

Л. В. Фомин

О ПРИМЕНЕНИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследуется длительное разрушение оболочки и пластины при ползучести в активной среде в условиях нестационарного сложного напряженного состояния. Учет влияния среды на время до разрушения осуществляется с помощью введения в определяющие и кинетические дробно-линейные соотношения функции от интегрально средней концентрации среды. Проведено сравнение времен до разрушения при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности. Определены особенности использования дробно-линейной модели для описания процессов длительного разрушения.

Ключевые слова: ползучесть, нестационарное нагружение, длительное разрушение, дробно-линейная модель, скалярный параметр поврежденности, векторный параметр поврежденности, оболочка, пластина.

DOI: XXXXXXXXXX

УДК: 539.376

Введение. Актуальность решения вопросов о безопасной эксплуатации материалов и элементов конструкций несомненна. Наиболее часто ответственные элементы конструкций во время длительной эксплуатации подлежат воздействию ряда деструктивных факторов, среди них надо отметить следующие: высокая температура и активная рабочая и/или окружающая среда в сочетании с продолжительным действием внешних нагрузок. Таким воздействиям, например, подвергаются типовые элементы конструкций как оболочка и пластина. Влияние активной среды может определяться

© Фомин Л. В., 2020

Фомин Леонид Викторович

e-mail: fleonid1975@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00387).

Автор статьи выражает благодарность профессору А. М. Локощенко за внимание к проведенной работе и полезные обсуждения.

Поступила 01.03.2020

как диффузионным проникновением ее элементов внутрь материала, так и коррозионно-активным влиянием, которому присуще активные химические процессы взаимодействия рабочих и/или окружающих сред с материалами элементов конструкций. Особое значение приобретает изучение таких процессов при высокотемпературном длительном нагружении металлических материалов и конструкций в условиях ползучести [1–7].

В настоящей статье рассматривается диффузионное влияние активной среды на оболочку и пластину, которые изготовлены из металлических материалов. Указанные типовые элементы находятся в условиях нестационарного длительного нагружения при воздействии на них высоких температур, которые вызывают в металлическом материале процессы ползучести. С учетом накопления повреждений такие процессы с течением времени приводят к разрушению элементов конструкций.

Исследования по этим направлениям актуальны и имеют как фундаментальный, так и прикладной характер при расчете элементов конструкций энергетического и авиационно-космического назначения.

1. Дробно-линейная модель ползучести. Для описания ползучести металлов и сплавов в одномерном случае наибольшее распространение получила степенная зависимость скорости установившейся ползучести $\dot{\rho}$ от напряжения σ , которая имеет вид

$$\dot{\rho} = \alpha \sigma^n, \quad \alpha = \text{const}.$$

Она достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные в выбранном узком диапазоне напряжений для широкого класса металлических материалов и сплавов, но, как отмечал Ю. Н. Работнов [1], если брать достаточно широкий диапазон напряжений, то показатель степени n становится зависящим от напряжения σ .

Одним из возможных вариантов соотношений для описания процессов ползучести является дробно-линейная зависимость [8], которая в ряде случаев позволяет достаточно хорошо выразить скорость ползучести как функцию от напряжения в широком диапазоне напряжений. С. А. Шестериков и М. А. Юмашева предложили использовать такую зависимость в следующем виде:

$$\dot{\rho} = \beta \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_b - \sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \beta = \text{const},$$

где σ_0 — предел ползучести (при $\sigma < \sigma_0$ деформация ползучести практически отсутствует), во многих случаях можно принять $\sigma_0 = 0$; σ_b — предел кратковременной прочности при соответствующей температуре испытания.

При напряжениях, близких к σ_b , скорость деформации ползучести $\dot{\rho}$ существенно возрастает, и в рассматриваемые времена наступает разрушение. Таким образом, в указанном дробно-линейном соотношении напряжение σ_b выполняет роль предельного напряжения. В отличие от стандартной степенной зависимости, где напряжение может выбираться сколь угодно большим, в данной сингулярной зависимости напряжение ограничено величиной σ_b , что является более обоснованным с физической и механической точек зрения.

Качественный график зависимости, предложенной С. А. Шестериковым и М. А. Юмашевой, при $\sigma_0 = 0$ представлен на рис. 1.

