

Физический факультет

На правах рукописи

ОРЛОВ Андрей Олегович

**ПЕРЕХОДНЫЕ СЛОИ В ЗАДАЧАХ
РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С РАЗРЫВНЫМ РЕАКТИВНЫМ
ЧЛЕНОМ**

01.01.03 — математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата

физико–математических наук

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук,

профессор Н.Н. НЕФЕДОВ

Москва — 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	6
1 Обзор литературы	14
1.1 Прикладные работы	14
1.2 Контрастные структуры типа ступеньки в сингулярно воз- мущенных задачах	15
1.3 Метод согласования (сращивания) асимптотических разло- жений	18
1.4 Метод дифференциальных неравенств	19
2 Стационарное уравнение реакция-диффузия с разрывным реактивным членом в одномерном случае	22
2.1 Постановка задачи	23
2.2 Асимптотическое представление решения	27
2.2.1 Регулярная часть	28
2.2.2 Функции переходного слоя нулевого порядка	29
2.2.3 Функции переходного слоя первого порядка	31
2.2.4 Пограничные функции	32
2.3 Существование решения	32

2.3.1	Построение верхнего и нижнего решения	33
2.4	Асимптотическая устойчивость стационарного решения. . .	38
3	Стационарное уравнение реакция-диффузия с разрывным реактивным членом в двумерном случае	43
3.1	Постановка задачи	44
3.2	Построение асимптотического приближения решения. . . .	48
3.3	Регулярная часть асимптотического приближения.	50
3.4	Функции переходного слоя.	51
3.4.1	Функции переходного слоя нулевого порядка	53
3.4.2	Функции переходного слоя первого порядка	55
3.4.3	Функции переходного слоя произвольного порядка . . .	57
3.4.4	Функции пограничного слоя	57
3.5	Асимптотическое приближение решения	58
3.6	Существование решения эллиптической задачи	58
3.7	Асимптотическая устойчивость и локальная единственность стационарного решения	65
3.8	Пример	68
3.9	Результаты численного эксперимента	71
4	Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками	72
4.1	Постановка задачи	73
4.2	Асимптотическое приближение решения.	77

4.3	Регулярная часть асимптотического приближения.	79
4.4	Функции переходного слоя.	80
4.4.1	Функции переходного слоя нулевого порядка	82
4.4.2	Функции переходного слоя первого порядка	85
4.4.3	Функции переходного слоя произвольного порядка	87
4.5	Функции пограничного слоя	88
4.6	Асимптотическое приближение решения	88
4.7	Существование решения периодической задачи	89
4.8	Локальная единственность и устойчивость решения периодической задачи	95
4.8.1	Существование решения начально-краевой задачи	95
4.8.2	Единственность и локальная устойчивость решения периодической задачи	98
4.9	Пример	100
5	Параболическая задача для уравнения реакция-диффузия с источником модульно-кубического типа	104
5.1	Постановка задачи	105
5.2	Построение асимптотики	108
5.2.1	Асимптотическое приближение решения	108
5.2.2	Асимптотическое приближение для кривой переходного слоя	114
5.2.3	Случай несбалансированной реакции	117
5.2.4	Случай баланса реакции	120
5.3	Обоснование построенной асимптотики	125

5.3.1	Критический случай	129
5.4	Асимптотическая устойчивость решения.	131
5.5	Пример периодической контрастной структур типа ступень-	
	ки	134
5.5.1	Несбалансированный случай	134
5.5.2	Случай баланса разрывной реакции	137
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		141
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		143

Введение

В настоящей работе исследуется ряд краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений типа реакция-диффузия в случае разрыва реактивного слагаемого.

Актуальность темы

В последние годы, в связи с потребностью таких областей научного знания, как биофизика, химическая кинетика, астрофизика, геология, физика полупроводников и т.д., возрастает интерес к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям. Такие уравнения являются эффективными инструментами математического моделирования, поскольку с их помощью можно описывать физические величины, резко изменяющиеся от одного уровня насыщения до другого, при этом особое внимание уделяя области перехода [1]–[22].

Является известным тот факт, что некоторые дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной допускают решения вида контрастных структур [23]. Контрастной структурой принято называть функцию, внутри области определения которой присутствует интервал, на котором наблюдается резкое изменение значений этой функции. Данная область называется внутренним переходным сло-

ем. Решения, содержащие внутренний переходный слой, подходят для описания физических явлений в областях, в которых характеристики сред претерпевают резкие изменения. К таким явлениям относятся, например, явление изменения температуры жидкости на границе раздела вода-воздух [3], скорости воздушных потоков или газовых концентраций на границах различных типов растительности [4]. Разработанные в диссертации подходы были успешно применены автором при описании "пикообразного" поведения волновых функций носителей на границе раздела двух сверхпроводников. Большой интерес представляют также нестационарные контрастные структуры, которые с успехом применяются при моделировании динамики автоволнового фронта в моделях биофизики [2], [7].

Нельзя не отметить активно развивающуюся область численно-аналитических методов. На основе априорной информации, полученной в результате асимптотического анализа задач с внутренними переходными слоями удастся разработать эффективные и экономичные численные алгоритмы решения как прямых, так и некоторых классов обратных задач [24]–[26].

Одними из основных методов исследования как стационарных, так и нестационарных контрастных структур являются метод пограничных функций и метод дифференциальных неравенств. Метод пограничных функций, позволяющий строить равномерные асимптотические разложения решения по степеням малого параметра, был предложен в работе А. Б. Васильевой [27], и получил дальнейшее развитие в работе [28].

Асимптотический метод дифференциальных неравенств, развитый в работах Н. Н. Нефедова [29]–[31], является эффективным методом доказательства теорем существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости решений с внутренними переходными слоями. В настоящей работе оба указанных метода развиваются на новый класс задач с разрывными нелинейностями.

Степень разработанности темы исследования

Первые результаты в направлении исследования внутренних переходных слоев были получены профессором А. Б. Васильевой для двухточечной краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad u(0, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, \varepsilon) = u^1, \quad (0.1)$$

где ε - малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ - искомая скалярная функция. Было доказано, что при определенных условиях на правую часть u задачи существует решение близкое при малых ε к корню $u = \varphi_1(x)$ вырожденного уравнения $f(u, x, \varepsilon) = 0$ левее некоторой точки x_0 , и близкого к корню $u = \varphi_2(x)$ вырожденного уравнения правее x_0 , а также с помощью метода пограничных функций построена его асимптотика. Полученное решение удовлетворит предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \leq x < x_0 \\ \varphi_2(x), & x_0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Дальнейшее развитие теории контрастных структур отражено в обзорах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефедова [32], [33].

Цели и задачи исследования

Целью настоящей работы является исследование контрастных структур в сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия в случае разрыва реактивного слагаемого. Рассматриваемые задачи:

- Одномерная и двумерная по пространственной переменной эллиптическая краевая задача с решением, содержащим внутренний переходный слой.
- Двумерная по пространственной переменной параболическая периодическая краевая задача с решением, содержащим внутренний переходный слой в произвольной односвязной области с гладкой границей.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- Разработать алгоритм построения асимптотических разложений для данного класса задач.
- Определить условия, при которых в рассматриваемых задачах существуют гладкие решения, содержащие внутренний переходный слой. Провести строгое обоснование существования решений, обладающих построенной асимптотикой.
- Доказать теоремы о локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарных решений указанных задач. Определить локальные области притяжения устойчивых стационарных решений.

- Разработать примеры, иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Научная новизна

Научная новизна заключается в том, что в работе

- Метод пограничных функций модифицирован и обобщен, и впервые применен для уравнения реакция диффузия с разрывным реактивным слагаемым. В результате построена формальная асимптотика вида контрастной структуры.
- Для указанных выше задач проведено доказательство корректности построенной асимптотики, доказаны теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Данные результаты получены путем развития метода дифференциальных неравенств для данного класса задач.

Теоретическая и практическая значимость

Практическая значимость работы состоит в том, что ее результаты могут быть использованы при построении математических моделей в теории нелинейных волн, акустике, физике полупроводников, биофизике, а также в других областях естественных наук, в которых при моделировании возникает необходимость описания скачкообразно изменяющихся величин.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов теории сингулярных возмущений на новый класс задач с разрывными нелинейностями. Теоретические результаты также могут быть использованы при разработке численно-аналитических методов исследования как

стационарных, так и движущихся внутренних переходных слоев: алгоритмы, предлагаемые в диссертации, позволяют получать информацию о локализации и структуре внутреннего переходного слоя, что позволяет строить динамически адаптивные сетки, параметры которых определяются на основе информации, получаемой аналитически в процессе асимптотического анализа задачи.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе используются два классических метода асимптотической теории контрастных структур. Для построения асимптотических приближений рассматриваемых задач применяется метод пограничных функций Васильевой А. Б. Для доказательства теорем существования и асимптотической устойчивости применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств, который основан на теоремах сравнения для эллиптических и параболических задач, использующий предварительно построенную формальную асимптотику.

Положения, выносимые на защиту

- Существуют решения в виде контрастных структур для сингулярно возмущенных задач реакция-диффузия в случае разрыва реактивного члена.
- Полученный в ходе написания работы алгоритм позволяет построить асимптотические разложения по малому параметру решений одномерных и двумерных задач, которые содержат внутренний переходный слой.

- Теоремы существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову гладких решений задач реакция-диффузия с разрывными реактивными слагаемыми, содержащих внутренний переходный слой в окрестности разрыва, справедливы для каждой из рассмотренных в диссертации задач.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Результаты работы были доложены на следующих конференциях: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015 (2015, Новосибирск), Тихоновские Чтения 2015 года (2015, Москва), Тихоновские Чтения 2016 года (2016, Москва), International Conference on Mathematical Modeling in Applied Sciences (2017, Санкт-Петербург), Ломоносовские чтения - 2018 (2018, Москва), Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (2018, Ярославль), Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Пятая Международная конференция, посвященная 95-ти летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Л.Д. Кудрявцева.(2018, Москва), 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS'19 (2019, Белгород), Динамика. 2019. Ярославль (2019, Ярославль), Тихоновские Чтения 2019 года (2019, Москва).

Личный вклад автора

Основные идеи и положения работы изложены в 18 публикациях ав-

тора (общим объемом 4,7 п.л.), из них 6 статей в рецензируемых научных изданиях (см. [34]–[39] в списке публикаций ниже), рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.03 — математическая физика. В написанных в соавторстве работах все результаты, представленные в диссертации, получены лично Орловым А.О.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации – 164 страницы, диссертация содержит 6 рисунков, список литературы включает в себя 106 наименований.

Глава 1

Обзор литературы

1.1 Прикладные работы

Большое количество прикладных задач приводит к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям, решения которых содержат внутренний переходный слой.

Так в работе [3] впервые теория контрастных структур была применена при описании изменения температуры жидкости на границе вода-воздух. Проанализирована начально-краевая задача для уравнения теплопроводности, причем как коэффициент теплообмена, так и функция, описывающая источники в системе, претерпевают разрывы первого рода в некоторых точках рассматриваемой области. Используя асимптотический анализ поставленной задачи, а также численный счет на установление, авторам удалось провести моделирование распределения температуры в приграничном слое воды толщиной 10 см. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Работы [4]–[6] посвящены разработке математической модели турбу-

лентного переноса воздушных масс в присутствии растительной неоднородности на основе теории контрастных структур. Такой подход позволяет не только провести замыкание системы уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности без привлечения дополнительных уравнений, но и обосновать выбранную в модели кубическую нелинейность. Полученные результаты хорошо объясняют наличие резких переходных слоев на границах раздела двух сред с различной кинематической вязкостью.

Сингулярно возмущенные параболические уравнения широко используются в биофизике. Оригинальная идея сочетания теории контрастных структур и теории активных сред находит свое применение при моделировании процессов образования мегаполисов [2],[7]. Полученные результаты позволяют прогнозировать процессы урбанизации как у нас в России, так и за рубежом [5]. Стоит отметить, что использование асимптотического анализа модифицированной системы автоволновых уравнений позволяет сформулировать условия устойчивости решений модельных задач, тем самым повышая достоверность полученных численных результатов.

1.2 Контрастные структуры типа ступеньки в сингулярно возмущенных задачах

В последние годы наблюдается интерес к изучению нелинейных сингулярно возмущенных задач, решения которых имеют резкие внутренние переходные слои. Решения такого типа в литературе принято называть

контрастными структурами типа ступеньки.

В работе [29] рассматривается двумерный аналог (см. параграф "Степень разработанности темы исследования") двухточечной краевой задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta u = f(u, x, \varepsilon), & x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \\ u(x, \varepsilon) = g(x), & x \in \partial D, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, функции f, g и граница области ∂D предполагаются достаточно гладкими. Существенным достижением данной работы было применение нового эффективного способа обоснования существования решения типа контрастной структуры, который получил название асимптотического метода дифференциальных неравенств. Основная идея этого метода базируется на том, что построение верхнего и нижнего решений задачи проводится с помощью модификации построенной формальной асимптотики. Информацию о современном состоянии теории контрастных структур можно получить из обзоров А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефедова [32], [33].

В работах [40]–[42] рассматривается зависимость правой части уравнения от адвективного члена вида $\varepsilon \nabla u$.

В ряде работ рассматриваются начально-краевые сингулярно возмущенные задачи для параболических уравнений типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция. Первая работа [43] по данной тематике посвящена исследованию движения фронта в параболической задаче

реакция-диффузия

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, x, t, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), \quad t \in T, \\ u(x, 0) &= u_{init}(x), \quad u(0, t) = u^0, \quad u(1, t) = u^1.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Двумерное обобщение задачи приводится в [44]. Исследование влияние адвекции на движение фронта в двумерном случае устанавливается в [45]–[46]. Стоит отметить, что по сравнению с ранними публикациями по движущимся внутренним переходным слоям, в данных работах алгоритм установления уравнения движения фронта был существенно модифицирован, что привело к упрощению процесса построения формальной асимптотики.

В статьях [47]–[50] изучаются периодические контрастные структуры для уравнения реакция-диффузия-адвекция, в которых реактивный член преобладает по сравнению с другими (случай быстрой реакции), а адвективный либо мал, либо отсутствует

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \varepsilon^i A(u, x, t, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} - F(u, x, t, \varepsilon) &= 0, \\ (x, t) \in D &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) &= u^0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = u^1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon), \quad (x, t) \in \bar{D}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

В работах [47],[48] изучается случай $i = 2$, доказывается существование решения с внутренним переходным слоем в случаях сбалансированной и несбалансированной нелинейности, доказывается асимптотическая устойчивость периодического по времени решения на основании теоремы

Крейна-Рутмана. В работе [49] анализируется задача при $i = 1$ - случай так называемой слабой адвекции. Двумерная периодическая контрастная структура в уравнении реакция-диффузия в случаях сбалансированной и несбалансированной нелинейности изучается в работе [50].

1.3 Метод согласования (сращивания) асимптотических разложений

Фундаментальной задачей асимптотических методов является не только нахождение эффективных алгоритмов построения асимптотических разложений решений поставленных задач, но и обоснование их корректности. Одним из способов доказательства существования решения вида контрастной структуры является метод согласования (сращивания), основные идеи которого обсуждаются в монографии В. А. Ильина [51]. Основная идея метода состоит в том, что приближенное решение задачи строится не в виде единого разложения по степеням малого параметра на всем отрезке, а в виде нескольких отдельных разложений на каждом из отрезков $[0, \hat{x}]$ и $[\hat{x}, 1]$. Далее, опираясь на теоремы существования погранслойных решений на каждом из указанных отрезков, демонстрируют возможность гладкого сшивания полученных разложений в точке $\hat{x}$, тем самым обосновывая существование контрастной структуры на всем отрезке $[0, 1]$. Он широко использовался А.Б. Васильевой для исследования одномерных контрастных структур. К недостаткам метода можно отнести невозможность его применения при доказательстве суще-

ствования многомерных контрастных структур. Он был использован при обосновании существования решений с внутренним переходным слоем в задачах для стационарного одномерного уравнения реакция-диффузия: случай, когда нелинейность которого претерпевает разрыв во внутренней точке отрезка был проанализирован в публикации [52]; случай разрывного коэффициента температуропроводности был рассмотрен в [53].

1.4 Метод дифференциальных неравенств

Математические модели многих прикладных задач сводятся к исследованию эллиптических и параболических задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - Lu &= f(u, M, t), \quad M \in D, \quad 0 < t < T, \\ Bu(s, t) &= h(s, t), \quad s \in \partial D, \quad u(M, 0) = u^0(M), \end{aligned} \quad (1.4)$$

и

$$\begin{aligned} Lu &= f(u, M), \quad M \in D, \\ Bu(s) &= h(s), \quad s \in \partial D \end{aligned} \quad (1.5)$$

В системах (1.4), (1.5) L – дифференциальный оператор 2 порядка, B – оператор граничного условия. Они имеют вид:

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad x = (x^1, \dots, x^n).$$

$$B = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x), \quad x \in \partial D,$$

$\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к области D , $\beta(x) \geq 0$ всюду в области D .

Метод дифференциальных неравенств является одним из самых эффективных методов прежде всего для доказательства разрешимости по-

ставленных задач (1.4), (1.5), а также при исследовании устойчивости по Ляпунову их решений.

Его суть состоит в построении функций называемых верхним и нижним решениями задач (1.4), (1.5), удовлетворяющих специальной системе дифференциальных неравенств. Дадим определения верхнего и нижнего решений, например, для задачи (1.5).

Определение 1.4.1 ([54]) *Гладкая функция u_0 является верхним решением задачи (1.5), если*

$$Lu_0 + f(x, u_0) \leq 0, \quad Bu_0 \geq 0;$$

Аналогично v_0 является нижним решением задачи (1.5), если

$$Lv_0 + f(x, v_0) \geq 0, \quad Bv_0 \leq 0.$$

Основы метода в случае гладких нелинейностей были заложены в работах [55]–[57]. Различные подходы к изучению эллиптических и параболических задач в случае негладких нелинейностей можно найти в работах [58], [59]. При этом в данных работах доказывались теоремы о существовании непрерывного решения с использованием негладких верхнего и нижнего решений, также изучалась проблема существования минимального и максимального решения. В. Н. Павленко заложил основы теории эллиптических и параболических уравнений с разрывными нелинейностями. Наиболее общие теоремы о существовании сильных решений задач (1.4), (1.5) в случае негладких коэффициентов отражены в работах [60]–[64].

В работах Нефедова Н.Н. [30], [31], [65]–[69] метод дифференциальных неравенств развивается применительно к сингулярно возмущенным задачам реакция-диффузия. Суть метода заключается в том, что путем модификации формальной асимптотики строятся верхнее и нижнее решения. Этот метод получил название "асимптотический метод дифференциальных неравенств".

Из других наиболее мощных современных асимптотических методов, применяющихся при анализе задач математической физики, выделим следующие: метод осреднения [70]; метод регуляризации [71],[72]; методы школы Маслова В. П. [73]–[77].

Стоит отметить, что краевые задачи с разрывными нелинейностями тесно примыкают к задачам для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [78]–[82]. Поэтому идеи и методы, излагаемые в диссертации, впоследствии могут быть развиты для данного класса задач.

Глава 2

Стационарное уравнение реакция-диффузия с разрывным реактивным членом в одномерном случае

При подготовке данной главы диссертации использована публикация [38] автора, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

В главе рассматривается краевая задача для одномерного уравнения реакция-диффузия в одномерном случае. Особенностью рассматриваемой задачи является разрыв (первого рода) реактивного слагаемого (источника) в некоторой внутренней точке отрезка, на котором поставлена краевая задача, в результате чего решения обладают большими градиентами в узком переходном слое вблизи границы раздела. В главе сформулированы условия существования, локальной единственности и

асимптотической устойчивости стационарного решения, содержащего внутренний переходный слой. Для доказательства сформулированных теорем использован асимптотический метод дифференциальных неравенств. Аналогичная задача рассматривалась в работе [52], где было построено асимптотическое приближение решения и доказано существование решения с внутренним переходным при помощи метода сшивания погранслойных решений (подобный подход использовался, например, в [83]), однако вопрос об устойчивости исследован не был. Полученные условия существования и асимптотической устойчивости следует принимать во внимание при создании адекватных математических моделей, описывающих явления в средах с разрывными характеристиками. Результаты, полученные в данной главе, могут быть использованы для разработки эффективных методов численного решения дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = f(v, x, \varepsilon), & x \in (-1; 1), \quad t > 0; \\ \frac{dv}{dx}(\mp 1, t) = u^{(\mp)}, \quad v(x, 0) = v_{init}(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ - малый параметр.

Пусть выполнено следующее условие:

(A1) Функция $f(u, x, \varepsilon)$ определена на множестве

$\bar{\Omega} := (u, x, \varepsilon) \in I_u \times [-1; 1] \times (0; \varepsilon_0]$ и претерпевает разрыв первого рода вдоль отрезка прямой $\{u \in I_u, x = x_0\}$:

$$f(u, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, x, \varepsilon), & u \in I_u, \quad -1 \leq x \leq x_0 - 0, \\ f^{(+)}(u, x, \varepsilon), & u \in I_u, \quad x_0 + 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где $f^{(-)}(u, x, \varepsilon) \in C^3(I_u \times [-1; x_0] \times (0; \varepsilon_0])$, $f^{(+)}(u, x, \varepsilon) \in C^3(I_u \times [x_0; 1] \times (0; \varepsilon_0])$ и $f^{(-)}(u, x_0, \varepsilon) \neq f^{(+)}(u, x_0, \varepsilon)$, $u \in I_u$.

Определим области $D_T := (t, x) \in (0; T] \times (-1; 1)$,

$D_T^{(-)} := (t, x) \in (0; T] \times (-1; x_0)$, $D_T^{(+)} := (t, x) \in (0; T] \times (x_0; 1)$.

Определение 2.1.1 *Функция*

$$v(x, t, \varepsilon) \in C^{0,1}(\bar{D}_T) \cap C^{1,1}(D_T) \cap C^{1,2}(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)})$$

называется решением задачи (2.1), если она удовлетворяет уравнению (2.1) в каждой из областей $D_T^{(\mp)}$, а также условию в начальный момент времени и граничному условию.

Очевидно, что стационарное решение этой задачи является решением следующей задачи для стационарного уравнения реакция-диффузия:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1; 1), \quad \frac{du}{dx}(\mp 1, t) = u^{(\mp)}, \quad (2.2)$$

где $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ - малый параметр, решение которой определено аналогично решению задачи (2.1).

Определение 2.1.2 . Функция $u(x, \varepsilon) \in C^1(-1; 1) \cap C^2((-1; 1) \setminus x_0)$ называется решением задачи (2.2), если она удовлетворяет уравнению

(2.2) при $x \in (-1; x_0) \cup (x_0; 1)$, а также граничным условиям задачи (2.2).

Потребуем также выполнения следующего условия.

(A2) Пусть уравнение $f^{(-)}(u, x, 0) = 0$ имеет на отрезке $[-1; x_0]$ изолированное решение $\varphi^{(-)}(x)$, а уравнение $f^{(+)}(u, x, 0) = 0$ имеет на отрезке $[x_0; 1]$ изолированное решение $\varphi^{(+)}(x)$, причем выполнено неравенство $\varphi^{(-)}(x_0) < \varphi^{(+)}(x_0)$.

Пусть также выполнены неравенства

$$\begin{aligned} f_u^{(-)}\left(\varphi^{(-)}(x), x, 0\right) &> 0, \quad -1 \leq x \leq x_0, \\ f_u^{(+)}\left(\varphi^{(+)}(x), x, 0\right) &> 0, \quad x_0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Далее мы будем исследовать такое решение задачи (2.2), которое слева от точки x_0 близко к функции $\varphi^{(-)}(x)$, а справа от точки x_0 — к функции $\varphi^{(+)}(x)$ и резко изменяется от значений $\varphi^{(-)}(x)$ до значений $\varphi^{(+)}(x)$ в окрестности точки x_0 .

Для формулировки следующего условия введем так называемые присоединенные уравнения и присоединенные системы.

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(-)}(\tilde{u}, x_0, 0), \quad \xi < 0; \quad \frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(+)}(\tilde{u}, x_0, 0), \quad \xi > 0. \quad (2.3)$$

Каждое из присоединенных уравнений (2.3) эквивалентно присоединенной системе

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \Phi; \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0).$$

В силу условия (A2) каждая из точек $(\varphi^{(\mp)}(x_0), 0)$ является точкой покоя типа седла соответствующей присоединенной системы на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

Потребуем также выполнения следующего условия.

(A3)

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^p f^{(-)}(u, x_0, 0) du &> 0, \text{ при } \varphi^{(-)}(x_0) < p \leq \varphi^{(+)}(x_0), \\ \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^p f^{(+)}(u, x_0, 0) du &> 0, \text{ при } \varphi^{(-)}(x_0) \leq p < \varphi^{(+)}(x_0). \end{aligned}$$

При выполнении условий (A1) и (A3) на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ существуют сепаратрисы $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u})$, входящие, соответственно, в седла $(\varphi^{(\mp)}(x_0), 0)$ при $\xi \rightarrow \mp\infty$. Выражения для этих сепаратрис имеют следующий вид:

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}) = \left(2 \int_{\varphi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(\mp)}(u, x_0, 0) du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем функцию

$$H(\tilde{u}) := \Phi^{(-)}(\tilde{u}) - \Phi^{(+)}(\tilde{u}) = \left(2 \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0) du \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0) du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Потребуем выполнения еще одного условия.

(A4) Пусть существует величина $p_0 \in (\varphi^{(-)}(x_0); \varphi^{(+)}(x_0))$ – решение уравнения $H(\tilde{u}) = 0$, а также выполнено неравенство $f^{(-)}(p_0, x_0, 0) - f^{(+)}(p_0, x_0, 0) > 0$.

Уравнение $H(\tilde{u}) = 0$ эквивалентно уравнению вида

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0) du = \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0) du.$$

Несложно также получить, что

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) = 2 \frac{f^{(-)}(p_0, x_0, 0) - f^{(+)}(p_0, x_0, 0)}{(2 \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{p_0} f^{(-)}(u, x_0, 0) du)^{\frac{1}{2}} + (2 \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{p_0} f^{(+)}(u, x_0, 0) du)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.4)$$

Таким образом, из условия (A4) следует неравенство

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) > 0. \quad (2.5)$$

2.2 Асимптотическое представление решения

Построим асимптотическое приближение $U_1(x, \varepsilon)$ решения задачи (2.2) до первого порядка по малому параметру ε включительно. Функцию $U_1(x, \varepsilon)$ будем строить отдельно слева и справа от точки x_0 :

$$U_1(x, \varepsilon) = \begin{cases} U_1^{(-)}(x, \varepsilon), & -1 \leq x \leq x_0, \\ U_1^{(+)}(x, \varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Каждую из функций $U_1^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ будем представлять в виде суммы трех слагаемых

$$U_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, \varepsilon) + R^{(\mp)}(\eta^{(\mp)}, \varepsilon).$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ – регулярная часть разложения, функции $Q^{(\mp)}(\xi, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi)$ описывают поведение решения в окрестности точки x_0 , а функции $R(\eta^{(\mp)}, \varepsilon) = R_0(\eta^{(\mp)}) + \varepsilon R_1(\eta^{(\mp)})$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1; 1]$, $\eta^{(\mp)} = \frac{x \pm 1}{\varepsilon}$ – растянутые переменные, соответственно, вблизи точек $x = \mp 1$. Отметим, что в силу краевых условий Неймана $R_0(\eta^{(\mp)}) = 0$.

Будем непрерывно сшивать асимптотические представления $U_1^{(-)}$ и $U_1^{(+)}$ в точке x_0 :

$$U_1^{(-)}(x_0, \varepsilon) = U_1^{(+)}(x_0, \varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1. \quad (2.6)$$

Неизвестные коэффициенты p_0 и p_1 определим из условия непрерывного сшивания производных функций $U_1^{(-)}(x, \varepsilon)$ и $U_1^{(+)}(x, \varepsilon)$, в точке x_0 :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi}(0) + \varepsilon \frac{d\bar{u}_1^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) \right) = \\ & = \left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi}(0) + \varepsilon \frac{d\bar{u}_1^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0) \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2.1 Регулярная часть

Уравнения для функций регулярной части получаются согласно стандартному алгоритму [28] из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)} \right) = f^{(\mp)} \left(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}, x, \varepsilon \right) + O(\varepsilon^2).$$

Приравняв нулю коэффициенты при ε^0 в каждом из этих равенств, получим уравнения

$$f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, 0) = 0.$$

Учитывая условие (A2), положим

$$\bar{u}_0^{(\mp)} = \varphi^{(\mp)}(x).$$

Функции $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ являются решениями уравнений

$$f_u^{(\mp)} \left(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0 \right) \bar{u}_1^{(\mp)}(x) = -(\partial f^{(\mp)} / \partial \varepsilon)(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0),$$

которые также разрешимы согласно условию (A2).

2.2.2 Функции переходного слоя нулевого порядка

Уравнения для функций переходного слоя получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в правой и левой частях каждого из равенств

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)} \right) = f^{(\mp)} \left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi) + Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)}, x_0 + \varepsilon\xi, \varepsilon \right) \\ - f^{(\mp)} \left(\bar{u}_0^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\xi), x_0 + \varepsilon\xi, \varepsilon \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Граничные условия для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$, $i = 0, 1$ при $\xi = 0$ получаются, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра в условии (2.6) непрерывного сшивания функций $U^{(-)}(x, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0^{(-)}(x_0) + \varepsilon \bar{u}_1^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(0) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0) = \\ = \bar{u}_0^{(+)}(x_0) + \varepsilon \bar{u}_1^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(0) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0) = p_0 + \varepsilon p_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Потребуем также выполнения стандартного условия убывания функций переходного слоя на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (2.10)$$

Выделяя в равенствах (2.8), (2.9), (2.10) слагаемые при ε^0 , получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_0^{(\mp)}}{d\xi^2} = f^{(\mp)} \left(\varphi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}, x_0, 0 \right); \\ Q_0^{(-)}(0) + \varphi^{(-)}(x_0) = Q_0^{(+)}(0) + \varphi^{(+)}(x_0) = p_0, \quad Q_0^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Задача для функции $Q_0^{(-)}(\xi)$ рассматривается на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функции $Q_0^{(+)}(\xi)$ – на полупрямой $\xi \geq 0$.

Введем обозначения

$$\tilde{u}(\xi) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x_0) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi \leq 0; \\ \varphi^{(+)}(x_0) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi^{(-)}(\xi) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \leq 0; \\ \Phi^{(+)}(\xi) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Перепишем задачи (2.11) с учетом введенных обозначений:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, x_0, 0); \quad \tilde{u}(0) = p_0; \quad \tilde{u}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(x_0).$$

Уравнения для функции $\tilde{u}(\xi)$ на каждой из полупрямых $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$ совпадают с присоединенными уравнениями (2.3). Согласно условиям (A2) и (A3) существуют функции

$$\Phi^{(-)}(\xi) := \Phi^{(-)}(\tilde{u}(\xi)) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, \quad \xi \leq 0; \quad \text{и} \quad \Phi^{(+)}(\xi) := \Phi^{(+)}(\tilde{u}(\xi)) = \frac{d\tilde{u}}{d\xi}, \quad \xi \geq 0.$$

Функция $\tilde{u}$ при $\xi \leq 0$ является решением задачи

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \sqrt{2 \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, x_0, 0) du}, \quad \tilde{u}(0) = p_0,$$

а при $\xi \geq 0$ – решением задачи

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \sqrt{2 \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, x_0, 0) du}, \quad \tilde{u}(0) = p_0.$$

Известно (см., например, [28]), что справедливы следующие оценки:

$|\tilde{u}^{(\mp)}(\xi) - \varphi^{(\mp)}(x_0)| \leq C e^{-\varkappa|\xi|}$, где C и $\varkappa$ – не зависящие от ε положительные константы. Отсюда с учетом обозначений (2.12) следуют оценки для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi)$:

$$|Q_0^{(\mp)}(\xi)| \leq C e^{-\varkappa|\xi|}. \quad (2.13)$$

С использованием обозначений (2.12) условия сшивания производных (2.7) в порядке ε^{-1} принимают вид:

$$\Phi^{(-)}(0) = \Phi^{(+)}(0).$$

Из этого равенства следует уравнение $H(\tilde{u}(0)) = 0$, которое, согласно условию (A4) имеет решение $\tilde{u}(0) = p_0$.

