УДК 517.95

НЕОБХОДИМЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2014 М.О. Мамчуев[1]

В статье исследуется диффузионно-волновое уравнение с производной дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля. Вводятся интегральные операторы с функцией Райта в ядре, связанные с исследуемым уравнением, и исследуются свойства этих операторов. В терминах введенных операторов выписаны необходимые нелокальные условия, связывающие следы решения и его производных на границе прямоугольной области. Используя предельные свойства функции Райта, получены необходимые нелокальные условия для волнового уравнения. С помощью свойств интегральных операторов показана однозначная разрешимость задач с интегральным условием Самарского для диффузионно-волнового и волнового уравнений. Решения получены в явном виде.

Ключевые слова: диффузионно-волновое уравнение, волновое уравнение, уравнения с дробными производными,необходимые нелокальные условия, задача Самарского, производная дробного порядка.

Введение

В области $\Omega = \{(x, y): \ 0 < x < l, \ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D^{\alpha}_{0y} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 2$, D^{γ}_{0t} – оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка γ [1, с. 9],

Уравнения с производными дробного порядка возникают в математических моделях, описывающих различные процессы в средах с фрактальной геометрией (см., например [1, гл. 5]).

Уравнение (1) исследовалось в работах многих авторов. Более подробную библиографию по этому вопросу можно найти в монографии [2] и работе [3].

В работе [4] для уравнения (1) было выписано фундаментальное решение $\Gamma(x - t, y - s)$, где

$$\Gamma(x, y) = \frac{y^{\beta-1}}{2} e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x|}{y^{\beta}}\right), \tag{2}$$

$\beta = \alpha/2$, $e^{1,\beta}_{1,\beta}(z)$ – функция Райта.

[1]Мамчуев Мурат Османович (mamchuev@rambler.ru), отдел Математической физики фракталов Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а.

Пусть $n \in \{1,2\}$ выбрано из условия $n-1<\alpha\leqslant n$. *Регулярным решением уравнения* (1) в области Ω называется функция $u=u(x,y)$ из класса $D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y)\in \in C(\bar\Omega)$, $1\leqslant k\leqslant n$, $u_{xx}(x,y)$, $D_{0y}^{\alpha}u(x,y)\in C(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (1) во всех точках $(x,y)\in\Omega$ [2, с. 103].

1. Интегральные операторы, связанные с диффузионно-волновым уравнением

Введем в рассмотрение операторы $\mathcal{N}_{x_1x_2}^{\theta,x,y}$ и $\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}$, которые действуют по формулам

$$\mathcal{N}_{x_1x_2}^{\theta,x,y}\nu(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\nu(t)y^{\theta-1}e_{1,\beta}^{1,\theta}\left(-\frac{|x-t|}{y^{\beta}}\right)dt, \tag{3}$$

$$\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}\mu(y)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\mu(s)(y-s)^{\delta-1}e_{1,\beta}^{1,\delta}\left(-\frac{|x|}{(y-s)^{\beta}}\right)ds. \tag{4}$$

Справедливы следующие свойства операторов $\mathcal{N}_{x_1x_2}^{\theta,x,y}$ и $\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}$.

Свойство 1. Для любых $x_1>0$, $x_2>0$ справедливо равенство

$$\left(2\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x_1}\right)\left(2\mathcal{R}_{0y}^{\theta,x_2}\right)\mu(y)=2\mathcal{R}_{0y}^{\delta+\theta,x_1+x_2}\mu(y). \tag{5}$$

Свойство 2. Пусть $a\geqslant 0$, $\delta+\beta>0$, $\theta+\beta>0$, тогда имеет место равенство

$$\mathcal{R}_{0y}^{\delta,a}\mathcal{N}_{0l}^{\theta,b,y}\tau(x)=\frac{1}{2}\begin{cases}\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\theta,b-a,y}\tau(x), & b\leqslant 0,\\ \left[\mathcal{N}_{0b}^{\delta+\theta,a+b,y}+\mathcal{N}_{bl}^{\delta+\theta,b-a,y}\right]\tau(x), & 0<b<l,\\ \mathcal{N}_{0l}^{\delta+\theta,a+b,y}\tau(x), & b\geqslant l.\end{cases}$$

Свойство 3. Пусть $y^{1-\nu}\mu(y)\in C[0,T]$, $\nu+\delta\geqslant 0$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}\mu(y)=\frac{1}{2}D_{0y}^{-\delta}\mu(y). \tag{6}$$

Свойство 4. Пусть $\tau(x)\in C[0,T]$, тогда

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{2\beta-n}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,x,y}\tau(x)=\frac{1}{2}\begin{cases}\tau(x), & k=n,\\ 0, & k<n.\end{cases} \tag{7}$$

Свойство 5. Справедливо равенство

$$\int\limits_0^l\mathcal{R}_{0y}^{\theta,a\pm x}\mu(y)dx=\pm\left[\mathcal{R}_{0y}^{\theta+\beta,a}-\mathcal{R}_{0y}^{\theta+\beta,a\pm l}\right]\mu(y).$$

