичный текст Куна появился одновременно с обсуждаемым фрагментом в другом издании [*I. Lakatos*, *A. Musgrave*, 1970, p. 260–261; *T.S. Kuhn*, 2000, p. 156; *Т. Кун*, 2014, с. 217–218], но и он не устраняет в полной мере имеющуюся здесь неясность. Незадолго до смерти, в интервью 1995 г., Кун вновь повторил, как я полагаю, главную мысль этого фрагмента. Причем здесь она выражена куда яснее. В логике и математике, в отличие от физики, нет необходимости соглашаться в отношении аксиом. Конкретные аксиомы и определения прямо объявляются; важно не то, какие они, а насколько последовательно и безошибочно ты их применяешь. В физике все по-другому: здесь изменить аксиомы и определения означает изменить саму природу области исследования [*T.S. Kuhn*, 2000, p. 298; *Т. Кун*, 2014, с. 400]. Если смотреть на указанное место из интервью 1995 г. как на попытку выразить ту же самую мысль, то исходный текст из «Дополнения 1969 г.», скорее всего, не следует понимать как свидетельство в пользу возможности революций в математике и логике. Речь, по-видимому, идет о том, что переход к спору по поводу предпосылок знаменует выход за пределы формальной логики и математики и переход в содержательную область, для которой провести четкую границу между математикой и физическими науками уже становится затруднительным. Развитие и обоснование этой мысли см. далее по тексту настоящей статьи.

учных революций», на понимание Куном математики вообще? Может ли это понимание быть дополнено и уточнено на основе обращения к другим его текстам? К этому вопросу мы теперь и обратимся.

* * *

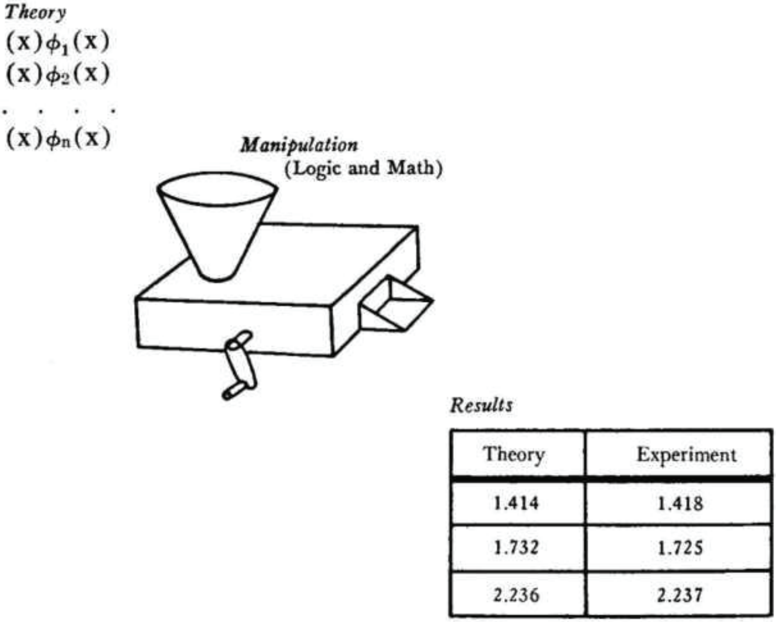
Стоит напомнить, что Кун был *физиком* по образованию и специально занимался историей именно *физических* наук, включавших, в его представлении, также астрономию и химию. Так, в 1957 г. он выпустил книгу «Коперниканская революция», в основе которой лежали лекции, посвященные демонстрации того, как ядро научной революции — трансформация математической астрономии — было вплетено в более широкую и плюралистическую «ткань» интеллектуальной истории (the fabric of thought)[9], включавшую изменение средневекового прочтения аристотелевской физики и космологии, а также смену философских и религиозных представлений [*T.S. Kuhn*, 1957], а в 1978 г. — книгу «Теория черного тела и квантовая прерывность, 1894–1912», посвященную новому прочтению истории появления квантовой теории, главным образом, соответствующим работам Макса Планка и их восприятию [*T.S. Kuhn*, 1987]. Есть основание подозревать, что *математика интересовала Куна исключительно в контексте развития физики.*

Кроме того, в годы формирования его концепции развития науки все еще доминировал тот взгляд на математику и ее соотношение с физикой, который был сформулирован в рамках логического позитивизма. Этот взгляд настаивал на объединении математики и логики как чисто *формальных* наук и на четком отделении их от естествознания как относящегося к «фактуальным» наукам. Математические теории предстают при этом как теоретические «устройства», не имеющие собственного фактуального содержания, однако позволяющие эффективным образом преобразовывать одни фактуальные высказывания в другие, фактуальные же, высказывания. Карл Гемпель образно выразил эту мысль, сравнив математику с «теоретической соковыжималкой (a theoretical juice extractor)»: «...математические и логические техники не способны произвести “сока” (фактической информации) больше, чем содержится в тех предварительных допущениях, к которым они применяются; однако они способны произвести намного больше такого “сока”, чем можно было бы предсказать на основе первоначального интуитивного обследования тех допущений, которые образуют сырой материал для этой “выжималки”» [*C.G. Hempel*, 1945, p. 554].