2.2.3 Функции переходного слоя первого порядка

Введем обозначения

$$\bar{f}^{(\mp)}(x) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x), x, 0), \quad \tilde{f}^{(\mp)}(\xi) := f^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi), x_0, 0). \quad (2.14)$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$, $\bar{f}_x^{(\mp)}(x)$, $\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$, $\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)$, $\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi)$, $\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi)$. Из равенств (2.8), (2.9), (2.10) в порядке ε^1 получим следующие задачи для функций $Q_1^{(-)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \leq 0$ и $Q_1^{(+)}(\xi)$ на полупрямой $\xi \geq 0$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_1^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) Q_1^{(\mp)} = Q_1^{(\mp)} f(\xi); \\ Q_1^{(-)}(0) + \bar{u}_1^{(-)}(x_0) = Q_1^{(+)}(0) + \bar{u}_1^{(+)}(x_0) = p_1; \quad Q_1^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases}$$

где

$$Q_1^{(\mp)} f(\xi) = \left(\bar{u}_1^{(\mp)} + \xi \frac{d\varphi^{(\mp)}}{dx}(x_0) \right) \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \right) + \xi \left(\tilde{f}_x^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_0) \right) + \left(\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x_0) \right).$$

Решения этих задач можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi) = \left(p_1 - \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0) \right) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \Phi^{(\mp)}(\xi) \int_0^\xi \frac{d\xi'}{(\Phi^{(\mp)}(\xi'))^2} \int_{\mp\infty}^{\xi'} \Phi^{(\mp)}(\sigma) Q_1^{(\mp)} f(\sigma) d\sigma.$$

Функции $Q_1^{(\mp)} f(\xi)$ имеют экспоненциальные оценки вида (2.13) и такие же оценки справедливы для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$. Вычислим производ-

ные функций $Q_1^{(\mp)}(\xi)$ при $\xi = 0$:

$$\frac{dQ_1^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \left(p_1 - \bar{u}_1^{(\mp)}(x_0)\right) \frac{f^{(\mp)}(p_0, x_0, 0)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(0)} \int_{\mp\infty}^0 \Phi^{(\mp)}(\xi) Q_1^{(\mp)} f(\xi) d\xi. \quad (2.15)$$

Запишем условие сшивания производных, которое получается из равенства (2.7) в порядке ε^0 :

$$\frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi}(0) = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi}(0).$$

Подставляя сюда явные выражения (2.15) для производных функций $Q_1^{(\mp)}$ и проводя некоторые преобразования, можно получить уравнение для коэффициента p_1 :

$$\frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) \cdot p_1 = G_1,$$

где $H(\tilde{u})$ – функция из условия (A4), а величина G_1 – известна. Это уравнение разрешимо в силу неравенства (2.5).

2.2.4 Пограничные функции

Функции $R^{(\mp)}(\eta^{(\mp)}, \varepsilon)$ пограничного слоя в окрестностях точек $x = \mp 1$ строятся стандартным образом [28] в виде разложения по степеням ε . Для них справедливы экспоненциальные оценки, аналогичные оценкам для функций переходного слоя.

2.3 Существование решения

Для доказательства существования решения используем теоремы о дифференциальных неравенствах, развитые для рассматриваемого класса за-

дач в [60, 64, 84]. Из результатов этих работ следует, что из существования нижнего и верхнего решений $\alpha(x, \varepsilon)$, $\beta(x, \varepsilon)$, задачи (2.2), следует существование решения этой задачи, заключенного между ними.

Функции $\alpha(x, \varepsilon)$, $\beta(x, \varepsilon)$ называются нижним и верхним решениями задачи (2.2), если при достаточно малых ε выполняется следующая система неравенств:

1) Условие упорядоченности: $\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon)$, $x \in [-1; 1]$.

2) Действие оператора на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{d^2 \beta}{dx^2} \right) - f(\beta, x, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \frac{d^2 \alpha}{dx^2} - f(\alpha, x, \varepsilon); \quad x \in (-1; 1) \setminus x_0.$$

3) Условия на границе:

$$\frac{d\alpha}{dx}(-1, \varepsilon) \geq u^{(-)} \geq \frac{d\beta}{dx}(-1, \varepsilon), \quad \frac{d\alpha}{dx}(+1, \varepsilon) \leq u^{(+)} \leq \frac{d\beta}{dx}(+1, \varepsilon).$$

4) Условия на производные в точке x_0 :

$$\frac{d\beta}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) \geq \frac{d\beta}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon); \quad \frac{d\alpha}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) \leq \frac{d\alpha}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon).$$

Отметим, что условие 4) оказывается существенным в случае использования нижних и верхних решений, не гладких в некоторой точке.

2.3.1 Построение верхнего и нижнего решения

Алгоритм построения верхних и нижних решений для задач с внутренними переходными и пограничными слоями носит название асимптотического метода дифференциальных неравенств и подробно описан в [30, 33, 68]. Этот алгоритм заключается в построении функций $\alpha(x, \varepsilon)$ и

$\beta(x, \varepsilon)$ как модификаций асимптотического представления этого решения.

Обозначим через $\beta_1(x, \varepsilon)$ верхнее решение задачи (2.2), построенное с использованием асимптотического приближения первого порядка, $U_1(x, \varepsilon)$, отдельно на каждом из отрезков $[-1; x_0]$ и $[x_0; 1]$:

$$\beta_1(x, \varepsilon) = \begin{cases} \beta_1^{(-)}(x, \varepsilon) = U_1^{(-)}(x, \varepsilon) + \varepsilon (\mu + q^{(-)}(\xi)), & x \in [-1; x_0], \xi \leq 0; \\ \beta_1^{(+)}(x, \varepsilon) = U_1^{(+)}(x, \varepsilon) + \varepsilon (\mu + q^{(+)}(\xi)), & x \in [x_0; 1], \xi \geq 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Здесь μ – положительная константа, которая подбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство 3), а также неравенства 1)-2) вдали от точки x_0 . Функции $q^{(\mp)}(\xi)$ вводятся для устранения невязок порядка $O(\varepsilon)$, возникающих в неравенстве 2) в окрестности точки x_0 в результате добавления к асимптотическому разложению величины μ .

Эти функции определяются как решения краевых задач

$$\begin{cases} \frac{d^2 q^{(\mp)}}{d\xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) q^{(\mp)} = \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \right) \mu - d \exp(-\lambda|\xi|), \\ q^{(-)}(0) + \mu = q^{(+)}(0) + \mu = \delta; \quad q^{(\mp)}(\mp\infty) = 0. \end{cases}$$

Здесь были использованы обозначения (2.14). Задача для $q^{(-)}(\xi)$ решается при $\xi \leq 0$, а задача для $q^{(+)}(\xi)$ – при $\xi \geq 0$. Величина $\delta > 0$ определяется далее таким образом, чтобы выполнялись неравенства 4) и 1) в области переходного слоя.

Функции $q^{(\mp)}(\xi)$ можно выписать в явном виде:

$$q^{(\mp)}(\xi) = (\delta - \mu) \frac{\Phi^{(\mp)}(\xi)}{\Phi^{(\mp)}(0)} + \Phi^{(\mp)}(\xi) \int_0^\xi \frac{d\xi'}{(\Phi^{(\mp)}(\xi'))^2} \int_{\mp\infty}^{\xi'} \Phi^{(\mp)}(\sigma) \left(\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\sigma) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \right) \mu - d \exp(-\lambda|\sigma|) \right) d\sigma. \quad (2.17)$$

Заметим, что имеют место следующие оценки (см. (2.14), (2.12), (2.13))

$$\left| \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \right| < C \exp(-\kappa|\xi|),$$

где C и κ – положительные константы, не зависящие от ε . Выберем теперь константы δ , d и κ достаточно большими, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$\delta - \mu > 0;$$

$$\left(\tilde{f}_u^{(-)}(\xi) - \bar{f}_u^{(-)}(x_0) \right) \mu - d \exp(\lambda\xi) < 0, \quad \xi \leq 0;$$

$$\left(\tilde{f}_u^{(+)}(\xi) - \bar{f}_u^{(+)}(x_0) \right) \mu - d \exp(-\lambda\xi) < 0, \quad \xi \geq 0.$$

Отметим, что функция $q^{(-)}(\xi)$ принимает строго положительные значения при $\xi \leq 0$, а функция $q^{(+)}(\xi)$ – строго положительные значения при $\xi \geq 0$.

Функция $\alpha_1(x, \varepsilon)$ – нижнее решение задачи (2.2) – имеет вид

$$\alpha_1(x, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha_1^{(-)}(x, \varepsilon) = U_1^{(-)}(x, \varepsilon) - \varepsilon (\mu + q^{(-)}(\xi)), & x \in [-1; x_0], \xi \leq 0; \\ \alpha_1^{(+)}(x, \varepsilon) = U_1^{(+)}(x, \varepsilon) - \varepsilon (\mu + q^{(+)}(\xi)), & x \in [x_0; 1], \xi \geq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Для того, чтобы не применять модификацию для пограничных функций, используем стандартную процедуру умножения экспоненциально убыва-

ющих функций в выражениях для $\alpha_1(x, \varepsilon)$ и $\beta_1(x, \varepsilon)$ на срезающую функцию, сохранив прежние обозначения (в результате $\alpha_1(x, \varepsilon)$ и $\beta_1(x, \varepsilon)$ удовлетворяют граничным условиям точно). Докажем теперь, что для функций $\alpha_1(x, \varepsilon)$ и $\beta_1(x, \varepsilon)$ выполняются неравенства 1)-4). Проверим выполнение неравенства 1). Для этого запишем разность $\beta_1(x, \varepsilon) - \alpha_1(x, \varepsilon)$ на каждом из сегментов $[-1; x_0]$ и $[x_0; 1]$:

$$\beta_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) - \alpha_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) = \varepsilon \left(2\mu + 2q^{(\mp)}(\xi) \right).$$

Выражения справа строго положительны, поскольку положительны константа μ и функции $q^{(\mp)}(\xi)$. Таким образом, неравенство 1) выполнено всюду на $[-1; 1]$.

Покажем выполнение неравенства 2) на примере верхнего решения. Из способа построения функций $\beta_1^{(\mp)}$ следуют равенства

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \beta_1^{(\mp)}}{dx^2} - f^{(\mp)}(\beta_1^{(\mp)}, x, \varepsilon) = -\varepsilon \left(\mu \cdot \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) + d \cdot e^{-\kappa|\xi|} \right) + O(\varepsilon^2).$$

Функции $\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$ положительны согласно условию (A2), поэтому выражение в правой части отрицательно при достаточно малых ε , и тем самым неравенство 2) для верхнего решения выполнено. Аналогично доказывается выполнение неравенства 2) для нижнего решения. Проверим выполнение неравенства 4) для верхнего решения. Из выражений (2.16) для функций $\beta_1^{(\mp)}$, а также из условия C^1 -сшивания (2.7) следует равенства

$$\frac{d\beta_1}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) - \frac{d\beta_1}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon) = \frac{dq^{(-)}}{d\xi}(0) - \frac{dq^{(+)}}{d\xi}(0) + O(\varepsilon). \quad (2.19)$$

Используя явный вид (2.17) для функций $q^{(\mp)}(\xi)$, можно выписать выражения для производных этих функций при $\xi = 0$:

$$\frac{dq^{(\mp)}}{d\xi}(0) = \delta \cdot \frac{f^{(\mp)}(p_0, x_0, 0)}{\Phi^{(\mp)}(0)} - \frac{\mu}{\Phi^{(\mp)}(0)} \cdot \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0) \left(p_0 - \varphi^{(\mp)}(x_0) \right) - \frac{d}{\Phi^{(\mp)}(0)} \int_{\mp\infty}^0 \Phi^{(\mp)}(\xi) \cdot e^{-\lambda|\xi|} d\xi.$$

Подставляя эти выражения в правую часть равенства (2.19), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d\beta_1}{dx}(x_0 - 0, \varepsilon) - \frac{d\beta_1}{dx}(x_0 + 0, \varepsilon) = \\ & = \delta \cdot \frac{dH}{d\tilde{u}}(p_0) - \frac{\mu \cdot \bar{f}_u^{(-)}(x_0)}{\Phi^{(-)}(0)} \left(p_0 - \varphi^{(-)}(x_0) \right) + \frac{\mu \cdot \bar{f}_u^{(+)}(x_0)}{\Phi^{(+)}(0)} \left(p_0 - \varphi^{(+)}(x_0) \right) - \\ & \quad - \frac{d}{\Phi^{(-)}(0)} \int_{-\infty}^0 \Phi^{(-)}(\xi) \cdot e^{\lambda\xi} d\xi + \frac{d}{\Phi^{(+)}(0)} \int_{+\infty}^0 \Phi^{(+)}(\xi) \cdot e^{-\lambda\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (A4), можно выбрать положительную величину δ достаточно большой, чтобы выражение в правой части последнего равенства оказалось положительным и тем самым выполнялось неравенство 4) для верхнего решения.

Нетрудно доказать, что при том же значении δ выполняется неравенство 4) для нижнего решения.

Как доказано в [61, 64, 84], из существования верхнего и нижнего решений задачи (2.2) следует существование решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (2.2), заключенного между верхним и нижним решениями. Стоит отметить, что доказательство теорем существования в данных работах приводится в предположении гладкости функций $\alpha(x, \varepsilon)$, $\beta(x, \varepsilon)$, однако их можно обобщить на случай негладких функций. При этом существенным является условие 4). Совершенно также могут быть построены нижние и верхние решения следующих порядков. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3.1 *Пусть выполнены условия A.1-A.4. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует функция $u(x, \varepsilon)$ – решение задачи (2.2), для которого функция $U_1(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^2)$, то есть для всех $x \in$*

$\in [-1; 1]$ выполняется неравенство

$$|u(x, \varepsilon) - U_1(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^2, \quad (2.20)$$

где C положительная константа, не зависящая от ε .

Стоит отметить, что для получения оценки (2.20) нужно построить асимптотическое приближение второго порядка и верхнее и нижнее решения по аналогии с (2.16) и (2.18) как модификации этого асимптотического приближения.

2.4 Асимптотическая устойчивость стационарного решения.

Как отмечалось в параграфе 1, решение задачи (2.2) является стационарным решением задачи (2.1). Использование построенных нижнего и верхнего решений позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 2.4.1 *При выполнении условий A.1-A.4 при достаточно малых ε стационарное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2.1) в смысле определения 2.1.2, для которого функция $U_1(x, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением, локально единственно как решение задачи 2.2 и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x, \varepsilon); \beta_1(x, \varepsilon)]$.*

Определим области $D_T := (t, x) \in (0; T] \times (-1; 1)$, $D_T^{(-)} := (t, x) \in (0; T] \times (-1; x_0)$, $D_T^{(+)} := (t, x) \in (0; T] \times (x_0; 1)$.

Докажем, что решение $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (2.1) существует для любой начальной функции v_{init} , лежащей в интервале $\alpha_1(x, \varepsilon) \leq v_{init}(x, \varepsilon) \leq \beta_1(x, \varepsilon)$ и выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(x, t, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| = 0, \quad (2.21)$$

где $u(x, \varepsilon)$ – единственное решение задачи (2.2) в интервале $[\alpha_1(x, \varepsilon), \beta_1(x, \varepsilon)]$.

Для доказательства этой теоремы также используем метод дифференциальных неравенств. Этот метод основан на принципе максимума для параболических уравнений и подробно описан в книге [55] для задач вида (2.1) в случае гладких функций $f(v, x, \varepsilon)$ в правой части. Однако, к случаю рассматриваемой здесь функции $f(v, x, \varepsilon)$, удовлетворяющей условию (A1), этот метод также может быть применен, если принять во внимание принцип максимума для функций из класса C^1 [85, 86].

Функции $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$, называемые верхним и нижним решениями задачи (2.1), определяются аналогично стационарной задаче – при достаточно малых ε они удовлетворяют системе неравенств:

$$1^0 \text{ Условие упорядоченности: } \hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) < \hat{\beta}(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \overline{D}_T.$$

$$2^0 \text{ Действие оператора в уравнении (2.1) на верхнее и нижнее решения:}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{\beta}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} - f(\hat{\beta}, x, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{\alpha}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} - f(\hat{\alpha}, x, \varepsilon) \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_T^{(\mp)}.$$

$$3^0 \text{ Условия на границе:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\alpha}}{dx}(-1, t, \varepsilon) &\geq u^{(-)} \geq \frac{d\hat{\beta}}{dx}(-1, t, \varepsilon), \\ \frac{d\hat{\alpha}}{dx}(1, t, \varepsilon) &\leq u^{(+)} \leq \frac{d\hat{\beta}}{dx}(1, t, \varepsilon), \quad t > 0 \end{aligned}$$

4⁰ Условия на производные при $x = x_0$:

$$\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x}(x_0-0, t, \varepsilon) \geq \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x}(x_0+0, t, \varepsilon); \quad \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial x}(x_0-0, t, \varepsilon) \leq \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial x}(x_0+0, t, \varepsilon), \quad t > 0.$$

Используя результат теоремы 1, а также очевидные оценки

$$|u(x, \varepsilon) - \alpha_1(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon$$

и

$$|u(x, \varepsilon) - \beta_1(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon,$$

не сложно проверить, что условия 1⁰-4⁰ выполняются, если выбрать функции $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(x, t, \varepsilon) &= \begin{cases} \hat{\beta}^{(-)}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + \left(\beta_1^{(-)}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) \right) e^{-\varepsilon\gamma t}, & (t, x) \in \overline{D}_T^{(-)}, \\ \hat{\beta}^{(+)}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + \left(\beta_1^{(+)}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) \right) e^{-\varepsilon\gamma t}, & (t, x) \in \overline{D}_T^{(+)}, \end{cases} \\ \hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) &= \begin{cases} \hat{\alpha}^{(-)}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + \left(\alpha_1^{(-)}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) \right) e^{-\varepsilon\gamma t}, & (t, x) \in \overline{D}_T^{(-)}, \\ \hat{\alpha}^{(+)}(x, t, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + \left(\alpha_1^{(+)}(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) \right) e^{-\varepsilon\gamma t}, & (t, x) \in \overline{D}_T^{(+)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\beta_1^{(\mp)}(x, \varepsilon)$, $\alpha_1^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ – функции из (2.16) и (2.18).

Неравенства 1⁰, 3⁰, 4⁰ выполняются в силу того, что функции $\beta_1^{(\mp)}(x, \varepsilon)$, $\alpha_1^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам 1)-4). Проверим справедливость неравенства на оператор 2⁰ на примере $\hat{\beta}^{(+)}$

$$L_t[\hat{\beta}^{(+)}] := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{\beta}^{(+)}}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial \hat{\beta}^{(+)}}{\partial t} - f^{(+)}(\hat{\beta}^{(+)}, x),$$

К правой части добавим слагаемые $f^{(+)}(u, x)$, $f^{(+)}(\beta^{(+)}, x)e^{-\lambda t}$, $f^{(+)}(u, x)e^{-\lambda t}$, а затем вычтем эти же слагаемые, чтобы выражение не

изменилось. После группировки получим равенство

$$\begin{aligned} L_t[\hat{\beta}^{(+)}] &= \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - f^{(+)}(u, x) - \left(\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - f^{(+)}(u, x) \right) e^{-\lambda t} + \\ &+ \left(\varepsilon^2 \frac{d^2 \beta_1^{(+)}}{dx^2} - f^{(+)}(\beta_1^{(+)}, x) \right) e^{-\lambda t} + \varepsilon \lambda \left(\beta_1^{(+)} - u \right) e^{-\lambda t} + \\ &+ \left(f^{(+)}(\beta_1^{(+)}, x) - f^{(+)}(u, x) \right) e^{-\lambda t} - \left(f^{(+)}(\hat{\beta}^{(+)}, x) - f^{(+)}(u, x) \right) \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $u(x, \varepsilon)$ является решением уравнения из задачи (2.2), а также оценки

$$\beta_1^{(+)}(x, \varepsilon) - u(x) = O(\varepsilon), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\begin{aligned} (f^{(+)}(\beta_1^{(+)}, x) - f^{(+)}(u))e^{-\lambda t} - (f^{(+)}(\hat{\beta}^{(+)}, x) - f^{(+)}(u, x)) &= \\ &= f_{uu}^{(+)*} (\theta_2 e^{-\lambda t} - \theta_1) \left(\beta_1^{(+)} - u \right)^2 e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

где

$$f_{uu}^{(+)*} = f_{uu}^{(+)} \left(u + \theta_2 \left(\beta_1^{(+)} - u \right) e^{-\lambda t} + \theta_3 \left(\theta_2 e^{-\lambda t} - \theta_1 \right) \left(\beta_1^{(+)} - u \right) \right), \quad |\theta_{1,2,3}| < 1,$$

придем к равенству

$$L_t[\hat{\beta}^{(+)}] = e^{-\lambda t} \left(-\varepsilon \mu \bar{f}_u^{(+)}(x) + O(\varepsilon^2) \right) < 0$$

Аналогично работе [55], воспользовавшись принципом максимума для функций из класса C^1 [85, 86], можно доказать, что из существования верхнего и нижнего решений задачи (2.1) следует существование единственного решения $v(x, \varepsilon)$ этой задачи, для которого в каждый момент времени $t > 0$ выполняются неравенства $\hat{\alpha}^{(\mp)}(x, t, \varepsilon) \leq v \leq \hat{\beta}^{(\mp)}(x, t, \varepsilon)$, при условии, что аналогичные неравенства выполняются в начальный момент времени:

$$\hat{\alpha}^{(\mp)}(x, 0, \varepsilon) \leq v_{init}(x, \varepsilon) \leq \hat{\beta}^{(\mp)}(x, 0, \varepsilon). \quad (2.23)$$

Используя выражения (2.22), приходим к равенству (2.21), из которого в силу единственности решения задачи (2.1) следует локальная единственность решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (2.2) и асимптотическая устойчивость этого решения как стационарного решения начально-краевой задачи (2.1).

Из неравенств (2.23), а также из того, что $\hat{\alpha}(x, 0, \varepsilon) = \alpha_1(x, \varepsilon)$,
 $\hat{\beta}(x, 0, \varepsilon) = \beta_1(x, \varepsilon)$ (см. (2.22)) следует, что промежуток $[\alpha_1(x, \varepsilon); \beta_1(x, \varepsilon)]$ является областью притяжения устойчивого решения задачи (2.2).

Глава 3

Стационарное уравнение реакция-диффузия с разрывным реактивным членом в двумерном случае

При подготовке данной главы диссертации использованы публикации [35, 37, 39] автора, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

Рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в двумерном случае в предположении, что функции в правой части претерпевают разрыв 1 рода вдоль некоторой замкнутой гладкой кривой, заданной внутри рассматриваемой области решения. Построено асимптотическое приближение решения, содержащего внутренний переходный слой. Обоснование существования решения проведено с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, основанного на построении верхнего и

нижнего решений задачи.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = f(v, x, y, \varepsilon), & (x, y) \in D, \ t > 0; \\ \left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = u^0(x, y), & (x, y) \in \partial D, \\ v(x, y, \varepsilon, 0) = v_{init}(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{D}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь D – односвязная область на плоскости (x, y) с гладкой границей ∂D , ε – малый параметр, лежащий в интервале $(0; \varepsilon_0]$, $\mathbf{n}$ – нормаль к кривой ∂D , внешняя по отношению к области D . Будем считать, что существует простая гладкая замкнутая кривая C_0 , целиком лежащая в области D и делящая эту область на две части: $D^{(in)}$, ограниченную кривой C_0 , и $D^{(ex)}$, ограниченную кривыми C_0 и ∂D .

Потребуем выполнения следующих условий:

(A1) Пусть функция $f(u, M, \varepsilon) = f(u, x, y, \varepsilon)$ в правой части уравнения

(3.1) имеет вид:

$$f(u, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(in)}(u, x, y, \varepsilon), & \text{если } (x, y) \in \bar{D}^{(in)}; \\ f^{(ex)}(u, x, y, \varepsilon), & \text{если } (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}. \end{cases}$$

Где $f^{(in)}(u, x, y, \varepsilon)$, $f^{(ex)}(u, x, y, \varepsilon)$ – достаточно гладкие ограниченные функции, соответственно в областях $I_u \times \bar{D}^{(in)} \times (0; \varepsilon_0]$ и $I_u \times \bar{D}^{(ex)} \times (0; \varepsilon_0]$, где I_u – интервал изменения функции u , причем функция $f(u, x, y, \varepsilon)$ претерпевает разрыв первого рода на поверхности $S(u, x, y) : \{u \in I_u; (x, y) \in C_0\}$.

Определим области $D_T := (x, y, t) \in D \times (0; T]$, $D_T^{(in)} := (x, y, t) \in D^{(in)} \times (0; T]$, $D_T^{(ex)} := (x, y, t) \in D^{(ex)} \times (0; T]$.

Определение 3.1.1 *Функция*

$$v(x, y, t) \in C^{1,0}(\bar{D}_T) \cap C^{1,1}(D_T) \cap C^{2,1}(D_T^{(in)} \cup D_T^{(ex)})$$

называется решением задачи (3.1), если она удовлетворяет уравнению (3.1) в каждой из областей $D_T^{(in,ex)}$, а также условию в начальный момент времени и граничному условию.

Очевидно, что стационарное решение задачи (3.1) является решением задачи для стационарного уравнения реакция-диффузия:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, y, \varepsilon), & (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = u^0(x, y), & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad (3.2)$$

Ее решение определено аналогично определению решения задачи (3.1)

Определение 3.1.2 *Решением задачи (3.2) будем называть функцию $u(M) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D \setminus C_0)$, удовлетворяющую уравнению при $M \in D \setminus C_0$, а также условию $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = u^0(S)$, $S \in \partial D$.*

(A2) Пусть в области $\bar{D}^{(in)}$ определена функция $u = \varphi^{(in)}(x, y)$, являющаяся изолированным решением уравнения $f^{(in)}(u, x, y, 0) = 0$, а в области $\bar{D}^{(ex)}$ определена функция $u = \varphi^{(ex)}(x, y)$, являющаяся изолированным решением уравнения $f^{(ex)}(u, x, y, 0) = 0$, и пусть для всех точек (x, y) , лежащих на кривой C_0 , выполняется неравенство $\varphi^{(in)}(x, y) > \varphi^{(ex)}(x, y)$.

(A3) Пусть выполняются неравенства

$$f_u^{(in)} \left(\varphi^{(in)}, x, y, 0 \right) > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(in)}$$

и

$$f_u^{(ex)} \left(\varphi^{(ex)}, x, y, 0 \right) > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}.$$

Пусть кроме того, для всех точек (x, y) , лежащих на кривой C_0 , выполняются неравенства

$$\int_{\varphi^{(in)}(x,y)}^{\tilde{u}} f^{(in)}(u, x, y, 0) du > 0 \quad \text{при} \quad \tilde{u} \in [\varphi^{(ex)}(x, y), \varphi^{(in)}(x, y)];$$

$$\int_{\varphi^{(ex)}(x,y)}^{\tilde{u}} f^{(ex)}(u, x, y, 0) du > 0 \quad \text{при} \quad \tilde{u} \in (\varphi^{(ex)}(x, y), \varphi^{(in)}(x, y)].$$

Будем исследовать вопрос о существовании у задачи (3.2) непрерывного решения, близкого к поверхности $u = \varphi^{(in)}(x, y)$ внутри области $D^{(in)}$, а внутри области $D^{(ex)}$ близкого к поверхности $u = \varphi^{(ex)}(x, y)$ и резко изменяющегося от $\varphi^{(in)}$ к $\varphi^{(ex)}$ в окрестности кривой C_0 , кроме того, имеющего непрерывные производные по направлению нормали к этой кривой.

Для описания поведения решения в окрестности кривой C_0 стандартным способом (см.[28]) перейдем к координатам (r, θ) :

$$x = x(r, \theta), \quad y = y(r, \theta).$$

Здесь $\theta \in [0, T]$ – параметр кривой, а величина $|r|$ является расстоянием от точки $M(x, y)$ из окрестности кривой C_0 до этой кривой вдоль нормали к ней. Будем считать, что $r < 0$, если $M \in D^{(in)}$; $r > 0$, если $M \in D^{(ex)}$; $r = 0$, если $M \in C_0$.

Введем растянутую переменную $\tau = \frac{r}{\varepsilon}$. Рассмотрим следующие краевые задачи для систем двух уравнений первого порядка относительно функций $\tilde{u}(\tau, \theta)$ и $\Phi(\tau, \theta)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \Phi, & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = f^{(in)}(\tilde{u}, \theta, 0), \quad \tau < 0, \quad 0 \leq \theta < T; \\ \tilde{u}(0, \theta) = p, & \tilde{u}(-\infty, \theta) = \varphi^{(in)}(\theta); \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \Phi, & \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = f^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, 0), \quad \tau > 0, \quad 0 \leq \theta < T; \\ \tilde{u}(0, \theta) = p, & \tilde{u}(+\infty, \theta) = \varphi^{(ex)}(\theta). \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} f^{(in,ex)}(\tilde{u}, \theta, 0) &:= f^{(in,ex)}(\tilde{u}, x(0, \theta), y(0, \theta), 0); \\ \varphi^{(in,ex)}(\theta) &:= \varphi^{(in,ex)}(x(0, \theta), y(0, \theta)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

При каждом значении параметра $\theta \in [0; T]$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ точки $(\varphi^{(in)}(\theta), 0)$ и $(\varphi^{(ex)}(\theta), 0)$ являются точками покоя типа седел, соответственно, систем (3.3) и (3.4) в силу условий (A2) и (A3), причем, в силу этих же условий существует сепаратриса

$$\Phi^{(in)} = - \sqrt{2 \int_{\varphi^{(in)}(\theta)}^{\tilde{u}} f^{(in)}(u, \theta, 0) du}, \quad (3.6)$$

входящая в седло $(\varphi^{(in)}(\theta), 0)$ при $\tau \rightarrow -\infty$, а также сепаратриса

$$\Phi^{(ex)} = - \sqrt{2 \int_{\varphi^{(ex)}(\theta)}^{\tilde{u}} f^{(ex)}(u, \theta, 0) du}, \quad (3.7)$$

входящая в седло $(\varphi^{(ex)}(\theta), 0)$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Введем функции

$$H^{(in,ex)}(p, \theta) := \int_{\varphi^{(in,ex)}(\theta)}^p f^{(in,ex)}(u, \theta, 0) du,$$

$$H(p, \theta) = H^{(in)}(p, \theta) - H^{(ex)}(p, \theta).$$

В силу условия (A3) функция $H(p, \theta)$ определена при всех

$$p \in [\varphi^{(ex)}(\theta), \varphi^{(in)}(\theta)].$$

Для существования у задачи (3.2) решения с внутренним переходным слоем необходимо потребовать выполнение следующего условия.

(A4) Пусть существует функция $p_0(\theta)$ – решение уравнения $H(p, \theta) = 0$, удовлетворяющая при каждом $\theta \in [0; T]$ неравенствам $\varphi^{(ex)}(\theta) < p_0(\theta) < \varphi^{(in)}(\theta)$, причем выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial p} H(p_0(\theta), \theta) = f^{(in)}(p_0(\theta), \theta, 0) - f^{(ex)}(p_0(\theta), \theta, 0) < 0.$$

3.2 Построение асимптотического приближения решения.