Свойство 6. Имеют место равенства

$$\int\limits_0^l\mathcal{N}_{0l}^{\delta,a\pm x,y}\tau(x)dx=\pm\mathrm{sign}\,a\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,a,y}-\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,a\pm l,y}\right]\tau(x),$$

$$\int\limits_0^l\mathcal{N}_{0l}^{\delta,-x,y}\tau(x)dx=\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,0,y}-\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,-l,y}\right]\tau(x),$$

$$\int\limits_0^l \mathcal{N}_{0l}^{\delta,x,y}\tau(x)dx = -\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,0,y} - \mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,l,y}\right]\tau(x) + \frac{y^{\delta+\beta-1}}{\Gamma(\delta+\beta)}\int\limits_0^l \tau(x)dx.$$

Для доказательства свойств 1 и 2 достаточно изменить порядок интегрирования, воспользоваться определениями операторов $\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}$ и $\mathcal{N}_{0l}^{\theta,x,y}$ и формулой свертки функций Райта [2, с. 30]

$$\int\limits_0^y \xi^{\delta-1}e_{1,\alpha}^{1,\delta}\left(-\frac{x_1}{\xi^\alpha}\right)(y-\xi)^{\mu-1}e_{1,\alpha}^{1,\mu}\left(-\frac{x_2}{(y-\xi)^\alpha}\right)d\xi =$$

$$= y^{\delta+\mu-1}e_{1,\alpha}^{1,\delta+\mu}\left(-\frac{x_1+x_2}{y^\alpha}\right), \quad \forall x_1, x_2 > 0. \tag{8}$$

Свойство 3 доказано в [2, с. 35]. Свойство 4 следует из формул [2, с. 24–27]

$$D_{0y}^{\nu}y^{\delta-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(-cy^{-\beta}) = y^{\delta-\nu-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta-\nu}(-cy^{-\beta}), \quad c>0, \quad \delta+\beta>0, \tag{9}$$

$$ze_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = e_{\alpha,\beta}^{\mu-\alpha,\delta+\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)}, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}e_{\alpha,\beta}^{0,\delta}\left(-\frac{t}{\lambda}\right)dt = -\frac{\alpha}{\Gamma(\delta)} \tag{11}$$

и оценки [2, с. 29]

$$\left|x^{\mu-1}y^{\delta-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}\left(-\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right)\right| \leqslant Cx^{\mu-\alpha\theta-1}y^{\delta+\beta\theta-1}, \tag{12}$$

где $\theta \in [-1,1]$ при $\delta = 0$; $\theta \in [0,2]$ при $\mu = 1$; $\theta \in [-1,2]$ при $\mu = 0$; C – положительная константа, не зависящая от θ.

Для доказательства свойств 5 и 6 достаточно воспользоваться определениями операторов $\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}$ и $\mathcal{N}_{0l}^{\theta,x,y}$, (10) и формулой [2, с. 27]

$$D_{0x}^{\nu}x^{\mu-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(-cx^\alpha) = x^{\mu-\nu-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu-\nu,\delta}(-cx^\alpha), \quad \mu>0, \quad c>0. \tag{13}$$

В силу (6) из свойств 1 и 2 следуют равенства

$$D_{0y}^{-\theta}\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}\mu(y) = \mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}D_{0y}^{-\theta}\mu(y) = \mathcal{R}_{0y}^{\delta+\theta,x}\mu(y), \tag{14}$$

$$D_{0y}^{-\delta}\mathcal{N}_{0l}^{\theta,x,y}\nu(x) = \mathcal{N}_{0l}^{\delta+\theta,x,y}\nu(x). \tag{15}$$

2. Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $u = u(x,y)$ регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y) = \tau_k(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0<x<l, \tag{16}$$

$u_x \in C([0,l]\times(0,T))$ и $u_x(0,y), u_x(l,y) \in L[0,T]$. Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет нелокальным условиям:

$$u(0,y) = 2\sum_{k=1}^n \mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,0,y}\tau_k(t) + 2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,l}u_x(l,s) - D_{0y}^{-\beta}u_x(0,s) + 2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}u(l,s), \tag{17}$$

$$u(l,y)=2\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,l,y}\tau_k(t)-2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,l}u_x(0,s)+D_{0y}^{-\beta}u_x(l,s)+2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}u(0,s). \tag{18}$$

Доказательство. Воспользуемся общим представлением решения уравнения (1) в прямоугольной области [2, с. 116]. Полагая в нем $v(x,y;t,s)=\Gamma(x-t,y-s)$, получим

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\tau_k(t)\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}\Gamma(x-t,y)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}\int\limits_{0}^{y}[\Gamma(x-x_i,y-s)u_t(x_i,s)-\Gamma_t(x-x_i,y-s)u(x_i,s)]ds. \tag{19}$$

Используя (2) и то, что в силу (9), (13), (10),

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(x-t,y-s)=\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2}\frac{1}{y-s}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|x-t|}{(y-s)^{\beta}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(x-t,y-s)=-\frac{(y-s)^{\beta-2}}{2}e_{1,\beta}^{1,\beta-1}\left(-\frac{|x-t|}{(y-s)^{\beta}}\right),$$

