1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Неотрицательная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$, заданная на прямом произведении $X \times X$, называется *метрикой* в множестве X, если выполняются

a) симметричность: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ при всех $x,y \in X$;

b) неравенство треугольника: $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ при всех $x,y,z \in X$;

c) невырожденность: $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пара (X,ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены (a) и (b), то ρ называется *полуметрикой*, а (X,ρ) *полуметрическим пространством*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* $x_n \to x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x,x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши́*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при всех $n,m \geqslant N$.

Если всякая последовательность Коши́ является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*.

Определение. Всюду далее через $\boldsymbol{E}$ будем обозначать *линейное пространство* над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Неотрицательная функция $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_+$ называется *нормой* в $\boldsymbol{E}$, если выполняются

a) однородность: $\boldsymbol{p}(\lambda x) = |\lambda| \boldsymbol{p}(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \boldsymbol{E}$;

b) неравенство треугольника: $\boldsymbol{p}(x+y) \leqslant \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}(y)$ при всех $x,y \in \boldsymbol{E}$;

c) невырожденность: $\boldsymbol{p}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Норма обозначается через $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ и пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ называется *нормированным пространством*. Полное нормированное пространство будем называть *ба́наховым пространством*. Если выполнены (a) и (b), то $\boldsymbol{p}(x) \doteqdot \|x\|$ называется *полунормой*, а пара $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{p})$ *полунормированным пространством*. Метрика или полуметрика в этих пространствах определяются формулой $\rho(x,y) \doteqdot \|x-y\|$.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteqdot \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_k \in \mathbb{F}, k = 1,\ldots,n\}$ с нормой $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ называется *евклидовым пространством*.

Пример 2. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $\boldsymbol{B}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F}$ ограничена$\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f : X \to \mathbb{F}$ называется *непрерывной* в (X,ρ), если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$.

Нормированное пространство $\boldsymbol{C}(X) \doteqdot \{f \mid f : X \to \mathbb{F}$ непрерывна и ограничена$\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Лемма. *Пространства $\boldsymbol{B}(X)$ и $\boldsymbol{C}(X)$ являются ба́наховыми.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\boldsymbol{B}(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $n, m \geqslant N$. По критерию Коши равномерной сходимости она сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n \geqslant N$. Отсюда $\|f_n - f\| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Так как $\|f\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то $f \in \boldsymbol{B}(X)$.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $\boldsymbol{C}(X)$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{B}(X)$ и, следовательно, также будет ба́наховым пространством. □

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве обозначаются через $\boldsymbol{U}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) < r\}$ и $\boldsymbol{S}_r(x) \doteqdot \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant r\}$; $\boldsymbol{U}_r \doteqdot \boldsymbol{U}_r(0)$ и $\boldsymbol{S}_r \doteqdot \boldsymbol{S}_r(0)$. Для каждого множества $A \subset X$ введем следующие обозначения:

$\mathring{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;

$\acute{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = \infty\}$ — множество *предельных* точек;

$\tilde{A} \doteqdot \{x \in X \mid \exists\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A = x\}$ — множество *изолированных* точек;

$\overline{A} \doteqdot \{x \in X \mid \forall\ r > 0,\ \boldsymbol{U}_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$ — множество точек *прикосновения*.

Множества $\mathring{A}$ и $\overline{A}$ называются *внутренностью* и *замыканием* множества A.

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым*.
Если $\overline{A} = A$, то множество A называется *замкнутым*.
Если $\overline{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным*.
Если $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным*.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепара́бельным*, если существует счетное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X, ρ).

1. $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists x_n \in A,\ \textit{т.ч.}\ x_n \to x\}$.

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Точка $x \in \overline{A}$ тогда и только тогда, когда существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \in A \cap \boldsymbol{U}_{1/n}(x)$, что равносильно неравенству $\rho(x, x_n) < 1/n$. Отсюда следует, что $x_n \to x$.

Если $x \in \overline{A \cup B}$, то существуют точки $x_n \in A \cup B$, т.ч. $x_n \to x$. Тогда существует подпоследовательность точек x_{n_k}, принадлежащая A либо B, т.ч. $x_{n_k} \to x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратное включение очевидно.