Асимптотическое разложение решения задачи (3.2), содержащего внутренний переходный слой, будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$:

$$U(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} U^{(in)}(x, y, \varepsilon), & \text{если } (x, y) \in \bar{D}^{(in)}; \\ U^{(ex)}(x, y, \varepsilon), & \text{если } (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}, \end{cases}$$

непрерывно сшивая эти разложения на кривой C_0 . Значение функции $U(x, y, \varepsilon) = U(\theta, \varepsilon)$ на кривой C_0 является неизвестным. Будем искать

его в виде разложения

$$U^{(in)}(\theta, \varepsilon) = U^{(ex)}(\theta, \varepsilon) = p_0(\theta) + \varepsilon p_1(\theta) + \dots, \quad (3.8)$$

коэффициенты которого будем определять из условий сшивания производных асимптотических разложений в областях $D^{(in)}$ и $D^{(ex)}$ по нормали $\mathbf{n}_0$ к кривой C_0 :

$$\left. \frac{\partial U^{(in)}}{\partial \mathbf{n}_0} \right|_{C_0} = \left. \frac{\partial U^{(ex)}}{\partial \mathbf{n}_0} \right|_{C_0}. \quad (3.9)$$

Функцию $U^{(in)}(x, y, \varepsilon)$ будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$U^{(in)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}^{(in)}(x, y, \varepsilon) + Q^{(in)}(\tau, \theta, \varepsilon), \quad (3.10)$$

где $\bar{u}^{(in)}(x, y, \varepsilon)$ – регулярная часть разложения, $Q^{(in)}(\tau, \theta, \varepsilon)$ – функция, описывающая переходный слой.

Для описания поведения решения в окрестности кривой ∂D введем локальные координаты (r_1, l) и растянутую переменную $\eta = \frac{r_1}{\varepsilon}$, где r_1 – расстояние от кривой ∂D до точки в окрестности этой кривой вдоль внутренней нормали к ней, а l – параметр кривой ∂D , $l \in [0, T_1]$.

Функцию $U^{(ex)}(x, y, \varepsilon)$ будем искать в виде суммы трех слагаемых:

$$U^{(ex)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}^{(ex)}(x, y, \varepsilon) + Q^{(ex)}(\tau, \theta, \varepsilon) + R(\eta, l, \varepsilon). \quad (3.11)$$

Здесь $\bar{u}^{(ex)}$ и $Q^{(ex)}$ соответственно, регулярные функции и функции переходного слоя, $R(\eta, l, \varepsilon)$ – функция, описывающая пограничный слой в окрестности кривой ∂D .

Каждую из функций в (3.10) и (3.11) будем искать в виде разложения

по степеням малого параметра ε :

$$\bar{u}^{(in,ex)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(in,ex)}(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{(in,ex)}(x, y) + \dots; \quad (3.12)$$

$$Q^{(in,ex)}(\tau, \theta, \varepsilon) = Q_0^{(in,ex)}(\tau, \theta) + \varepsilon Q_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) + \dots; \quad (3.13)$$

$$R(\eta, l, \varepsilon) = R_0(\eta, l) + \varepsilon R_1(\eta, l) + \dots. \quad (3.14)$$

3.3 Регулярная часть асимптотического приближения.

Регулярная часть асимптотического приближения определяется как решение уравнения

$$\varepsilon^2 \Delta_{xy} \bar{u} = f(\bar{u}, x, y, \varepsilon).$$

Подставляя в это уравнение суммы (3.12) для функций $\bar{u}^{(in,ex)}$, раскладывая функцию в правой части в ряд Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(in,ex)}(x, y)$, $i = 0, 1, \dots$.

Главные регулярные члены асимптотического приближения являются решением вырожденного уравнения $f(\bar{u}_0, x, y, 0) = 0$. С учетом вида функции f , оговоренного в условии (A1), это уравнение можно записать отдельно для каждой из областей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$:

$$\begin{aligned} f^{(in)}(\bar{u}^{(in)}, x, y, 0) &= 0, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(in)}; \\ f^{(ex)}(\bar{u}^{(ex)}, x, y, 0) &= 0, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}. \end{aligned}$$

Согласно условию (A2) решениями этих уравнений слева и справа от кривой C_0 являются соответственно, функции

$$\bar{u}_0^{(in)}(x, y) = \varphi^{(in)}(x, y), \quad \bar{u}_0^{(ex)}(x, y) = \varphi^{(ex)}(x, y).$$

Функции $\bar{u}_i^{(in,ex)}(x, y)$ при $i = 1, 2, \dots$ определяются как решения уравнений вида

$$\bar{f}_u^{(in,ex)}(x, y) \bar{u}_i^{(in,ex)}(x, y) = \bar{h}_i^{(in,ex)}(x, y),$$

которые однозначно разрешимы в силу условия (A3). Здесь введены обозначения

$$\bar{f}^{(in,ex)}(x, y) := f^{(in,ex)}(\varphi^{(in,ex)}, x, y, 0),$$

а функции $\bar{h}_i^{(in,ex)}(x, y)$ известны на каждом i -м шаге и выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_k^{(in,ex)}$, с индексами $k = 0, 1, \dots, i-1$, например, $\bar{h}_1^{(in,ex)}(x, y, t) = -f_\varepsilon^{(in,ex)}(\varphi^{(in,ex)}, x, y, 0)$.

3.4 Функции переходного слоя.

В переменных (τ, θ) оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta_{\tau, \varepsilon} = \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1} \varepsilon^{i-2} L_i,$$

где L_i — линейные дифференциальные операторы первого или второго порядка, в частности, $L_1 = -K_0(\theta) \frac{\partial}{\partial \tau}$, где K_0 — кривизна кривой C_0 . Запишем ещё оператор дифференцирования по направлению нормали к кривой C_0 в переменных (r, θ) и (τ, θ) :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.15)$$

Функции $Q^{(in,ex)}(\tau, \theta, \varepsilon)$ определяются как решения уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q^{(in,ex)}}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1} \varepsilon^i L_i[Q^{(in,ex)}] = \\ = f^{(in,ex)} \left(\bar{u}^{(in,ex)}(x(\varepsilon\tau, \theta), y(\varepsilon\tau, \theta)) + Q^{(in,ex)}, x(\varepsilon\tau, \theta), y(\varepsilon\tau, \theta), \varepsilon \right) - \\ - f^{(in,ex)} \left(\bar{u}^{(in,ex)}(x(\varepsilon\tau, \theta), y(\varepsilon\tau, \theta)), x(\varepsilon\tau, \theta), y(\varepsilon\tau, \theta), \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подставляя в эти уравнения суммы (3.13), раскладывая функции в правых частях в ряд Тейлора по степеням малого параметра и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем задачи для коэффициентов разложений (3.13).

Потребуем выполнения стандартного для функций переходного слоя условий убывания на бесконечности:

$$Q_i^{(in)}(-\infty, \theta) = 0, \quad Q_i^{(ex)}(+\infty, \theta) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

Дополнительные условия при $\tau = 0$ для функций $Q_i^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ для каждого $i = 0, 1, \dots$ получаются путем приравнивая коэффициентов при ε^i в равенстве, выражающем условия непрерывного сшивания асимптотических разложений на кривой C_0 с учетом условия (3.8):

$$\begin{aligned} \varphi^{(in)}(\theta) + \varepsilon \bar{u}_1^{(in)}(\theta) + \dots + Q_0^{(in)}(0, \theta) + \varepsilon Q_1^{(in)}(0, \theta) + \dots = \\ = \varphi^{(ex)}(\theta) + \varepsilon \bar{u}_1^{(ex)}(\theta) + \dots + Q_0^{(ex)}(0, \theta) + \varepsilon Q_1^{(ex)}(0, \theta) + \dots = \\ = p_0(\theta) + \varepsilon p_1(\theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уравнения для функций $p_i(\theta)$, коэффициентов ряда (3.8), получаются из условий (3.9) сшивания производных асимптотических разложе-

ний на кривой C_0 , которые с учетом разложений (3.12)-(3.13) а также выражения (3.15) для оператора $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0}$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(in)}}{\partial r}(\theta) + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_1^{(in)}}{\partial r}(\theta) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(in)}}{\partial \tau}(0, \theta) + \frac{\partial Q_1^{(in)}}{\partial \tau}(0, \theta) + \dots = \\ = \frac{\partial \varphi^{(ex)}}{\partial r}(\theta) + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_1^{(ex)}}{\partial r}(\theta) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(ex)}}{\partial \tau}(0, \theta) + \frac{\partial Q_1^{(ex)}}{\partial \tau}(0, \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.4.1 Функции переходного слоя нулевого порядка

Функции $Q_0^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ определяются как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(in,ex)}}{\partial \tau^2} = f^{(in,ex)}\left(\varphi^{(in,ex)}(\theta) + Q_0^{(in,ex)}, 0, \theta, 0\right). \quad (3.19)$$

(Здесь использованы обозначения (3.5).)

Уравнение для функции $Q_0^{(in)}$ рассматривается при $\tau \in (-\infty; 0)$, а для функции $Q_0^{(ex)}$ – при $\tau \in (0; +\infty)$. Приравнивая коэффициенты при $\varepsilon = 0$ в условии сшивания (3.17), получаем следующие дополнительные условия для функций $Q_0^{(in,ex)}$ при $\tau = 0$:

$$\varphi^{(in)}(\theta) + Q_0^{(in)}(0, \theta) = \varphi^{(ex)}(\theta) + Q_0^{(ex)}(0, \theta) = p_0(\theta). \quad (3.20)$$

Потребуем еще выполнения условий убывания на бесконечности:

$$Q_0^{(in,ex)}(\mp\infty, \theta) = 0. \quad (3.21)$$

Введем обозначения

$$\tilde{u}^{(in,ex)}(\tau, \theta) = \varphi^{(in,ex)}(\theta) + Q_0^{(in,ex)}(\tau, \theta), \quad \Phi^{(in,ex)}(\tau, \theta) = \frac{\partial \tilde{u}^{(in,ex)}}{\partial \tau}. \quad (3.22)$$

и перепишем задачи (3.19)-(3.21) с использованием этих обозначений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(in)}}{\partial \tau^2} &= f^{(in)} \left(\tilde{u}^{(in)}, \theta, 0 \right), \quad \tau < 0; \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(ex)}}{\partial \tau^2} = f^{(ex)} \left(\tilde{u}^{(ex)}, \theta, 0 \right), \quad \tau > 0; \\ \tilde{u}^{(in,ex)}(0, \theta) &= p_0(\theta), \quad \tilde{u}^{(in,ex)}(\mp \infty, \theta) = \varphi^{(in,ex)}(\theta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Задачам для функций $\tilde{u}^{(in)}(\tau, \theta)$ и $\tilde{u}^{(ex)}(\tau, \theta)$ эквивалентны системы уравнений (3.3) и (3.4), соответственно, поэтому каждая из этих задач разрешима в силу условий (A2) и (A3), причем для функций $\tilde{u}^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ справедливы оценки [101]

$$\left| \tilde{u}^{(in,ex)}(\tau, \theta) - \varphi^{(in,ex)}(\theta) \right| < C e^{-\kappa|\tau|},$$

где C, κ – некоторые положительные постоянные, а функции $Q_0^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ при всех $\theta \in [0; T]$ имеют следующие экспоненциальные оценки:

$$\left| Q_0^{(in,ex)}(\tau, \theta) \right| < C e^{-\kappa|\tau|}. \quad (3.24)$$

Для функций $\Phi^{(in,ex)} = \frac{\partial \tilde{u}^{(in,ex)}}{\partial \tau}$ можно получить выражения, аналогичные (3.6) и (3.7):

$$\Phi^{(in,ex)} = \frac{\partial \tilde{u}^{(in,ex)}}{\partial \tau} = - \sqrt{2 \int_{\varphi^{(in,ex)}(\theta)}^{\tilde{u}^{(in,ex)}} f^{(in,ex)}(u, \theta, 0) du}. \quad (3.25)$$

Последние равенства представляют собой дифференциальные уравнения для функций $\tilde{u}^{(in,ex)}(\tau, \theta)$, решая которые с условиями $\tilde{u}^{(in,ex)}(0, \theta) = p_0(\theta)$, получим решения задач (3.23).

Выделяя слагаемые порядка ε^{-1} в условии C^1 сшивания (3.18) с учетом обозначений (3.22) получим условие гладкого сшивания нулевого приближения асимптотического разложения задачи (3.2):

$$\Phi^{(in)}(0, \theta) = \Phi^{(ex)}(0, \theta). \quad (3.26)$$

Введем обозначение

$$\Phi(\theta) := \Phi^{(in)}(0, \theta) = \Phi^{(ex)}(0, \theta).$$

Подставляя в (3.26) выражения (3.25) и используя условие при $\tau = 0$ задачи (3.23), получим равенство

$$\Phi^{-1}(\theta) H(p_0(\theta), \theta) = 0,$$

которое выполняется в силу условия (A4). Тем самым, гладкое асимптотическое приближение нулевого порядка задачи (3.2) построено.

3.4.2 Функции переходного слоя первого порядка

Для краткости введем обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(in,ex)}(\tau, \theta) &:= f^{(in,ex)}(\tilde{u}^{(in,ex)}(\tau, \theta), \theta, 0), \\ \bar{f}^{(in,ex)}(\theta) &:= f^{(in,ex)}(\varphi^{(in,ex)}(\theta), \theta, 0), \\ \bar{u}_i^{(in,ex)}(\theta) &:= \bar{u}_i^{(in,ex)}(x(0, \theta), y(0, \theta)), \quad i = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при ε^1 в уравнениях (3.16) и условии непрерывности (3.17), получим следующие задачи для определения функций $Q_1^{(in,ex)}(\tau, \theta)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_1^{(in,ex)}}{\partial \tau^2} - \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) Q_1^{(in,ex)} = f_1^{(in,ex)}(\tau, \theta), \\ Q_1^{(in,ex)}(0, \theta) + \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta) = p_1(\theta), \quad Q_1^{(in,ex)}(\mp\infty, \theta) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned}f_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) &= K_0(\theta) \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial \tau} + \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta) + \\ &+ \left(\tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) - \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta) \right) \frac{\partial \varphi^{(in,ex)}}{\partial r}(\theta) \tau + \\ &+ \left(\tilde{f}_r^{(in,ex)}(\tau, \theta) - \bar{f}_r^{(in,ex)}(\theta) \right) \tau + \tilde{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(\tau, \theta).\end{aligned}$$

Решения задач (3.27) можно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned}
Q_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) &= \left(p_1(\theta) - \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta) \right) (\Phi(\theta))^{-1} \Phi^{(in,ex)}(\tau, \theta) + \\
&+ \Phi^{(in,ex)}(\tau, \theta) \int_0^\tau \left(\Phi^{(in,ex)}(\eta, \theta) \right)^{-2} \int_{\mp\infty}^\eta \Phi^{(in,ex)}(\sigma, \theta) f_1^{(in,ex)}(\sigma, \theta) d\sigma d\eta.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

По своему построению функции $f_1^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ имеют экспоненциальные оценки типа (3.24). Нетрудно показать [28], что аналогичные оценки справедливы и для функций $Q_1^{(in,ex)}(\tau, \theta)$.

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в условии C^1 сшивания (3.18), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi^{(in)}}{\partial r}(\theta) + \frac{\partial Q_1^{(in)}}{\partial \tau}(0, \theta) = \frac{\partial \varphi^{(ex)}}{\partial r}(\theta) + \frac{\partial Q_1^{(ex)}}{\partial \tau}(0, \theta). \tag{3.29}$$

Выпишем выражения для производных функций $Q_1^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ при $\tau = 0$, используя их явный вид (3.28)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_1^{(in,ex)}}{\partial \tau}(0, \theta) &= \left(p_1(\theta) - \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta) \right) (\Phi(\theta))^{-1} \times \\
&\times f^{(in,ex)}(p_0(\theta), \theta, 0) + (\Phi(\theta))^{-1} \int_{\mp\infty}^0 \Phi^{(in,ex)}(\tau, \theta) f_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) d\tau.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (3.29) и проведя некоторые преобразования, получим следующее уравнение для функции $p_1(\theta)$:

$$p_1(\theta) (\Phi(\theta))^{-1} \frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta), \theta) = G_1(\theta). \tag{3.30}$$

где функция $H(p, \theta)$ определена в условии (A4),

$$\begin{aligned}
G_1(\theta) &= \frac{\partial \varphi^{(ex)}}{\partial r}(\theta) - \frac{\partial \varphi^{(in)}}{\partial r}(\theta) + (\Phi(\theta))^{-1} \times \\
&\times \int_{+\infty}^0 \Phi^{(ex)}(\tau, \theta) F_1^{(ex)}(\tau, \theta) d\tau - (\Phi(\theta))^{-1} \int_{-\infty}^0 \Phi^{(in)}(\tau, \theta) F_1^{(in)}(\tau, \theta) d\tau
\end{aligned}$$

и введено обозначение $F_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) = f_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) - \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta)$.

Уравнение (3.30) однозначно разрешимо относительно $p_1(\theta)$ в силу условия (A4).

3.4.3 Функции переходного слоя произвольного порядка

Функции $Q_k^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ $k = 2, 3, \dots$ определяются как решения следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_k^{(in,ex)}}{\partial \tau^2} - \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) Q_k^{(in,ex)} = f_k^{(in,ex)}(\tau, \theta), \\ Q_k^{(in,ex)}(0, \theta) + \bar{u}_k^{(in,ex)}(\theta) = p_k(\theta), \quad Q_k^{(in,ex)}(\mp \infty, \theta) = 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

где $f_k^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ - известные функции. Решения этих задач можно выписать в явном виде по аналогии с (3.28). Для функций $Q_k^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ имеют место экспоненциальные оценки типа (3.24).

Приравнивая коэффициенты при ε^{k-1} в условии C^1 сшивания (3.18), после преобразований получаем уравнение для определения функции $p_k(\theta)$:

$$p_k(\theta) (\Phi(\theta))^{-1} \frac{\partial H}{\partial p}(p_0, (\theta)\theta) = G_k(\theta),$$

где $G_k(\theta)$ известные функции.

3.4.4 Функции пограничного слоя

Коэффициенты $R_i(\eta, l)$ разложений (3.14) функций пограничного слоя строятся стандартным образом (см. [28]). Члены нулевого порядка этих разложений равны нулю, что характерно для задачи Неймана. Функции R_i , $i = 1, 2, \dots$ экспоненциально убывают при $\eta \rightarrow +\infty$.

3.5 Асимптотическое приближение решения

Если потребовать достаточной гладкости функций $f^{(in,ex)}(u, x, y, \varepsilon)$, то с помощью описанного в пункте 1.4 алгоритма можно найти коэффициенты разложений (3.12)-(3.14) до произвольного порядка k . Составим суммы

$$\begin{aligned}
 U_k^{(in)}(x, y, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(in)}(x, y) + Q_i^{(in)}(\tau, \theta) \right), \\
 (x, y) &\in \bar{D}^{(in)}, \quad \tau \leq 0; \\
 U_k^{(ex)}(x, y, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(ex)}(x, y) + Q_i^{(ex)}(\tau, \theta) + R_i(\eta, l) \right), \\
 (x, y) &\in \bar{D}^{(ex)}, \quad \tau \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Положим

$$U_k(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} U_k^{(in)}(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{D}^{(in)}; \\ U_k^{(ex)}(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}. \end{cases}$$

Функции $U_k(x, y, \varepsilon)$ по своему построению удовлетворяют уравнению (3.2) с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$ в области D за исключением кривой C_0 , на которой функция $U_k(x, y, \varepsilon)$ не является гладкой. На кривой ∂D функции $U_k(x, y, \varepsilon)$ удовлетворяют краевым условиям задачи (3.2) точно.

3.6 Существование решения эллиптической задачи

Теорема 3.6.1 *При выполнении условий (A1)-(A4) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует функция $u(x, y, \varepsilon)$, являющаяся решением задачи (3.2) в смысле определения 3.1.2, для которого функция $U_n(x, y, \varepsilon)$*

является равномерным в $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть выполняется равенство

$$|u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1},$$

где C – положительная константа.

Для доказательства этой теоремы используем теорему о дифференциальных неравенств [84].

Определим функции $\beta(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha(x, y, \varepsilon)$ – верхнее и нижнее решения задачи (3.2). Согласно [84], эти функции должны удовлетворять следующим условиям:

- а) Функция $\beta(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha(x, y, \varepsilon)$ непрерывны всюду в области $\bar{D}$.
- б) При достаточно малых ε функции $\beta(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha(x, y, \varepsilon)$ удовлетворяют следующей системе неравенств:

- 1) Упорядоченность верхнего и нижнего решений:

$$\alpha(x, y, \varepsilon) < \beta(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}.$$

- 2) Действие оператора в уравнении (3.2) на верхнее и нижнее решение:

$$\Delta\beta - f(\beta, x, y, \varepsilon) \leq 0 \leq \Delta\alpha - f(\alpha, x, y, \varepsilon) \quad \text{при} \quad (x, y) \in (D \setminus C_0).$$

- 3) Условия на границе:

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} \leq u^0(S) \leq \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D}$$

для всех точек $S(x, y)$, лежащих на границе ∂D ($\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к кривой ∂D).

Из работ [54], [60], [84] следует, что существование определенных таким образом верхнего и нижнего решений, обеспечивает существование решения задачи (3.2) в смысле определения 3.1.2.

Отметим, что доказательство теорем сравнения в [54, 60, 84] проведено в предположении гладкости верхнего и нижнего решений. В нашем случае этот результат можно обобщить, используя верхние и нижние решения, не гладкие вдоль кривой C_0 , если потребовать выполнения следующего условия на скачок нормальных производных на этой кривой:

- 4) Скачок производных верхнего и нижнего решений по нормали к кривой C_0 :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=-0} \geq \left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=+0}, \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right|_{r=-0} \leq \left. \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right|_{r=+0}, \quad \theta \in [0, T].$$

Поэтому для доказательства сформулированной выше теоремы достаточно построить функции $\beta(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha(x, y, \varepsilon)$, удовлетворяющие неравенствам 1)-4) и обладающие достаточной асимптотической точностью.

Функция $\beta(x, y, \varepsilon)$ строится отдельно в каждой из подобластей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$ и представляет собой модификацию построенной формальной

асимптотики (3.32):

$$\beta(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} \beta^{(in)}(x, y, \varepsilon) = U_{n+1}^{(in)} + \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(in)}(\tau, \theta)), \\ (x, y) \in \bar{D}^{(in)}, \tau \leq 0, \theta \in [0; T]; \\ \beta^{(ex)}(x, y, \varepsilon) = U_{n+1}^{(ex)} + \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(ex)}(\tau, \theta) + R_\beta(\eta, l)), \\ (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}, \tau \geq 0, \theta \in [0; T], \eta \geq 0, l \in [0; T_1]. \end{cases} \quad (3.33)$$

Здесь $U_{n+1}^{(in,ex)}$ — суммы (3.32) при $k = n + 1$; положительная константа μ подбирается таким образом, чтобы дифференциальные неравенства 1) и 2) выполнялись вдали от кривой C_0 , функция $R_\beta(\eta, l)$ строится стандартным образом (см., например, [23]), чтобы в условии 3) выполнялось равенство, а функции $q^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ вводятся для устранения невязок, возникающих в окрестности кривой C_0 , в результате добавления к асимптотическому приближению величины μ , а также для выполнения условия упорядоченности 1). Эти функции находятся как решения краевых задач

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q^{(in,ex)}}{\partial \tau^2} - \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) q^{(in,ex)} - \mu \cdot (\tilde{f}_u^{(in,ex)}(\tau, \theta) - \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta)) + d \cdot e^{-\varkappa|\tau|} = 0, \\ q^{(in,ex)}(0, \theta) + \mu = \delta; \quad q^{(in,ex)}(\mp\infty, \theta) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Здесь δ , d и $\varkappa$ — положительные величины, которые подбираются таким образом, чтобы для функции $\beta(x, y, \varepsilon)$ выполнялись дифференциальные неравенства 1) и 4). Решения задач (3.34) можно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned} q^{(in)}(\tau, \theta) &= (\delta - \mu)(\Phi(\theta))^{-1} \Phi^{(in)}(\tau, \theta) - \Phi^{(in)}(\tau, \theta) \times \\ &\times \int_{\tau}^0 (\Phi^{(in)}(\eta, \theta))^{-2} \int_{-\infty}^{\eta} \Phi^{(in)}(\sigma, \theta) \left(\mu \cdot \tilde{f}_u^{(in)}(\sigma, \theta) - \mu \cdot \bar{f}_u^{(in)}(\theta) - d \cdot e^{-\varkappa\sigma} \right) d\sigma d\eta, \tau \leq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{(ex)}(\tau, \theta) &= (\delta - \mu)(\Phi(\theta))^{-1} \Phi^{(ex)}(\tau, \theta) - \Phi^{(ex)}(\tau, \theta) \times \\ &\times \int_0^{\tau} (\Phi^{(ex)}(\eta, \theta))^{-2} \int_{\eta}^{+\infty} \Phi^{(ex)}(\sigma, \theta) \left(\mu \cdot \tilde{f}_u^{(ex)}(\sigma, \theta) - \mu \cdot \bar{f}_u^{(ex)}(\theta) - d \cdot e^{-\varkappa\sigma} \right) d\sigma d\eta, \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Для этих функций справедливы экспоненциальные оценки типа (3.24). Выберем положительную величину δ достаточно большой, чтобы выполнялось неравенство $\delta - \mu > 0$, а постоянные d и $\varkappa$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu \cdot \tilde{f}_u^{(in)}(\sigma, \theta) - \mu \cdot \bar{f}_u^{(in)}(\theta) - d \cdot e^{\varkappa\sigma} < 0, \quad \text{при } \tau \leq 0,$$

$$\mu \cdot \tilde{f}_u^{(ex)}(\sigma, \theta) - \mu \cdot \bar{f}_u^{(ex)}(\theta) - d \cdot e^{-\varkappa\sigma} < 0, \quad \text{при } \tau \geq 0,$$

то есть, величину d следует выбрать достаточно большой, а $\varkappa$ — достаточно малой, чтобы была справедлива оценка

$$\left| \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\sigma, \theta) - \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta) \right| \leq d e^{-\varkappa|\tau|}.$$

Заметим, что такая оценка имеет место в силу (3.24).

При указанном выборе констант δ , d и $\varkappa$ функции $q^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ принимают строго положительные значения в областях $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$, соответственно.

Функция $\alpha(x, y, \varepsilon)$ — нижнее решение задачи (3.2) — имеет вид

$$\alpha(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha^{(in)}(x, y, \varepsilon) = U_{n+1}^{(in)} - \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(in)}(\tau, \theta)), \\ (x, y) \in \bar{D}^{(in)}, \tau \leq 0, \theta \in [0; T]; \\ \alpha^{(ex)}(x, y, \varepsilon) = U_{n+1}^{(ex)} - \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(ex)}(\tau, \theta) + R_\alpha(\eta, l)), \\ (x, y) \in \bar{D}^{(ex)}, \tau \geq 0, \theta \in [0; T], \eta \geq 0, l \in [0; T_1]. \end{cases} \quad (3.35)$$

Покажем, что для функций $\beta(x, y, \varepsilon)$ и $\alpha(x, y, \varepsilon)$ выполняются неравенства 1)-4). Запишем разность $\beta(x, y, \varepsilon) - \alpha(x, y, \varepsilon)$ в каждой из обла-

стей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$:

$$\beta^{(in,ex)}(x, y, \varepsilon) - \alpha^{(in,ex)}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} \left(2\mu + 2q^{(in,ex)}(\tau, \theta) \right).$$

Выражения справа строго положительны, поскольку положительна константа μ и функции $q^{(in,ex)}(\tau, \theta)$ в областях $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$, соответственно. Таким образом, неравенство 1) выполнено всюду в $\bar{D}$.

Покажем выполнение неравенства 2) на примере верхнего решения. Из способа построения верхнего решения следует равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta_{xy} \beta^{(in,ex)} - f^{(in,ex)}(\beta^{(in,ex)}, x, y, \varepsilon) = \\ = -\varepsilon^{n+1} \left(\mu \cdot \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta) + d \cdot e^{-\kappa|\tau|} \right) + O(\varepsilon^{n+2}). \end{aligned}$$

Величины $\bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta)$ положительны согласно условию (A3), поэтому выражение в правой части при достаточно малом ε будет отрицательным, и тем самым неравенство 2) для верхнего решения будет выполнено. Аналогично доказывается выполнение неравенства 2) для нижнего решения.

Функции $R_\beta(\eta, l)$ и $R_\alpha(\eta, l)$ удовлетворяют однородным уравнениям и экспоненциально убывают при $\eta \rightarrow +\infty$. Краевые условия на границе ∂D для этих функций ставятся таким образом, чтобы в условии 3) выполнялось равенство.

Проверим выполнение неравенства 4) для верхнего решения. Для разности производных верхнего решения по направлению нормали к кривой C_0 слева и справа от этой кривой справедливо выражение

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=-0} - \left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=+0} = \varepsilon^n \left(\frac{\partial q^{(in)}}{\partial \tau}(0, \theta) - \frac{\partial q^{(ex)}}{\partial \tau}(0, \theta) \right). \quad (3.36)$$

Используя явный вид (3.6) для функций $q^{(in,ex)}(\tau, \theta)$, можно выписать

выражения для производных этих функций при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{(in,ex)}}{\partial \tau}(0, \theta) &= \delta(\Phi(\theta))^{-1} f^{(in,ex)}(p_0(\theta), \theta, 0) - \\ &- \mu \cdot (\Phi(\theta))^{-1} \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta) \cdot (p_0(\theta) - \varphi^{(in,ex)}) - d \cdot (\Phi(\theta))^{-1} \int_{\mp\infty}^0 \Phi^{(in,ex)}(\tau, \theta) \cdot e^{-\varkappa|\tau|} d\tau. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Подставляя эти выражения в правую часть равенства (3.36), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=-0} - \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=+0} &= \varepsilon^n \delta(\Phi(\theta))^{-1} \frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta), \theta) - \\ &- \varepsilon^n \mu \cdot (\Phi(\theta))^{-1} \left(\bar{f}_u^{(in)}(\theta) \cdot (p_0(\theta) - \varphi^{(in)}) - \bar{f}_u^{(ex)}(\theta) \cdot (p_0(\theta) - \varphi^{(ex)}) \right) - \\ &- \varepsilon^n d \cdot (\Phi(\theta))^{-1} \left(\int_{-\infty}^0 \Phi^{(in)}(\tau, \theta) \cdot e^{\varkappa\tau} d\tau - \int_{+\infty}^0 \Phi^{(ex)}(\tau, \theta) \cdot e^{-\varkappa\tau} d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь $H(p, \theta)$ - функция, определенная в условии (A4).

Выбирая положительную величину δ достаточно большой, можно добиться того, чтобы выражение в правой части оказалось положительным, поскольку

$\Phi(\theta) < 0$ (см. (3.25)), и $\frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta), \theta) < 0$, согласно условию (A4).

Неравенство 4) для нижнего решения проверяется аналогично. Согласно [60, 84] существование верхнего и нижнего решений обеспечивает существование решения задачи (3.2) в смысле определения 3.1.2 и выполняются неравенства.

$$\alpha(x, y, \varepsilon) \leq u(x, y, \varepsilon) \leq \beta(x, y, \varepsilon). \quad (3.39)$$

Из этих неравенств и структуры верхнего и нижнего решений стандартным образом следует оценка теоремы.

3.7 Асимптотическая устойчивость и локальная единственность стационарного решения

Докажем существование и единственность решения задачи (3.1) для любой начальной функции, лежащей в интервале

$$\alpha_1(x, y, \varepsilon) \leq v_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \beta_1(x, y, \varepsilon). \quad (3.40)$$

Для этого также используем метод дифференциальных неравенств, требующий построения верхнего и нижнего решений задачи (3.1).

Определение 3.7.1 *Непрерывные функции $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (3.1), если для них выполняется следующая система неравенств:*

$$1^0 \quad \hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \overline{D_T};$$

2⁰

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \hat{\beta} - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} - f(\hat{\beta}, x, y, t, \varepsilon) &\leq 0 \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \Delta \hat{\alpha} - \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} - f(\hat{\alpha}, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in D_T^{(in, ex)}; \end{aligned}$$

$$3^0 \quad \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t, \varepsilon) \leq u^0(x, y) \leq \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \partial D \times [0, T];$$

4⁰

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) &\geq \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon), \\ \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) &\leq \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Используя метод доказательства, приведенный в [55], можно получить следующий результат: для любой начальной функции, для которой справедливы неравенства

$$\hat{\alpha}(x, y, 0, \varepsilon) \leq v_{init}(x, y, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, 0, \varepsilon), \quad (3.41)$$

решение $v(x, y, t)$ задачи (3.1), существует, единственно и в каждый момент времени заключено между верхним и нижним решениями:

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) \leq v(x, y, t) \leq \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon). \quad (3.42)$$

Стоит отметить, что доказательство аналогичного утверждения в [55] проводится на основании принципа максимума для функций, дважды непрерывно дифференцируемых по пространственным координатам. Для того, чтобы обобщить это доказательство на функции из класса $C^{1,1}(D_T)$, следует применить теорему о принципе максимума для этого класса функций [85, 86]. Для не гладких верхнего и нижнего решений, удовлетворяющих строгим неравенствам 4⁰, доказательство можно провести, используя следующую лемму.