равенство (19) можно переписать в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\tau_k(t)}{y^{k-\beta}}e_{1,\beta}^{1,\beta-k+1}\left(-\frac{|x-t|}{y^{\beta}}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\frac{u_t(x_2,s)}{(y-s)^{1-\beta}}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{x_2-x}{(y-s)^{\beta}}\right)ds-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\frac{u_t(x_1,s)}{(y-s)^{1-\beta}}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{x-x_1}{(y-s)^{\beta}}\right)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\frac{u(x_2,s)}{y-s}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x_2-x}{(y-s)^{\beta}}\right)ds+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\frac{u(x_1,s)}{y-s}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x-x_1}{(y-s)^{\beta}}\right)ds. \tag{20}$$

В терминах операторов (3) и (4) равенство (20) примет вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{x_1x_2}^{\beta-k+1,x,y}\tau_k(t)+\mathcal{R}_{0y}^{\beta,x_2-x}u_t(x_2,s)-\mathcal{R}_{0y}^{\beta,x-x_1}u_t(x_1,s)+$$

$$+\mathcal{R}_{0y}^{0,x_2-x}u(x_2,s)+\mathcal{R}_{0y}^{0,x-x_1}u(x_1,s). \tag{21}$$

Пользуясь тем, что в силу свойства 3 преобразования $\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}$

$$\lim_{x\to 0}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,x}\mu(y)=\frac{1}{2}D_{0y}^{-\beta}\mu(y),\quad \lim_{x\to 0}\mathcal{R}_{0y}^{0,x}\mu(y)=\frac{\mu(y)}{2},$$

из (21) получим

$$\frac{1}{2}u(x_1,y)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{x_1x_2}^{\beta-k+1,x_1,y}\tau_k(t)+\mathcal{R}_{0y}^{\beta,x_2-x_1}u_t(x_2,s)-$$

$$-\frac{1}{2}D_{0y}^{-\beta}u_t(x_1,s)+\mathcal{R}_{0y}^{0,x_2-x_1}u(x_2,s), \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}u(x_2,y)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{x_1x_2}^{\beta-k+1,x_2,y}\tau_k(t)-\mathcal{R}_{0y}^{\beta,x_2-x_1}u_t(x_1,s)+$$

$$+\frac{1}{2}D_{0y}^{-\beta}u_t(x_2,s)+\mathcal{R}_{0y}^{0,x_2-x_1}u(x_1,s). \tag{23}$$

Переходя в равенствах (22) и (23) к пределам при $(x_1,x_2)\to(0,l)$, получим (17) и (18). Теорема 1 доказана.

При $\alpha=1$ условия (17) и (18) совпадают с необходимыми нелокальными условиями для уравнения Фурье [5, с. 275].

3. Необходимые нелокальные условия для волнового уравнения

Имеет место следующая лемма [3].

Лемма 1. Пусть функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на любом конечном интервале полуоси $t>0$, непрерывна в точке $t=1$ и растет при $t\to\infty$ не быстрее, чем $\exp\{\sigma t^\delta\}$, $\sigma>0$, $\delta<\frac{1}{1-\beta}$. Тогда

$$\lim_{\beta\to1}\int\limits_0^\infty g(t)e_{1,\beta}^{1,0}(-t)dt=g(1),\quad \lim_{\beta\to1}\int\limits_0^\infty g(t)e_{1,\beta}^{1,\beta}(-t)dt=\int\limits_0^1 g(t)dt.$$

Используя лемму 1, перейдем в равенствах (17) и (18) к пределу при $\alpha\to2$. Для этого перепишем условия (17) и (18) в следующем виде:

$$u(0,y)=\int\limits_0^l\tau_1(\xi)y^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{\xi}{y^\beta}\right)d\xi+\int\limits_0^l\tau_2(\xi)y^{\beta-2}e_{1,\beta}^{1,\beta-1}\left(-\frac{\xi}{y^\beta}\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^y\frac{u_x(l,\eta)}{(y-\eta)^{1-\beta}}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\beta}\right)d\eta-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^y\frac{u_x(0,\eta)}{(y-\eta)^{1-\beta}}d\eta+$$

$$+\int\limits_0^y\frac{u(l,\eta)}{y-\eta}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\beta}\right)d\eta=\sum_{i=1}^5 I_i(y), \tag{24}$$

$$u(l,y)=\int\limits_0^l\tau_1(\xi)y^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{l-\xi}{y^\beta}\right)d\xi+\int\limits_0^l\tau_2(\xi)y^{\beta-2}e_{1,\beta}^{1,\beta-1}\left(-\frac{l-\xi}{y^\beta}\right)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^y\frac{u_x(0,\eta)}{(y-\eta)^{1-\beta}}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\beta}\right)d\eta+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^y\frac{u_x(l,\eta)}{(y-\eta)^{1-\beta}}d\eta+$$

$$+\int\limits_0^y\frac{u(0,\eta)}{y-\eta}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\beta}\right)d\eta=\sum_{i=1}^5 J_i(y). \tag{25}$$