2. Диффузия активной среды. Приближенный метод решения уравнения диффузии. Для анализа процесса диффузии активной окружающей среды внутрь

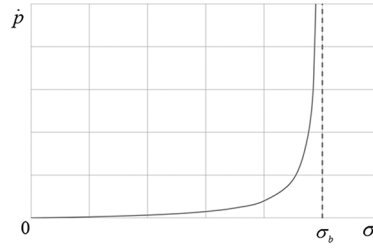


Рис. 1. Дробно-линейная зависимость скорости деформации ползучести от напряжения при $\sigma_0 = 0$

материала предлагается приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта, распространяющегося от поверхности пластины или оболочки (далее по тексту пластина и оболочка обозначены как типовой элемент) [2, 5, 6]. Такой подход позволяет разделить все поперечное сечение типового элемента на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную (где еще нет проникновения среды) области и затем отслеживать во времени движение границы между этими областями. Зависимость концентрации c активной среды в материале типового элемента от времени аппроксимируется в виде полинома, причем граничные и начальные условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем поперечном сечении типового элемента.

В дальнейшем для анализа влияния агрессивной среды на время до разрушения типового элемента будет использована безразмерная интегрально средняя концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$, которая получена с использованием указанного приближенного метода и имеет вид

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) dz = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\bar{t}} & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1, \\ 1 - \frac{2}{3} \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] & \text{при } \bar{t} > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь введены безразмерные переменные $\bar{z} = 2z/H$, $\bar{t} = 48Dt/H^2$, $\bar{c} = c/c_0$, где z — координата вдоль толщины стенки типового элемента ($z = 0$ на срединной линии поперечного сечения пластины или оболочки, $z > 0$ на выпуклой стороне пластины); t — время; c_0 — постоянная концентрация на границе материала типового элемента и внешней активной среды; $D = \text{const}$ — коэффициент диффузии.

3. Цилиндрическая оболочка. Постановка задачи. Рассмотрим длинную тонкостенную цилиндрическую оболочку без дна с радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки H . Пусть эта оболочка находится под действием растягивающей осевой силы P и внутреннего давления Q . Оболочка находится в активной среде. Влияние активной среды определяется диффузионным проникновением ее элементов внутрь материала. Рассматривается одномерный диффузионный процесс. Кривизна тонкостенной оболочки мала и отношение толщины стенки оболочки к ее радиусу много меньше единицы. Этот факт позволяет с высокой степенью точности рассматривать диффузию среды в стенку оболочки как диффузию в плоскую пластину.

Задача является статически определимой и напряженное состояние определяется только внешними нагрузками. Напряженное состояние в оболочке является плоским

(с нулевым радиальным напряжением σ_{rr}) и однородным (напряженное состояние одно и то же и не зависит от пространственных координат).

3.1. Дробно-линейная модель ползучести. Учет влияния активной среды. Определение компонент напряженно-деформированного состояния. Компоненты тензора напряжений получены из уравнений равновесия элементарного объема тела (уравнения теории оболочек [9]):

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi RH}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{RQ}{H}. \quad (2)$$

Учет влияния активной среды произведен путем введения в дробно-линейное определяющее соотношение функции от интегрально средней концентрации активной среды $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ в материале оболочки [6, 8]:

$$\dot{\rho}_u = \frac{A\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (3)$$

где $\dot{\rho}_u$ — интенсивность скоростей деформаций ползучести, здесь и далее точка над соответствующим символом означает производную по времени $\bar{t}$; σ_u — интенсивность напряжений; A — материальная константа. В дальнейших расчетах будем использовать линейный вид функции $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$:

$$f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a\bar{c}_m(\bar{t}), \quad f(0) = 1, \quad (4)$$

где a — константа, определяемая из экспериментов по длительной прочности с учетом влияния окружающей активной среды [4, 10].

Примем следующие гипотезы: деформации малы, несжимаемость материала, упругопластическими деформациями пренебрегаем по сравнению с деформациями ползучести. С дополнительным учетом гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести для несжимаемого тела [1, 2] получим выражения для компонент скоростей осевой $\dot{\rho}_{zz}$ и окружной $\dot{\rho}_{\theta\theta}$ деформации ползучести:

$$\dot{\rho}_{zz} = \frac{Af(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b - \sigma_u} \left(\sigma_{zz} - \frac{1}{2}\sigma_{\theta\theta} \right), \quad \dot{\rho}_{\theta\theta} = \frac{Af(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b - \sigma_u} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\sigma_{zz} \right). \quad (5)$$

В результате соотношения (2) и (5) определяют напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки с учетом использования дробно-линейной модели ползучести.