---

[9] Т. Кун характеризовал позднее самого себя как «историка идей (an historian of ideas)» [*T.S. Kuhn*, 1987, p. 370].

Очень похожее представление, даже снабженное специальной иллюстрацией (рисунок), изображающей соответствующий «прибор», который осуществляет логические и математические «манипуляции», Кун использует в статье «Функция измерения в современной физической науке» (1961) [*T.S. Kuhn*, 1977, p. 181]. Хотя в целом этот рисунок, по намерению Куна, иллюстрирует критикуемое им в дальнейшем представление о роли измерения в физических науках, эта критика, как увидим, не затрагивает, однако, собственно «манипуляционной» концепции математики.



Theory	Experiment
1.414	1.418
1.732	1.725
2.236	2.237

Стандартное представление о роли математики в физических науках, таких как физика, химия и астрономия [*T.S. Kuhn*, 1977, p. 181]

Например, Кун ставит под вопрос представление о том, что основная функция измерения в физических науках состоит в подтверждении. Согласно стандартному представлению, теоретические положения, изображенные в левом верхнем углу рисунка, вместе с определенными начальными условиями загружаются в воронку, расположенную наверху логико-математической машинки (центр рисунка), затем вращают рукоятку, что отвечает логическим и математическим операциям, выполняемым «внутренним образом (internally)», и наконец, из лотка вынимают выраженные численно предсказания, которые размещают в левом столбце таблицы результатов, находящейся на рисунке в правом нижнем углу для сравнения с представленными в правом столбце соответствующими экспериментальными данными [ibid., p. 181–183].

Так, утверждает Кун, выглядит ситуация в соответствии с образом науки, почерпнутым из учебников, только вот повседневная научная практика его не подтверждает. Таблицы типа той, что представлена в правом нижнему углу рисунка (или выполняющие аналогичную функцию графики), служат на деле не столько для «подтверждения» теорий, сколько для *определения* того, какое согласие теории с экспериментом следует считать в данной области исследований на настоящий момент приемлемым (“reasonable agreement”) [ibid., p. 185].

Правда, постоянно ведущаяся разработка теории[10], подчеркивает Кун, сплошь и рядом бывает направлена как раз на *уменьшение* приемлемого расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами. Такая разработка опирается не только на математическую формулировку основополагающих законов данной научной области, но и на сложные математические манипуляции, которые нередко требуют подлинного математического гения [ibid., p. 190–191]. Причем именно такая минимизация расхождения между теорией и экспериментом делает достаточно разработанную научную теорию «чувствительным индикатором аномалий» [T.S. *Kuhn*, 1970, p. 65]. Например, усилиями математиков такого масштаба, как Эйлер, Лагранж, Лаплас и Гаусс, подход классической механики был теоретически разработан настолько хорошо, что стало возможным обнаружение аномального смещения перигелия Меркурия, которое для своего объяснения потребовало перехода от теории тяготения Ньютона к общей теории относительности Эйнштейна. Кун пишет: «Для всякого, кто видит в математических или манипуляционных задачах-головоломках (mathematical or manipulative puzzles) достойный его вызов, это может быть захватывающей и в высшей степени вознаграждаемой работой. Кроме того, всегда остается отдаленная возможность, что она принесет еще и дополнительную прибыль: ведь что-нибудь может пойти не так» [*T.S. Kuhn*, 1977, p. 192]. Вместо традиционного «подтверждения» теорий на основе эксперимента Кун предлагает говорить о том, что именно подобные «количественные аномалии (qualitative anomalies)» играют решающую роль в *выборе* теорий [ibid., p. 211]. Он, правда, не утверждает, что способность обеспечить меньшее численное расхождение между теорией и экспериментом (который также, кстати, теоретически нагружен) является *единственным* фактором, определяющим победу одной из теорий-

---

[10] Текст обсуждаемой статьи создавался в 1956–1958 гг., в нем Кун уже различает «нормальное» исследование и «экстраординарное», однако еще не использует термин «парадигма» [*T.S. Kuhn*, 1977, p. xvii–xviii].