Далее преобразуем интегралы $I_i(y)$

$$I_1(y)=\int\limits_0^l\tau_1(\xi)y^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{\xi}{y^\beta}\right)d\xi=\int\limits_0^{l/y^\beta}\tau_1(y^\beta\eta)y^{2\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}(-\eta)d\eta=$$

$$=\int\limits_0^\infty\tau_1(y^\beta\eta)y^{2\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}(-\eta)H(l-y^\beta\eta)d\eta,$$

$$I_2(y)=\int\limits_0^l \tau_2(\xi)y^{\beta-2}e_{1,\beta}^{1,\beta-1}\left(-\frac{\xi}{y^\beta}\right)d\xi=\frac{d}{dy}\int\limits_0^l \tau_2(\xi)y^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{\xi}{y^\beta}\right)d\xi,$$

$$I_3(y)=\int\limits_0^y \frac{u_x(l,\eta)}{(y-\eta)^{1-\beta}}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\beta}\right)d\eta=\int\limits_{l/y^\beta}^\infty u_x\left(l,y-(l/\xi)^{\frac{1}{\beta}}\right)\frac{l}{\beta\xi^2}e_{1,\beta}^{1,\beta}(-\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty u_x\left(l,y-(l/\xi)^{\frac{1}{\beta}}\right)\frac{l}{\beta\xi^2}e_{1,\beta}^{1,\beta}(-\xi)H(\xi-l/y^\beta)d\xi,$$

$$I_5(y)=\int\limits_0^y \frac{u(0,\eta)}{y-\eta}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\beta}\right)d\eta=$$

$$=\int\limits_0^\infty u\left(l,y-(l/\xi)^{\frac{1}{\beta}}\right)\frac{1}{\beta\xi}e_{1,\beta}^{1,0}(-\xi)H(\xi-l/y^\beta)d\xi.$$

Пользуясь леммой 1, получим следующие соотношения:

$$\lim_{\beta\to1}I_1(y)=\int\limits_0^1 \tau_1(y\eta)H(l-y\eta)y\,d\eta=\int\limits_0^y \tau_1(\xi)H(l-\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^l \tau_1(\xi)H(y-\xi)d\xi, \tag{26}$$

$$\lim_{\beta\to1}I_2(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_0^y \tau_2(\xi)H(l-\xi)d\xi=\tau_2(y)H(l-y), \tag{27}$$

$$\lim_{\beta\to1}I_3(y)=\int\limits_0^1 u_x(l,y-l/\xi)\frac{l}{\xi^2}H(\xi-l/y)d\xi=$$

$$=H(y-l)\int\limits_{l/y}^1 u_x(l,y-l/\xi)\frac{l}{\xi^2}d\xi=H(y-l)\int\limits_0^{y-l}u_x(l,\eta)d\eta, \tag{28}$$

$$\lim_{\beta\to1}I_5(y)=u(l,y-l)H(y-l), \tag{29}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Аналогично для слагаемых в правой части (25) получим

$$\lim_{\beta\to1}J_1(y)=\int\limits_{l-y}^l \tau_1(\xi)H(\xi)d\xi, \tag{30}$$

$$\lim_{\beta\to1}J_2(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_{l-y}^l \tau_2(\xi)H(\xi)d\xi=\tau_2(l-y)H(l-y), \tag{31}$$

$$\lim_{\beta\to1}J_3(y)=H(y-l)\int\limits_0^{y-l}u_x(0,\eta)d\eta, \tag{32}$$

$$\lim_{\beta\to 1} J_5(y) = u(0, y-l)H(y-l). \tag{33}$$

Используя соотношения (26) – (33), из (24) и (25) получим необходимые нелокальные условия для волнового уравнения:

$$u(0,y) = \int_0^l \tau_1(t)H(y-t)dt + \tau_2(y)H(l-y) + H(y-l)\int_0^{y-l} u_x(l,s)ds -$$

$$-\int_0^y u_x(0,s)ds + u(l, y-l)H(y-l),$$

$$u(l,y) = \int_{l-y}^l \tau_1(t)H(t)dt + \tau_2(l-y)H(l-y) - H(y-l)\int_0^{y-l} u_x(0,s)ds +$$

$$+\int_0^y u_x(l,s)ds + u(0, y-l)H(y-l).$$

При $y \leqslant l$ условия примут вид:

$$u(0,y) = \int_0^y \tau_1(t)dt + \tau_2(y) - \int_0^y u_x(0,s)ds, \tag{34}$$

$$u(l,y) = \int_{l-y}^l \tau_1(t)dt + \tau_2(l-y) + \int_0^y u_x(l,s)ds. \tag{35}$$

При $y \geqslant l$ имеем

$$u(0,y) = \int_0^l \tau_1(t)dt + \int_0^{y-l} u_x(l,s)ds - \int_0^y u_x(0,s)ds + u(l, y-l), \tag{36}$$

$$u(l,y) = \int_0^l \tau_1(t)dt - \int_0^{y-l} u_x(0,s)ds + \int_0^y u_x(l,s)ds + u(0, y-l). \tag{37}$$

Для случая $l = T$ условия (34) и (35) получены в работе [6].

4. Задача Самарского

4.1. Постановка задачи и формулировка результата

Пользуясь доказанной теоремой 1, исследуем задачу Самарского для уравнения (1) в следующей постановке.

Задача 1. В области Ω найти решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (16) и краевым условиям:

$$a_1 u(0,y) + a_2 u(l,y) = \varphi(y), \;\; 0 < y \leqslant T, \tag{38}$$

$$\int_0^l u(x,y)dx = \mu(y), \;\; 0 < y \leqslant T, \tag{39}$$

где $\tau_k(x)$, $\varphi(y)$, $\mu(y)$ – заданные функции, a_1, a_2 – заданные числа, причем $a_1 \neq a_2$.