Ясно, что $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда найдется последовательность точек $x_n \in \overline{A}$, т.ч. $x_n \to x$. Кроме того, для каждого n найдется последовательность точек $x_{nm} \in A$, т.ч. $x_{nm} \to x_n$. Выберем подпоследовательность m_n, т.ч. $\rho(x_{nm_n}, x_n) < 1/n$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_{nm_n}, x) \leqslant \rho(x_{nm_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0$, т.е. $x_{nm_n} \to x \in \overline{A}$.

Определение. Отображение $F : X \to Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *непрерывным*, если для любого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(F(x), F(y)) < \varepsilon$ выполняется для всех $y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$.

Отображение $F : X \to Y$ называется *изометричным*, если $\rho_Y(F(x), F(y)) = \rho_X(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Если, кроме того, образ $F(X) = Y$, то отображение называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Теорема (о пополнении). *Для каждого метрического пространства (X, ρ_X) существует такое полное метрическое пространство (Y, ρ_Y) и изометричное отображение $F : X \to Y$, что образ $F(X) \subset Y$ является всюду плотным. При этом любые два таких полных пространства являются изометричными.*

Доказательство. Пусть $f_x(y) \doteqdot \rho_X(x, y) - \rho_X(x_0, y)$, где точка $x_0 \in X$ фиксирована. Тогда $|f_x(y)| \leqslant \rho_X(x, x_0)$ для всех $y \in X$, т.е. $f_x \in \boldsymbol{C}(X)$ при всех $x \in X$. Определим отображение $F : X \to \boldsymbol{C}(X)$ по формуле $F(x) \doteqdot f_x$ и положим $Y \doteqdot \overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(F(x_1), F(x_2)) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y \in X} |\rho_X(x_1, y) - \rho_X(x_2, y)| = \rho_X(x_1, x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F : X \to Y$ и $F_1 : X \to Y_1$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y \in Y$ найдется последовательность $x_n \in X$, т.ч. $F(x_n) \to y$. Отсюда $F_1(x_n) \to y_1 \in Y_1$. Определим отображение $J : Y \to Y_1$ по формуле $J(y) \doteqdot y_1$. Тогда при всех $y, y' \in Y$

$$\rho_Y(y, y') = \lim_{n \to \infty} \rho_Y(F(x_n), F(x_n')) = \lim_{n \to \infty} \rho_X(x_n, x_n') = \lim_{n \to \infty} \rho_{Y_1}(F_1(x_n), F_1(x_n')) = \rho_{Y_1}(y_1, y_1').$$

Таким образом, отображение J является изометрией пространств Y и Y_1. □

Определение. Отображение $F : X \to X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство $\rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Каждое сжимающее отображение, очевидно, является непрерывным.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Для всякого сжимающего отображения $F : X \to X$ полного метрического пространства (X, ρ) в себя существует единственная неподвижная точка $x \in X$, т.е. $F(x) = x$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $x_1 \doteqdot F(x_0), x_2 \doteqdot F(x_1), \ldots$, т.е. $x_n = F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при $n < m$ и $0 < \lambda < 1$

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(F^k(x_0), F^k(x_1)) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \rho(x_0, x_1) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(x_0, x_1).$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность отображения F, получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x, y) = \rho(F(x), F(y)) \leqslant \lambda \rho(x, y)$ следует, что $\rho(x, y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. □

Лемма (о вложенных шарах). *Пусть в полном метрическом пространстве* (X,ρ) *имеется последовательность вложенных шаров* $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ *и предел радиусов* $\lim r_n = 0$. *Тогда пересечение* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ *не пусто.*

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши́ и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n,x_m) \leqslant r_n$ при $m \to \infty$, получим $\rho(x_n,x) \leqslant r_n$. Следовательно, эта точка принадлежит $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. Заметим, что в банаховом пространстве предположение $\lim r_n = 0$ не обязательно. □

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X,ρ) называется множеством *первой категории*, если является счетным объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ нигде не плотных множеств $A_n \subset X$. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэ́ра). *Каждое полное метрическое пространство* (X,ρ) *является множеством второй категории.*

Доказательство. Предположим обратное $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n нигде не плотны. Тогда существуют $x_1 \in X \setminus \overline{A}_1$ и $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \overline{A}_1$. Аналогично, существуют $x_2 \in \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и $\boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \subset \boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A}_2$ и т.д. Поэтому имеем последовательность вложенных шаров $\boldsymbol{S}_{r_1}(x_1) \supset \boldsymbol{S}_{r_2}(x_2) \supset \ldots$. Выберем радиусы $r_n > 0$, т.ч. $\lim r_n = 0$. Тогда по лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{S}_{r_n}(x_n)$. Поэтому $x \notin A_n$ при всех n, что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. □

Пример 4. Множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел является множеством первой категории, т.к. состоит из счетного объединения точек. Если бы множество $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ иррациональных чисел являлось множеством первой категори, тогда объединение $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ множеств первой категори образовало бы множество первой категории, что невозможно по теореме Бэ́ра. Значит $\mathbb{J}$ является множеством второй категории.