конкурентов, однако подчеркивает особую значимость именно этого фактора: «Я не знаю ни одного случая в развитии науки, который демонстрировал бы уменьшение количественной точности в результате перехода от более ранней к более поздней теории. Не могу я также вообразить себе спор между учеными, в котором, сколь бы ни был велик накал страстей, поиски более высокой числовой точности в ранее уже ставшей подвластной измерению области (a previously quantified field) были бы названы “ненаучными”» [ibid., p. 212–213].

При желании, несмотря на подчеркнутую осторожность выбираемых автором выражений, только что приведенная цитата может быть понята как косвенное указание на убежденность Куна в *отсутствии революций в математике.* В самом деле, эти слова взяты мной из абзаца, завершающего раздел статьи, посвященный роли измерения в ситуации «экстраординарного» научного исследования, т.е. ситуации научной революции, если использовать позднейшую терминологию Куна. Упомянутые в обсуждаемой цитате обвинения в «ненаучности» отсылают к обсуждаемым им чуть выше по тексту спорам вокруг революционных достижений И. Ньютона и А.Л. Лавуазье. В таком контексте естественным будет заключить, что сказанное автором подразумевает следующее: 1) невозможность (даже в период научной революции!) споров о *ценности* более высокой числовой точности; 2) явную *соизмеримость* разделенных революционным спором теорий в этом их числовом аспекте, которая позволяет говорить о наличии *прогресса* в развитии науки, по крайней мере, в этом отношении; 3) наконец, вытекающую из предыдущих пунктов *соизмеримость*, а возможно, и *прогрессивность* самих правил логико-математических манипуляций, которые скрываются за всяким количественным сопоставлением экспериментальных результатов с выводами теории. Впрочем, это лишь домыслы. В позднейших текстах Куна мне не удалось обнаружить однозначных свидетельств в пользу непризнания им революций в математике.

Завершая рассмотрение статьи 1961 г., отметим, что хотя несколько карикатурный образ логико-математической машинки уже не используется Куном при переходе к формулировке собственной позиции, однако отождествление математического с «манипуляционным», т.е., по всей видимости, чисто формальным, сохраняется, указывая на прочное преемство от традиции логического позитивизма, по крайней мере, коль скоро речь идет о математике. И все же демонстрируемое Куном представление о характере отношений между математикой и физикой уже не вполне укладывается в рамки позитивистского взгляда, и виновато в этом решающее внимание нашего автора к *историческому измерению* науки, что, надеюсь, станет очевидным из дальнейшего обсуждения.

* * *

В 1970 г. под редакцией Имре Лакатоша вышел знаменитый сборник «Критицизм и рост знания», посвященный разбору и критике идей Куна. Он представляет собой четвертый том материалов по итогам коллоквиума в Лондоне 1965 г., который открывается докладом Куна на этом коллоквиуме и завершается написанным им в 1969 г. ответом на критику. В этих текстах мы так же, как и в «Структуре научных революций», видим, что Кун, безусловно, не склонен отрывать «неформальную» математику от естествознания и тем более противопоставлять их. Этого нельзя, впрочем, с той же уверенностью повторить о логике и формальной математике [*I. Lakatos*, *A. Musgrave*, 1970, p. 6, 13–14, 252, 254, 260–261]. В отличие от Куна, Лакатош понимает математику как «квазиэмпирическое» исследование и куда решительнее сближает ее с естествознанием, включая и то и другое в свою концепцию научно-исследовательских программ [ibid., p. 137, 143, 147, 176]. По свидетельству ученика Лакатоша Дональда Джиллиса [*D. Gillies*, 1992, p. viii], после выхода названного сборника 1970 г. и непосредственно перед своей внезапной смертью в 1974 г. Лакатош планировал осуществить ревизию идей Куна именно в контексте их применимости к математике.

Отметим также, что Лакатош одним из первых начал явственно говорить о революциях в математике [*I. Lakatos*, 1977, p. 6, 39–40, 49, 52, 55–56, 83, 87, 90, 96–98, 104, 125, 137, 139, 151], причем именно в связи с его попыткой решительно переключить внимание философов с проблем математических формализмов на механизмы исторического развития неформальной математики. Речь идет о его знаменитой книге «Доказательства и опровержения», по свидетельству автора, написанной в 1958–1959 гг., вошедшей в состав его диссертации 1961 г. и опубликованной в журнале в 1963–1964 гг. [ibid., p. xii]. Например, обсуждение взлета и падения научных теорий, на примере геометрии Евклида и механики Ньютона, он завершает следующим примечательным комментарием: «Аналогия между политическими идеологиями и научными теориями простирается куда дальше, чем обычно осознают: политические идеологии, которые поначалу могут оспариваться (и, возможно, приниматься только под давлением), могут превращаться в не вызывающее вопросов фоновое знание (background knowledge) уже на протяжении жизни одного поколения: критики забыты (а возможно, и казнены) до тех пор, пока революция не восстановит в правах их возражения» [ibid., p. 49]. Как это напоминает куновские хрестоматийные положения из создававшейся в те же годы «Структуры научных революций»! Книга Лакатоша была подлинным обращением к истории математики с философскими целями, хотя у него «рационально реконструированная или “дистиллированная" история» [ibid., p. 5] и вытесняет реальную историю из основного текста, так что обрывки этой реальной истории вынуждены ютиться в примечаниях.