Условие (39) принято называть условием Самарского [5, с. 140].

В работе [7] в случае, когда $0 < \alpha < 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\mu(y) \equiv \operatorname{const} y^{\alpha-1}$, а условие (16) задано в локальном виде, задача 1 была исследована методом Фурье.

Обозначим $C^{1,q}[0,l]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,l]$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем q.

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $\tau_1(x) \in C[0,l]$; $\tau_2(x) \in C^{1,q}[0,l]$, $q > \frac{1-\beta}{\beta}$, при $n = 2$; $y^{n-\alpha}\varphi(y) \in C[0,T]$, $D^{\alpha}_{0y}\mu(y) \in C[0,T]$ и выполняются условия согласования

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-n}_{0y}\varphi(y) = a_1\tau_n(0) + a_2\tau_n(l), \tag{40}$$

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-k}_{0y}\mu(y) = \int\limits_0^l \tau_k(x)dx, \quad k = 1, n. \tag{41}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1. Решение имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\mathcal{N}^{\beta-k+1,2ml+x,y}_{0l} - \mathcal{N}^{\beta-k+1,2ml-x,y}_{0l}\right]\tau_k(x) -$$

$$-2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}^{0,2ml-l+x}_{0y} - \mathcal{R}^{0,2ml-l-x}_{0y}\right]\varphi_l(y) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}^{0,2ml-2l+x}_{0y} - \mathcal{R}^{0,2ml-x}_{0y}\right]\varphi_0(y), \tag{42}$$

где

$$\varphi_0(y) = \frac{a_2}{a_2 - a_1}\psi(y) + \frac{1}{a_2 - a_1}\varphi(y), \quad \varphi_1(y) = \frac{a_1}{a_1 - a_2}\psi(y) + \frac{1}{a_1 - a_2}\varphi(y),$$

$$+$$

$$\psi(y) = 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{N}^{\beta-k+1,ml,y}_{0l}\tau_k(\xi) + 4\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}^{\beta,ml}_{0y}D^{\alpha}_{0y}\mu(y) + D^{-\beta}_{0y}D^{\alpha}_{0y}\mu(y). \tag{43}$$

Доказательство. Интегрируя обе части равенства (1) по x с учетом условия (39), придем к условию

$$u_x(l,y) - u_x(0,y) = D^{\alpha}_{0y}\mu(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{44}$$

Из (17) и (18) с учетом условий (38) и (44) относительно функции $\psi(y) = u(0,y) + u(l,y)$ получим

$$\psi(y) - 2\mathcal{R}^{0,l}_{0y}\psi(\eta) = \Phi(y), \tag{45}$$

где

$$\Phi(y) = 2\sum_{k=1}^{n}\left[\mathcal{N}^{\delta_k,0,y}_{0l} + \mathcal{N}^{\delta_k,l,y}_{0l}\right]\tau_k(\xi) + 2\left[\mathcal{R}^{\beta,0}_{0y} + \mathcal{R}^{\beta,l}_{0y}\right]D^{\alpha}_{0y}\mu(y),$$

$\delta_k = \beta - k + 1$.

Покажем, что $y^{n-\alpha}\Phi(y) \in C[0,T]$. Поскольку $\tau_k(x) \in C[0,l]$, то в силу формул (13) и (10) получим

$$\mathcal{N}^{\beta-k+1,x,y}_{0l}\tau_k(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \tau_k(t)y^{\beta-k}e^{1,\beta-k+1}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-t|}{y^\beta}\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^l y^{\beta-k}e_{1,\beta}^{1,\beta-k+1}\left(-\frac{|x-t|}{y^\beta}\right)dt=\frac{M}{2}y^{2\beta-k}e_{1,\beta}^{1,2\beta-k+1}\left(-\frac{|x-t|}{y^\beta}\right)\Big|_{t=0}^{t=l},$$

где $M=\max\limits_{x\in[0,l]}\tau_k(x)$. Из последнего и оценки

$$\left|y^{\alpha-k}e_{1,\beta}^{1,\alpha-k+1}\left(-xy^{-\beta}\right)\right|\leqslant Cx^{-\theta}y^{(\alpha-k+1)(1+\theta)-1}, \tag{46}$$

справедливой в силу (12), следует, что $y^{k-\alpha}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,x,y}\tau_k(\xi)\in C[0,T]$, $k=1,n$. Из того, что $D_{0y}^{\alpha}\mu(y)\in C[0,T]$, следует, что $D_{0y}^{-\beta}D_{0y}^{\alpha}\mu(y),\mathcal{R}_{0y}^{\beta,l}D_{0y}^{\alpha}\mu(y)\in C[0,T]$.