Лемма. Пусть для функции $z(x, y, t, \varepsilon) \in C(\overline{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T^{(in)} \cup D_T^{(ex)})$ при некотором $\bar{c} > 0$ выполняются условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta z - \frac{\partial z}{\partial t} - \bar{c}z &\leq 0, \quad (x, y, t) \in D_T^{(in)} \cup D_T^{(ex)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}_0}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) &\geq \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}_0}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t, \varepsilon) &\geq 0, \quad (x, y, t) \in \partial D \times [0, T]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Тогда $z(x, y, t, \varepsilon) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{D}_T$.

Доказательство. Предположим, что функция $z(x, y, t, \varepsilon)$ достигает отрицательного минимума в точке $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \in D_T$. В силу неравенства

(3.44) это не может быть точка границы ∂D . Если точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – внутренняя точка D_T , не лежащая на кривой C_0 , утверждение леммы следует из классического принципа максимума для параболических уравнений [55, 106].

Если минимум функции $z(x, y, t, \varepsilon)$ достигается в точке $(\hat{x}(\tilde{\theta}), \hat{y}(\tilde{\theta})) \in C_0$, то в этой точке выполняются неравенства $\frac{\partial z}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) \leq 0$, $\frac{\partial z}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon) \geq 0$. Если хотя бы одно из этих неравенств строгое, то они противоречат неравенствам (3.43).

Если $\frac{\partial z}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) = \frac{\partial z}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon) = 0$, то утверждение леммы следует из

$$\nabla z(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) = \nabla z(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon) = 0,$$

тогда к противоречию можно прийти, используя схему доказательства принципа максимума, приведенную в [86] для функций из класса C^1 .

Итак, функция $z(x, y, t, \varepsilon)$ не может достигать отрицательного минимума в $\overline{D}_T$, откуда следует утверждение леммы.

Не сложно проверить, аналогично тому, как это было сделано в главе 2, что условия 1⁰-4⁰ выполняются, если выбрать функции $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{\beta}^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y) + \left(\beta_1^{(in)}(x, y, \varepsilon) - u(x, y) \right) e^{-\varepsilon \lambda t}, & (x, y, t) \in \overline{D}_T^{(in)}, \\ \hat{\beta}^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y) + \left(\beta_1^{(ex)}(x, y, \varepsilon) - u(x, y) \right) e^{-\varepsilon \lambda t}, & (x, y, t) \in \overline{D}_T^{(ex)}; \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{\alpha}^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y) + \left(\alpha_1^{(in)}(x, y, \varepsilon) - u(x, y) \right) e^{-\varepsilon \lambda t}, & (x, y, t) \in \overline{D}_T^{(in)}, \\ \hat{\alpha}^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y) + \left(\alpha_1^{(ex)}(x, y, \varepsilon) - u(x, y) \right) e^{-\varepsilon \lambda t}, & (x, y, t) \in \overline{D}_T^{(ex)}, \end{cases}$$

где $\beta_1^{(in, ex)}(x, y, \varepsilon)$, $\alpha_1^{(in, ex)}(x, y, \varepsilon)$ – функции из (3.33), построенные с использованием асимптотического приближения первого порядка, λ –

положительная постоянная. Таким образом, существование и единственность решения задачи (3.1) для любой начальной функции, удовлетворяющей неравенствам (3.40) и, следовательно, (3.41) следует из того, что существуют верхнее и нижнее решения (3.45). Из вида (3.45) верхнего и нижнего решений параболической задачи, а также из неравенств (3.42) и неравенства (3.39), выполненного для решения стационарной задачи, следует предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(x, y, t) - u(x, y)| = 0.$$

Из этого равенства и единственности решения $v(x, y, t)$, следует локальная единственность стационарного решения $u(x, y)$ – решения задачи (3.2) из промежутка (3.39) и его асимптотическая устойчивость. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3.7.1 *При выполнении условий **A.1-A.5** при достаточно малых ε стационарное решение $u(x, y)$ задачи (3.1) локально единственно как решение задачи (3.2) и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x, y, \varepsilon); \beta_1(x, y, \varepsilon)]$.*

3.8 Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, y), & x^2 + y^2 < 16, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x^2 + y^2 = 16} = 0; \end{cases} \quad (3.46)$$

$$f(u, x, y) = \begin{cases} u - (x^2 + y^2), & x^2 + y^2 < 4, \\ u - \frac{1}{x^2 + y^2}, & 4 < x^2 + y^2 < 16. \end{cases} \quad (3.47)$$

$f(u, x, y)$ – функция, претерпевающая разрыв первого рода на поверхности цилиндра $(u, x, y) = \{\mathbb{R}; x^2 + y^2 = 4\}$.

В рассматриваемом примере кривой C_0 является окружность $x^2 + y^2 = 4$, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho_0 = 2; 0 \leq \theta < 2\pi$.

Решая уравнение $u - (x^2 + y^2) = 0$ внутри круга $x^2 + y^2 < 4$, получим $\varphi^{(in)}(x, y) = x^2 + y^2$. Решение уравнения $u - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$ в кольце $4 < x^2 + y^2 < 16$ дает $\varphi^{(ex)}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

На окружности C_0 выполнены равенства $\varphi^{(in)}(\theta) = 4, \varphi^{(ex)}(\theta) = \frac{1}{4}$, тем самым неравенство $\varphi^{(in)}(\theta) > \varphi^{(ex)}(\theta)$ из условия (A2) оказывается выполненным.

Условие (A3) также выполнено, поскольку $f_u = 1 > 0$.

С учетом выражений для функций $\varphi^{(in,ex)}$ перепишем функцию $f(u, x, y)$ в следующем виде:

$$f(u, x, y) = \begin{cases} u - \varphi^{(in)}(x, y), & x^2 + y^2 < 4, \\ u - \varphi^{(ex)}(x, y), & 4 < x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$

Найдем функцию $H(p, \theta)$ из условия (A4):

$$\begin{aligned} H(p, \theta) &= \int_{\varphi^{(in)}(\theta)}^p (u - \varphi^{(in)}(\theta)) du - \int_{\varphi^{(ex)}(\theta)}^p (u - \varphi^{(ex)}(\theta)) du = \\ &= -(\varphi^{(in)}(\theta) - \varphi^{(ex)}(\theta))p + \frac{1}{2} \left((\varphi^{(in)}(\theta))^2 - (\varphi^{(ex)}(\theta))^2 \right) = -\frac{15}{4}p + \frac{255}{32}. \end{aligned}$$

Уравнение $H(p_0, \theta) = 0$ дает значение

$$p_0 = \frac{1}{2} \left(\varphi^{(in)}(\theta) + \varphi^{(ex)}(\theta) \right) = \frac{17}{8}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

При этом $\frac{\partial}{\partial p} H(p_0, \theta) = - \left(\varphi^{(in)}(\theta) - \varphi^{(ex)}(\theta) \right) = -\frac{15}{4} < 0$. Тем самым условие (A4) оказывается выполненным.

Для функций регулярной части асимптотики 0 и 1 порядков получаем выражения.

$$\bar{u}_0(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 < 4, \\ \frac{1}{x^2 + y^2}, & 4 < x^2 + y^2 < 16; \end{cases} \quad \bar{u}_1(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$$

В окрестности окружности C_0 перейдем от переменных (x, y) к (τ, θ) согласно формулам $x = 2 \cos \theta - \varepsilon \tau \cos \theta$; $y = 2 \sin \theta - \varepsilon \tau \sin \theta$.

Задачи (3.19)-(3.21) в случае рассматриваемого примера имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_0^{(in, ex)}}{\partial \tau^2} = Q_0^{(in, ex)}, \\ Q_0^{(in, ex)}(0, \theta) = p_0 - \varphi^{(in, ex)}(\theta); \quad Q_0^{(in, ex)}(\mp \infty, \theta) = 0. \end{cases}$$

Выпишем их решения, подставив значения p_0 и $\varphi^{(in, ex)}(\theta)$:

$$Q_0^{(in)}(\tau, \theta) = -\frac{15}{8}e^\tau, \quad Q_0^{(ex)}(\tau, \theta) = \frac{15}{8}e^{-\tau}.$$

Функции переходного слоя первого порядка определяются из задач вида (3.27):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_1^{(in, ex)}}{\partial \tau^2} - Q_1^{(in, ex)} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q_0^{(in, ex)}}{\partial \tau}(\tau, \theta), \\ Q_1^{(in, ex)}(0, \theta) = p_1; \quad Q_1^{(in, ex)}(\mp \infty, \theta) = 0. \end{cases}$$

Здесь использовано значение $K_0(\theta) = \frac{1}{2}$, кривизны окружности C_0 радиуса 2.

Функции $Q_1^{(in,ex)}$ имеют вид:

$$Q_1^{(in,ex)}(\tau, \theta) = \left(-\frac{15}{32}\tau + p_1 \right) e^{\pm\tau}.$$

Из уравнения (3.30) получаем $p_1 = -\frac{17}{8}$.

3.9 Результаты численного эксперимента

Численный эксперимент производился в программе "Wolfram Mathematica 10.0". Для решения краевой задачи (3.46) использовался метод стационарования [102]. Численный эксперимент иллюстрирует хорошее совпадение асимптотического приближения первого порядка решения задачи (3.2) и численного решения этой задачи. В частности, это означает, что при расчетах методом стационарования в прикладных задачах такого типа в качестве начального приближения целесообразно использовать асимптотическое приближение решения задачи, алгоритм построения которого приведен в главе.

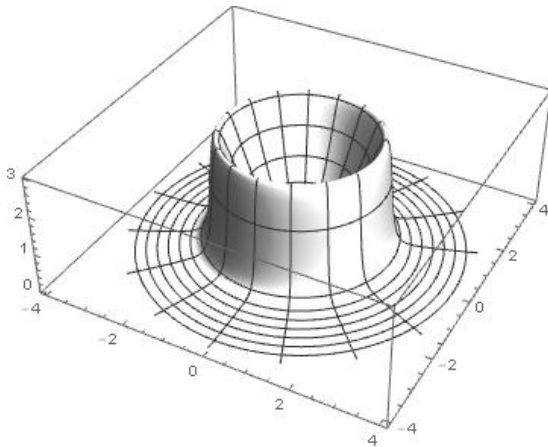


Рис. 3.1: Асимптотическое разложение нулевого порядка.

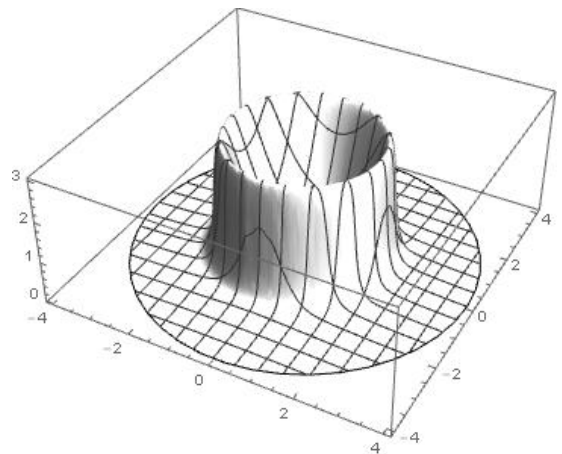


Рис. 3.2: Численное решение задачи.

Глава 4

Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками

При подготовке данной главы диссертации использована публикация [36] автора, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

Рассматривается уравнение типа реакция-диффузия в двумерной области, содержащей границу раздела сред с различными характеристиками, вдоль которой реактивное слагаемое терпит разрыв первого рода. Предполагается, что граница раздела сред и функции, описывающие реакции, периодически изменяются во времени. Изучается вопрос о существовании устойчивого периодического решения задачи с внутренним переходным слоем.

4.1 Постановка задачи

Исследуется вопрос о существовании периодического во времени гладкого решения с внутренним переходным слоем следующей краевой задачи :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, M, t, \varepsilon), & M \in D, t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = u^0(S, t), & S \in \partial D, \\ u(M, t) = u(M, t + T). \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь D – односвязная область на плоскости (x, y) с гладкой границей ∂D , ε –малый параметр, лежащий в интервале $(0; \varepsilon_0]$, $\mathbf{n}$ – нормаль к кривой ∂D , внешняя по отношению к области D . Будем считать, что в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$ существует простая замкнутая кривая C_T , целиком лежащая в области D , контур которой задается с помощью гладких T -периодических функций

$$x = \hat{x}(\theta(t), t), \quad y = \hat{y}(\theta(t), t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\theta(t)$ – T -периодическая непрерывная функция – параметр кривой.

Кривая C_T делит область D на две части: $D^{(in)}$, ограниченную кривой C_T , и $D^{(ex)}$, ограниченную кривыми C_T и ∂D . Будем считать, что функция $u^0(S, t)$ T -периодическая и непрерывная при $S \in \partial D$, $t \in \mathbb{R}$.

Потребуем выполнения следующих условий:

(A1) Пусть функция $f(u, M, t, \varepsilon) = f(u, x, y, t, \varepsilon)$ в правой части уравнения (4.1) имеет вид:

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(in)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}; \\ f^{(ex)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Где $f^{(in)}(u, x, y, t, \varepsilon)$, $f^{(ex)}(u, x, y, t, \varepsilon)$ – достаточно гладкие

Т-периодические функции, определенные соответственно в областях $I_u \times \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R} \times (0; \varepsilon_0]$ и $I_u \times \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R} \times (0; \varepsilon_0]$, где I_u – допустимый интервал изменения функции u , причем функция $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ в каждый момент времени претерпевает разрыв первого рода на поверхности $S(u, x, y) : \{u \in I_u; (x, y) \in C_T\}$, то есть

$$\begin{aligned} f^{(in)}(u, \hat{x}(\theta(t), t), \hat{y}(\theta(t), t), t, \varepsilon) &\neq \\ &\neq f^{(ex)}(u, \hat{x}(\theta(t), t), \hat{y}(\theta(t), t), t, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.2)$$

(A2) Пусть в области $\bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}$ определена Т - периодическая функция $u = \varphi^{(in)}(x, y, t)$, являющаяся изолированным решением уравнения $f^{(in)}(u, x, y, t, 0) = 0$, а в области $\bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}$ определена Т-периодическая функция $u = \varphi^{(ex)}(x, y, t)$, являющаяся изолированным решением уравнения $f^{(ex)}(u, x, y, t, 0) = 0$, причем функции $\varphi^{(in, ex)}(x, y, t)$ достаточно гладкие, и в каждый момент времени t на кривой C_T выполняется неравенство

$$\varphi^{(in)}(\hat{x}(\theta(t), t), \hat{y}(\theta(t), t), t) > \varphi^{(ex)}(\hat{x}(\theta(t), t), \hat{y}(\theta(t), t), t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(A3) Пусть выполняются неравенства

$$\begin{aligned} f_u^{(in)}(\varphi^{(in)}, x, y, t, 0) &> 0, \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R} \quad \text{и} \\ f_u^{(ex)}(\varphi^{(ex)}, x, y, t, 0) &> 0, \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Будем исследовать вопрос о существовании у задачи (4.1) гладкого периодического решения, близкого в каждый момент времени вне некоторой окрестности кривой C_T к поверхности $u = \varphi^{(in)}(x, y, t)$ в области

$D^{(in)}$ и к поверхности $u = \varphi^{(ex)}(x, y, t)$ в области $D^{(ex)}$, и резко изменяющегося от $\varphi^{(in)}$ к $\varphi^{(ex)}$ в окрестности кривой C_T . Для описания поведения решения в окрестности кривой C_T стандартным способом (см.[28]) перейдем к координатам (r, θ) :

$$x = \hat{x}(\theta, t) - r \sin \alpha, \quad y = \hat{y}(\theta, t) + r \cos \alpha.$$

Здесь $\alpha(\theta)$ – угол между внутренней нормалью к кривой C_T и осью y ,

$$\sin \alpha = \frac{\hat{y}_\theta}{\sqrt{(\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\hat{x}_\theta}{\sqrt{(\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2}}; \quad (4.3)$$

величина $|r|$ – расстояние от точки $M(x, y)$ из окрестности кривой C_T до этой кривой вдоль нормали к ней. Будем считать, что $r < 0$, если $M \in D^{(in)}$; $r > 0$, если $M \in D^{(ex)}$; $r = 0$, если $M \in C_T$.

Введем растянутую переменную $\xi = \frac{r}{\varepsilon}$. Дифференциальный оператор в левой части уравнения (4.1) в переменных (ξ, θ, t) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \Delta_{\xi\theta} - \varepsilon(\mathbf{v}, \nabla_{\xi\theta}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \\ & + \left((\hat{x}_\theta \theta_t + \hat{x}_t - \varepsilon \xi \alpha_\theta \theta_t) \sin \alpha - (\hat{y}_\theta \theta_t + \hat{y}_t - \varepsilon \xi \alpha_\theta \theta_t) \cos \alpha - \varepsilon \alpha_\theta \left(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta \right)^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \\ & - \varepsilon \left((\hat{x}_\theta \theta_t + \hat{x}_t) \cos \alpha + (\hat{y}_\theta \theta_t + \hat{y}_t) \sin \alpha - \varepsilon \xi (\alpha_\theta \theta_t + \alpha_t) + \varepsilon \left(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta \right)^{-2} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\hat{x}_\theta \hat{x}_{\theta\theta} + \hat{y}_\theta \hat{y}_{\theta\theta}}{\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2}} - \varepsilon \xi \alpha_{\theta\theta} \right) \right) \left(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \left(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta \right)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\mathbf{v} = \{x_t; y_t\}, \quad \alpha_\theta = \frac{\hat{x}_\theta \hat{y}_{\theta\theta} - \hat{y}_\theta \hat{x}_{\theta\theta}}{\hat{y}_\theta^2 + \hat{x}_\theta^2}, \quad \alpha_{\theta\theta} = \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta}, \quad \alpha_t = \frac{\hat{x}_\theta \hat{y}_{\theta t} - \hat{y}_\theta \hat{x}_{\theta t}}{\hat{y}_\theta^2 + \hat{x}_\theta^2}.$$

Используя разложение Тейлора коэффициентов при частных производных в выражении (4.4), можно переписать дифференциальный опе-

ратор в следующем виде:

$$\varepsilon^2 \Delta - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon K(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon M(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i L_i, \quad (4.5)$$

где

$$V(\theta, t) = (\hat{x}_\theta \theta_t + \hat{x}_t) \sin \alpha - (\hat{y}_\theta \theta_t + \hat{y}_t) \cos \alpha; \quad (4.6)$$

$$K(\theta, t) = \frac{\hat{x}_\theta \hat{y}_{\theta\theta} - \hat{y}_\theta \hat{x}_{\theta\theta}}{((\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2)^{3/2}} + \xi \frac{\hat{x}_\theta \hat{y}_{\theta\theta} - \hat{y}_\theta \hat{x}_{\theta\theta}}{(\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2} \theta_t (\sin \alpha - \cos \alpha);$$

$$M(\theta, t) = ((\hat{x}_\theta \theta_t + \hat{x}_t) \cos \alpha + (\hat{y}_\theta \theta_t + \hat{y}_t) \sin \alpha) \frac{1}{\sqrt{(\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2}},$$

а L_i под знаком суммы – линейные дифференциальные операторы первого или второго порядка по переменным ξ и θ , получающиеся из разложения по степеням ε оператора в правой части представления (4.4).

Далее для краткости будем обозначать

$$\varphi^{(in,ex)}(\theta, t) := \varphi^{(in,ex)}(\hat{x}(\theta(t), t), \hat{y}(\theta(t), t), t),$$

$$f^{(in,ex)}(u, \theta, t) := f^{(in,ex)}(u, \hat{x}(\theta(t), t), \hat{y}(\theta(t), t), t, 0).$$

Рассмотрим в каждый момент времени и для каждого значения $\theta(t)$ следующие задачи Коши относительно функций $\Phi^{(in,ex)}(\tilde{u}, \theta, t)$:

$$\begin{cases} \Phi^{(in)}(\Phi^{(in)})' + V(\theta, t) \Phi^{(in)} = f^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t), \varphi^{(in)}(\theta, t) < \tilde{u} < p, \\ \Phi^{(in)}(\varphi^{(in)}(\theta, t), \theta, t) = 0; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \Phi^{(ex)}(\Phi^{(ex)})' + V(\theta, t) \Phi^{(ex)} = f^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t), p < \tilde{u} < \varphi^{(ex)}(\theta, t), \\ \Phi^{(ex)}(\varphi^{(ex)}(\theta, t), \theta, t) = 0; \end{cases} \quad (4.8)$$

где $p \in (\varphi^{(in)}(\theta, t); \varphi^{(ex)}(\theta, t))$. Условия существования решения задач Коши (4.7) и (4.8), для которых выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \Phi^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t) &< 0, \quad \text{при } \varphi^{(in)}(\theta, t) < \tilde{u} < p, \quad \theta = \theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \Phi^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t) &< 0, \quad \text{при } p < \tilde{u} < \varphi^{(ex)}(\theta, t), \quad \theta = \theta(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

сформулированы в [103].

(A4) Пусть на интервале $(\varphi^{(in)}(\theta, t); \varphi^{(ex)}(\theta, t))$ при всех $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ существует единственное решение $p_0(\theta, t)$ уравнения $H(p, \theta, t) = 0$, где

$$\begin{aligned} H(p, \theta, t) = V(\theta, t) &\left(\int_{\varphi^{(ex)}(\theta, t)}^p \Phi^{(ex)}(u, \theta, t) du - \int_{\varphi^{(in)}(\theta, t)}^p \Phi^{(in)}(u, \theta, t) du \right) + \\ &+ \int_{\varphi^{(in)}(\theta, t)}^p f^{(in)}(u, \theta, t) du - \int_{\varphi^{(ex)}(\theta, t)}^p f^{(ex)}(u, \theta, t) du \quad (4.10) \end{aligned}$$

и пусть

$$\begin{aligned} f^{(in)}(p_0(\theta, t), \theta, t, 0) - f^{(ex)}(p_0(\theta, t), \theta, t, 0) &< 0 \\ \text{при всех } \theta = \theta(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Асимптотическое приближение решения.

Асимптотическое приближение решения задачи (4.1), содержащего внутренний переходный слой, будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$:

$$U(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} U^{(in)}(x, y, t, \varepsilon), & \text{если } (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}; \\ U^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon), & \text{если } (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Функции $U^{(in)}$ и $U^{(ex)}$, а также их производные по направлению нормали к кривой C_T будем непрерывно сшивать на этой кривой:

$$U(\hat{x}, \hat{y}, t, \varepsilon) = U^{(in)}(\hat{x}, \hat{y}, t, \varepsilon) = U^{(ex)}(\hat{x}, \hat{y}, t, \varepsilon), \quad (4.12)$$

$$\left. \frac{\partial U^{(in)}}{\partial \mathbf{n}_T} \right|_{C_T} = \left. \frac{\partial U^{(ex)}}{\partial \mathbf{n}_T} \right|_{C_T}. \quad (4.13)$$

Значение функции $U(\hat{x}, \hat{y}, t, \varepsilon)$ на кривой C_T не известно. Будем искать его в виде разложения

$$U(\hat{x}(\theta, t), \hat{y}(\theta, t), t, \varepsilon) = p_0(\theta, t) + \varepsilon p_1(\theta, t) + \dots, \quad (4.14)$$

коэффициенты которого определим из условий сшивания производных асимптотических представлений $U^{(in)}(\theta, t, \varepsilon)$ и $U^{(ex)}(\theta, t, \varepsilon)$ по направлению нормали $\mathbf{n}_T$ к кривой C_T .

Функцию $U^{(in)}(x, y, t, \varepsilon)$ будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$U^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) + Q^{(in)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \quad (4.15)$$

где $\bar{u}^{(in)}(x, y, t, \varepsilon)$ – регулярная часть разложения, $Q^{(in)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$ – функция, описывающая переходный слой, ξ – растянутая переменная в окрестности кривой C_T , определенная в пункте 4.1.

Для описания поведения решения в окрестности кривой ∂D введем локальные координаты (r_1, l) и растянутую переменную $\eta = \frac{r_1}{\varepsilon}$, где r_1 – расстояние от кривой ∂D до точки в окрестности этой кривой вдоль внутренней нормали к ней, $r_1 \geq 0$, а l – параметр кривой ∂D , $l \in [0, L]$.

Функцию $U^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon)$ будем искать в виде суммы трех слагаемых:

$$U^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon) + Q^{(ex)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + R(\eta, l, t, \varepsilon). \quad (4.16)$$

Здесь $\bar{u}^{(ex)}$ и $Q^{(ex)}$ соответственно, регулярные функции и функции переходного слоя, $R(\eta, l, t, \varepsilon)$ – функция, описывающая пограничный слой в окрестности кривой ∂D .

Каждую из функций в (4.15) и (4.16) будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\bar{u}^{(in,ex)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(in,ex)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(in,ex)}(x, y, t) + \dots; \quad (4.17)$$

$$Q^{(in,ex)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = Q_0^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) + \varepsilon Q_1^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) + \dots; \quad (4.18)$$

$$R(\eta, l, t, \varepsilon) = R_0(\eta, l, t) + \varepsilon R_1(\eta, l, t) + \dots. \quad (4.19)$$

4.3 Регулярная часть асимптотического приближения.

Уравнения для коэффициентов разложения (4.17) регулярной части асимптотического приближения можно определить из равенств

$$\varepsilon^2 \Delta_{xy} \bar{u}^{(in,ex)} - \varepsilon \frac{\partial \bar{u}^{(in,ex)}}{\partial t} = f^{(in,ex)}(\bar{u}^{(in,ex)}, x, y, t, \varepsilon).$$

Для этого следует подставить в эти равенства суммы (4.17), разложить функции в правой части в ряды Тейлора по степеням малого параметра и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Главные регулярные члены асимптотического приближения в каждой из областей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$ определяются как решения вырожденных уравнений

$$\begin{aligned} f^{(in)}(\bar{u}^{(in)}, x, y, t, 0) &= 0, \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}; \\ f^{(ex)}(\bar{u}^{(ex)}, x, y, t, 0) &= 0, \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Согласно условию (A2) решениями этих уравнений, соответственно в областях $\overline{D}^{(in)} \times \mathbb{R}$ и $\overline{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}$, являются функции

$$\bar{u}_0^{(in)}(x, y, t) = \varphi^{(in)}(x, y, t), \quad \bar{u}_0^{(ex)}(x, y, t) = \varphi^{(ex)}(x, y, t).$$

Введем обозначения

$$\bar{f}^{(in,ex)}(x, y, t) := \bar{f}^{(in,ex)}\left(\varphi^{(in,ex)}(x, y, t), x, y, t, 0\right).$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_u^{(in,ex)}(x, y, t)$ и $\bar{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(x, y, t)$.

Функции $\bar{u}_i^{(in,ex)}(x, y, t)$ при $i = 1, 2, \dots$ определяются как решения уравнений вида

$$\bar{f}_u^{(in,ex)}(x, y, t) \bar{u}_i^{(in,ex)}(x, y, t) = \bar{h}_i^{(in,ex)}(x, y, t), \quad (4.21)$$

разрешимых в силу условия (A3).

Функции $\bar{h}_i^{(in,ex)}(x, y, t)$ известны на каждом i -м шаге и выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_k^{(in,ex)}$, с индексами $k = 0, 1, \dots, i - 1$, например,

$$\bar{h}_1^{(in,ex)}(x, y, t) = -\frac{\partial \varphi^{(in,ex)}}{\partial t}(x, y, t) - \bar{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(x, y, t).$$

4.4 Функции переходного слоя.

В переменных (ξ, θ, t) оператор $\varepsilon^2 \Delta - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ имеет вид (4.5). Уравнения для коэффициентов ряда (4.18) определяются из равенств

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q^{(in,ex)}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial Q^{(in,ex)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial Q^{(in,ex)}}{\partial t} - \varepsilon K(\theta, t) \frac{\partial Q^{(in,ex)}}{\partial \xi} - \\ & - \varepsilon M(\theta, t) \frac{\partial Q^{(in,ex)}}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i L_i[Q^{(in,ex)}] = \\ & = f^{(in,ex)}\left(\bar{u}^{(in,ex)}(\hat{x} - \varepsilon \xi \sin \alpha, \hat{y} + \varepsilon \xi \cos \alpha, t) + Q^{(in,ex)}, \hat{x} - \varepsilon \xi \sin \alpha, \hat{y} + \varepsilon \xi \cos \alpha, t, \varepsilon\right) - \\ & - f^{(in,ex)}\left(\bar{u}^{(in,ex)}(\hat{x} - \varepsilon \xi \sin \alpha, \hat{y} + \varepsilon \xi \cos \alpha, t), \hat{x} - \varepsilon \xi \sin \alpha, \hat{y} + \varepsilon \xi \cos \alpha, t, \varepsilon\right), \quad (4.22) \end{aligned}$$

если подставить в эти равенства суммы (4.17) и (4.18), разложить функции в правых частях в ряды Тейлора по степеням малого параметра и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε .

Потребуем выполнения стандартных для функций переходного слоя условий убывания на бесконечности:

$$Q_i^{(in)}(-\infty, \theta, t) = 0, \quad Q_i^{(ex)}(+\infty, \theta, t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

Дополнительные условия при $\xi = 0$ для функций $Q_i^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ для каждого $i = 0, 1, \dots$ получаются путем приравнивая коэффициентов при ε^i в равенстве (4.14) с учетом условия непрерывности (4.12):

$$\begin{aligned} \varphi^{(in)}(\theta, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(in)}(\theta, t) + \dots + Q_0^{(in)}(0, \theta, t) + \varepsilon Q_1^{(in)}(0, \theta, t) + \dots = \\ = \varphi^{(ex)}(\theta, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(ex)}(\theta, t) + \dots + Q_0^{(ex)}(0, \theta, t) + \varepsilon Q_1^{(ex)}(0, \theta, t) + \dots = \\ = p_0(\theta, t) + \varepsilon p_1(\theta, t) + \dots, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где введены обозначения $\bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta, t) := u_1^{(in,ex)}(\hat{x}(\theta, t), \hat{y}(\theta, t), t)$.

Уравнения для функций $p_i(\theta, t)$, коэффициентов разложения (4.14), получаются из условия (4.13) сшивания производных асимптотических разложений вдоль нормали к кривой $C_T(t)$. Оператор дифференцирования по направлению нормали к кривой C_T в переменных (r, θ) и (ξ, θ) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_T} = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.24)$$

где коэффициенты $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ определены выражениями (4.3).