В докладе Куна на коллоквиуме 1965 г. «Логика открытия или психология исследования», который был посвящен критическому анализу концепции развитии науки Карла Поппера, а также их согласиям и разногласиям, имеется одно весьма примечательное для нашей темы место, на которое, по-видимому, можно смотреть как на более раннюю версию изложения той же мысли, что и в обсуждавшемся выше фрагменте из «Добавления 1969 г.» к «Структуре научных революций» (одновременно почти дословно представленном в том же сборнике 1970 г. в разделе «Размышления о моих критиках») [*T.S. Kuhn*, 1970, p. 199–200; *I. Lakatos*, *A. Musgrave*, 1970, p. 260–261]. В силу его важности, приведу соответствующий текст Куна полностью: «Однако сэр Карл [Поппер] описывает как "фальсификацию" и "опровержение" то, что случается, когда попытка применить теорию проваливается, и это первые в ряду взаимосвязанных оборотов речи, которые вновь поражают меня крайней своей странностью. Как "фальсификация", так и "опровержение" являются антонимами "доказательства". Они заимствованы преимущественно из логики и формальной математики; цепочки аргументов, к которым они применяются, завершаются пометкой "Q.E.D."[11]; применение этих терминов предполагает способность принудить к согласию всякого члена соответствующего профессионального сообщества. Никого из моих нынешних слушателей более не нужно убеждать, что когда целая теория или часто даже один научный закон оказывается поставлен под вопрос, аргументы редко бывают столь неопровержимыми (apodictic). Все эксперименты могут быть поставлены под сомнение, будь то в плане их значимости или точности. Все теории могут быть модифицированы с помощью разнообразных поправок ad hoc, не переставая быть, в главном, все теми же теориями. Более того, важно, что это и должно быть так, поскольку часто именно через постановку под сомнение экспериментов и введение поправок к теориям научное знание осуществляет свой рост. Постановка под сомнение (challenges) и поправки (adjustments) являются стандартной частью нормального исследования в эмпирической науке, и поправки, по крайней мере, играют также решающую роль (a dominant role) в неформальной математике. Осуществленный доктором Лакатошем блестящий анализ допустимых возражений в ответ на математические опровержения (the permissible rejoinders to mathematical refutations) дает нам наиболее сильные аргументы, из известных мне, против позиции наивного фальсификационизма» [*I. Lakatos*, *A. Musgrave*, 1970, p. 13–14; *T.S. Kuhn*, 1977, p. 281].

---

[11] То есть "quod erat demonstrandum", «что и требовалось доказать».

Заключительное предложение сопровождается ссылкой на журнальное издание «Доказательств и опровержений». Несмотря на контекст, связанный с критикой попперианского словаря, сходство приведенного текста с фрагментом из «Добавления 1969 г.» разительное. В нем также рядом поставлены две те же самые интеллектуальные интенции: во-первых, противопоставление формальной математики (объединенной с логикой) и эмпирической науки, во-вторых, сближение неформальной математики и эмпирической науки. Причем вторая из них выражена в докладе 1965 г. отчетливее и яснее, чем в текстах 1969 г., что дополнительно подчеркнуто ссылкой на Лакатоша с одобрением его позиции.

* * *

Более детально свое представление о соотношении математики и физики в истории европейской науки Кун высказал уже после выхода в свет сборника 1970 г., а именно в статье «Математическая versus экспериментальная традиции в развитии физической науки» (1976 г., в основе — доклад 1972 г.), часть идей которой, впрочем, можно найти еще в его статье 1961 г., рассмотренной выше.

В статье 1976 г. Кун выделяет и прослеживает две традиции в истории физической науки. Первую из них образуют «классические физические науки» или просто «классические науки», которые составили «естественный кластер» еще в эллинистическую эпоху. Этот кластер включал, согласно Куну, пять дисциплин — астрономию, статику (включая гидростатику), оптику и гармонику, которые были сгруппированы вокруг математики (в узком смысле слова, в которой доминировала геометрия) как своего центра. Есть веские основания рассматривать весь этот кластер как единое целое под общим названием «математика». Кун подчеркивает, что в ту эпоху геометрия, а следовательно, и весь математический кластер воспринимались как «наука о реальных физических величинах». Эта математика была «скорее эмпирической, чем априорной», хотя она лишь в очень малой степени опиралась на утонченную практику наблюдения и еще в меньшей степени на эксперимент [*T.S. Kuhn*, 1977, p. 36–38]. Математическая традиция возникла и успешно развивалась как традиция не экспериментальная, но *теоретическая:* «Для человека, обученного находить геометрию в природе, небольшое число наблюдений, относительно доступных и, по большей части, имеющих качественный характер, — наблюдений теней, зеркал, рычагов и движения звезд и планет — часто обеспечивало достаточный эмпирический базис для разработки мощных теорий» [ibid., p. 38].