Уравнение (45) является уравнением Вольтерра второго рода. Легко видеть, что его единственное решение можно выписать в виде

$$\psi(y)=2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\Phi(\eta). \tag{47}$$

Действительно, в силу (5)

$$\psi(y)-2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}\psi(\eta)=+2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\Phi(\eta)-4\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,l}\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\Phi(\eta)=$$

$$=\Phi(y)+2\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\Phi(\eta)-2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,(m+1)l}\Phi(\eta)=$$

$$=\Phi(y)+2\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\Phi(\eta)-2\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\Phi(\eta)=\Phi(y).$$

Равенство (47) можно записать в виде

$$\psi(y)=\Phi(y)+\int\limits_0^y W(y-\eta)\Phi(\eta)d\eta,$$

где

$$W(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{y}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{nl}{y^\beta}\right).$$

Из оценки (12) следует

$$\left|y^{\alpha-k}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{ml}{y^\beta}\right)\right|\leqslant C(ml)^{-\theta}y^{\beta\theta-1},\quad \theta\in[0,2].$$

Из последнего получим

$$\left|y^{1-\beta}W(y)\right|\leqslant\frac{C}{l^2}y^{1-\beta}y^{2\beta-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=y^\beta\frac{C}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}.$$

Таким образом, $y^{1-\beta}W(y)\in C[0,T]$, а $y^{n-\alpha}\psi(y)\in C[0,T]$.

Пользуясь (47) и свойствами 1 и 2, запишем решение уравнения (45) в виде

$$\psi(y)=2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,-ml,y}+\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,(m+1)l,y}\right]\tau_k(\xi)+$$

$$+2\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}+\mathcal{R}_{0y}^{\beta,(m+1)l}\right]D_{0y}^{\alpha}\mu(y).$$

Из последнего, пользуясь свойством 3, получим (43).

После того как найдено $\psi(y)$, из системы

$$u(0,y)+u(l,y)=\psi(y), \quad a_1u(0,y)+a_2u(l,y)=\varphi(y)$$

при $a_1\neq a_2$ однозначно находим $u(0,y)$ и $u(l,y)$,

$$u(0,y)=\frac{a_2}{a_2-a_1}\psi(y)+\frac{1}{a_2-a_1}\varphi(y)=\varphi_0(y), \tag{48}$$

$$u(l,y)=\frac{a_1}{a_1-a_2}\psi(y)+\frac{1}{a_1-a_2}\varphi(y)=\varphi_1(y). \tag{49}$$

Очевидно, что функции $y^{n-\alpha}\varphi_0(y), y^{n-\alpha}\varphi_1(y)\in C[0,T]$.

Для того чтобы $y^{n-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-n}\varphi_0(y)=\tau_n(0), \quad \lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-n}\varphi_1(y)=\tau_n(l). \tag{50}$$

Покажем это. Из равенств (48) и (49) следует, что

$$D_{0y}^{\alpha-n}\varphi_0(y)=\frac{a_2}{a_2-a_1}D_{0y}^{\alpha-n}\psi(y)+\frac{1}{a_2-a_1}D_{0y}^{\alpha-n}\varphi(y), \tag{51}$$

$$D_{0y}^{\alpha-n}\varphi_1(y)=\frac{a_1}{a_1-a_2}D_{0y}^{\alpha-n}\psi(y)+\frac{1}{a_1-a_2}D_{0y}^{\alpha-n}\varphi(y). \tag{52}$$

Из (43) в силу (14) и (15) имеем

$$D_{0y}^{\alpha-n}\psi(y)=2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}D_{0y}^{\alpha-n}\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,ml,y}\tau_k(\xi)+$$

$$+4\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{n-\beta,ml}D_{0y}^{\alpha}\mu(y)+D_{0y}^{\beta-n}D_{0y}^{\alpha}\mu(y). \tag{53}$$

Равенство (53) вместе с соотношением (7) приводят к

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-n}\psi(y)=\tau_n(0)+\tau_n(l), \tag{54}$$

Из (40), (51), (52) и (54) следует (50).

Таким образом, решение задачи 1 редуцируется к решению первой краевой задачи (16), (48), (49), для уравнения (1), которое имеет вид [2, с. 123]

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int\limits_0^l\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G(x,y;\xi,0)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)u(0,\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y;l,\eta)u(l,\eta)d\eta, \tag{55}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\left[\Gamma(2ml+x-\xi,y-\eta)-\Gamma(2ml-x-\xi,y-\eta)\right].$

Очевидно, что (55) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (16), (38).

Покажем, что (55) удовлетворяет условию (39). В терминах операторов (3) и (4) решение (55) можно записать в виде (42) или

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,2ml+x,y}-\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,2ml-x,y}+\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,-2ml+x,y}-\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,-2ml-x,y}\right]\tau_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,x,y}-\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,-x,y}\right]\tau_k(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}_{0y}^{0,2ml-l-x}-\mathcal{R}_{0y}^{0,2ml-l+x}\right]\varphi_l(y)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}_{0y}^{0,2ml-2l+x}-\mathcal{R}_{0y}^{0,2ml-x}\right]\varphi_0(y). \tag{56}$$

Проинтегрируем равенство (56) на отрезке $[0,l]$ по переменной x. В силу свойств 5 и 6 получим

$$\int_0^l u(x,y)dx=2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,(m+1)l,y}+\mathcal{N}_{0l}^{\delta+\beta,-ml,y}\right]\tau_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{y^{\delta+\beta-1}}{\Gamma(\delta+\beta)}\int_0^l\tau_k(x)dx+2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,0}\psi(y)+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\psi(y), \tag{57}$$

где $\psi(y)=\varphi_0(y)+\varphi_l(y)$ решение уравнения Вольтерра (45).