Перепишем условие (4.13) с учетом разложений (4.17)-(4.18):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi^{(in)}}{\partial r}(\theta, t) + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_1^{(in)}}{\partial r}(\theta, t) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(in)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \frac{\partial Q_1^{(in)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \dots = \\ & = \frac{\partial \varphi^{(ex)}}{\partial r}(\theta, t) + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_1^{(ex)}}{\partial r}(\theta, t) + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_0^{(ex)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \frac{\partial Q_1^{(ex)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.4.1 Функции переходного слоя нулевого порядка

Функции $Q_0^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ определяются как решения уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q_0^{(in,ex)}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial \xi} = \\ & = f^{(in,ex)}\left(\varphi^{(in,ex)}(\theta, t) + Q_0^{(in,ex)}, \hat{x}(\theta, t), \hat{y}(\theta, t), t, 0\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Уравнение для функции $Q_0^{(in)}$ рассматривается при $\xi \in (-\infty; 0)$, $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, а для функции $Q_0^{(ex)}$ – при $\xi \in (0; +\infty)$, $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Переменная t в уравнениях (4.26) является параметром. Приравнивая коэффициенты при ε^0 в условии сшивания (4.23), получаем следующие дополнительные условия для функций $Q_0^{(in,ex)}$ при $\xi = 0$:

$$\varphi^{(in)}(\theta, t) + Q_0^{(in)}(0, \theta, t) = \varphi^{(ex)}(\theta, t) + Q_0^{(ex)}(0, \theta, t) = p_0(\theta, t). \quad (4.27)$$

Потребуем еще выполнения условий убывания на бесконечности:

$$Q_0^{(in,ex)}(\mp\infty, \theta, t) = 0. \quad (4.28)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\xi, \theta, t) &= \begin{cases} \varphi^{(in)}(\theta, t) + Q_0^{(in)}(\xi, \theta, t), & \xi \leq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}; \\ \varphi^{(ex)}(\theta, t) + Q_0^{(ex)}(\xi, \theta, t), & \xi \geq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}; \end{cases} \\ \Phi^{(in)}(\xi, \theta, t) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \xi \leq 0; \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}; \\ \Phi^{(ex)}(\xi, \theta, t) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \xi \geq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Перепишем задачи (4.26)-(4.28) с использованием обозначений (4.29):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = f^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t), & \xi < 0; \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = f^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t), & \xi > 0; \\ \tilde{u}(0, \theta, t) = p_0(\theta, t), \tilde{u}(\mp\infty, \theta, t) = \varphi^{(in, ex)}(\theta, t). \end{cases} \quad (4.30)$$

От дифференциальных уравнений второго порядка в (4.30) перейдем к эквивалентным системам уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi^{(in, ex)}, \quad \frac{\partial \Phi^{(in, ex)}}{\partial \xi} = -V(\theta, t) \Phi^{(in, ex)} + f^{(in, ex)}(\tilde{u}, \theta, t). \quad (4.31)$$

Разделив второе уравнение каждой из систем (4.31) на первое, а затем домножив обе части полученных равенств, соответственно, на $\Phi^{(in)}$ и $\Phi^{(ex)}$, получим дифференциальные уравнения первого порядка относительно функций $\Phi^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t)$ и $\Phi^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t)$, которые совпадают с уравнениями из задач (4.7) и (4.8), соответственно. Определим функции

$$\Phi^{(in, ex)}(\xi, \theta, t) = \Phi^{(in, ex)}(\tilde{u}(\xi), \theta, t)$$

как решения этих задач Коши. Проинтегрируем левую и правую части уравнения задачи (4.7) по переменной $\tilde{u}$ в пределах от $\varphi^{(in)}(\theta, t)$ до $p_0(\theta, t)$, а задачи (4.8) – в пределах от $\varphi^{(ex)}(\theta, t)$ до $p_0(\theta, t)$. Тогда получим

равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\Phi^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t) \right)^2 \Big|_{\varphi^{(in)}(\theta, t)}^{p_0(\theta, t)} + V(\theta, t) \int_{\varphi^{(in)}(\theta, t)}^{p_0(\theta, t)} \Phi^{(in)}(u, \theta, t) du &= \int_{\varphi^{(in)}(\theta, t)}^{p_0(\theta, t)} f^{(in)}(u, \theta, t) du \\ \frac{1}{2} \left(\Phi^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t) \right)^2 \Big|_{\varphi^{(ex)}(\theta, t)}^{p_0(\theta, t)} + V(\theta, t) \int_{\varphi^{(ex)}(\theta, t)}^{p_0(\theta, t)} \Phi^{(ex)}(u, \theta, t) du &= \int_{\varphi^{(ex)}(\theta, t)}^{p_0(\theta, t)} f^{(ex)}(u, \theta, t) du. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Из условия (4.25) в порядке ε^{-1} получаем равенство

$$\Phi^{(in)}(\xi, \theta, t) \Big|_{\xi=0} = \Phi^{(ex)}(\xi, \theta, t) \Big|_{\xi=0}, \quad (4.33)$$

из которого с учетом условия при $\xi = 0$ задачи (4.30) следует, что

$$\Phi^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t) \Big|_{\tilde{u}=p_0(\theta, t)} = \Phi^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t) \Big|_{\tilde{u}=p_0(\theta, t)}. \quad (4.34)$$

Вычитая второе равенство (4.32) из первого, и учитывая (4.34), получим уравнение для определения функции $p_0(\theta, t)$, которое можно записать как $H(p_0(\theta, t), \theta, t) = 0$, где функция $H(p, \theta, t)$ определена выражением (4.10). В силу условия (A4) уравнение разрешимо.

Из существования функций $\Phi^{(in)}(u, \theta, t)$ и $\Phi^{(ex)}(u, \theta, t)$, решений задач (4.7) и (4.8), вытекает существование при всех $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ решений $\tilde{u}(\xi, \theta, t)$ начальных задач

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi^{(in)}(\tilde{u}, \theta, t), \quad \xi < 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi^{(ex)}(\tilde{u}, \theta, t), \quad \xi > 0; \quad \tilde{u}(0, \theta, t) = p_0(\theta, t),$$

для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} \left| \tilde{u}(\xi, \theta, t) - \varphi^{(in, ex)}(\theta, t) \right| = 0.$$

По аналогии с [104] можно доказать справедливость при всех $\theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ следующих оценок:

$$\left| \tilde{u}(\xi, \theta, t) - \varphi^{(ex)}(\theta, t) \right| < C \exp(-\kappa|\xi|),$$

где C , κ – положительные константы.

Для функций $Q_0^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ (см. (4.29)) справедливы оценки

$$\left| Q_0^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) \right| < C \exp(-\kappa|\xi|). \quad (4.35)$$

4.4.2 Функции переходного слоя первого порядка

Для краткости введем обозначения

$$\tilde{f}^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) := f^{(in,ex)}\left(\tilde{u}^{(in,ex)}(\xi, \theta, t), \theta, t, 0\right),$$

$$\bar{f}^{(in,ex)}(\theta, t) := f^{(in,ex)}\left(\varphi^{(in,ex)}(\theta, t), \theta, t, 0\right).$$

Аналогичный	смысл	имеют	обозначения
$\tilde{f}_u^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$, $\tilde{f}_r^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$,			
$\tilde{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$, $\bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta, t)$, $\bar{f}_r^{(in,ex)}(\theta, t)$, $\bar{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(\theta, t)$.			

Приравнивая коэффициенты при ε^1 в уравнениях (4.22) и условии непрерывности (4.23) с учетом разложений (4.17) и (4.18), получим следующие задачи для определения функций $Q_1^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_1^{(in,ex)}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial Q_1^{(in,ex)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) Q_1^{(in,ex)} = Q_1 f^{(in,ex)}(\xi, \theta, t), \\ Q_1^{(in,ex)}(0, \theta, t) + \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta, t) = p_1(\theta, t), \quad Q_1^{(in,ex)}(\mp\infty, \theta, t) = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_1 f^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) &= \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial t} + K(\theta, t) \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial \xi} + M(\theta, t) \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial \theta} + \\ &+ \left(\tilde{f}_u^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta, t) \right) \left(\bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta, t) + \frac{\partial \varphi^{(in,ex)}}{\partial r}(\theta, t) \cdot \xi \right) + \\ &+ \left(\tilde{f}_r^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_r^{(in,ex)}(\theta, t) \right) \xi + \tilde{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_\varepsilon^{(in,ex)}(\theta, t). \end{aligned}$$

Задачу для функции $Q_1^{(in)}$ будем решать на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функции $Q_1^{(ex)}$ – на полупрямой $\xi \geq 0$. Производную по переменной r следует понимать в смысле (4.24). Решения задач (4.36) можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) = \left(p_1(\theta, t) - \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta, t) \right) (\Phi(\theta, t))^{-1} \Phi^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) + \\ + \Phi^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) \int_0^\xi \left(\Phi^{(in,ex)}(\eta, \theta, t) \right)^{-2} \exp(-V\eta) \int_{\mp\infty}^\eta \Phi^{(in,ex)}(\sigma, \theta, t) \exp(V\sigma) Q_1 f^{(in,ex)}(\sigma, \theta, t) d\sigma d\eta. \quad (4.37)$$

Здесь введено обозначение $\Phi(\theta, t) = \Phi^{(in)}(0, \theta, t) = \Phi^{(ex)}(0, \theta, t)$ (см. (4.33)). По своему построению функции $Q_1 f^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ имеют экспоненциальные оценки типа (4.35). Поэтому аналогичные оценки справедливы и для функций $Q_1^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$.

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в условии C^1 сшивания (4.25), получаем следующее равенство

$$\frac{\partial \varphi^{(in)}}{\partial r}(\theta, t) + \frac{\partial Q_1^{(in)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) = \frac{\partial \varphi^{(ex)}}{\partial r}(\theta, t) + \frac{\partial Q_1^{(ex)}}{\partial \xi}(0, \theta, t). \quad (4.38)$$

Выпишем выражения для производных функций $Q_1^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ при $\xi = 0$, используя их явный вид (4.37) с учетом выражений (4.31) для производных $\frac{\partial \Phi^{(in,ex)}}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial Q_1^{(in,ex)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) = \left(p_1(\theta, t) - \bar{u}_1^{(in,ex)}(\theta, t) \right) \left(\frac{f^{(in,ex)}(p_0(\theta, t), \theta, t, 0)}{\Phi(\theta, t)} - V(\theta, t) \right) + \\ + (\Phi(\theta, t))^{-1} \int_{\mp\infty}^0 \Phi^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) \exp(V\xi) Q_1 f^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) d\xi.$$

Подставив эти выражения в равенство (4.38) и проведя некоторые преобразования, получим уравнение для функции $p_1(\theta, t)$

$$p_1(\theta, t) (\Phi(\theta, t))^{-1} \frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta, t), \theta, t) = G_1(\theta, t). \quad (4.39)$$

где функция $H(p, \theta, t)$ определена в условии (A4), а $G_1(\theta, t)$ – известная функция. Из выражения (4.10) с учетом условия (4.34) следует равенство

$$\frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta, t), \theta, t) = f^{(in)}(p_0(\theta, t), \theta, t, 0) - f^{(ex)}(p_0(\theta, t), \theta, t, 0).$$

в силу условия (A4) выражение в правой части этого равенства строго отрицательно, поэтому уравнение (4.39) разрешимо.

4.4.3 Функции переходного слоя произвольного порядка

Функции $Q_k^{(in, ex)}(\xi, \theta, t)$ $k = 2, 3, \dots$ определяются как решения следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_k^{(in, ex)}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial Q_k^{(in, ex)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u^{(in, ex)}(\xi, \theta, t) Q_k^{(in, ex)} = Q_k f^{(in, ex)}(\xi, \theta, t), \\ Q_k^{(in, ex)}(0, \theta, t) + \bar{u}_k^{(in, ex)}(\theta, t) = p_k(\theta, t), \quad Q_k^{(in, ex)}(\mp \infty, \theta, t) = 0, \end{cases}$$

где $Q_k f^{(in, ex)}(\xi, \theta, t)$ – известные функции. Решения этих задач можно выписать в явном виде по аналогии с (4.37). Для функций $Q_k^{(in, ex)}(\xi, \theta, t)$ имеют место экспоненциальные оценки типа (4.35).

Приравнивая коэффициенты при ε^{k-1} в условии C^1 сшивания (4.25), после преобразований получаем уравнение для определения функции $p_k(\theta, t)$:

$$p_k(\theta, t) (\Phi(\theta, t))^{-1} \frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta, t), \theta, t) = G_k(\theta, t),$$

где $G_k(\theta, t)$ известные функции.

При каждом $k = 2, 3, \dots$ эти уравнения разрешимы, как и уравнение (4.39) для функции $p_1(\theta, t)$.

4.5 Функции пограничного слоя

Коэффициенты $R_i(\eta, l, t)$ разложений (4.19) функций пограничного слоя строятся стандартным образом (см. [28]). Члены нулевого порядка этих разложений равны нулю, что характерно для задач Неймана. Функции $R_i(\eta, l, t)$, $i = 1, 2, \dots$ экспоненциально убывают при $\eta \rightarrow +\infty$.

4.6 Асимптотическое приближение решения

Если потребовать достаточной гладкости функций $f^{(in,ex)}(u, x, y, t, \varepsilon)$, то с помощью описанного в 4.4 алгоритма можно найти коэффициенты разложений (4.17)-(4.19) до произвольного порядка k . Составим суммы

$$\begin{aligned}
 U_k^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(in)}(x, y, t) + Q_i^{(in)}(\xi, \theta, t) \right), \\
 (x, y, t) &\in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}, \quad \theta = \theta(t), \quad \xi \leq 0; \\
 U_k^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(ex)}(x, y, t) + Q_i^{(ex)}(\xi, \theta, t) + R_i(\eta, l, t) \right), \\
 (x, y, t) &\in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}, \quad \theta = \theta(t), \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad l \in [0; L].
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Положим

$$U_k(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} U_k^{(in)}(x, y, t, \varepsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}; \\ U_k^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Функции $U_k(x, y, t, \varepsilon)$ по своему построению удовлетворяют уравнению (4.1) с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$ в области $D \times \mathbb{R}$ за исключением кривой C_T , на которой функция $U_k(x, y, t, \varepsilon)$ не является гладкой. На кривой ∂D

функции $U_k(x, y, t, \varepsilon)$ удовлетворяют краевым условиям задачи (4.1) с точностью $O(\varepsilon^k)$.

4.7 Существование решения периодической задачи

Определение 4.7.1 *Решением задачи (4.1) будем называть функцию $u(M, t)$ из класса $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D \setminus C_T)$ по пространственным переменным и из класса $C^1(\mathbb{R})$ по времени, удовлетворяющую уравнению и краевому условию задачи (4.1), а также условию периодичности $u(M, t) = u(M, t + T)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Теорема 4.7.1 *При выполнении условий (A1)-(A4) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (4.1) в смысле определения 4.7.1, для которого функция $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ является равномерным в $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, то есть при $(x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$|u(x, y, t, \varepsilon) - U_n(x, y, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1},$$

где C – положительная константа, не зависящая от ε .

Доказательство

Для доказательства этой теоремы используем метод дифференциальных неравенств [59], [61]. Согласно доказанному в [59], [61] решение задачи (4.1) существует, если можно указать пару непрерывных функций $\alpha^T(x, y, t, \varepsilon)$ и $\beta^T(x, y, t, \varepsilon)$, являющихся, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (4.1). По определению для этих функций должны выполняться следующие неравенства:

1) Упорядоченность верхнего и нижнего решений:

$$\alpha^T(x, y, t, \varepsilon) < \beta^T(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}.$$

2) Действие оператора в уравнении (4.1) на верхнее и нижнее решение:

$$\varepsilon^2 \Delta \beta^T - \varepsilon \frac{\partial \beta^T}{\partial t} - f(\beta^T, x, y, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \Delta \alpha^T - \varepsilon \frac{\partial \alpha^T}{\partial t} - f(\alpha^T, x, y, t, \varepsilon)$$

$$\text{при } (x, y, t) \in (D \setminus C_T) \times \mathbb{R}.$$

3) Условия на границе ∂D

$$\left. \frac{\partial \beta^T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} \leq u^0(S, t) \leq \left. \frac{\partial \alpha^T}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D}, \quad S \in \partial D, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к кривой ∂D .

4) Условия на производные верхнего и нижнего решений по направлению нормали к кривой C_T :

$$\left. \frac{\partial \beta^T}{\partial r} \right|_{r=-0} \geq \left. \frac{\partial \beta^T}{\partial r} \right|_{r=+0}, \quad \left. \frac{\partial \alpha^T}{\partial r} \right|_{r=-0} \leq \left. \frac{\partial \alpha^T}{\partial r} \right|_{r=+0}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если указанные функции $\alpha^T(x, y, t, \varepsilon)$ и $\beta^T(x, y, t, \varepsilon)$ существуют, то решение задачи (4.1) заключено между ними при всех $(x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}$:

$$\alpha^T(x, y, t, \varepsilon) \leq u(x, y, t, \varepsilon) \leq \beta^T(x, y, t, \varepsilon).$$

Верхнее и нижнее решения задачи (4.1) мы будем строить, используя идеи асимптотического метода дифференциальных неравенств, развитые в работах [30], [40]. Согласно этому методу верхние и нижние решения

задачи (4.1) конструируются как модификации асимптотического разложения решения этой задачи. Будем обозначать через β_k^T и α_k^T соответственно верхнее и нижнее решения, при определении которых модификация асимптотического разложения производится в порядке ε^k .

Для доказательства утверждения Теоремы 4.7.1 необходимо построить верхнее и нижнее решения β_{n+1}^T и α_{n+1}^T . Будем строить эти функции отдельно в каждой из подобластей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$:

$$\beta_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} \beta_{n+1}^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) = U_{n+1}^{(in)} + \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(in)}(\xi, \theta, t)), \\ (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}, \xi \leq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}; \\ \beta_{n+1}^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon) = U_{n+1}^{(ex)} + \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(ex)}(\xi, \theta, t) + R_\beta(\eta, l, t)), \\ (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}, \xi \geq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}, \eta \geq 0, l \in [0; L]. \end{cases}$$

Здесь $U_{n+1}^{(in,ex)}$ — суммы (4.40) при $k = n + 1$; положительная константа μ подбирается таким образом, чтобы дифференциальные неравенства 1) и 2) выполнялись вдали от кривой C_T .

Функции $q^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ вводятся для устранения невязок порядка ε^{n+1} в условии 2), возникающих в окрестности кривой C_T в результате добавления к асимптотическому приближению величины μ , а также для выполнения условия упорядоченности 1) в окрестности кривой C_T .

Функции $q^{(in)}(\xi, \theta, t)$ (определенная при $\xi \leq 0$) и $q^{(ex)}(\xi, \theta, t)$ (определенная при $\xi \geq 0$) являются решениями следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q^{(in,ex)}}{\partial \xi^2} + V(\theta, t) \frac{\partial q^{(in,ex)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) q^{(in,ex)} - q f^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) = 0, \\ q^{(in,ex)}(0, \theta, t) + \mu = \delta; \quad q^{(in,ex)}(\mp \infty, \theta, t) = 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

где $q f^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) = \mu \cdot \left(\tilde{f}_u^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta, t) \right) - d \cdot e^{-\kappa|\xi|}$,

Положительные величины δ , d , $\varkappa$ подбираются таким образом, чтобы для функции $\beta_{n+1}^T(x, y, \varepsilon)$ выполнялись дифференциальные неравенства 1) и 4). Решения задач (4.41) можно выписать в явном виде:

$$q^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) = (\delta - \mu)(\Phi(\theta, t))^{-1} \Phi^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) + \Phi^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) \times \\ \times \int_0^\xi \left(\Phi^{(in,ex)}(\eta, \theta, t) \right)^{-2} \exp(-V\eta) \int_{-\infty}^\eta \Phi^{(in,ex)}(\sigma, \theta, t) \exp(V\sigma) q f^{(in,ex)}(\sigma, \theta, t) d\sigma d\eta. \quad (4.42)$$

Выберем постоянные d и $\varkappa$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu \left(\tilde{f}_u^{(in)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_u^{(in)}(\theta, t) \right) - d \cdot e^{\varkappa \xi} < 0, \quad \text{при } \xi \leq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}, \\ \mu \left(\tilde{f}_u^{(ex)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_u^{(ex)}(\theta, t) \right) - d \cdot e^{-\varkappa \xi} < 0, \quad \text{при } \xi \geq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}, \\ \delta - \mu > 0. \quad (4.43)$$

Тогда из явного вида (4.42) следует, что $q^{(in,ex)}$ принимают строго положительные значения.

Функция $\alpha_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon)$ – нижнее решение задачи (4.1) – имеет вид

$$\alpha_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha_{n+1}^{(in)}(x, y, t, \varepsilon) = U_{n+1}^{(in)} - \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(in)}(\xi, \theta, t)), \\ (x, y, t) \in \bar{D}^{(in)} \times \mathbb{R}, \xi \leq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}; \\ \alpha_{n+1}^{(ex)}(x, y, t, \varepsilon) = U_{n+1}^{(ex)} - \varepsilon^{n+1} (\mu + q^{(ex)}(\xi, \theta, t) + R_\alpha(\eta, l, t)), \\ (x, y, t) \in \bar{D}^{(ex)} \times \mathbb{R}, \xi \geq 0, \theta = \theta(t), t \in \mathbb{R}, \eta \geq 0, l \in [0; L]. \end{cases}$$

Функции $R_\beta(\eta, l, t)$ и $R_\alpha(\eta, l, t)$ являются решениями однородных уравнений и экспоненциально убывают при $\eta \rightarrow +\infty$. Краевые условия на границе ∂D для этих функций задаются таким образом, чтобы в условии 3) выполнялось равенство.

Покажем, что для функций $\beta_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon)$ и $\alpha_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon)$ выполняются неравенства 1) – 4).

Для проверки условия 1) упорядоченности, составим разность

$$\beta_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon) - \alpha_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon)$$

в каждой из областей $\bar{D}^{(in)}$ и $\bar{D}^{(ex)}$:

$$\beta_{n+1}^{(in,ex)}(x, y, t, \varepsilon) - \alpha_{n+1}^{(in,ex)}(x, y, t, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} \left(2\mu + 2q^{(in,ex)}(\xi, \theta, t) \right) + O(\varepsilon^{n+2}). \quad (4.44)$$

Выражения справа строго положительны за счет выбора положительной константы μ и неравенств (4.43), тем самым условие 1) упорядоченности верхнего и нижнего решений оказывается выполненным.

Покажем выполнение неравенства 2) на примере верхнего решения.

Из способа построения верхнего решения следует равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \beta_{n+1}^{(in,ex)} - \varepsilon \frac{\partial \beta_{n+1}^{(in,ex)}}{\partial t} - f^{(in,ex)} \left(\beta_{n+1}^{(in,ex)}, x, y, t, \varepsilon \right) = \\ = -\varepsilon^{n+1} \left(\mu \cdot \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta, t) + d \cdot e^{-\kappa|\xi|} \right) + O(\varepsilon^{n+2}). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Величины μ и d положительны, функции $\bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta, t)$ положительны при всех $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ согласно условию (A3), поэтому выражение в правой части будет отрицательным при достаточно малом ε , и тем самым выполнено неравенство 2) для верхнего решения. Аналогично доказывается выполнение неравенства 2) для нижнего решения.

Проверим выполнение неравенства 4) для верхнего решения. Разность производных верхнего решения по направлению нормали к кривой

C_T слева и справа от этой кривой дается равенством

$$\left. \frac{\partial \beta_{n+1}^T}{\partial r} \right|_{r=-0} - \left. \frac{\partial \beta_{n+1}^T}{\partial r} \right|_{r=+0} = \varepsilon^n \left(\frac{\partial q^{(in)}}{\partial \xi} (0, \theta, t) - \frac{\partial q^{(ex)}}{\partial \xi} (0, \theta, t) \right) + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (4.46)$$

Запишем разность в скобках правой части равенства (4.46), используя явный вид (4.42) для функций $q^{(in,ex)}(\xi, \theta, t)$ и учитывая выражения (4.31)

для производных $\frac{\partial \Phi^{(in,ex)}}{\partial \xi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{(in)}}{\partial \xi} (0, \theta, t) - \frac{\partial q^{(ex)}}{\partial \xi} (0, \theta, t) = \\ = (\delta - \mu) (\Phi(\theta, t))^{-1} \left(f^{(in)}(p_0(\theta, t), \theta, t) - f^{(ex)}(p_0(\theta, t), \theta, t) \right) + \\ + (\Phi(\theta, t))^{-1} \int_{-\infty}^0 \Phi^{(in)}(\xi, \theta, t) \exp(V\xi) q f^{(in)}(\xi, \theta, t) d\xi - \\ - (\Phi(\theta, t))^{-1} \int_{+\infty}^0 \Phi^{(ex)}(\xi, \theta, t) \exp(V\xi) q f^{(ex)}(\xi, \theta, t) d\xi. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Выберем величину δ таким образом чтобы выполнялось неравенство $\delta > \mu + \max_{\substack{\theta=\theta(t) \\ t \in \mathbb{R}}} |\Gamma(\theta, t)|$, где

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta, t) = \left(\int_{-\infty}^0 \Phi^{(in)}(\xi, \theta, t) \exp(V\xi) q f^{(in)}(\xi, \theta, t) d\xi - \int_{+\infty}^0 \Phi^{(ex)}(\xi, \theta, t) \exp(V\xi) q f^{(ex)}(\xi, \theta, t) d\xi \right) \times \\ \times \left(f^{(in)}(p_0(\theta, t), \theta, t) - f^{(ex)}(p_0(\theta, t), \theta, t) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

В силу выполнения неравенств (4.9) и (4.11) при указанном выборе δ выражение в правой части (4.47) оказывается положительным.

Тем самым условие 4) определения верхнего решения оказывается выполненным для функции β_{n+1}^T . Выполнение неравенства 4) для нижнего решения α_{n+1}^T при том же самом δ доказывается аналогично.

Согласно [59] из существования гладких верхнего и нижнего пери-

одических решений задачи (4.1) следует существование максимального $u_{max}^T(x, y, t, \varepsilon)$ и минимального $u_{min}^T(x, y, t, \varepsilon)$ решений этой задачи таких, что любая функция $u(x, y, t, \varepsilon)$, являющаяся решением задачи (4.1) в смысле определения (8.1) удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon) \leq u_{min}^T \leq u(x, y, t, \varepsilon) \leq u_{max}^T \leq \beta_{n+1}^T(x, y, t, \varepsilon),$$

$$\forall x, y \in \overline{D}, t \in \mathbb{R}. \quad (4.48)$$

Из этих неравенств и структуры верхнего и нижнего решений следует оценка Теоремы 4.7.1.

4.8 Локальная единственность и устойчивость решения периодической задачи

4.8.1 Существование решения начально-краевой задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} L_t[v] \equiv \varepsilon^2 \Delta v - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} - f(v, M, t, \varepsilon) = 0, & M(x, y) \in D, t \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = u^0(S, t), & S \in \partial D, \\ v(M, 0, \varepsilon) = v^0(M, \varepsilon), & M \in D. \end{cases} \quad (4.49)$$

Здесь область $\overline{D}$, а также функции $f(v, M, t, \varepsilon)$ и $u^0(S, t)$ – те же, что и в постановке задачи (4.1).

Согласно [59] решение $v(M, t, \varepsilon)$ задачи (4.49) существует, если существуют верхнее $\beta(M, t, \varepsilon)$ и нижнее $\alpha(M, t, \varepsilon)$ решения этой задачи, причем выполняются неравенства $\alpha(M, t, \varepsilon) \leq v(M, t, \varepsilon) \leq \beta(M, t, \varepsilon)$. Определение нижнего и верхнего решений задачи (4.49) аналогично опреде-

лению периодических нижнего и верхнего решений, приведенного выше при доказательстве теоремы существования периодического решения в пункте 8. При этом область рассмотрения прямая $\mathbb{R}$ заменяется на $\mathbb{R}^+$, и появляется неравенство в начальный момент времени

$$\alpha(M, 0, \varepsilon) \leq v^0(M, \varepsilon) \leq \beta(M, 0, \varepsilon), \quad M \in \overline{D}. \quad (4.50)$$

Лемма При выполнении условий (A1)-(A4) существует функция $v(M, t, \varepsilon)$ – решение начально-краевой задачи (4.49) с начальной функцией $v^0(M, \varepsilon)$, лежащей в интервале

$$\alpha_1^T(M, 0, \varepsilon) < v^0(M, \varepsilon) < u_{min}^T(M, 0, \varepsilon), \quad M \in D,$$

где функция $u_{min}^T(M, t, \varepsilon)$ – минимальное решение задачи (4.1), а $\alpha_1^T(M, t, \varepsilon)$ – нижнее решение задачи (4.1).

Доказательство

Покажем, что функции

$$\begin{aligned} \alpha(M, t, \varepsilon) &= u_{max}^T(M, t, \varepsilon) + (\alpha_1^T(M, t, \varepsilon) - u_{max}^T(M, t, \varepsilon)) e^{-\lambda t}, \\ \beta(M, t, \varepsilon) &= u_{max}^T(M, t, \varepsilon) + (\beta_1^T(M, t, \varepsilon) - u_{max}^T(M, t, \varepsilon)) e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \end{aligned}$$

где $u_{max}^T(M, t, \varepsilon)$ – максимальное решение задачи (4.1) (см (4.48)), а $\alpha_1^T(M, t, \varepsilon)$, $\beta_1^T(M, t, \varepsilon)$, соответственно нижнее и верхнее решения задачи (4.1), удовлетворяют системе дифференциальных неравенств, аналогичных неравенствам 1) – 4) из пункта 8 при $(x, y, t) \in \overline{D} \times \mathbb{R}^+$, а также неравенствам (4.50) в начальный момент времени и, тем самым, являются верхним и нижним решениями задачи (4.49). Условия 1), 3) и 4) выполняются для функций $\alpha(M, t, \varepsilon)$ и $\beta(M, t, \varepsilon)$ при $(x, y, t) \in \overline{D} \times \mathbb{R}^+$ в

силу свойств функций $\alpha_1^T(M, t, \varepsilon)$ и $\beta_1^T(M, t, \varepsilon)$, а также в силу гладкости функций $u_{max}^T(M, t, \varepsilon)$.

Из вида функций $\alpha(M, t, \varepsilon)$ и $\beta(M, t, \varepsilon)$, а также из условия леммы нетрудно получить следующие оценки:

$$\alpha(M, 0, \varepsilon) = \alpha_1^T(M, 0, \varepsilon) < v^0(M, \varepsilon) < \beta_1^T(M, 0, \varepsilon) = \beta(M, 0, \varepsilon),$$

откуда следует, что неравенство (4.50) для функций $\alpha(M, t, \varepsilon)$ и $\beta(M, t, \varepsilon)$ также выполняется.

Покажем справедливость неравенства, аналогичного 2) из пункта 8 при $(x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}^+$ для верхнего решения. Для этого подействуем оператором L_t на функцию $\beta(M, t, \varepsilon)$:

$$L_t[\beta] = \varepsilon^2 \Delta \beta - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial t} - f(\beta, M, t, \varepsilon).$$

К правой части равенства добавим слагаемые

$$f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon), f(\beta_1^T, M, t, \varepsilon) e^{-\lambda(\varepsilon)t}, f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon) e^{-\lambda(\varepsilon)t},$$

а затем вычтем эти же слагаемые, чтобы выражение в правой части не изменилось. После группировки получим равенство:

$$\begin{aligned} L_t[\beta] &= \varepsilon^2 \Delta \beta - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial t} - f(\beta, M, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \Delta u_{max}^T - \varepsilon \frac{\partial u_{max}^T}{\partial t} - f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon) - \\ &\quad - \left(\varepsilon^2 \Delta u_{max}^T - \varepsilon \frac{\partial u_{max}^T}{\partial t} - f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon) \right) e^{-\lambda t} + \\ &\quad + \left(\varepsilon^2 \Delta \beta_1^T - \varepsilon \frac{\partial \beta_1^T}{\partial t} - f(\beta_1^T, M, t, \varepsilon) \right) e^{-\lambda t} + \varepsilon \lambda (\beta_1^T - u_{max}^T) e^{-\lambda t} + \\ &\quad + (f(\beta_1^T, M, t, \varepsilon) - f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon)) e^{-\lambda t} - (f(\beta, M, t, \varepsilon) - f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon)) \end{aligned}$$

Учтем, что функция $u_{max}^T(M, t, \varepsilon)$ является решением уравнения (4.1), используем равенство (4.45) при $n = 0$, оценку

$$\beta_1^T(M, t, \varepsilon) - u_{max}^T(M, t, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad M \in D, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

которая следует из неравенств (4.48) и равенств (4.44), а также оценку

$$\begin{aligned} (f(\beta_1^T, M, t, \varepsilon) - f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon)) e^{-\lambda t} - (f(\beta, M, t, \varepsilon) - f(u_{max}^T, M, t, \varepsilon)) = \\ = f_{uu}^* (\theta_2 e^{-\lambda t} - \theta_1) (\beta_1^T - u_{max}^T)^2 e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

где

$$f_{uu}^* = f_{uu} (u_{max}^T + \theta_2 (\beta_1^T - u_{max}^T) e^{-\lambda t} + \theta_3 (\theta_2 e^{-\lambda t} - \theta_1) (\beta_1^T - u_{max}^T)), \quad |\theta_{1,2,3}| < 1,$$

тогда приходим к равенству

$$L[\beta] = -\varepsilon \left(\mu \cdot \bar{f}_u^{(in,ex)}(\theta, t) + d \cdot e^{-\kappa|\xi|} \right) e^{-\lambda t} + O(\varepsilon^2).$$

Константы μ и d положительны, поэтому при достаточно малых ε выражение в правой части равенства принимает отрицательные значения для всех $\xi \in \mathbb{R}$, $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Отсюда следует, что дифференциальное неравенство вида 2) для верхнего решения $\beta(M, t, \varepsilon)$ выполнено. Аналогично проверяется выполнение этого неравенства для нижнего решения $\alpha(M, t, \varepsilon)$. Выполнение дифференциальных неравенств доказывает лемму.