Согласно Куну, развитие физических наук от Античности и вплоть до рубежа XVIII–XIX вв. (!) оставалось, главным образом, связанным с трансформацией именно этой математической традиции. Содержание входящих в нее дисциплин и их набор постепенно менялись, однако специфический характер отношений между теоретическим и эмпирическим оставался все тем же. Одной из важнейших новаций стала разработка математической теории движения, динамики. К числу математических дисциплин добавилась также теория вероятностей (о чем, впрочем, Кун не упоминает). С другой стороны, гармоника расщепилась на теорию музыки, которая перестала восприниматься как математическая дисциплина, и акустику (теорию звука), которая получила самостоятельное развитие и заняла место гармоники в составе математических наук. Именно с изменениями в этих классических, «квазиматематических», областях знания связаны главные события научной революции Нового времени [ibid., p. 40–41]. Другими словами, вплоть до XIX в. математика для Куна есть основополагающая часть естествознания. Физики и математики, которые существовали бы *отдельно* друг от друга, в этот исторический период просто нет! Так, например, развитие в Новое время интегрального и дифференциального исчислений было теснейшим образом переплетено с развитием динамики.

Экспериментальная («бэконианская») традиция видится Куну *альтернативной* традицией в развитии физической науки, которая возникает в XVII в. на основе уходящих в Средние века и позднюю Античность практик ремесленных мастерских, фармацевтических и алхимических лабораторий. В ее рамках развиваются новые научные дисциплины: исследования магнетизма, электричества и теплоты, а также химия. В Новое время экспериментальная традиция существует *параллельно* с математической традицией и в значительной степени *независимо* от нее, однако определенной зрелости она достигает лишь ко второй половине XVIII — началу XIX в. Решающим фактором для этого оказывается как усовершенствование инструментов, что позволяло проводить более точные эксперименты, так и приспособление для собственных нужд восходящей еще к Античности корпускулярной теории.

Описанная картина существенно изменяется на протяжении XIX в. Начинается бурное развитие ряда новых высокоабстрактных областей математики, которое приводит к расколу классических наук на «чистую» и «прикладную» математики [ibid., p. 60–61]. Причем чистая математика фактически возникает, согласно этой картине, только в XIX веке! При этом небесная механика, гидродинамика и теория упругости, теория колебаний и пр. вытесняются на периферию в качестве «прикладной математики». Астрономия вообще получает статус самостоятельной науки. В центре же внимания оказывается «чистая математика»: теория чисел, теория функций действительного и комплексного переменного, теория множеств и математическая логика, новые геометрии (неевклидова, проективная, дифференциальная, алгебраическая), абстрактная алгебра и т.д.

С другой стороны, в последней трети XVIII — первой половине XIX в. происходит «вторая научная революция» [12] [*T.S. Kuhn,* 1977, p. 218, 220, 147]. Из «экспериментальной философии» бэконианского типа выделяется и получает самостоятельное развитие химия («химическая революция», работы А.Л. Лавуазье). Что же касается теорий электричества, магнетизма и тепла, то происходит их быстрая и полная математизация [ibid., p. 60–61, 217–220], в результате чего оформляется *классическая математическая физика*, в основном занятая, с математической точки зрения, постановкой и решением краевых задач для определенных типов дифференциальных уравнений в частных производных. В итоге математическая физика и прикладная математика оказываются фактически занятыми одним и тем же кругом задач, что создает прочный мост между физикой и математикой. В результате барьер между классическими (математическими) и «бэконианскими» (экспериментальными) науками становится меньше, но полностью все же не исчезает. Он сохраняется как разделение между теоретиками и экспериментаторами в рамках возникающей именно в этот период *современной физики* [ibid., p. 62–64]. Новая область физики включала механику (в том числе механику сплошных сред), термодинамику и молекулярную физику, электродинамику и оптику, *объединив,* как видим, дисциплины классические и «бэконианские» [13]. Не только математика, но и физика в современном смысле, тем самым, возникает лишь в XIX веке!

При таком взгляде научная революция (от Коперника до Ньютона), вызвавшая к жизни парадигму классической механики, оказывается в равной степени революцией как в физике, так и в математике, а точнее — не в той, и не в другой, поскольку ни физики (в современном смысле), ни математики (в том же современном смысле) в то время еще нет.