Из (47) имеем

$$2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,0}\psi(y)=D_{0y}^{-\beta}\psi(y)=2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y).$$

Преобразуем последние два слагаемых в правой части (57) с помощью (5)

$$2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,0}\psi(y)+4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}D_{0y}^{-\beta}\psi(y)=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y)+8\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{0,ml}\sum_{s=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,sl}\Phi(y)=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y)+8\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{m}(-1)^s\mathcal{R}_{0y}^{0,sl}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,(m-s)l}\Phi(y)=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y)+4\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y)\sum_{s=1}^{m}(-1)^s=$$

$$=2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,0}\Phi(y)+2\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,2ml}\Phi(y)+2\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,2ml-l}\Phi(y)-4\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{R}_{0y}^{\beta,2ml-l}\Phi(y)=$$

$$=2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,0}\Phi(y)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y)=2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y). \tag{58}$$

Обозначив $\mu_1(y)=D_{0y}^{-\beta}D_{0y}^{\alpha}\mu(y)$ и пользуясь свойствами преобразования $\mathcal{R}_{0y}^{\beta,0}$, получим

$$2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\Phi(y)=2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}\mu_1(y)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,(m+1)l}\mu_1(y)+$$

$$+2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\mathcal{R}_{0y}^{\beta,ml}2\sum_{k=1}^{n}\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,0,y}+\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k,l,y}\right]\tau_k(\xi)=D_{0y}^{-\beta}\mu_1(y)+$$

$$+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k+\beta,-ml,y}+\mathcal{N}_{0l}^{\delta_k+\beta,(m+1)l,y}\right]\tau_k(\xi). \tag{59}$$

Учитывая, что в силу аналога формулы Ньютона — Лейбница в дробном исчислении [1, с. 11],

$$D_{0y}^{-\beta}\mu_1(y) = D_{0y}^{-\alpha}D_{0y}^{\alpha}\mu(y) = \mu(y) - \sum_{k=1}^{n}\frac{y^{\delta_k+\beta-1}}{\Gamma(\delta_k+\beta)}\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-k}\mu(y),$$

из (57), (58) и (59) получим, что

$$\int\limits_0^l u(x,y)dx = \mu(y) + \sum_{k=1}^{n}\frac{y^{\delta_k+\beta-1}}{\Gamma(\delta_k+\beta)}\left[\int\limits_0^l \tau_k(x)dx - \lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-k}\mu(y)\right].$$

Таким образом, функция $u(x,y)$ удовлетворяет условию Самарского при выполнений условий согласования (41). Теорема 2 доказана.

4.2. Задача Самарского для волнового уравнения

Рассмотрим задачу 1 при $\alpha = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $T < l$. В общем случае задача решается аналогично.

Задача 2. Найти решение уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{60}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < l,$$

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad \int\limits_0^l u(x,y)dx = \mu(y), \quad 0 < y < T < l.$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\varphi_0(y)$, $\mu(y)$ – заданные функции.

Для волнового уравнения задача 2 методом редукции к задаче с условием Бицадзе — Самарского исследовалась в работе [10].

Из (34) и (35) с учетом равенства

$$\int\limits_0^y [u_x(l,s) - u_x(0,s)]ds = \mu'(y) - \mu'(0)$$

выразим значение $u(l,y)$ через данные задачи 2:

$$u(l,y) = \int\limits_0^y \nu(t)dt + \int\limits_{l-y}^{l}\nu(t)dt + \tau(y) + \tau(l-y) + \mu'(y) - \mu'(0) - \varphi_0(y) \equiv \varphi_l(y).$$

Таким образом, задача 2 свелась к смешанной краевой задаче для уравнения (60), решение которой имеет вид [11, с. 70]

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt + \overline{\varphi}_0(y-x) - \overline{\varphi}_l(y+x-l), \tag{61}$$

где $\overline{\varphi}_0(y) = \varphi_0(y)H(y)$, $\overline{\varphi}_l(y) = \varphi_l(y)H(y)$, $H(y)$ – функция Хевисайда, причем

$$\tau(-x) = -\tau(x), \quad \tau(2l-x) = -\tau(x), \quad \nu(-x) = -\nu(x), \quad \nu(2l-x) = -\nu(x). \tag{62}$$

Очевидно, что (61) является решением уравнения (60), а также то, что выполняются первые три условия задачи 2.

Покажем, что выполняется четвертое. Проинтегрируем равенство (61) по переменной x в пределах от 0 до l

$$\int_0^l u(x,y)dx = \frac{1}{2}\int_0^l [\tau(x+y)+\tau(x-y)]dx + \frac{1}{2}\int_0^l \int_{x-y}^{x+y} \nu(t)dt + \int_0^l \overline{\varphi}_0(y-x)dx+$$

$$+\int_0^l \overline{\varphi}_l(y+x-l)dx = I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{63}$$