Согласно доказанному в [59], при достаточно малых значениях ε существует решение $v(M, t, \varepsilon)$ задачи (4.49), для которого выполняются неравенства $\alpha(M, t, \varepsilon) \leq v(M, t, \varepsilon) \leq \beta(M, t, \varepsilon)$, причем из вида верхнего и нижнего решений следует предельное равенство:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |v(M, t, \varepsilon) - u_{max}^T(M, t, \varepsilon)| = 0, \quad M \in \bar{D}. \quad (4.51)$$

4.8.2 Единственность и локальная устойчивость решения периодической задачи

Теорема 4.8.1 Пусть выполнены условия (A1) - (A4). Тогда гладкое периодическое решение задачи (4.1), для которого суммы (4.40) яв-

ляются асимптотическим приближением, единственно и локально устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[\alpha_1^T; \beta_1^T]$.

Доказательство

Ранее в п.8 были построены верхнее и нижнее решения задачи (4.1), и тем самым доказано существование минимального решения $u_{min}^T(M, t, \varepsilon)$ этой задачи. Согласно результатам, которые сформулированы в [59], это решение является устойчивым снизу по Ляпунову, а именно, если начальная функция $v^0(M, \varepsilon)$ задачи (4.49) лежит в достаточно малой левой полукрестности решения u_{min}^T :

$$0 < \delta < v^0(M, \varepsilon) < u_{min}^T(M, 0, \varepsilon),$$

то выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |v(M, t, \varepsilon) - u_{min}^T(M, t, \varepsilon)| = 0, \quad M \in \overline{D}, \quad (4.52)$$

где $v(M, t, \varepsilon)$ - решение задачи (4.49).

Согласно доказанному утверждению леммы, существует решение задачи (4.49) с начальной функцией $v^0(M, \varepsilon)$, для которой выполняются неравенства

$$\alpha_1^T(M, 0, \varepsilon) < v^0(M, \varepsilon) < u_{min}^T.$$

Из этих неравенств и вида функции α_1^T следует, что при достаточно малом ε можно выбрать функцию $v^0(M, \varepsilon)$ из такой окрестности минимального решения u_{min}^T , что для решения задачи (4.49) будет выполнено предельное равенство (4.52). Сопоставляя предельные равенства (4.51) и

(4.52), приходим к выводу, что

$$u_{min}^T = u_{max}^T$$

и функция $u(x, y, t, \varepsilon)$, для которой выполнены неравенства (4.48), является единственным решением задачи (4.1) на сегменте $[\alpha_1; \beta_1]$, устойчивым с областью влияния не меньшей этого сегмента.

4.9 Пример

В качестве примера рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, y, t, \varepsilon), \\ (x, y) \in D = [x^2 + y^2 < 16], \quad t \in (-\infty; +\infty), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x^2+y^2=16} = 0, \\ u(M, t) = u(M, t + \pi), \end{cases}$$

где

$$f(u, x, y, t) = \begin{cases} u - (x^2 + y^2)(\sin^2 t + 1), & x^2 + y^2 < 4(\sin^2 t + 1), \\ u - \frac{\sin^2 t + 1}{x^2 + y^2}, & 4(\sin^2 t + 1) < x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$

В рассматриваемом примере кривой C_T является окружность

$$x^2 + y^2 = 4(\sin^2(t) + 1),$$

радиус которой зависит от времени. Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $\rho_0(t) = 2\sqrt{\sin^2 t + 1}$; $0 \leq \theta < \pi$.

Функции $\varphi^{(in,ex)}(x, y, t)$ определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} \varphi^{(in)}(x, y, t) &= (x^2 + y^2)(\sin^2 t + 1), \quad x^2 + y^2 < 4(\sin^2 t + 1), \\ \varphi^{(ex)}(x, y, t) &= \frac{\sin^2 t + 1}{x^2 + y^2}, \quad 4(\sin^2 t + 1) < x^2 + y^2 < 16. \end{aligned}$$

Выпишем их значения на окружности C_T :

$$\begin{aligned}\varphi^{(in)}(t) &= 4(\sin^2 t + 1)^2, \\ \varphi^{(ex)}(t) &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Заметим, что неравенство $\varphi^{(in)}(\hat{x}, \hat{y}, t) > \varphi^{(ex)}(\hat{x}, \hat{y}, t)$ из условия (A2) оказывается выполненным. Условие (A3) также выполнено, поскольку $f_u = 1 > 0$.

В каждый момент времени в окрестности окружности C_T перейдем от переменных (x, y) к переменным (ξ, θ) согласно равенствам

$$x = 2\sqrt{\sin^2 t + 1} \cos \theta - \varepsilon \xi \cos \theta; \quad y = 2\sqrt{\sin^2 t + 1} \sin \theta - \varepsilon \xi \sin \theta.$$

Скорость $V(t)$ и кривизна окружности C_T в каждый момент времени определяются выражениями

$$V(t) = \frac{\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t + 1}}, \quad K(t) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 t + 1}}.$$

Задачи (4.26)-(4.28) в случае рассматриваемого примера имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_0^{(in,ex)}}{\partial \xi^2} + V(t) \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial \xi} = Q_0^{(in,ex)}, \\ Q_0^{(in,ex)}(0, t) = p_0(t) - \varphi^{(in,ex)}(t); \quad Q_0^{(in,ex)}(\mp \infty, t) = 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

Решая задачу (4.53) для функции $Q_0^{(in)}$ на полупрямой $\xi \leq 0$, а для функции $Q_0^{(ex)}$ на полупрямой $\xi \geq 0$, получаем следующие выражения для этих функций:

$$\begin{aligned}Q_0^{(in)}(\xi, t) &= \left(p_0(t) - 4(\sin^2 t + 1)^2 \right) \exp(\lambda^{(in)} \xi), \\ Q_0^{(ex)}(\xi, t) &= \left(p_0(t) - \frac{1}{4} \right) \exp(\lambda^{(ex)} \xi),\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\lambda^{(in,ex)}(t) = \frac{1}{2} \left(-V(t) \pm \sqrt{V^2(t) + 4} \right).$$

С учетом условия гладкого сшивания (4.25), получим уравнение для $p_0(\theta, t)$:

$$p_0(t) = \frac{4\lambda^{(in)}(t)(\sin^2 t + 1)^2 - \frac{\lambda^{(ex)}(t)}{4}}{\lambda^{(in)}(t) - \lambda^{(ex)}(t)}.$$

Из уравнений вида (4.21) для регулярной части разложения в первом порядке получаем выражения

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(in)}(x, y, t) &= \sin 2t (x^2 + y^2), \\ \bar{u}_1^{(ex)}(x, y, t) &= \frac{\sin 2t}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

На окружности C_T в каждый момент времени t эти функции принимают значения

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(in)}(t) &= 4 \sin 2t (\sin^2 t + 1), \\ \bar{u}_1^{(ex)}(t) &= \frac{\sin 2t}{4 (\sin^2 t + 1)}.\end{aligned}$$

Функции переходного слоя первого порядка $Q_1^{(in)}(\xi, \theta, t)$ (определенная при $\xi \leq 0$) и $Q_1^{(ex)}(\xi, \theta, t)$ (определенная при $\xi \geq 0$) являются решениями задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_1^{(in,ex)}}{\partial \xi^2} + V(t) \frac{\partial Q_1^{(in,ex)}}{\partial \xi} - Q_1^{(in,ex)} = \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial t} + K(t) \frac{\partial Q_0^{(in,ex)}}{\partial \xi}, \\ Q_1^{(in,ex)}(0, t) = p_1 - \bar{u}_1^{(in,ex)}(t); \quad Q_1^{(in,ex)}(\mp \infty, t) = 0 \end{cases}$$

и имеют вид

$$\begin{aligned}Q_1^{(in)}(\xi, t) &= (p_1 - 4 \sin 2t (\sin^2 t + 1)) \exp(\lambda^{(in)} \xi) + (A^{(in)} \xi^2 + B^{(in)} \xi) \exp(\lambda^{(in)} \xi); \\ Q_1^{(ex)}(\xi, t) &= \left(p_1 - \frac{\sin 2t}{4 (\sin^2 t + 1)} \right) \exp(\lambda^{(ex)} \xi) + (A^{(ex)} \xi^2 + B^{(ex)} \xi) \exp(\lambda^{(ex)} \xi),\end{aligned}$$

где

$$A^{(in)} = \frac{M(t) \lambda^{(ex)}(t) \lambda'^{(in)}(t)}{2(\lambda^{(in)} - \lambda^{(ex)})}, \quad A^{(ex)} = -\frac{M(t) \lambda^{(in)}(t) \lambda'^{(ex)}(t)}{2(\lambda^{(in)} - \lambda^{(ex)})};$$

$$B^{(in)} = \frac{(M(t) \lambda^{(ex)}(t))' - M(t) K(t) - 2A^{(in)}}{\lambda^{(in)} - \lambda^{(ex)}};$$

$$B^{(ex)} = -\frac{(M(t) \lambda^{(in)}(t))' - M(t) K(t) - 2A^{(ex)}}{\lambda^{(in)} - \lambda^{(ex)}}$$

и введено обозначение

$$M(t) = \frac{4(\sin^2 t + 1)^2 - \frac{1}{4}}{\lambda^{(in)}(t) - \lambda^{(ex)}(t)}.$$

С учетом условия гладкого сшивания (4.25), получим выражение для $p_1(\theta, t)$:

$$p_1(t) = \frac{B^{(ex)} - B^{(in)} + 4\lambda^{(in)} \sin 2t (\sin^2 t + 1)}{\lambda^{(in)} + \lambda^{(ex)}} +$$

$$+ \frac{-\frac{\sin 2t}{4(\sin^2 t + 1)} \lambda^{(ex)} + \frac{1}{4\sqrt{\sin^2 t + 1}} + 4(\sin^2 t + 1)^{3/2}}{\lambda^{(in)} - \lambda^{(ex)}}.$$

Глава 5

Параболическая задача для уравнения реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа

При подготовке данной главы диссертации использовались идеи, изложенные в статьях [35]–[39], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

В данной главе исследована сингулярно возмущенная периодическая задача для параболического уравнения реакция-диффузия в случае разрывного источника - нелинейности, описывающей реакцию (взаимодействие). Рассмотрен случай существования внутреннего переходного слоя в условиях несбалансированной и сбалансированной реакции. Построено асимптотическое приближение и исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодических решений в каждом из рассмотренных случаев. Для доказательства существования решения и его асимптотической устойчивости используется асимптотический метод дифференци-

альных неравенств. Приведен пример и проведены численные расчеты, иллюстрирующие теоретический результат.

5.1 Постановка задачи

Рассматривается сингулярно возмущенное уравнение реакция-диффузия, естественно возникающее в математических моделях с быстрой реакцией:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, y, t) &\in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, t \in R\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \overline{D}, t \in R, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а производная $\frac{\partial}{\partial n_\Gamma}$ берется по внутренней нормали к гладкой границе Γ заданной двумерной односвязной области D , а $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Интерес к различным классам периодических задач связан как с различными приложениями, так и новыми математическими задачами, возникающими при их рассмотрении (см., например, [97], [98]).

Исследуется новый класс сингулярно возмущенных периодических задач в случае разрывного источника - нелинейности, описывающей реакцию (взаимодействие). Рассмотрение таких задач инициировано работами по изучению внутренних слоев в задачах, где коэффициенты адвекции или реакции претерпевают разрывы и их называют нелинейностями модульного типа (см. [87], [88] и ссылки в этих работах). Ряд приложений

такого типа уравнений можно найти в [89].

Задача (5.1) рассматривается при условии, что функция $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ имеет вид:

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u \geq \varphi_2(x, y, t) \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u < \varphi_2(x, y, t) \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R, \end{cases}$$

где $f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon)$, $f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции.

Очевидно, что замена $z = u(x, y, t, \varepsilon) - \varphi_2(x, y, t, \varepsilon)$ приводит к задаче правой частью, разрывной при $z = 0$. Поэтому, не ограничивая общности, будем предполагать выполненными следующие условия:

(A1) Пусть функция $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ имеет вид:

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u \geq 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u < 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R. \end{cases}$$

Здесь $f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon)$, $f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon)$ – достаточно гладкие T -периодические функции. Такие нелинейности принято называть нелинейностями модульного типа. Предположим также:

(A2) Пусть уравнение $f^{(+)}(u, x, y, t, 0) = 0$ имеет единственное изолированное T -периодическое решение $u = \varphi^{(+)}(x, y, t)$, а уравнение $f^{(-)}(u, x, y, t, 0) = 0$ имеет единственное изолированное T -периодическое решение $u = \varphi^{(-)}(x, y, t)$, причем выполнены неравенства

$$\varphi^{(-)}(x, y, t) < 0 < \varphi^{(+)}(x, y, t), \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R$$

Для этих корней выполняются неравенства

$$(A3) \quad f_u^{(+)}(\varphi^{(+)}, x, y, t, 0) > 0, f_u^{(-)}(\varphi^{(-)}, x, y, t, 0) > 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in$$

R .

Поскольку решение задачи (5.1) при выполнении условий (A1) - (A3) в значительной мере аналогично решению в случае нелинейностей (источников) кубического типа (см. [33] и ссылки в этой работе), то мы называем рассматриваемую в главе нелинейность источником модульно-кубического типа.

Будем исследовать вопрос о существовании у задачи (5.1) гладкого периодического решения, которое для любого момента времени t при $\varepsilon \rightarrow 0$ внутри области, ограниченной некоторой гладкой замкнутой кривой $C(t, \varepsilon) \subset D$ стремится к корню $\varphi^{(+)}(x, y, t)$, а снаружи - к другому корню $\varphi^{(-)}(x, y, t)$, и резко изменяющегося от $\varphi^{(-)}(x, y, t)$ до $\varphi^{(+)}(x, y, t)$ в окрестности кривой $C(t, \varepsilon)$. Кривую $C(t, \varepsilon)$ называют кривой переходного слоя. Отметим, что положение данной кривой заранее не известно и определяется в процессе построения асимптотики решения.

Определим положение кривой переходного слоя из условия равенства нулю решения задачи (5.1) на этой кривой: $C(t, \varepsilon) = \{(x, y) \in D : u(x, y, t, \varepsilon) = 0\}$. Кривая $C(t, \varepsilon)$ разделяет область D на подобласти $D^{(-)}$ и $D^{(+)}$ - соответственно внешнюю и внутреннюю относительно этой кривой.

Решение задачи (5.1) определяется следующим образом.

Определение 5.1.1 *T -периодическая по t функция*

$u(x, y, t, \varepsilon) \in C^{1,1}(D) \cap C^{2,1}(D^{(-)} \cup D^{(+)})$ называется решением задачи (5.1), если она удовлетворяет уравнению (5.1) в каждой из областей $D^{(\mp)}$, а также граничному условию.

5.2 Построение асимптотики

5.2.1 Асимптотическое приближение решения

Для построения формальной асимптотики используется схема асимптотической теории контрастных структур, достаточно подробно описанная в [32]. Для этого задача (5.1) разбивается на две. В области $D^{(+)}$ рассматривается задача

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon) &= 0, \\ (x, y, t) \in D_t^{(+)} &:= \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D^{(+)}, t \in R\}, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in C(t, \varepsilon), t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}^{(+)}, t \in R, \end{aligned}$$

а в области $D^{(-)}$ рассматривается задача

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon) &= 0, \\ (x, y, t) \in D_t^{(-)} &:= \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D^{(-)}, t \in R\}, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in C(t, \varepsilon), t \in R, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, t \in R. \end{aligned}$$

Для описания внутреннего переходного слоя (аналогично [105]) рассмотрим однопараметрическое семейство кривых $\{\bar{C}(t)\} := \{\bar{C}(t) \subset D : \bar{C}(t) - \text{достаточно гладкая простая замкнутая кривая}; \bar{C}(t) = \bar{C}(t + T), t \in R\}$. Для каждой кривой $\bar{C}(t)$ определим δ -окрестность $\bar{C}^\delta(t) := \{P \in D : \text{dist}(P, \bar{C}(t)) < \delta\}, \delta = \text{const} > 0$.

Далее, стандартным образом введем в δ -окрестности кривой $\bar{C}(t) \in$

$\{\bar{C}(t)\}$ локальную систему координат (r, θ) , где $\theta \in [0, \bar{\Theta}(\bar{C}(t))]$ - это координата точки $M \in \bar{C}(t)$, $dist\{(x, y), \bar{C}\} = dist\{(x, y), M\}$;
 $r = \pm dist\{(x, y), \bar{C}\}$, $(x, y) \in D^{(\pm)}$, где $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ - соответственно внутренняя и внешняя области, на которые разбивает область D кривая $\bar{C}(t)$.
Пусть при каждом фиксированном t кривая $\bar{C}(t)$ определена в параметрической форме: $x = X(\theta, t)$, $y = Y(\theta, t)$, а $\mathbf{n}(\theta, t) = (n_1(\theta, t), n_2(\theta, t))$ - внутренняя нормаль ($n_1(\theta, t)$ и $n_2(\theta, t)$ - направляющие косинусы нормали) к кривой $\bar{C}(t)$ в точке $(0, \theta)$. При достаточно малом δ в δ -окрестности кривой $\bar{C}(t)$ существует взаимно однозначное соответствие между координатами (x, y) и (r, θ) :

$$x = X(\theta, t) + rn_1(\theta, t), \quad y = Y(\theta, t) + rn_2(\theta, t).$$

Аналогично для описания пограничного слоя в достаточно малой окрестности кривой Γ вводятся локальные координаты $(r_\Gamma, \theta_\Gamma)$.

Пусть нам известна кривая $C_0(t) \in \{\bar{C}(t)\}$, являющаяся нулевым приближением для кривой $C(t, \varepsilon)$, и в ее окрестности введена локальная система координат (r, θ) . Уравнение для кривой переходного слоя $C(t, \varepsilon)$ будем искать в следующем виде:

$$r = \lambda^*(\theta, t, \varepsilon) = \varepsilon \lambda_1^*(\theta, t, \varepsilon) = \varepsilon(\lambda_1(\theta, t) + \varepsilon \lambda_2(\theta, t) + \varepsilon^2 \lambda_3(\theta, t) + \dots), \quad (5.2)$$

где правая часть представляется в виде ряда по степеням ε с неизвестными коэффициентами $\lambda_i(\theta, t)$, $i = 1, 2, \dots$. Ниже мы покажем, как найти $C_0(t)$.

Далее для функций асимптотики в области $D^{(-)}$ используем обозначение $(-)$, в области $D^{(+)}$ - $(+)$. Построим асимптотику в виде ряда по

степеням ε , не раскладывая в такой ряд функцию $\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)$:

$$U^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon), \quad (5.3)$$

где регулярная часть имеет вид:

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, y, t) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n^{(\pm)}(x, y, t) + \dots -$$

регулярная часть асимптотики,

$$\Pi(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, \theta_\Gamma, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, \theta_\Gamma, t) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau, \theta_\Gamma, t) + \dots, \quad \tau = \frac{r_\Gamma}{\varepsilon} -$$

погранслоиная часть асимптотики, служащая для приближения решения вблизи границы Γ ,

$$Q^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \dots -$$

часть асимптотики, служащая для приближения внутреннего переходного слоя в окрестности $C(t, \varepsilon)$ ($\xi = (r - \lambda^*(\theta, t, \varepsilon))/\varepsilon$), члены которой, как будет показано ниже, определяются из уравнений, в которые входят функция $\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)$ и ее частные производные, этим и объясняется зависимость функций Q_i от аргумента ε . Если включить $\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)$ и ее частные производные в аргументы функций Q_i , то при действии на них оператор $\varepsilon^2(\Delta - \frac{\partial}{\partial t})$ выглядел бы уже иным образом.

Метод пограничных функций (см. [33]) с учетом особенностей параболического оператора (см. [47]) приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов (5.3), из которых, в частности, получим $\bar{u}_0^{(-)}(x, y, t) = \varphi^{(-)}(x, y, t)$, $\bar{u}_0^{(+)}(x, y, t) = \varphi^{(+)}(x, y, t)$. Функции $\bar{u}_i^{(\pm)}(x, y, t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, а также пограничные

функции $\Pi_i(\tau, \theta_\Gamma, t)$ строятся стандартным образом, и мы это построение в работе рассматривать не будем.

В дальнейшем, если указана конкретная кривая $\overline{C}(t) \in \{\overline{C}(t)\}$, будем пользоваться обоими наборами аргументов (x, y, t) и (r, θ, t) , сохраняя при этом обозначение функций, которые от них зависят, например: $\varphi^{(+)}(x, y, t) = \varphi^{(+)}(r, \theta, t)$.

Остановимся подробно на построении функций внутреннего переходного слоя. Оператор Лапласа в локальных координатах (r, θ) имеет вид (см. [28]): $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} + |\nabla \theta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$, где Δr , $\nabla \theta$, $\Delta \theta$ - известные функции r и θ ($\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$, аналогично определяются $\nabla \theta$ и $\Delta \theta$). Тогда при действии на часть внутреннего переходного слоя дифференциальный оператор $D_\varepsilon := \varepsilon^2 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right)$ в переменных (ξ, θ, t) приобретает вид:

$$D_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon s(\varepsilon \xi + \lambda^*, \theta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 L_2,$$

где $s(r, \theta, t) := \Delta r(r, \theta, t) - \frac{\partial r}{\partial t}(r, \theta, t) \Big|_{x, y = \text{const}}$,

$$\begin{aligned} L_2 := & |\nabla \theta|^2 \left(\left(\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \Delta \theta \left(- \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{x, y = \text{const}} + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{R}_0(\theta, \mathbf{t}) = \{X(\theta, t), Y(\theta, t)\}$ - радиус вектор точки кривой C_0 с координатами θ, t . Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial r}{\partial t}(r, \theta, t) \Big|_{x, y = \text{const}} = \mp \left(\frac{\partial \mathbf{R}_0(\theta, \mathbf{t})}{\partial t}, \mathbf{n}(\theta, t) \right),$$

что представляет собой нормальную компоненту скорости $\frac{\partial \mathbf{R}_0(\theta, \mathbf{t})}{\partial t}$ точки $y(\theta, t)$ кривой $C_0(t)$. Также известно (см. [105]), что $\Delta r(r, \theta, t)$ - кривизна

кривой

$$\Gamma_r(t) := \{(x(\theta, t), y(\theta, t)) \in D : \{x, y\} = \mathbf{R}_0(\theta, t) + r\mathbf{n}(\theta, t), y \in C_0(t)\}$$

в точке $(x(\theta, t), y(\theta, t))$.

Действуя по схеме алгоритма А. Б. Васильевой, определим функции $Q_i^{(\pm)}$.

Члены $Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$ определяются из следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi^2} &= f^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda^*, \theta, t, 0) \\ Q_0^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) &= 0, \\ Q_0^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Известно (см., например, [32]), что задача (5.4) имеет единственное, монотонное по ξ решение, причем имеют место следующие оценки:

$$\frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi} \geq C_0 e^{-k_0|\xi|}, |Q_0^{(\pm)}(\tau, \theta, t, \varepsilon)| \leq C'_0 e^{-k'_0|\xi|}, \quad (5.5)$$

где C_0, C'_0, k, k' - некоторые положительные константы.

Покажем, как определить функции $Q_i^{(\pm)}, i = 1, 2, \dots$. Функции $Q_1^{(\pm)}$ определяются из следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} Q_1^{(\pm)} &= r_1^{(\pm)}, \\ Q_1^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) &= 0, \\ Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где символы " $\sim$ ", " $*$ " над и справа от функции означают, что ее значение берется при аргументе $(Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \lambda^*, \theta, t, 0)$,

а функция имеет следующий вид

$$r_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) := -\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi}(\xi, \theta, t, \varepsilon)s(\lambda^*, \theta, t) + \\ + \xi \left(\frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}_0^{(\pm)}}{\partial r}(\lambda^*, \theta, t) + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial r} \right) + \bar{u}_1(\lambda^*, \theta, t) \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial \varepsilon}.$$

Решение задач (5.6) представляется в явном виде (см., например, [32]):

$$Q_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)} \\ + \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) \int_0^\xi \left(\tilde{v}^{(\pm)}(s, \theta, t, \varepsilon) \right)^{-2} \int_{\pm\infty}^s \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \varepsilon) r_1^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \varepsilon) d\eta ds, \quad (5.7)$$

где $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = \frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi}$, причем $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) > 0$ в рассматриваемой области. Для $Q_1^{(\pm)}$ справедлива оценка

$$|Q_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)| < C_1 e^{-k_1 |\xi|}, \quad (5.8)$$

где C_1, k_1 - некоторые положительные константы.

Функции внутреннего переходного слоя более высоких порядков находятся из задач, аналогичных задачам для функций $Q_1^{(\pm)}$:

$$\frac{\partial^2 Q_i^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} Q_i^{(\pm)} = r_i^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \quad i = 2, 3, 4, \dots, \\ Q_i^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_i^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) = 0, \\ Q_i^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) = 0, \quad (5.9)$$

где $r_i^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$ - известные функции. В частности, для $i = 2$ имеем:

$$r_2^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) := -s_r(\lambda^*, \theta, t) \tilde{v}^{(\pm)} \xi - s(\lambda^*, \theta, t) \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - |\nabla \theta(\lambda^*, \theta, t)|^2 \left[\left(\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial \tilde{v}^{(\pm)}}{\partial \xi} - \right. \\ - 2 \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{v}^{(\pm)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} \tilde{v}^{(\pm)} + \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \theta^2} \left. \right] - \Delta \theta(\lambda^*, \theta, t) (-\tilde{v}^{(\pm)} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \theta}) \\ + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \right) \tilde{v}^{(\pm)} + g_2^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon). \quad (5.10)$$

Здесь $g_2^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$ - коэффициент при ε^2 , стоящий в разложении выражения

$$f^{(\pm)}(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda^* + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda^* + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon) - \\ - f^{(\pm)}(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda^* + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda^* + \varepsilon\xi, \theta, t, \varepsilon)$$

по степеням ε .

Заметим, что из вида уравнения (5.4) следует, что в функциях $Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$, $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$, считая θ, t, λ^* параметрами, мы можем перейти к другому набору аргументов $(\xi, \theta, t, \lambda^*)$. В дальнейшем мы будем пользоваться обоими наборами аргументов, для каждого конкретного случая выбирая наиболее удобный.

Заметим, что формально Q -функции определены для $\tau \in R$, однако фактически они имеют смысл только при $|\tau| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$. Для их гладкого продолжения на всю область D применяется стандартный прием использования срезающих функций (см., например, [28]).

Таким образом, формальное построение асимптотики решения с внутренним переходным слоем для задачи завершено. Перейдем к определению локализации внутреннего переходного слоя.

5.2.2 Асимптотическое приближение для кривой переходного слоя

Важнейшая проблема построения асимптотики - это нахождение разложения по малым ε для кривой перехода $C(t, \varepsilon)$. Нулевой порядок задается кривой $C_0(t)$, а следующие порядки - функциями $\lambda_i(t, \theta)$ в уравнении

(5.2). Для их нахождения используется условие C^1 –сшивания. Непрерывность асимптотики U на кривой выполняется за счет согласованности асимптотик $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$. Потребуем также непрерывности первых производных асимптотики на этой кривой (условие C^1 –сшивания):

$$\varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial r} \Big|_{r=\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)} - \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial r} \Big|_{r=\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)} = 0. \quad (5.11)$$

Подставляя асимптотическое разложение (5.3) в условие (5.11), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \\ & + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_0^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \bar{u}_0^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right) \right) \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right) \right) \\ & + \dots = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Рассмотрим выражение при ε^0 :

$$H(\lambda^*, \theta, t) := \frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}.$$

Введем функции

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda^*) := \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda^*),$$

которые, согласно (5.4), являются решениями задач

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = \tilde{f}_*^{(\pm)}, \\ & \tilde{u}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*) = 0, \\ & \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \lambda^*) = \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где символы " $\sim$ ", " $*$ " над и справа от функции означают, что ее значение берется при аргументе $(Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda^*) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \lambda^*, \theta, t, 0)$.

Функция H в обозначениях $\tilde{u}^{(\pm)}$ имеет вид:

$$H(\lambda^*, \theta, t) = \frac{\partial \tilde{u}^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}. \quad (5.14)$$

Обозначая

$$G_1(\lambda^*, \theta, t) := \frac{\partial \bar{u}_0^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \bar{u}_0^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right),$$

$$G_i(\varepsilon, \theta, t) := \frac{\partial \bar{u}_{i-1}^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_i^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \bar{u}_{i-1}^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_i^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right), \quad i = 2, 3, \dots,$$

разложим теперь (5.11) в ряд по степеням ε , используя (5.2):

$$H(0, \theta, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0} \lambda_1(\theta, t) + G_1|_{\varepsilon=0} \right) +$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\lambda_1^2(\theta, t)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^{*2}} \Big|_{\lambda^*=0} + \lambda_2(\theta, t) \frac{\partial H}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0} + \lambda_1(\theta, t) \frac{\partial G_1}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0} + G_2|_{\varepsilon=0} \right) + \dots = 0. \quad (5.15)$$

Стандартным образом понижая порядок в уравнении (5.13), можно получить следующие выражения:

$$\left(\tilde{v}^{(+)}(\xi, \theta, t, \lambda^*) \right)^2 = 2 \int_{\varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}^0 f^{(+)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du$$

$$\left(\tilde{v}^{(-)}(\xi, \theta, t, \lambda^*) \right)^2 = 2 \int_{\varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}^0 f^{(-)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du$$
(5.16)

Можно показать, используя (5.13), что справедливо следующее представление для H :

$$\begin{aligned}
H(\lambda^*, \theta, t) &= -\frac{2}{\frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}} \times \\
&\times \left(\int_{\varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}^0 f^{(-)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du + \int_0^{\varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)} f^{(+)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du \right) = \\
&= -\frac{2}{\frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}} \int_{\varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)} f(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Введем функцию

$$I(x, y, t) := \int_{\varphi^{(-)}(x, y, t)}^{\varphi^{(+)}(x, y, t)} f(u, x, y, t, 0) du. \tag{5.18}$$

Оказывается, что построение асимптотики для кривой перехода зависит существенным образом от свойств функции $I(x, y, t)$. В данной главе рассматриваются случаи баланса и отсутствия баланса реакции. О том, какие требования предъявляются при этом для функции I , будет сказано ниже. Отметим, что построение асимптотики для решения одинаково для этих обоих случаев.

5.2.3 Случай несбалансированной реакции

Рассмотрим вначале так называемый случай *несбалансированной реакции*. Ему отвечает следующее требование

(A4) Пусть существует кривая $C_0(t) \in \{\bar{C}\}$, такая, что $I(r, \theta, t)|_{r=0} = 0$, $\theta \in [0, \theta_0]$, $t \in R$, где $[0, \theta_0]$ - это область изменения координаты θ .

В дальнейшем нам также понадобится условие, накладывающее ограничение на выбор кривой $C_0(t)$.

(A5) Пусть для кривой $C_0(t)$ имеет место неравенство

$$\left. \frac{\partial I(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=0} < 0, \theta \in [0, \theta_0], t \in R.$$

Таким образом, кривая $C_0(t)$ определена. В силу условия (A4)

$$\tilde{v}^{(-)}(0, \theta, t, 0) = \tilde{v}^{(+)}(0, \theta, t, 0), \quad (5.19)$$

т.е. $\tilde{v}(\xi, \theta, t, 0)$ - непрерывная по ξ функция в рассматриваемой области.