---

[12] По-видимому, термин принадлежит Куну. Как отмечает Ян Хакинг, вторая научная революция шла рука об руку с индустриальной революцией. «Это, вероятно, было началом того технонаучного мира, в котором мы живем», — заключает он [*T.S. Kuhn*, 2012, p. xiii]. Сам Кун пишет, что математизация бэконианских наук была лишь одной из сторон второй научной революции, включавшей также «повсеместное увеличение масштабов научной деятельности, значительные изменения в формах организации науки и полную перестройку научного образования» [*T.S. Kuhn*, 1977, p. 220].

[13] В «Структуре научных революций» также есть упоминание о том, что научное сообщество физиков складывается лишь в середине XIX в. в результате слияния частей двух научных сообществ, до того существовавших раздельно, — математиков и натурфилософов [*T.S. Kuhn*, 1970, p. 179].

Заметим также, что предложенное Куном описание трансформации и взаимоотношения математической и экспериментальной традиций в XIX в. ставит во всей остроте ключевые вопросы о реальной степени автономности и характере взаимосвязей математики и физики, «чистой» и «прикладной» математики, а также степени и характере единства математики.

* * *

Вопрос о революциях в математике в рамках подхода Куна оказался весьма запутанным по той причине, что сам смысл слова «математика» исторически весьма изменчив. Так, в Античности греческое слово «математика» выступало в роли зонтичного термина, почти синонимичного нашему слову «наука»: он накрывал, говорит Кун, астрономию, оптику, механику, географию, музыку, а также медицину и философию природы. Даже если мы не всегда готовы признать их в тогдашнем виде наукой, эти отчетливо распознаваемые практики позднее станут одним из главных источников формирования системы наук Нового времени [*T.S. Kuhn*, 2000, p. 116; *Т. Кун*, 2014, с. 163]. В статье 1976 г. он настаивает на том, что характер и степень единства научного предприятия в целом, а также способ разделения его на отдельные дисциплины в разные исторические эпохи могут быть очень и очень различными. Поэтому внимание к «метауровню» конкретной науки (например, математики или какого-то ее раздела) и его изменению в истории принципиально важно, хотя и представляет собой весьма сложную задачу. «Отношения между метанаучным окружением (the metascientific environment), с одной стороны, и развитием конкретных научных теорий и экспериментов, с другой, оказались непрямыми, неясными и спорными» [*T.S. Kuhn*, 1977, p. 33]. Поэтому и прояснение естественного для избранной эпохи способа разделения на дисциплины и соотношения между ними приобретает роль необходимого условия понимания того, что происходит «внутри» конкретной дисциплины. «Подобные исследования способны постепенно дать в наши руки карту, представляющую сложное строение научных исследований в избранный период, а некоторая карта такого типа есть предварительное условие исследования сложного воздействия метанаучных факторов (the complex effects of metascientific factors), будь то интеллектуальных или социальных, на развитие интересующих нас наук» [ibid., p. 34]. Без учета этих мыслей Куна невозможно получить адекватное представление о его взгляде как на научные революции в целом, так и на революции в математике в частности.

В статье 1976 г., по сути, намечается отличная от находящейся в центре внимания в «Структуре научных революций» концепция *научных революций как радикальных изменений научной таксономии.* Такие революции, как мы видели, вовлекают в себя и математику, поскольку меняют ее состав, границы и место в системе других наук. В общем виде он представляет свой новый взгляд, например, в статье 1987 г. (в основе ее текст 1980–1981 гг.) «Что такое научные революции?» [*T.S. Kuhn*, 2000, p. 28–32; *Т. Кун*, 2014, с. 40–45]. В поздний период Кун пытался рассматривать «несоизмеримость» различных научных картин мира не в терминах смены «парадигм», но смены «лексических таксономий» или, более кратко, «лексиконов» [*T.S. Kuhn,* 2000, p. 91–94; *Т. Кун*, 2014, с. 127–133]. Этот новый подход к развитию науки иногда обозначают как «лингвистический поворот» в философии позднего Куна [*S. Gattei*, 2008, p. 138], постепенное оформление которого можно проследить начиная со статей 1970-х гг. и до незаконченной и так и не изданной последней его книги. Обсуждение этой темы, впрочем, вывело бы нас за пределы тематики настоящей статьи.