Преобразуя интегралы I_k $(k=\overline{1,4})$ с учетом равенств (62), получим

$$2I_1 = \int_y^l \tau(t)dt - \int_l^{l+y} \tau(2l-t)dt - \int_{-y}^0 \tau(-t)dt + \int_{-y}^{l-y} \tau(t)dt = 2\int_y^{l-y} \tau(t)dt, \tag{64}$$

$$2I_2 = \int_{-y}^0 (t+y)\nu(t)dt + \int_0^{l-y} (t+y)\nu(t)dt + \int_{l-y}^y l\nu(t)dt + \int_y^l (l-t+y)\nu(t)dt+$$

$$+\int_l^{l-y} (l-t+y)\nu(t)dt = 2\int_0^y t\nu(t)dt + 2\int_y^{l-y} y\nu(t)dt + 2\int_{l-y}^l (l-t)\nu(t)dt, \tag{65}$$

$$I_3 = \int_0^y \varphi_0(y-x)dx = \int_0^y \varphi_0(t)dt, \tag{66}$$

$$I_4 = \int_{l-y}^l \varphi_l(y+x-l)dx = \int_0^y \varphi_l(t)dt = \int_0^y (y-t)\nu(t)dt + \int_{l-y}^l (y+t-l)\nu(t)dt+$$

$$+\int_0^y \tau(s)ds + \int_{l-y}^l \tau(s)ds - \int_0^y \varphi_0(s)ds + \mu(y) - \mu(0) - \mu'(0)y. \tag{67}$$

В силу (64)–(67), из (63) получим

$$\int_0^l u(x,y)dx = I_1+I_2+I_3+I_4 = \left(\int_0^y + \int_y^{l-y} + \int_{l-y}^l\right)\tau(t)dt - \mu(0)+$$

$$+\left(\int_0^y + \int_y^{l-y} + \int_{l-y}^l\right)\nu(t)dt - \mu'(0) + \mu(y).$$

Из последнего видно, что при выполнении условий согласования

$$\int_0^l \tau(x)dx = \mu(0), \quad \int_0^l \nu(x)dx = \mu'(0),$$

функция (61) удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^l u(x,y)dx = \mu(y).$$

Литература

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[3] Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Известия РАН. Серия математическая. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.

[4] Геккиева С.Х. Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 16–19.

[5] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

[6] Нахушева З.А. Об одной задаче А.А. Дезина для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2006. Т. 8. № 2. С. 49–56.

[7] Нахушева З.А. Видоизмененная задача Самарского для нелокального диффузионного уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1997. Т. 2. № 2. С. 36–41.

[8] Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1430–1433.

[9] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287с.

[10] Бейлин С.А. Смешанные задачи с интегральными условиями для волнового уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара, 2005.

[11] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

References

[1] Nakhushev A.M. Fractional calculus and its applications. M., Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian)

[2] Pskhu A.V. Fractional partial differential equations. M., Nauka, 2005, 199 p. (in Russian)

[3] Pskhu A.V. Fundamental solution of diffusion-wave equation of fractional order. *Izvestiya RAN. Seriia mathemathicheskaia* [*Proceedings of the RAS. Mathematical Series*], 2009, Vol. 73, no 2, pp.141–182. (in Russian)

[4] Gekkieva S.Kh. Cauchy problem for generalized equation of displacemant with fractal time derivative. *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk* [*Reports of Circassian International Academy of Sciences*], 2000, Vol.5, no 1, pp. 16–19. (in Russian)

[5] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. M.: Vysshaiia shkola, 1995, 301 p. (in Russian)

[6] Nakhusheva Z.A. On one A.A.Dezin problem for mixed type equation with disconnected coefficients. *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk* [*Reports of Circassian International Academy of Sciences*], 2006, Vol.8, no 2, pp. 49–56. (in Russian)

[7] Nakhusheva Z.A. Modified problem of Samarskiy for non-local diffusion equation. *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk* [*Reports of Circassian International Academy of Sciences*], 1997, Vol.2, no 2, pp.36–41 (in Russian)

[8] Pskhu A.V. Solution of boundary value problems for fractional diffusion equation by the Green function method. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential Equations*], 2003, Vol.39, no 10, pp. 1430–1433. (in Russian)

[9] Nakhushev A.M. Problems with shift for partial differential equations. M., Nauka, 2006, 287 p. (in Russian)

[10] Beylin S.A. *Smeshannye zadachi s integral'nymi usloviiami dlia volnovogo uravneniia: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Mixed problems with integral conditions for wave equation: Candidate's of Physico-Mathematical Sciences Thesis]. Samara, 2005, 111 p. (in Russian)

[11] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. M.; Nauka, 1972. 735 p. (in Russian)

Поступила в редакцию 20/*III*/2014;
в окончательном варианте — 20/*III*/2014.

NECESSARY NON-LOCAL CONDITIONS FOR A DIFFUSION-WAVE EQUATION

© 2014 M.O. Mamchuev[2]

In this article, diffusion-wave equation with fractional derivative in Rieman-n-Liouville sense is investigated. Integral operators with the Write function in the kernel associated with the investigational equation are introduced. In terms of these operators necessary non-local conditions binding traces of solution and its derivatives on the boundary of a rectangular domain are found. Necessary non-local conditions for the wave are obtained by using the limiting properties of Write function. By using the integral operator's properties the theorem of existence and uniqueness of solution of the problem with integral Samarski's condition for the diffusion-wave equation is proved. The solution is obtained in explicit form.

Key words: diffusion-wave equation, wave equation, fractional differential equations, necessary non-local conditions, Samarski's problem, derivative of fractional order.

Paper received 20/*III*/2014.
Paper accepted 20/*III*/2014.

[2]Mamchuev Murat Osmanovich (mamchuev@rambler.ru), the Dept. of Mathematical Physics of Fractals, Research Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Centre of RAS, Nalchik, 360000, Russian Federation