Поэтому здесь и далее индекс $(\pm)$ в выражениях для $\tilde{v}(\xi, \theta, t, 0)$ можно опустить.

Определим член $\lambda_1(\theta, t)$ в разложении (5.2). При ε^1 равенство (5.15) дает

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda^*} \lambda_1(\theta, t) + \hat{G}_1 = 0, \quad (5.20)$$

где символ " $\wedge$ " над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(0, \theta, t)$.

Преобразуем выражение при ε в (5.12) :

$$\begin{aligned}
G_1(\lambda^*, \theta, t) = & \\
= & \frac{\partial \varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial \varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \\
& + [-\bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \frac{\tilde{v}_\xi^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)}]_-^+ + [\frac{s(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*))^2 d\eta]_-^+ \\
& + [-\frac{\frac{\partial \varphi^{(\pm)}}{\partial r}(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta]_-^+ \\
& + [-\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) (\eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial \varepsilon}) d\eta]_-^+ \\
& + [-\frac{\bar{u}_1(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta]_-^+
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Здесь и далее выражение, заключенное в скобки вида $[\quad]_-^+$, представляет собой разность функции, стоящей внутри скобок, взятой с индексом $(+)$ и той же функции, но взятой с индексом $(-)$. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta &= -f^{(\pm)}(0, \lambda^*, \theta, t, 0) \\
\int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta &= \tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)
\end{aligned}$$

А также

$$\tilde{v}_\xi^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) = f^{(\pm)}(0, \lambda^*, \theta, t, 0)$$

Таким образом выражение для $G_1(\lambda^*, \theta, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
G_1(\lambda^*, \theta, t) = & \\
= & [\frac{s(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*))^2 d\eta]_-^+ + [-\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) (\eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial \varepsilon}) d\eta]_-^+
\end{aligned}$$

Подставляя это равенства в (5.20), с учетом (5.7) получим уравнение для нахождения $\lambda_1(\theta, t)$:

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial r} \lambda_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\tilde{v}(\tau, \theta, t, 0) \hat{s} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \tau + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{v}(\tau, \theta, t, 0) d\tau = 0, \quad (5.22)$$

где символ " $\sim$ " над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(\tilde{u}^{(\pm)}(\tau, \theta, t, 0), 0, \theta, t, 0)$.

Уравнение (5.22) разрешимо в силу условия (A5), таким образом, коэффициент 1-го порядка в разложении (5.2) определен.

Выписывая уравнения, определяющие $Q_i^{(\pm)}$, и следующие приближения в соотношении (5.15), по стандартной схеме получим алгебраические задачи для $\lambda_i(\theta, t)$:

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial r} \lambda_i + f_i = 0, \quad i \geq 1, \quad (5.23)$$

где $f_i(\theta, t)$ -известные на i -ом шаге функции.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций $\lambda_i(\theta, t)$ для некритического случая.

5.2.4 Случай баланса реакции

Случай баланса реакции имеет место, если выполнено следующее требование тождественного равенства нулю функции I :

$$(A'4) \text{ Пусть } I \equiv 0, (x, y, t) \in \bar{D}_t.$$

Это условие коренным образом отличает *сбалансированный*, или *критический*, случай от несбалансированного, поскольку, как будет видно далее, оно изменяет алгоритм построения асимптотики и несколько

усложняет доказательство существования решения с построенной асимптотикой.

В отличие от некритического случая, в рассматриваемом критическом случае найти кривую C_0 , зная лишь $Q_0^{(\pm)}$, не удастся. Действительно, в силу условия (A'4) получаем, что

$$\tilde{v}^{(+)}(0, \theta, t, r) - \tilde{v}^{(-)}(0, \theta, t, r) \equiv 0. \quad (5.24)$$

Следовательно, уравнения для определения положения кривой переходного слоя будут следовать из равенства нулю коэффициентов при степенях ε следующих порядков. Из (5.24) следует, что $\tilde{v}^{(-)}(0, \theta, t, r) = \tilde{v}^{(+)}(0, \theta, t, r)$, т.е. $\tilde{v}(\xi, \theta, t, r)$ - непрерывная по ξ функция в рассматриваемой области. Поэтому здесь и далее индекс $(\pm)$ в выражениях для $\tilde{v}(\xi, \theta, r)$ можно опустить.

Преобразуем выражение при ε^2 в (5.12), используя (5.10):

$$\begin{aligned} G_2(\varepsilon, \theta, t) &:= \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + [-\bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \frac{\tilde{v}_\xi^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)}]^\pm \\ &\quad + [-\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) r_2^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) d\eta]^\pm \\ &= [-\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} (\frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} |\nabla \theta|^2 \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v} (2|\nabla \theta|^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \theta \tilde{v} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \tilde{v}) d\xi \\ &\quad - \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \int_0^{\pm\infty} \tilde{v} h_2 d\xi)]^\pm = -\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} [\frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} |\nabla \theta(\lambda^*, \theta, t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}^2 d\xi \\ &\quad + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} (2|\nabla \theta|^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \theta(\lambda^*, \theta, t) \tilde{v} - \frac{\partial \theta(\lambda^*, \theta, t)}{\partial t} \Big|_{x,y=const} \tilde{v}) d\xi \\ &\quad - \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} h_2 d\xi], \end{aligned} \quad (5.25)$$

где $h_2(\lambda^*, \xi, \theta, t)$ - известная функция.

Разложим теперь (5.11) в ряд по степеням ε , используя (5.2) и учитывая (5.24):

$$\begin{aligned} & \varepsilon G_1|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left[\lambda_1(\theta, t) \frac{\partial G_1}{\partial \lambda^*} \Big|_{\varepsilon=0} + G_2|_{\varepsilon=0} \right] \\ & + \varepsilon^3 \left[\lambda_2(\theta, t) \frac{\partial G_1}{\partial \lambda^*} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \lambda_1^2(\theta, t) \frac{\partial^2 G_1}{\partial \lambda^{*2}} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial G_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + G_3|_{\varepsilon=0} \right] \dots = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Теперь приравнявая к нулю коэффициент при ε в разложении (5.26), с учетом (5.21), получим:

$$- \left(\Delta \hat{r} - \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} \Big|_{x,y=const} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \theta, t, 0) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \xi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{v}(\xi, \theta, t, 0) d\xi = 0 \quad (5.27)$$

где символ " $\wedge$ " над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(0, \theta, t)$.

Потребуем выполнение условия

(А'5) Пусть существует кривая $C_0(t) \in \{\bar{C}(t)\}$, удовлетворяющая уравнению (5.27).

Таким образом, уравнение для нахождения кривой переходного слоя в нулевом приближении получено. Теперь определим коэффициент λ_1 . Для этого приравняем к нулю член при ε в разложении (5.26).

Используя (5.25), получим уравнение для нахождения $\lambda_1(\theta, t)$:

$$-\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} m(\theta, t) + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} a(\theta, t) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} b(\theta, t) + \lambda_1 c(\theta, t) = g_1(\theta, t), \quad (5.28)$$

где

$$\begin{aligned}
m(\theta, t) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \theta, t, 0), \quad a(\theta, t) := |\nabla \hat{\theta}|^2 m(\theta, t), \\
b(\theta, t) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v} (2|\nabla \theta|^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \theta(\lambda^*, \theta, t) \tilde{v} - \frac{\partial \theta(\lambda^*, \theta, t)}{\partial t} \Big|_{x, y = \text{const}} \tilde{v}) d\xi, \\
c(\theta, t) &:= \frac{\partial \left[- \left(\Delta r - \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{x, y = \text{const}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \xi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{v} d\xi \right]}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^* = 0}, \\
g_1(\theta, t) &:= - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v} h_2 d\xi.
\end{aligned}$$

Преобразуем уравнение для λ_1 (5.28), разделив его на коэффициент при производной по времени $m(\theta, t) > 0$. Получим:

$$-\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} \tilde{a}(\theta, t) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} \tilde{b}(\theta, t) + \lambda_1 \tilde{c}(\theta, t) = \tilde{g}_1(\theta, t), \quad (5.29)$$

где $\tilde{a}(\theta, t) = \frac{a(\theta, t)}{m(\theta, t)}$ и т.д

Пусть функции $\tilde{\beta}(t)$ и $\tilde{\alpha}(t)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\beta}}{dt} - \bar{c}(t)\tilde{\beta} &= p, \\
\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} - \bar{c}(t)\tilde{\alpha} &= -p,
\end{aligned} \quad (5.30)$$

где $\bar{c}(t) = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \tilde{c}(\theta, t)$, p - некоторая константа, значение которой будет определено далее.

Дополнительные условия $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\beta}(t + T)$, $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t + T)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$L := -\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{a}(\theta, t) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \tilde{b}(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \theta} + \tilde{c}(\theta, t) - \tilde{g}_1(\theta, t).$$

Тогда

$$L[\tilde{\beta}] = -\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} + \tilde{\beta}\tilde{c}(\theta, t) - \tilde{g}_1(\theta, t) = -p + (\tilde{c}(\theta, t) - \bar{c}(t))\tilde{\beta} - \tilde{g}_1(\theta, t)$$

$$L[\tilde{\alpha}] = -\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \tilde{\alpha}\tilde{c}(\theta, t) - \tilde{g}_1(\theta, t) = p + (\tilde{c}(\theta, t) - \bar{c}(t))\tilde{\alpha} - \tilde{g}_1(\theta, t).$$

Функции $\tilde{\beta}(t)$ и $\tilde{\alpha}(t)$ могут быть найдены в явном виде

$$\tilde{\beta}(t) = \Phi(t)\tilde{\beta}_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)p ds, \quad \tilde{\alpha}(t) = \Phi(t)\tilde{\alpha}_0 - \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)p ds, \quad (5.31)$$

где

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\Phi(T)}{1 - \Phi(T)} \int_0^T \Phi^{-1}(s)p ds,$$

$$\tilde{\alpha}_0 = -\frac{\Phi(T)}{1 - \Phi(T)} \int_0^T \Phi^{-1}(s)p ds, \quad \Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \bar{c}(\tau) d\tau\right).$$

Нам потребуется условие

$$(A'6) \text{ Пусть } \int_0^T \bar{c}(\tau) d\tau < 0 \text{ для } t \in R.$$

Для постановки задачи для нахождения $\lambda_1(\theta, t)$ нам не хватает следующих периодических граничных условий:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta, t) &= \lambda_1(\theta, t + T), \quad \lambda_1(\theta, t) = \lambda_1(\theta + \Theta_0, t), \\ \frac{\partial \lambda_1(\theta, t)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \lambda_1(\theta + \Theta_0, t)}{\partial \theta}, \quad t \in R, \theta \in R. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Уравнение (5.28) с граничными условиями (5.32) имеет единственное решение в силу условия (A'6). В этом легко убедиться, взяв в качестве верхнего решения функцию $\tilde{\beta}(t)$, а в качестве нижнего решения $\tilde{\alpha}(t)$. Действительно, в силу условия (A'6) имеем $\tilde{\beta}(t) > 0$, $\tilde{\alpha}(t) < 0$, $\tilde{c}(\theta, t) - \bar{c}(t) \leq 0$ для $t \in R$. Выберем константу $p > \max_{\theta \in [0, 2\pi), t \in R} |\tilde{g}_1(\theta, t)|$.

В итоге получаем, что $L[\beta(t)] < 0$, $L[\alpha(t)] > 0$, $t \in R$, а упорядоченность верхнего и нижнего решения выполнена автоматически. Таким образом, коэффициент λ_1 в разложении (5.2) определен.

Выписывая уравнения, определяющие $Q_i^{(\pm)}$, и следующие приближения в соотношении (5.26), получим задачи для $\lambda_i(\theta, t)$:

$$-\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} m(\theta, t) + \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \theta^2} a(\theta, t) + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} b(\theta, t) + \lambda_i c(\theta, t) = g_i(\theta, t), \quad (5.33)$$

где $g_i(\theta, t)$ -известные на i -ом шаге T -периодические функции t . Эти задачи с соответствующими граничными условиями также однозначно разрешимы в силу условия (A'6).

Отметим, что в отличие от случая нелинейности кубического типа (см., например, [47]), в рассматриваемом случае разрывной реакции на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ сепаратриса, соединяющая точки покоя типа седла $\varphi^{(-)}$ и $\varphi^{(+)}$, оказывается негладкой кривой. Действительно,

$$\left. \frac{d\tilde{v}^{(+)}}{d\tilde{u}^{(+)}} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{d\tilde{v}^{(-)}}{d\tilde{u}^{(-)}} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\tilde{f}_*^{(+)}}{\tilde{v}^{(+)}} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{\tilde{f}_*^{(-)}}{\tilde{v}^{(-)}} \right|_{\xi=0} = \frac{f(0+0, 0, \theta, t, 0) - f(0-0, 0, \theta, t, 0)}{\tilde{v}} < 0.$$

Таким образом, формальная асимптотика для кривой перехода в критическом случае полностью построена.

5.3 Обоснование построенной асимптотики

Обозначим через $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$ частичные суммы порядка n построенных асимптотических рядов, в которых аргумент ξ у Q -функций заменен на $\xi_{n+1} = (r - \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t))/\varepsilon$, а λ^* на $\lambda_{n+1}^* = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t)$, найденные по алгоритму, изложенному в пункте (5.2.3) для некритического и (5.2.4) для критического случаев. В подобластях $\bar{D}_n^{(-)}$ и $\bar{D}_n^{(+)}$, на которые область

$\bar{D}$ разделяется кривой $r = \lambda_{n+1}^*$, при построении $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$ используются функции $Q^{(-)}$ и $Q^{(+)}$ соответственно.

В этом пункте проводится доказательство существования решения задачи (5.1), близкое к построенной асимптотике $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$. Отметим, что для достижения близости порядка $O(\varepsilon^{n+1})$ в двух рассматриваемых случаях требуется строить верхние и нижние барьеры различных порядков (см. далее). Но, поскольку они в обоих случаях отвечают асимптотике $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$, за ними условимся сохранять индекс n .

Сформулируем и докажем соответствующие теоремы для каждого случая.

Теорема 5.3.1 *Если выполнены условия (A1-A5), то при достаточно малых ε существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (5.1), причем имеет место оценка*

$$|U_n(x, y, t, \varepsilon, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R.$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся асимптотическим методом дифференциальных неравенств. Заметим, что функция f в силу наложенных на нее условий (A1-A3) имеет в точке $u = 0$ скачок определенного знака: $f(0 + 0, x, y, t, \varepsilon) - f(0 - 0, x, y, t, \varepsilon) \leq 0$. Эта функция, очевидно, является, каратеодориевой, и для нее справедлив результат работ [99], [100] и их развития на случай разрывного источника в [61]. Верхнее и нижнее решения задачи (5.1) будем строить путем модификации членов асимптотического ряда аналогично тому, как это

делалось в [47]:

$$\begin{aligned}\beta_n(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\pm)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, y, t) + \dots + \varepsilon^{n+2} \bar{u}_{n+2}^{(\pm)}(x, y, t) \\ &+ Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \lambda_{n\beta}) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n+2} q^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) \quad (5.34) \\ &+ \Pi_\beta(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon)),\end{aligned}$$

где $\lambda_{n\beta}(\theta, t, \varepsilon) = \lambda_{n+1}^*(\theta, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\lambda_{n+2}(\theta, t, \varepsilon) - \delta_0)$, $\xi_\beta = (x - \lambda_{n\beta}(\theta, t, \varepsilon))/\varepsilon$,

$\gamma > 0$ - постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства, $\delta_0 > 0$ - константа, обеспечивающая неравенства для скачка производных на кривой переходного слоя. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon)$ определяются из задач (5.9), где λ^* заменена на $\lambda_{n\beta}$. Функции $q_\beta^{(\pm)}$ необходимы для компенсации изменений, вносимой постоянной γ , и определяются из задач

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}_\beta^{(\pm)}, \lambda_{n\beta}, \theta, t, 0) q_\beta^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) &= r_\beta(\xi, \theta, t, \varepsilon) \\ q_\beta^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \gamma &= 0, \\ q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) &= 0.\end{aligned} \quad (5.35)$$

где

$$\tilde{u}_\beta^{(\pm)} = \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda_\beta), \quad r_\beta(\xi, t, \varepsilon) = \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}_\beta^{(\pm)}, \lambda_{n\beta}, t, 0) - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, \lambda_{n\beta}, t, 0) \right). \quad (5.36)$$

Функции Π_β обеспечивают выполнение необходимых дифференциальных неравенств вблизи границы Γ (их построение рассматривается, например, в [32]). Здесь для функций асимптотики во внутренней относительно кривой $C_\beta(t, \varepsilon) : \{r = \lambda_\beta(t, \theta, \varepsilon)\}$ области используем обозначение $(+)$, а во внешней - $(-)$. Нижнее решение $\alpha_n(x, y, t, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Необходимые дифференциальные неравенства проверяются прямым вычислением, аналогично работе [94]. Для верхнего решения имеем

$$N_\varepsilon \beta_n = \varepsilon^2 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \beta_n - f(\beta_n, x, y, t, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \gamma + O(\varepsilon^{n+3}),$$

где черта над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(\bar{u}_0, 0, \theta, t, 0)$. В силу условия (A3) при достаточно малом ε при любом $\gamma > 0$ $N_\varepsilon \beta_n < 0$.

Аналогичные неравенства вблизи границы выполняются за счет модификации погранслойных функций (см., например, [32], и их проверка в данной работе не рассматривается.

Доказательство упорядоченности верхнего и нижнего решений, т.е. неравенства $\beta_n(x, y, t, \varepsilon) \geq \alpha_n(x, y, t, \varepsilon)$, а также неравенства для скачка производной:

$$\left(\frac{\partial \beta_n^+}{\partial r} - \frac{\partial \beta_n^-}{\partial r} \right) \Big|_r = \varepsilon^{n+2} \frac{1}{\tilde{v}(0, \theta, t, 0)} \left(\frac{\partial I(0, \theta, t)}{\partial r} \delta_0 - \gamma B(\theta, t) \right) < 0,$$

$$B(\theta, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{f}_u - \bar{f}_u) \tilde{v}(\xi, \theta, t, 0) d\xi$$

(и аналогичного неравенства для α_n) проводится так же, как в работе [94], причем для последнего существенно условие (A5).

Из известных теорем сравнения следует существование решения задачи (5.1), удовлетворяющего неравенству $\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) \leq u(x, y, t, \varepsilon) \leq \beta_n(x, y, t, \varepsilon)$, причем, как следует из построения, $\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) - \beta_n(x, y, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, откуда и получаем утверждение теоремы.

5.3.1 Критический случай

Теорема 5.3.2 *Если выполнены условия (A1)-(A3), (A'4-A'6), то при достаточно малых ε существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (5.1), причем имеет место оценка*

$$|U_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R.$$

Как и в предыдущем пункте, асимптотический метод дифференциальных неравенств позволяет обосновать построенную асимптотику. Верхнее и нижнее решения задачи (5.1) будем строить путем модификации членов асимптотического ряда в виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_n(x, y, t, \varepsilon) = & \bar{u}_0^{(\pm)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, y, t) + \dots + \varepsilon^{n+3} \bar{u}_{n+3}^{(\pm)}(x, y, t) \\ & + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \lambda_{n\beta}) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n+3} Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) \\ & + \Pi_{\mathfrak{B}}(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+3}(\gamma + q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon)), \end{aligned}$$

где $\lambda_{n\mathfrak{B}}(\theta, t, \varepsilon) = \lambda_n^*(\theta, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\lambda_{n+2}(\theta, t) - \nu)$, $\xi_{\mathfrak{B}} = (x - \lambda_{n\mathfrak{B}}(\theta, t, \varepsilon))/\varepsilon$, $\gamma > 0$ - некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства, $\nu(x, y, t) > 0$ - функция, обеспечивающая неравенства для скачка производных на кривой переходного слоя, которая будет уточнена ниже. Функции $q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}$ необходимы для компенсации изменений, вносимой постоянной γ и определяются из задач (5.35), в которых $\lambda_{n\beta}$ заменена на $\lambda_{n\mathfrak{B}}$. $\Pi_{\mathfrak{B}}$ обеспечивают выполнение необходимых дифференциальных неравенств вблизи границы Γ , они такие же, как и в представлении (5.34). Здесь для функций асимптотики во внутренней относительно замкнутой кривой $C_{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon) : r = \lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \varepsilon)$

области используем обозначение $(+)$, а во внешней - $(-)$. Нижнее решение $\mathfrak{A}_n(x, y, t, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Необходимые дифференциальные неравенства проверяются прямым вычислением:

$$N_\varepsilon \mathfrak{B}_n = \varepsilon^2 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathfrak{B}_n - f(\mathfrak{B}_n, x, y, t, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+3} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \gamma + O(\varepsilon^{n+4}).$$

В силу условия (А3) при достаточно малом ε при любом $\gamma > 0$,

$$N_\varepsilon \mathfrak{B}_n < 0.$$

Доказательство упорядоченности выполняется совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [48].

Для доказательства теоремы остается проверить условие для скачка производной.

Обозначим через $\frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(-)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \varepsilon), \theta, t, \varepsilon)}{\partial r}$, $\frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(+)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \varepsilon), \theta, t, \varepsilon)}{\partial r}$ предельные значения производных по разные стороны от кривой $r = \lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(+)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \varepsilon), \theta, t, \varepsilon)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(-)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \varepsilon), \theta, t, \varepsilon)}{\partial r} \right) = \\ = \frac{\varepsilon^{n+3}}{\tilde{v}(0, \theta, t, 0)} \left(-\frac{d\nu}{dt} m(t) + a(\theta, t) \frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} + b(\theta, t) \frac{\partial \nu}{\partial \theta} + c(t) \nu - \gamma B(\theta, t) \right) + O(\varepsilon^{n+4}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Пусть $\nu(x, y, t) = \tilde{\beta}(t) > 0$ (функция $\tilde{\beta}(t)$ определена в (5.30)). Очевидно, что условие (А'6) обеспечивает отрицательный знак скачка производной в (5.37).

Все соответствующие неравенства для нижнего решения $\mathfrak{A}_n(x, t, \varepsilon)$ проверяются аналогично. Таким образом, все необходимые условия известных теорем о дифференциальных неравенствах выполнены, а значит, существует решение задачи (5.1), удовлетворяющего неравенству $\mathfrak{A}_n(x, y, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \mathfrak{B}_n(x, y, t, \varepsilon)$, причем, как следует из построения, $\mathfrak{A}_n(x, y, t, \varepsilon) - \mathfrak{B}_n(x, y, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, что и влечет за собой утвер-

ждение теоремы.

5.4 Асимптотическая устойчивость решения.

Периодические решения задачи (5.1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(v) &:= \varepsilon^2 \left(\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - f(v, x, y, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, y, t) &\in D_{t+} := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, 0 < t < \infty\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, 0 < t < \infty, \\ v(x, y, 0, \varepsilon) &= v^0(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Очевидно, что если $v^0(x, y, \varepsilon) = u(x, y, 0, \varepsilon)$, где $u(x, y, t, \varepsilon)$ - решение периодической задачи (5.1), то и задача (5.38) имеет решение $v(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y, t, \varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (5.38) в виде

$$\alpha(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y, t, \varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)),$$

$$\beta(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y, t, \varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)),$$

где $\Lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что $\alpha < \beta$, и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем из [55] достаточно показать, что $N_\varepsilon\beta < 0$, $N_\varepsilon\alpha > 0$. Подставляя указанные выше выражения для функций α и β и учитывая, что u является решением уравнения (5.1), нетрудно получить требуемые

неравенства как для некритического, так и для критического случаев. Например, выражение для $N_\varepsilon \beta$ преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы u функций f, f_u опущены, кроме первого):

$$N_\varepsilon \beta = e^{-\Lambda t} \left\{ [\varepsilon^2 (-\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \Delta \beta_n) - f(\beta_n)] + [\varepsilon^2 (-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u) - f(u)] \right. \\ \left. + [f(\beta_n) - f(u) - f_u^* \cdot (\beta_n - u)] + \varepsilon^2 \Lambda (\beta_n - u) \right\}.$$

Здесь символ " $\cdot$ " справа от функции означает, что ее значение берется при аргументе $u(x, y, t, \varepsilon) + \theta e^{-\Lambda(\varepsilon)t} (\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon))$, $0 < \theta < 1$.

Проведем оценки для каждого случая.

В несбалансированном случае воспользуемся тем, что $\varepsilon^2 (-\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \Delta \beta_n) - f(\beta_n) = -\gamma \bar{f}_u \varepsilon^{n+2} + O(\varepsilon^{n+3})$, где $\gamma > 0$, $\beta_n - u = O(\varepsilon^{n+1})$, $f(\beta_n) - f(u) - f_u^*(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2})$ и выбирая $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0$, а γ достаточно большим, получаем $N_\varepsilon \beta = e^{-\Lambda_0 t} (-\gamma \bar{f}_u \varepsilon^{n+2} + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3})) < 0$ при $n \geq 0$. Аналогично проверяется неравенство $N_\varepsilon \alpha > 0$. Таким образом, в некритическом случае построенное выше периодическое решение устойчиво с областью влияния по крайней мере $[\alpha_0(x, y, 0, \varepsilon), \beta_0(x, y, 0, \varepsilon)]$, ширина этой области составляет величину порядка $O(\varepsilon^1)$.

В критическом случае проведем аналогичные оценки: $\varepsilon^2 (-\frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t} + \Delta \mathfrak{B}_n) - f(\mathfrak{B}_n) = -\gamma \bar{f}_u \varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+4})$, где $\gamma > 0$, $\mathfrak{B}_n - u = O(\varepsilon^{n+1})$, $f(\mathfrak{B}_n) - f(u) - f_u^*(\mathfrak{B}_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2})$. Выбирая $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0$ достаточно малым, а γ достаточно большим, получаем $N_\varepsilon \mathfrak{B} = e^{-\Lambda_0 t} (-\gamma \bar{f}_u \varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3})) < 0$ при $n \geq 1$. Аналогично проверяется неравенство

$N_\varepsilon \mathfrak{A} > 0$. Итак, построенное выше периодическое решение устойчиво с областью влияния по крайней мере $[\mathfrak{A}_1(x, y, 0, \varepsilon), \mathfrak{B}_1(x, y, 0, \varepsilon)]$, ширина этой области - величина порядка $O(\varepsilon^2)$.

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.4.1 Пусть выполнены условия (A1)-(A5). Тогда решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (5.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x, y, 0, \varepsilon), \beta_0(x, y, 0, \varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x, y, t, \varepsilon)$ - единственное решение задачи (5.1) в этой области.

Теорема 5.4.2 Пусть выполнены условия (A1)-(A3), (A'4)-(A'6). Тогда решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (5.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\mathfrak{A}_1(x, y, 0, \varepsilon), \mathfrak{B}_1(x, y, 0, \varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x, y, t, \varepsilon)$ - единственное решение задачи (5.1) в этой области.

5.5 Пример периодической контрастной структур типа ступеньки

5.5.1 Несбалансированный случай

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}
 N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t) = 0, \\
 D &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 100\}, \\
 (x, y, t) &\in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, t \in R\}, \\
 \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, t \in R, \\
 u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R,
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

где

$$f(u, x, y, t) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t) = u - d^2(t), & \text{если } u \geq 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u + x^2 + y^2, & \text{если } u < 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R, \end{cases}$$

$d(t) > 0$ – некоторая T - периодическая функция.

Для задачи (5.39) получаем, что $\varphi^{(-)}(x, y, t) = -(x^2 + y^2)$, $\varphi^{(+)}(x, y, t) = d^2(t)$, тогда

$$f(u, x, y, t) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t) = u - \varphi^{(+)}(x, y, t) & \text{если } u \geq 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u - \varphi^{(-)}(x, y, t), & \text{если } u < 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R. \end{cases}$$

В этом случае кривая $C_0(t)$ - это окружность, описываемая уравнением $x^2 + y^2 = d^2(t)$, где $d(t)$ – ее радиус. В самом деле, в локальной системе координат (r, θ) для кривой C_0 , где $\theta \in [0, 2\pi)$ - угол между вектором $\{x, y\}$ и осью x , имеем $\varphi^{(-)} = -(r - d)^2$,

$$\begin{aligned}
I(r, \theta, t) &= \int_{\varphi^{(-)}(r, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(r, \theta, t)} f(u, r, \theta, t, 0) du = \int_{\varphi^{(-)}(r, \theta, t)}^0 (u - \varphi^{(-)}(r, \theta, t)) du + \int_0^{\varphi^{(+)}(r, \theta, t)} (u - \varphi^{(+)}(r, \theta, t)) du \\
&= -\frac{1}{2} \left[\left(\varphi^{(+)}(r, \theta, t) \right)^2 - \left(\varphi^{(-)}(r, \theta, t) \right)^2 \right] = -\frac{1}{2} \left[(d(t))^4 - (r - d(t))^4 \right],
\end{aligned} \tag{5.40}$$

откуда следует, что $I(0, \theta, t) = 0$, т.е. условие (A4) выполнено и C_0 - действительно кривая переходного слоя. Далее, в выбранной локальной системе координат имеем

$$\left. \frac{\partial I(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \left(\varphi^{(-)}(r, \theta, t) \right)^2}{\partial r} \right|_{r=0} = -2(d(t))^3 < 0, \tag{5.41}$$

т.е. условие (A5) также выполнено. Задачи (5.13) для определения $\tilde{u}^{(\pm)}$ примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} &= u - \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \\
\tilde{u}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*) &= 0, \\
\tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \lambda^*) &= \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

и имеют, как нетрудно убедиться, решения $\tilde{u}^{(\pm)} = \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t)(1 - \exp(\mp\xi))$. Тогда для функций $\tilde{v}$ получим выражения $\tilde{v}^{(\pm)} = \pm\varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \exp(\mp\xi)$.

Тогда для асимптотики решения в нулевом порядке имеем выражение (пограничный слой в нулевом приближении отсутствует):

$$U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \varphi^{(\pm)}(x, y, t)(1 - \exp(\mp\xi_0)),$$

где $\xi_0 = \frac{(d(t) - \sqrt{x^2 + y^2})}{\varepsilon}$. Согласно теоремам 1 и 3, существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (5.39) в виде

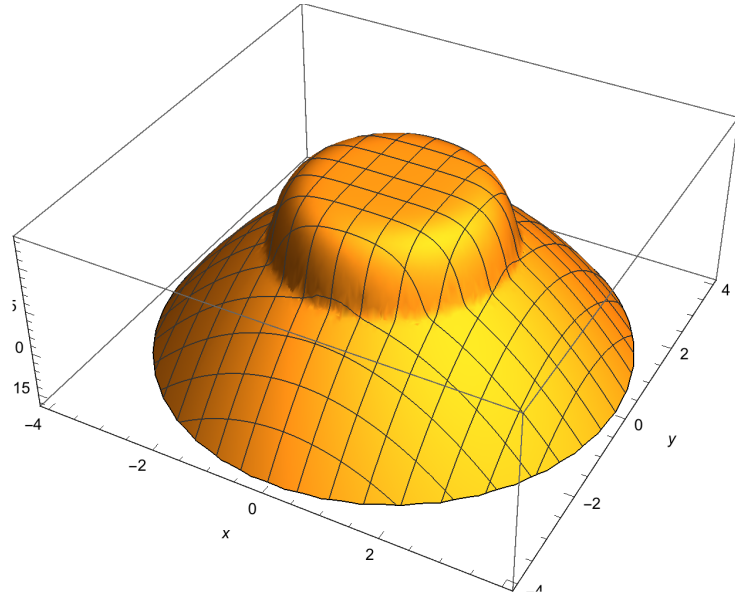


Рис. 5.1: Численное решение задачи (5.39) при $t = 0$.

контрастной структуры типа ступенька, для которого справедлива оценка $|U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon)$.

На рисунках 5.1, 5.2 и 5.3 изображены результаты численного эксперимента, проведенного с помощью программы “Wolfram Mathematica” при $\varepsilon = 0.1$, $T = 0.25$ и $d(t) = 2 + \sin(8\pi t)$. На рисунке 5.3, а) видно, что решение соответствующей начально-краевой задачи быстро выходит на периодическое решение.