На разборе статьи Куна 1976 г. я так подробно остановился, поскольку, на мой взгляд, она проясняет неизбежную *двусмысленность* отношения самого Куна к революциям в математике (возможно, именно поэтому он предпочитал явно не высказываться по данному вопросу). Это отношение все еще напоминает позицию логических позитивистов: он принимает характерное для них четкое разделение *формальной* (неинтерпретированной) математики, которая появляется лишь в XIX в. и в которой революции не происходят, от *содержательной* (интерпретированной) математики, которая есть часть физики и в которой, следовательно, революции происходят. Однако принятие всерьез реальной истории науки (а оно Куну, без сомнения, было свойственно!) неизбежно подталкивает всякого исследователя к переносу внимания с *противопоставления* формального и содержательного в математике на их теснейшую историческую *взаимосвязь*. Но, *как только мы ставим под вопрос саму возможность четко обособить формальную математику от содержательной, мы перестаем понимать*, *происходят ли в математике революции или нет*. Особенно остро такая неясность обнаруживается при обращении к истории *современной математики,* т.е. математики XIX–XX вв. Именно это и продемонстрировал спор о революциях в математике, на фоне возникновения которого шло окончательное оформление статьи Куна 1976 г.[14]

---

[14] Спор о революциях в математике был инициирован статьей Майкла Кроу, представленной в первоначальной версии в августе 1974 г. на симпозиуме в Бостоне. О том, что Кун с самого начала был в курсе развития событий, свидетельствуют, например, слова благодарности в его адрес «за полезные обсуждения», сказанные Кроу в заключительных строчках указанной статьи [*D. Gillies*, 1992, p. 20].

Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что, с точки зрения логического эмпиризма, в математике революций нет и быть не может, а с точки зрения их радикальных оппонентов, революции в математике есть и их не может не быть. Позиция Куна оказывается в этом отношении de facto *промежуточной:* он остается где-то посредине на пути от решительного непризнания революций в математике к их безоговорочному принятию. До конца пути он явно не доходит. Так, например, он не готов принять радикальную позицию сильной программы Дэвида Блура и его эдинбургских коллег, считая необходимым защищать понятия истины и знания от подобных «постмодернистских крайностей (the excesses of postmodernist movements)» [*T.S. Kuhn*, 2000, p. 91; *Т. Кун*, 2014, с. 128]. При этом значимой особенностью позиции Блура является именно безоговорочное признание возможности революций в математике и даже логике. Усиливая аргументы Имре Лакатоша, последний настаивает на «первичности неформального по отношению к формальному», а последнее означает в его устах, что «применение формальных принципов всегда служит возможным поводом для неформальных переговоров» [*D. Bloor*, 1991, p. 133]. Задачу историка математики он видит в том, чтобы показать, как это происходит на деле и в реальной истории, создавая тем самым нечто очень похожее на «куновскую» историю физической науки, с ее чередованием «нормальных» и «революционных» периодов [ibid., p. 152–156].

Когда Дональд Джиллис готовил свою книгу о революциях в математике [*D. Gillies*, 1992], он попросил Томаса Куна написать к ней предисловие. Кун отказался. В ответном письме Джиллису (от 2 апреля 1990 г.), обосновывая свой отказ, он сообщал, что *никогда не занимался вопросом о революциях в математике,* но «убежден, что имеются тонкие, но важные отличия математики и естественных наук в отношении той схемы развития, которая намечена в "Структуре", и что работа над ними (этими отличиями) могла бы прояснить природу обеих». Кун также писал в нем, что главный источник их с Лакатошом расхождений в представлениях о развитии науки и предпочитаемой терминологии имеет своим истоком различие в базовом образовании (теоретическая физика, в случае Куна, и математика, в случае Лакатоша) [*S. Gattei*, 2008, p. 191]. Возможно, Кун и в самом деле счел себя недостаточно компетентным в данном вопросе, а воз-

---

Осуществленная мною выше реконструкция взглядов Куна на революции в математике представляет собой лишь первую часть более обширного исследования, посвященного спору о революциях в математике 1970–1990-х гг., его результатам, исторической роли, а также влиянию и способу присутствия в современной философии математической практики, результаты которого я планирую опубликовать в виде серии статей.

можно, просто не пожелал участвовать в обсуждении темы, столь «опасной» для судьбы научной рациональности.

В связи со всем сказанным выше представляется справедливым следующий вывод, сделанный Томасом Никлсом: «В ретроспективе, как отмечают многие комментаторы, мы можем смотреть на Куна в его рассуждениях о научных революциях как на переходную фигуру в большей степени, чем он сам был в состоянии осознать в то время, обязанную концепциям логики, языка и значения логического эмпиризма, но одновременно резко расходящуюся в других отношениях с представителями логического эмпиризма и Поппером» [*T. Nickles*, 2017, sec. 6.4].