3.2. Дробно-линейная модель длительного разрушения. Учет влияния активной среды. Скалярный и векторный параметры поврежденности. Критерии разрушения. Для определения времени до разрушения оболочки используем кинетическую теорию ползучести и длительной прочности Ю. Н. Работнова [1] и введем в кинетические уравнения функцию от интегрально среднего уровня концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$. Кинетическое уравнение при учете скалярного параметра поврежденности рассмотрим в следующем виде [6]:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\bar{t}} = \frac{C\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \omega(\bar{t} = 0) = 0. \quad (6)$$

Критерием разрушения является достижение параметром поврежденности $\omega^*(\bar{t} = \bar{t}_\omega^*) = 1$ значения, равного единице в момент времени $\bar{t} = \bar{t}_\omega^*$.

Как вариант развития моделирования накопления повреждений в условиях длительного высокотемпературного нагружения можно в качестве параметра поврежденности взять вектор $\mathbf{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ [11, 12], компоненты которого связаны с пространством

главных напряжений σ_i ($i = 1, 2, 3$). В настоящей работе оси введенной цилиндрической системы координат (z, θ, r) являются главными осями напряженно-деформированного состояния. Поскольку в рассматриваемой оболочке напряженное состояние плоское и однородное, кинетические уравнения при учете векторного параметра поврежденности Ω [11, 12] примем в следующем виде [6]:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{d\Omega}{dt} = \begin{cases} \frac{C\sigma_i}{\sigma_b - \sigma_i} f(\bar{c}_m(\bar{t})) \text{ при } \sigma_i > 0, \\ 0 \text{ при } \sigma_i \leq 0, \end{cases} \quad i = z, \theta, \quad (7)$$

где Ω_i — проекция вектора поврежденности на i -ю ось системы координат.

Критерием разрушения является достижение длиной Ω вектора Ω значения, равного единице:

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_z)^2 + (\Omega_\theta)^2}, \quad \Omega(\bar{t} = 0) = 0, \quad \Omega^* = \Omega(\bar{t} = \bar{t}_\Omega^*) = 1.$$

В настоящей работе рассмотрены две программы нестационарного нагружения оболочки: раздельная и комбинированная во времени.

В раздельной программе сначала к рассматриваемой длинной цилиндрической оболочке прикладывается внутреннее давление $Q > 0$ в течение времени $0 < \bar{t} \leq \bar{t}_1$. Примем $\bar{t}_1 = 0,5\bar{t}_1^*$ (где $\bar{t}_1^*$ — время до разрушения рассматриваемой оболочки при действии только этого внутреннего давления Q), при этом осевая растягивающая сила $P = 0$. Затем в течение времени $\bar{t}_1 < \bar{t} < \bar{t}^*$ (где $\bar{t}^*$ — время до разрушения оболочки в конце программы нагружения) к рассматриваемой оболочке прикладывается осевая растягивающая сила $P > 0$, при этом внутреннее давление равно нулю (т.е. выполняются условия $Q = 0, P > 0$).

Комбинированная программа отличается тем, что осевая сила $P > 0$ действует на обеих стадиях нагружения, при этом действие внутреннего давления аналогично по стадиям раздельной программы нагружения. Дополнительно принимается условие $P = 2\pi R^2 Q$.

3.3. Анализ полученных результатов. В результате расчета были получены безразмерные времена до разрушения при раздельной и комбинированной программах нагружения с использованием скалярного параметра поврежденности $\bar{t}_\omega^* = 0,614$ и с использованием векторного параметра поврежденности $\bar{t}_\Omega^* = 0,817$. Отношение времен до разрушения равно $\xi = \bar{t}_\Omega^* / \bar{t}_\omega^* = 1,33$. Таким образом, время до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности превышает время до разрушения, полученное при использовании скалярного параметра поврежденности.