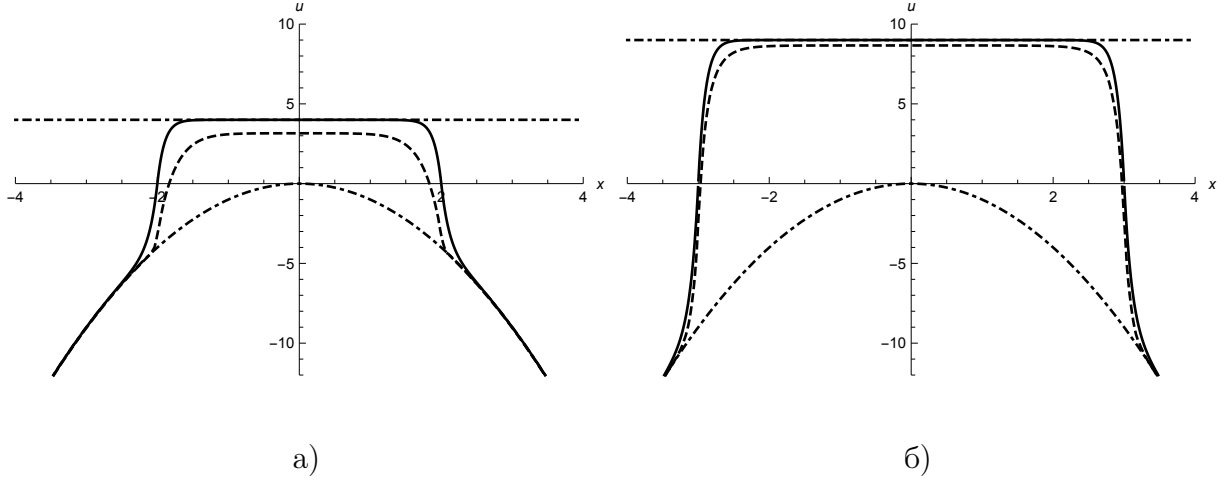


Рис. 5.2: Асимптотика нулевого порядка (сплошная кривая) и численное решение (пунктирная кривая) для задачи (5.39) в сечении плоскостью $y = 0$ в моменты времени а) $t = 0$, б) $t = T/4 = 1/16$. Корни вырожденного уравнения $\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}$ изображены штрихпунктирными линиями.

5.5.2 Случай баланса разрывной реакции

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}
 N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t, \varepsilon) = 0, \\
 D &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 100\}, \\
 (x, y, t) &\in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, t \in R\}, \\
 \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, t \in R, \\
 u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R,
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

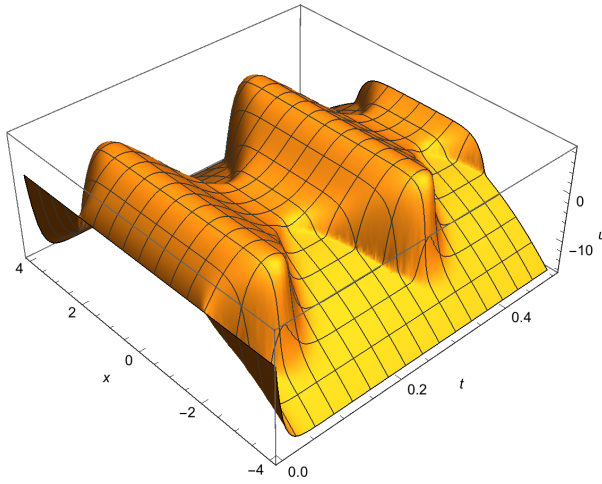
где

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon) = u - A + \varepsilon w(x, y, t), & \text{если } u \geq 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u + A, & \text{если } u < 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R, \end{cases}$$

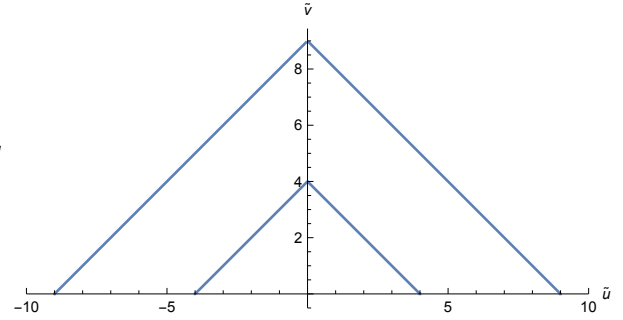
A – положительная константа, а функция

$$w(t) = - \left(\frac{1}{d(t)} + \dot{d}(t) \right) A, \tag{5.44}$$

где $d(t)$ – некоторая T - периодическая функция, например, $d(t) = 5 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Для задачи (5.43) получаем, что



а)



б)

Рис. 5.3: а) Численное решение начально-краевой задачи, соответствующей задаче (5.39), в сечении плоскостью $y = 0$. Начальное условие выбрано в виде функции $v^0(x, y, t) \equiv 1$. б) Соединительная сепаратриса на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$, соответствующей задаче (5.39) в моменты времени $t = 0$ (нижний график) и $t = T/4 = 1/16$ (верхний график).

$\varphi^{(-)}(x, y, t) = -A$, $\varphi^{(+)}(x, y, t) = A$, тогда

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon) = u - \varphi^{(+)} + \varepsilon w(x, y, t) & \text{если } u \geq 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u - \varphi^{(-)}, & \text{если } u < 0 \quad (x, y) \in \bar{D}, t \in R. \end{cases}$$

В этом случае кривая $C_0(t)$ - это окружность, описываемая уравнением $x^2 + y^2 = d^2(t)$, где $d(t)$ - ее радиус. В самом деле, в локальной системе координат (r, θ) для кривой C_0 , где $\theta \in [0, 2\pi)$ - угол между вектором $\{x, y\}$ и осью x , имеем

$$I(r, \theta, t) = \int_{\varphi^{(-)}(r, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(r, \theta, t)} f(u, r, \theta, t, 0) du = -\frac{1}{2} \left[\left(\varphi^{(+)}(r, \theta, t) \right)^2 - \left(\varphi^{(-)}(r, \theta, t) \right)^2 \right] \equiv 0, \quad (5.45)$$

т.е. условие (A'4) выполнено.

Нетрудно убедиться, что $\tilde{u}^{(\pm)} = \pm A(1 - \exp(\mp \xi))$. Тогда для функций

$\tilde{v}$ получим выражения $\tilde{v}^{(\pm)} = A \exp(\mp \xi)$.

Далее, переходя к полярным координатам $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ и θ и учитывая, что $r = d(t) - R$, получаем

$$\Delta r(r, \theta, t) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} (d(t) - R) \right) = -1/R = \frac{1}{r - d(t)},$$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{x,y=const} = \frac{\partial}{\partial t} (d(t) - \sqrt{x^2 + y^2}) = \dot{d}(t).$$

Далее, имеем

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \theta, t, 0) d\xi = A^2, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \equiv 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \tilde{v}(\xi, \theta, t, 0) d\xi = Aw(t),$$

откуда получаем равенство (5.27):

$$- \left(\frac{1}{-d(t)} - \dot{d}(t) \right) A^2 + Aw(t) = 0, \quad (5.46)$$

которое является верным в силу задания функции $w(t)$ по формуле (5.44), т.е. условие (A'5) выполнено.

Далее, считаем коэффициент $\tilde{c}(\theta, t)$:

$$\tilde{c}(\theta, t) := \frac{1}{A^2} \frac{\partial \left[\left(\frac{1}{r-d(t)} - \dot{d}(t) \right) A^2 + Aw(t) \right]}{\partial r} \bigg|_{r=0} = -1/(d(t))^2 < 0.$$

Таким образом, условие (A'6) выполнено.

Тогда для асимптотики решения в нулевом порядке имеем выражение (пограничный слой в нулевом приближении отсутствует):

$$U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \pm A(1 - \exp(\mp \xi_0)),$$

где $\xi_0 = \frac{(d(t) - \sqrt{x^2 + y^2})}{\varepsilon}$.

Согласно теоремам 2 и 4, существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (5.39) в виде контрастной структуры типа ступенька, для которого справедлива оценка $|U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon)$.

На рисунке 5.4 б) изображены результаты численного эксперимента, проведенного с помощью программы “Wolfram Mathematica” при $\varepsilon = 0.1$, $T = 2\pi$ и $d(t) = 2 + \sin(t)$.

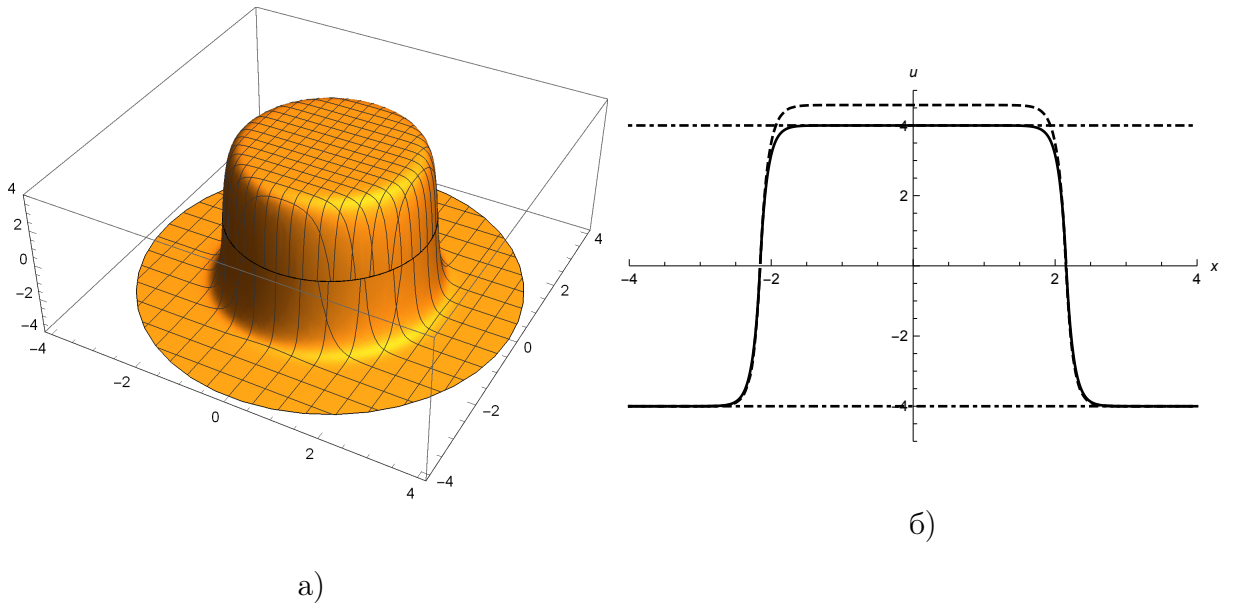


Рис. 5.4: На графиках для момента времени $t = \pi/20$ представлены а) асимптотика нулевого порядка и б) асимптотика нулевого порядка (сплошная кривая) и численное решение (пунктирная кривая) для задачи (5.43) в сечении плоскостью $y = 0$ (корни вырожденного уравнения $\varphi^{(+)}$ и $\varphi^{(-)}$ изображены штрих-пунктирными линиями).

Заключение

Диссертационная работа посвящена теоретическому исследованию нелинейных сингулярно возмущенных уравнений реакция-диффузия, ключевой особенностью которых является разрыв реактивного слагаемого.

Перечислим основные результаты работы.

- Получены условия, при которых в рассматриваемых задачах существуют решения, содержащие внутренний переходный слой.
- Разработан алгоритм построения асимптотических разложений для данного класса задач.
- Доказаны теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову.
- Асимптотический метод дифференциальных неравенств развит в применении к новому классу задач с разрывными нелинейностями.

Методы исследования, предложенные в диссертационной работе, могут быть обобщены на уравнения произвольной размерности по пространственным переменным, а также на более сложные задачи, например, на задачи для систем уравнений и прикладные задачи, связанные с моделями биофизики и перколяции. Также результаты диссертационной

работы могут быть использованы для разработки численных методов решения жестких задач с разрывными нелинейностями.

Список литературы

1. Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Давыдова М. А., Шапкина Н. Е., Ольчев А. В. Применение теории контрастных структур для описания поля скорости ветра в пространственно-неоднородном растительном покрове // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 3. — С. 3–10. Levashova N.T., Muhartova J.V., Davydova M.A., Shapkina N.E., Oltchev A.V. The Application of the Theory of Contrast Structures for Describing wind Field in Spatially Heterogeneous Vegetation Cover // Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — V. 70. — № 3. — P. 167–174.
2. Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л.В. Популяционная модель урбозкосистем в представлениях активных сред // Биофизика. — 2015. — Т. 60. — № 3. — С. 574–582.; Sidorova A.E., Levashova N.T., Melnikova A.A., Yakovenko L.V. A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium // Biophysics. — 2015. — V. 60. — № 3. — P. 466–473.
3. Левашова Н. Т., Николаева О. А., Пашкин А. Д. Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур // Вестник Московско-

- го университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 5. — С. 12–16.; Levashova N. T., Nikolaeva O. A., Pashkin A. D. Simulation of the temperature distribution at the water–air interface using the theory of contrast structures // Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — V. 70. — № 5. — P. 341–345.
4. Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Ольчев А. В. Трехмерное моделирование турбулентного переноса в приземном слое атмосферы с применением теории контрастных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8. — № 2. — С. 355–367.
5. Levashova N. T., Sidorova A.E., Semina A. E., Mingkang N. A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // Sustainability. — 2019. — V. 11, №13. — P. 3658–1–3658–13.
6. Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Ольчев А. В. Два подхода к описанию турбулентного переноса в приземном слое атмосферы // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 46–60.; Levashova N. T., Muhartova J. V., Olchev A. V. Two approaches to describing the turbulent exchange within the atmospheric surface layer // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — V. 9. — № 6. — P. 697–707.
7. Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Семина А. Е. Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах // Математическая биология и биоинформатика. — 2017. — Т. 12. — № 1. — С.

- 186–197.; Sidorova A.E., Levashova N.T., Melnikova A.A., Semina A.E. The Model of Structurization of Urban Ecosystems as the Process of Self-Organization in Active Media // Mathematical Biology and Bioinformatics. — 2017. — V. 12. — № 1. — P. 186–197.
8. Мельникова А. А., Дерюгина Н. Н. Периодические изменения автоволнового фронта в двумерной системе параболических уравнений // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25. — № 1. — С. 112–124.; Melnikova A.A., Deryugina N.N. Periodic Variations of an Autowave Structure in Two-dimensional System of Parabolic Equations // Modeling and Analysis of Information Systems.— 2018. — V. 25. — № 1. — P. 112–124.
9. Мельникова А. А., Чэнь М. Существование и асимптотика автоволнового решения системы уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 5. — С. 705–715.; Melnikova A. A., Chen M. Existence and asymptotic representation of the autowave solution of a system of equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — V. 58. — № 5. — P. 705–715.
10. Грачев Н. Е., Дмитриев А. В., Сенин Д. С., Волков В. Т., Нефедов Н. Н. Моделирование динамики фронта внутрислоевого горения // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. — 2010. — № 11. — С. 306–312.
11. Волков В.Т., Нефедов Н.Н., Грачев Н.Е., Сенин Д.С. Оценка па-

- раметров фронта внутрипластового горения при закачке воздуха в нефтяной пласт // Нефтяное хозяйство. — 2010. — № 4. — С. 93–96.; Volkov V.T., Nefedov N.N., Grachev N.E., Senin D.S. Analytical estimating the parameters of the in situ combustion front // OIL INDUSTRY. — 2010. — № 4. — P. 93–96.
12. Беянин М. П., Васильева А. Б. О внутреннем переходном слое в одной задаче теории полупроводниковых плёнок // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1988. — Т. 28. — № 2. — С. 145–153.; Belyanin M. P., Vasil'yeva A. B. On the interior transitional layer in a problem of semiconductor film theory — 1988. — V. 28. — № 2. — P. 145–153.
 13. Беянин М. П., Васильева А. Б., Воронов А. В., Тихонравов А. В. Об асимптотическом подходе к задаче синтеза полупроводникового прибора // Матем. моделирование. — 1989. — Т.1. — № 9. — С. 43–63.
 14. Волков В. Т., Крючков С. В., Обухов И. А., Румянцев С. В. Численно асимптотический анализ переходных процессов в полупроводниках // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29. — № 8. — С. 1159–1167.; Volkov V. T., Kryuchkov S. V., Obukhov I. A., Rumyantsev S. V. An asymptotic-numerical method of analysing transport processes in semiconductors // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics — 1989. — V. 29. — № 8. — P. 132–138.
 15. Калачев Л.В., Обухов И.А. Приближенное решение уравнения Пуас-

- сона в модели двумерной полупроводниковой структуры // Вестник Московского Университета. — 1989. — Т. 30. — № 3. — С. 63–68.
16. Mikhailov E. A. Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches // Magnetohydrodynamics. — 2016. — V. 52. — №1. — P. 117–125.
17. Михайлов Е. А. Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2015. — № 2. — С. 27–31.; Mikhailov E. A. Problems with a small parameter and propagation of fronts in the galactic dynamo theory // Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — V. 70. — № 2. — P. 101–106.
18. Murray J. D. Mathematical biology. I, volume 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics. — Springer, New York, third edition, 2002., — p.370
19. Нефедов Н. Н., Руденко О. В. О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 478. — № 3. — С. 274–279.
20. Руденко О. В. Неоднородное уравнение Бюргерса с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 474. — № 6. — С. 671–674.
21. Варфоломеев С. Д. Кобельков Г. М., Судбина Г. Ф. Диффузия и

- реакция в ферментативной системе, инактивирующей в процессе реакции // Вестник Московского университета. Серия 2: Химия. — 1982. — Т. 23. — № 3. — С. 195–206.
22. Варфоломеев С. Д., Кобельков Г. М., Судбина Г. Ф. Макрокинетическое поведение ферментативной системы, содержащей фермент, который инактивируется в процессе реакции // Вестник Московского университета. Серия 2: Химия. — 1986. — Т. 27. — № 5. — С. 443–454.
 23. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 3. — С. 799–851.
 24. Volkov V. T., Nefedov N. N., Antipov E. A. Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems // Lecture Notes in Computer Science — 2015. — Vol. 9045. — P. 408–416.
 25. Volkov V.T., Nefedov N.N., Antipov E.A. Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10187. — P. 721–729.
 26. Lukyanenko D. V., Shishlenin M. A., Volkov V. T. Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — V. 54. — P. 233–247.

27. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 18. — № 3. — С. 13–84.; Vasil'eva A. B. Asymptotic behaviour of solutions to certain problems involving non-linear differential equations containing a small parameter multiplying the highest derivatives // Russian Mathematical Surveys — 1963. — V. 18. — № 3. — P. 13–84.
28. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.
29. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31. — № 7. — С. 1132–1139.
30. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. — 1995. — № 4. — С. 719–723.
31. Волков В. Т., Нефедов Н. Н. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46. — № 4. — С. 615–623. Volkov V. T., Nefedov N.

- N. Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2006. — V. 46. — № 4. — P. 585–593.
32. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемеханика — 1998, № 7, С. 4–32.
33. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического института им.В.А.Стеклова РАН. — 2010. — №268. — С. 268–283.; Vasil'eva A. B., Butuzov V. F., Nefedov N. N. Singularly perturbed problems with boundary and internal layers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics — 2010. — №268. — P. 268–283.;
34. Orlov A. O., Levashova N. T., Burbaev T. M. The use of asymptotic methods for modelling of the carriers wave functions in the Si/SiGe heterostructures with quantum-confined layers // Journal of Physics: Conference Series. — 2015. — V. 586. — P. 012003-012007.
35. Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О. Стационарное уравнение реакции диффузии с разрывным реактивным членом // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57. — № 5. — С. 854–866.; Levashova N. T., Nefedov N. N., Orlov A. O. Time-independent reaction–diffusion equation with a discontinuous reactive term // Computational Mathematics and

- Mathematical Physics. — 2017. — V. 57. — № 5. — P. 854–866. Impact Factor: 0.677.
36. Орлов А. О., Нефедов Н. Н., Левашова Н.Т. Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54. — № 5. — С. 673–690.; Orlov A. O., Nefedov N. N., Levashova N. T. Solution of Contrast Structure Type for a Parabolic Reaction–Diffusion Problem in a Medium with Discontinuous Characteristics // Differential Equations. — 2018. — V. 54. — № 5. — P. 669–686. Impact Factor: 0.674.
37. Levshova N.T., Nefedov N. N., Nikolaeva O. A., Orlov A. O., Panin A. A. The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — P. 1–15. Impact Factor: 1.533.
38. Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т., Орлов А. О. Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция-диффузия с разрывным реактивным слагаемым // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2018. — № 6. — С. 565–572.; Nefedov N. N., Levashova N. T., Orlov A. O. Asymptotic stability of the internal transition layer of the reaction-diffusion problem with a discontinuous reactive term // Moscow University Physics Bulletin. — 2018. — № 6. — P. 565–572.

Impact Factor: 0.580.

39. Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О. Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 611–620.; Levashova N. T., Nefedov N. N., Orlov A. O. Asymptotic Stability of a Stationary Solution of a Multidimensional Reaction–Diffusion Equation with a Discontinuous Source // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — V. 59. — № 4. — P. 854–866. Impact Factor: 0.774.
40. Нефедов Н. Н., Давыдова М. А. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49. — № 6. — С. 715–733.; Nefedov N. N., Davydova M. A. Contrast structures in singularly perturbed quasilinear reaction-diffusion-advection equations // Differential Equations. — 2013. — Vol. 49. — № 6. — P. 1–19.
41. Давыдова М. А., Нефедов Н. Н. Существование и устойчивость контрастных структур в многомерных задачах реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной нелинейности // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24. — № 1. — С. 31–38.
42. Davydova M. A., Nefedov N. N. Existence and stability of contrast structures in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-

- advection problems // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — V. 10187. — P. 277–285.
43. Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция — диффузия // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50. — № 2. — С. 276–285.; Bozhevol'nov Y. V., Nefedov N. N. Front motion in the parabolic reaction-diffusion problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — V. 50. — №2. — P. 264–273.
44. Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 259–279.
45. Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 10. — С. 1594–1607.; Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N. N. Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — V. 54. — № 10. — P. 1536–1549.
46. Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25. — № 1. — С. 17–31.

47. Nefedov N. N., Nikulin E. I. Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction–diffusion equations in the case of a rapid reaction // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 25, no. 1. — P. 88–101.
48. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53. — № 4. — С. 524–537. ;
Nefedov N. N., Nikulin E. I. Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem in the case of a balanced nonlinearity // Differential Equations. — 2017. — V. 53. — №4. — P. 516–529.
49. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — Т. 25. — № 1. — С. 125–132.
50. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и устойчивость периодических решений уравнения реакция-диффузия в двумерном случае // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23. — № 3. — С. 342–348.
51. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит. , 1989. — 336 с.

52. Нефедов Н. Н., Ни М. К. Внутренние слои в одномерном уравнении реакция-диффузия с разрывным реактивным членом // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — № 12. — С. 64–71.; Nefedov N. N., Minkang N. Internal layers in the onedimensional reaction–diffusionequation with a discontinuous reactive term // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — V. 55. — № 12. — P. 2001–2007.
53. Левашова Н. Т., Николаева О. А. Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 339–352.
54. Sattinger D. H. Monotone methods in elliptic and parabolic boundary value problems // Indiana Univ., Math. Journal. — 1972. — V. 21. — No. 11. — P. 979-1001
55. Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. — Plenum Press, New York — 1992. — p. 777
56. Aman H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces // J. Funct. Anal. — 1972. — V.11. — №3. — p.346-384.
57. Aman H. Supersolutions, monotone iterations and stability // J. Differential Equations 1976. — V.21. — №2. — p.363-377.
58. Carl S., Le V. K., Motreanu D. Nonsmooth variational problems and their inequalities : comparison principles and applications. — Springer

59. De Coster C., Obersnel F., Omari P. A qualitative analysis via lower and upper solutions of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness. Handbook of differential equations: ordinary differential equations. — 2006. — V.3 — p.203-339.
60. Павленко В. Н., Ульянова О. В. Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Матем. — 1998. — Т. 42. — № 11. — С. 65–72.; Pavlenko V. N., Ul'yanova O. V. The method of upper and lower solutions for elliptic-type equations with discontinuous nonlinearities // Russian Mathematics. — 1998. — V. 42. — № 11. — P. 65–72.
61. Павленко В. Н. Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52. — № 4. — С. 528–539. ; Pavlenko V. N. Strong solutions of periodic parabolic problems with discontinuous nonlinearities // Differential Equations. — 2016. — V. 52. — № 4. — P. 505–516.
62. Павленко В. Н., Ульянова О. В. Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 499–504.; Pavlenko V. N., Ul'yanova O. V. Method of Upper and Lower Solutions for Parabolic-Type Equations with Discontinuous Nonlinearities // Differential Equations. — 2002. — V. 38. — № 4. — P.

520–527.

63. Павленко В. Н. Эллиптическая резонансная краевая задача с разрывной нелинейностью линейного роста // Вестник ЧелГУ. — 2010. — № 12. — С. 43–48.
64. Лепчинский М. Г., Павленко В. Н. Правильные решения эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17. — № 3. — С. 124–138.
65. Nefedov N.N. An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability // Differential Equations. — 2000. — Vol. 36. — № 2. — P. 298–305
66. Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2005. — № 1. — С. 9–13.
67. Nefedov N.N. Spike-type contrast structures in reaction-diffusion systems // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — V. 150. — № 6. — P. 2540–2549.
68. Nefedov N. N. Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers // Lecture Notes in Computer Science. — 2013. — V. 8236. — P. 62–72.
69. Nefedov N. N., Recke L., Schnieder K. R. Existence and asymptotic

- stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2013. — V. 405. — P. 90–103.
70. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П., Штарас А.Л. // Метод осреднения для уравнений с частными производными и его применения // Итоги науки и техники. Современ, проблемы матем. Фундаментальные направления. — 1988. — Т. 34. — С. 215–240.
71. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука., 1981. — 400 с.
72. Ломов С. А., Елисеев А. Г. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач // Успехи математических наук. — 1988. — Т. 43. — № 3. — С. 3–53.; Lomov S. A. Asymptotic integration of singularly perturbed problems // Russian Mathematical Surveys — 1988. — V. 43. — № 3. — С. 3–53.
73. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука., 1977. — 386 с.
74. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988. — 310 с.
75. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. и матем. физика. — 1992. — Т. 92. — № 2. — С. 215–254.; Belov V. V., Dobrokhotov S. Y. Semiclassical maslov asymptotics with complex

- phases. I. General approach // Theoretical and Mathematical Physics — 1992. — V. 92. — № 2. — P. 843–868
76. Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечноразрывные почти периодические решения в ВКБ-приближении // Итоги науки и техники серия современные проблемы математики — 1980. — Т. 15. — № 2. — С. 3–94.; Dobrokhотов S. Yu., Maslov V. P. Finite-zone, almost-periodic solutions in WKB approximations // Journal of Soviet Mathematics volume— 1981. — V. 16. — № 1. — P. 1431–1487.;
77. Данилов В. Г., Жевандров П. Н. О методе Маслова построения комбинированных асимптотик для h -псевдодифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1989. — Т. 53. — Вып. 2. — С. 411–424.
78. Ни М. К., Неведов Н. Н., Левашова Н. Т. Асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56.; Mingkang Ni, Nefedov N. N., Levashova N.T. Asymptotic solutions of a singularly perturbed second-order differential equation with delayed argument // Differential Equations. — 2020. — V. 56.
79. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70. — № 3. — С. 3–76.; Glyzin S. D., Kolesov A. Y., Rozov N. K. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse

- neurons // Russian Mathematical Surveys. — 2015. — V. 70. — № 3. — P. 383–452.
80. Григорьева Е. В., Кащенко И. С., Кащенко С. А. Квазинормальные формы для уравнений Лэнга–Кобаяши с большим коэффициентом управления // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 18–29.
81. Кащенко С. А. Уравнение Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. — Т. 38, № 3. — С. 457–465.; Kashchenko S. A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1998. — V. 38. — № 4. — P. 443–451
82. Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 12. — С. 2141–2150. Kashchenko I. S. Local dynamics of equations with large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2008. — V. 48. — № 12. — P. 2172–2181
83. Васильева А. Б. Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1995. — Т. 35. — № 4. — С. 520–531.

84. Похожаев С. И. Об уравнениях вида // Математический сборник —1980. —Т. 113. — № 2. — С. 324–338.; Pohožaev S. I. Equations of the type $\Delta u = f(x, u, Du)$. Mathematical. USSR-Sbornik —1980. —V. 113. — № 2. — P. 324–338.
85. Daners D., Koch Medina P. Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications. Harlow, Essex.— 1992.
86. Dong G. Nonlinear Partial Differential Equations of Second Order. Providence, Rhode Island. — 2008.
87. Руденко О. В. Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями. // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 471, № 1. — С. 23–27.
88. Hedberg C.M., Rudenko O.V. Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium. // Nonlinear Dyn. — 2017. — Vol. 90. — P. 2083–2091.
89. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука — 1982.
90. Лукьяненко Д. В., Волков В. Т., Нефедов Н. Н., Реке Л., Шнайдер К. Аналитико-численный подход для решения сигулярно возмущенных параболических уравнений с использованием динамически адаптированных сеток // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 3. — С. 334–341.

91. Lukyanenko D. V., Nefedov N. N., Nikulin E. I., Volkov V. T. Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10187. — P. 107–118.
92. Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D. Front dynamics in an activator-inhibitor system of equations // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10187. — P. 492–499.
93. Левашова Н. Т., Неведов Н. Н., Ягремцев А. В. Существование решения в виде движущегося фронта у задачи типа реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции // Известия РАН. Серия математическая. — 2018. — Т. 82. — № 5. — С. 131–152.; Levashova N. T., Nefedov N. N., Yagremtsev A. V. Existence of a solution in the form of a moving front of a reaction-diffusion-advection problem in the case of balanced advection // Izvestiya. Mathematics. — 2018. — Vol. 82. — № 5. — P. 984–1005.
94. Nefedov N. N. Nukulin E. I. Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem. // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2015. — V. 22. — №2. — P. 215–226.
95. Фэй П. Я., Мин К. Н., Давыдова М. А. Контрастные структуры в задачах для стационарного уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывной нелинейностью // Математические заметки. — 2018. — Т. 104. — № 5. — С. 759–770.; Yafei P., Minkang N., Davydova

- M. A. Contrast structures in problems for a stationary equation of reaction-diffusion-advection type with discontinuous nonlinearity // Mathematical Notes. — 2018. — V. 104. — № 5-6. — P. 735–774.
96. Фэй П. Я., Мин К. Н., Левашова Н. Т., Николаева О. А. Внутренние слои для сингулярно возмущённого квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53. — № 12. — С. 1616–1626.; Mingkang Ni, Yafei Pang, Levashova N.T., Nikolaeva O.A. Internal layers for a singularly perturbed second-order quasilinear differential equation with discontinuous right-hand side // Differential Equations. — 2017. — V. 53. — № 12. — P. 1567–1577.
97. Alikakos N. D., Bates P. W, Chen X. Periodic traveling waves and locating oscillating patterns in multidimensional domains // Translations of the American Mathematical Society — 1999. — V. 351. — P. 2777–2805.
98. Dancer E. N., Hess P. Behaviour of a semi-linear periodic-parabolic problem when a parameter is small // Lecture Notes in Mathematics. — 1990. — V. 1450. — P. 12–19.
99. Kannan R., Lakshmikantham V. Existence of periodic solutions of semilinear parabolic equations and the method of upper and lower solutions // Journal of Mathematical Analysis and Applications — 1983 — V. 97. — P. 291–299.
100. Hess P. Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity //

Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Scientific & Technical
— 1991.

101. Васильева А. Б., Плотников А. А. О параболических уравнениях с малым параметром // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46. — №5. — С. 799–804.
102. Калиткин Н. Н., Корякин П. В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. М.: Издательский центр “Академия”, 2013.
103. Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A. Traveling wave solutions of parabolic systems. American Mathematical Soc. — 1980. — V.140.
104. Fife C. P. McLeod J. B. The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion. Equations to Travelling Front Solutions. — 1975. — V. 81, № 6. — P. 1076–1078.
105. Nefedov N. N., Sakamoto K. Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity. // Hiroshima Mathematical Journal — 2003. — V. 33. — № 3. — P. 391–432.
106. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М. — 1968.