Подводя итог, можно сказать, что Кун, с одной стороны, так и не отказался в полной мере от позитивистских представлений о природе математики как чисто формальной дисциплины, с другой же стороны, его интерес и внимание к реальной истории науки неизбежно подталкивали его к учету исторически изменчивых и сложных взаимоотношений неформальной математики и наук физических. На этом последнем пути он испытывал определенные симпатии к антиформалистской и эмпирицистской философии математики Лакатоша, de facto придерживался тезиса об историческом единстве неформальной математики и естествознания и разрабатывал концепцию радикальных исторических изменений научной таксономии, включающих в себя и радикальные изменения облика математики. Эти последние его разработки открывают возможность для разговора о вполне конкретном вкладе Куна в спор о революциях в математике, вопреки его подчеркнутому молчанию по данному вопросу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Белл Э.Т. Творцы математики. М., 1979 (*Bell E.T.* Men of Mathematics. N.Y., 1937).

Кант И. Критика чистого разума. 2-е изд. (B) / Под ред. Н. Мотрошиловой, Т. Длугач, Б. Тушлинга, У. Фогеля // Кант И. Сочинения на немецком и русском языках. М., 2006. Т. 2. Ч. 1.

Кун Т. Структура научных революций. 2-е изд. М., 1977 (*Kuhn T.S.* The structure of scientific revolutions. 2 ed. enl. Chicago, 1970).

Кун Т. После «Структуры научных революций». М., 2014 (*Kuhn T.S.* The road since “Structure”. Chicago, 2000).

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., 2002 (*Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature: Updated and augmented. N.Y., 1983).

Сокулер З.А. Зарубежные исследования по философским проблемам математики 90-х гг.: Научно-аналитический обзор. М., 1995.

Bloor D. Knowledge and social imagery. 2 ed. Chicago, 1991.

Cohen I.B. Revolution in science. Cambridge, MA, 1985.

Corry L. The origins of eternal truth in modern mathematics: Hilbert to Bourbaki and beyond // Science in Context. Summer 1997. Vol. 10, N 2. P. 253–296.

Dauben J.W. Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite. Cambridge, MA, 1979.

Dyson FJ. Characterizing irregularity. Rev. of: Fractals. Form, chance, and dimension by Benoit B. Mandelbrot / Transl. and revision of French ed. (P., 1975). Freeman; San Francisco, 1977 // Science. New Series. May 12, 1978. Vol. 200. N 4342. P 677–678.

Fontenelle B. Oeuvres de Monsieur de Fontenelle. Nouvelle ed. P, 1767. T. 6.

François K., *Bendegem J.P.* van. Revolutions in mathematics. More than thirty years after Crowe's "Ten Laws": A new interpretation // Löwe B., Müller T. (eds). PhiMSAMP Philosophy of mathematics: Sociological aspects and mathematical practice. L., 2010. P. 107–120.

Gattei S. Thomas Kuhn's "Linguistic turn" and the legacy of logical empiricism: Incommensurability, rationality and the search for truth. Aldershot, 2008.

Gillies D. (ed.). Revolutions in mathematics. N.Y., 1992.

Hempel C.G. On the nature of mathematical truth // The American Mathematical Monthly. Dec. 1945. Vol. 52. N 10. P. 543–556.

Kenney E. On the possibility of mathematical revolutions // Philosophia Mathematica. 2 Series. Feb. 1990. Vol. 5. N 1/2. P. 114–123.

Kuhn T.S. The Copernican revolution: Planetary astronomy in the development of Western thought. Cambridge, MA, 1957.

Kuhn T.S. The structure of scientific revolutions. 2 ed. enl. Chicago, 1970.

Kuhn T.S. The essential tension: Selected studies in scientific tradition and change. Chicago, 1977.

Kuhn T.S. Black-body theory and the Quantum Discontinuity, 1894-1912. With a new afterword. Chicago, 1987.

Kuhn T.S. The road since "Structure": Philosophical essays, 1970–1993. With an autobiographical interview. Chicago, 2000.

Kuhn T.S. The structure of scientific revolutions. 50th anniversary (Fourth) ed. With an introductory essay by I. Hacking, Chicago, 2012.

Lakatos I., Musgrave A. (eds). Criticism and the growth of knowledge. Cambridge, 1970.

Lakatos I. Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge, 1977.

Nickles T. Scientific revolutions. 2009 (substantive revision 2017) // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Ed. by E.N. Zalta // URL: https://plato.stanford.edu/entries/scientific-revolutions/

Pesic P. (ed.) Beyond geometry: Classic papers from Riemann to Einstein. Mineola, N.Y., 2007.

Shaposhnikov V. Theological underpinnings of the modern philosophy of mathematics. Part I: Mathematics absolutized // Studies in logic, grammar and rhetoric. 2016. Vol. 44 (57). P. 31–54.

Tymoczko T. (ed.) New directions in the philosophy of mathematics: An anthology. Boston, MA, 1986.