При выбранном условии $P = 2\pi R^2 Q$ времена до разрушения цилиндрической оболочки при раздельной и комбинированной программах нагружения совпадают. Это справедливо как при применении скалярного, так и векторного параметров поврежденности. При таком как $P = 2\pi R^2 Q$ зависимом друг от друга задании внешних нагрузок безразмерные параметры $\bar{C} = (\sigma_b H - RQ)/(RQ)$ и $\bar{P} = P/(2\pi R H \sigma_b - P)$ должны удовлетворять условию $\bar{C}\bar{P} = 1$.

При независимом задании рассматриваемых внешних нагрузок безразмерные параметры $\bar{C}$ и $\bar{P}$ задаются независимо друг от друга.

4. Пластина при нестационарном сложном напряженном состоянии. Дробно-линейная модель ползучести и длительной прочности с учетом влияния активной среды. Определение времени до разрушения. Аналогичные гипотезы, подходы (дробно-линейная модель, приближенный метод решения уравнения

диффузии, скалярный и векторный параметры поврежденности) были применены при исследовании длительного разрушения пластины в активной среде. В соответствии с постановкой задачи пластина находится в условиях нестационарного сложного напряженного состояния при кусочно-постоянном действии изгибающих моментов M_1 и M_2 , распределенных по взаимно ортогональным краям пластины [6]. В табл. 1 приведены результаты расчета времен до разрушения $\bar{t}_\omega^*$ и $\bar{t}_\Omega^*$ при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности соответственно для различных значений $\zeta = M_2/M_1$.

Таблица 1. Времена до разрушения для различных значений ζ

$\zeta = M_2/M_1$	$\bar{t}_\omega^*$	$\bar{t}_\Omega^*$
1,5	0,107	0,123
1	0,160	0,205
0,5	0,292	0,407

На рис. 2 приведены зависимости поврежденности от времени при значениях $\zeta = 0,5, 1, 1,5$, полученные при скалярном $\omega(\bar{t})$ (сплошные кривые) и векторном $\Omega(\bar{t})$ (штриховые кривые) параметрах поврежденности. В интервале времени $0 < \bar{t} < \bar{t}_1$ (в результате расчета получено значение $\bar{t}_1 = 0,08$) графики для поврежденности, полученные с использованием скалярного и векторного подходов, совпадают.

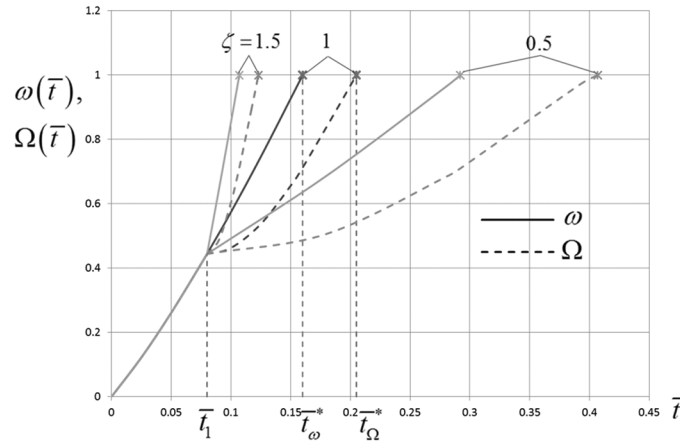


Рис. 2. Зависимости поврежденности от времени при скалярном и векторном подходах

5. Заключение. Проведено сравнение времен до разрушения типовых элементов конструкций (оболочки и пластины) при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности. Время $\bar{t}_\Omega^*$ до разрушения при использовании векторного параметра поврежденности превышает время $\bar{t}_\omega^*$ до разрушения, полученное при использовании скалярного параметра поврежденности. Отношение времен до разрушения оболочки равно $\xi = \bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1,33$.

Проведенное исследование показывает различие механизмов накопления повреждений при длительном высокотемпературном нагружении. Полученный результат подтверждает аналогичные результаты, полученные авторами статьи [6] и показанными

в п. 4 настоящей статьи при исследовании длительного нестационарного нагружения пластины во взаимно ортогональных плоскостях. В указанной работе [6] отношения времен до разрушения $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^*$ в зависимости от соотношения величин изгибающих моментов находятся в диапазоне $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1,15 \div 1,39$.

Настоящее исследование имеет как фундаментальный характер, так и прикладной аспект. Предлагаемые подходы и результаты исследования могут быть применены в энергетической, химической и авиационно-космической отраслях промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
- [2] Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва: Физматлит, 2016. 504 с. [Перевод: Lokoshchenko A. M. Creep and Long-Term Strength of Metals. Boca-Raton, London, New York: CISP; CRC Press; Taylor & Francis Group, 2018. 546 p.].
- [3] Локощенко А. М., Фомин Л. В. Моделирование поведения материалов и элементов конструкций, находящихся под воздействием агрессивных сред (обзор) // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Т. 80, № 2. С. 145–179.
- [4] Фомин Л. В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. “Физ.-мат. науки”. 2013. № 3(32). С. 87–97.
- [5] Fomin L. V. Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment // Mechanics of Composite Materials. 2017. Vol. 52(6). P. 741–750.
- [6] Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 60. P. 478–489.
- [7] Фомин Л. В., Басалов Ю. Г., Локощенко А. М. Об учете влияния коррозионных процессов на длительное разрушение стержня, находящегося в условиях ползучести // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25, № 3. С. 327–335.
- [8] Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–92.
- [9] Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells: 2th edition. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
- [10] Одинг И. А., Фридман З. Г. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // Заводская лаборатория. 1959. Т. 25, № 3. С. 329–332.
- [11] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974. 312 с.
- [12] Наместникова И. В., Шестериков С. А. Векторное представление параметра поврежденности // Деформирование и разрушение твердых тел: сб. трудов Института механики МГУ. Москва: Изд-во Московского университета, 1985. С. 43–52.

L. V. Fomin

ON APPLICATION OF A LINEAR FRACTIONAL CREEP AND CREEP RUPTURE STRENGTH MODEL IN SIMULATION OF LONG-TERM DESTRUCTION OF TYPICAL STRUCTURAL ELEMENTS IN AN ACTIVE MEDIUM

Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. The long-term destruction of the shell and plate during creep in the active medium under the conditions of an unsteady complex stress state is investigated. The influence of the medium on the time to fracture is taken into account by introducing a function of the integral average concentration of the medium into the constitutive and kinetic linear-fractional relationships. Comparison of the times to failure using the scalar and vector damage parameters is carried out. The features of using a linear-fractional model to describe long-term fracture processes are determined.

Keywords: creep, unsteady loading, long-term fracture, linear fractional model, scalar damage parameter, vector damage parameter, shell, plate.

REFERENCES

- [1] Rabotnov Y. N. Creep Problems in Structural Members. Amsterdam: North-Holland, 1969.
- [2] Lokoshchenko A. M. Creep and Long-Term Strength of Metals. London. New York: CISP. CRC Press. Taylor Francis Group. Boca. Raton., 2018. 546 p.
- [3] Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Modeling the behavior of materials and structural elements exposed to aggressive media (review) // Strength Plast. Prob. 2018. Vol. 80, no. 2. P. 145–179.
- [4] Fomin L. V. Description of the long-term strength of stretchable rods of rectangular and round cross-sections in high-temperature air // J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci. 2013. no. 3(32). P. 87–97.
- [5] Fomin L. V. Steady-state creep of a composite rod in tension in the presence of an aggressive environment // Mechanics of Composite Materials. 2017. Vol. 52(6). P. 741–750.
- [6] Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 60. P. 478–489.
- [7] Fomin L. V., Basalov Y. G., Lokoshchenko A. M. On taking into account the influence of corrosion processes on the long-term fracture of a rod under creep conditions // Mech. Compos. Mater. Struct. 2019. Vol. 25, no. 3. P. 327–335.
- [8] Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. More precise specification of the equation of state in creep theory // Mechanics of Solids. 1984. Vol. 19, no. 1. P. 81–85.
- [9] Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells: 2th edition. New York: McGraw-Hill, 1959. 595 p.
- [10] Oding I. A., Fridman Z. G. Role of surface layers during delayed fracture of metals under creep condition // Industrial Laboratory. 1959. Vol. 25, no. 3. P. 329–332.
- [11] Kachanov L. M. Foundations of the Mechanics of Damage. Moscow: Nauka, 1974. 312 p.
- [12] Namestnikova I. V., Shesterikov S. A. Vector representation of damage parameter. Deformation and destruction of solids // Proceedings of the Institute of Mechanics of Moscow State University. Moscow: Publishing House of Moscow University, 1985. P. 43–52.

Fomin Leonid Victorovich, Candidate Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher, Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.