Пример 5. Построим последовательность вложенных замкнутых шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением. Рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с метрикой $\rho(n,m) \doteqdot 1 + 1/(n+m)$ при $n \neq m$ и $\rho(n,n) = 0$.

Замкнутые шары $\boldsymbol{S}_{r_n}(n) = \{n, n+1, \ldots\}$, $r_n = 1 + 1/2n$, являются вложенными и их пересечение пусто. Нетрудно заметить, что метрическое пространство $(\mathbb{N},\rho)$ полно, поскольку всякая последовательность Коши́ стационарна. По теореме Бэра пространство $\mathbb{N}$ является множеством второй категории. В этом пространстве все множества открыты и замкнуты, т.е. $(\mathbb{N},\rho)$ имеет дискретную топологию. Поэтому в нем не существует нигде не плотных множеств, кроме пустого множества $\emptyset$.

2 МЕТРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathbf{2}^X$ обозначает множество всех подмножеств X, включая пустое множество. Непустое подмножество $\tau \subset \mathbf{2}^X$ будем называть *системой множеств* в X.

Определение. Пара (X,τ) называется *топологическим пространством*, если задана система множеств $\tau \subset \mathbf{2}^X$, называемая *топологией* X, т.ч.

a) *аксиома объединения*: $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ для всякой системы $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$.

b) *аксиома пересечения*: $\bigcap_{k=1}^n B_k \in \tau$ для всякой конечной системы $\{B_k\}_{k=1}^n \subset \tau$;

c) *аксиома невырожденности*: пустое множество $\emptyset \in \tau$ и множество $X \in \tau$.

Система множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии* τ, если любое множество $A \in \tau$ является объединением $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ некоторых множеств $B_i \in \beta$.

В топологическом пространстве (X,τ) множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteqdot X \setminus A$ *замкнутыми*. Множество $B \subset X$ обычно называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует $A \in \tau$, т.ч. $x \in A \subset B$.

С помощью окрестностей, также как в метрическом пространстве, можно ввести понятия внутренних, предельных, изолированных точек и точек прикосновения, а также понятия замыкания, всюду плотного и нигде не плотного множества.

1. *В метрическом пространстве (X,ρ) система τ всех открытых множеств является топологией. Открытые шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ образуют базу топологии τ.*

В самом деле, если $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$ и значит существует шар $\boldsymbol{U}_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, то существуют шары $\boldsymbol{U}_{r_k}(x) \subset B_k$ при всех $k = 1,\ldots,n$. Пусть $r \doteqdot \min_{1\leqslant k\leqslant n} r_k$, тогда $\boldsymbol{U}_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$. По определению система всех открытых шаров $\boldsymbol{U}_r(x) \subset X$ образует базу топологии τ_X.

2. *Топология произведения $X \doteqdot X_1 \times X_2$ метрических пространств (X_1,ρ_{X_1}) и (X_2,ρ_{X_2}) определяется метрикой $\rho_X^{(1)}(x,y) \doteqdot \rho_{X_1}(x_1,y_1) + \rho_{X_2}(x_2,y_2)$ при все $x,y \in X$.*

Метрику в произведении $X_1 \times X_2 = \{x = (x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ можно также определить другим эквивалентным способом, например, по евклидовой формуле

$$\rho_X^{(2)}(x,y)) \doteqdot \sqrt{\rho_{X_1}^2(x_1,y_1) + \rho_{X_2}^2(x_2,y_2)} \text{ при всех } x,y \in X.$$

Тогда, применяя элементарные неравенства $\rho_X^{(1)}(x,y)/2 \leqslant \rho_X^{(2)}(x,y) \leqslant \rho_X^{(1)}(x,y)$, легко доказать, что топология X в метрике $\rho_X^{(1)}$ совпадает с топологией X в метрике $\rho_X^{(2)}$.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ образ $f(A) \in \tau_Y$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно одновременно является биективным, непрерывным и открытым отображением.

Теорема. *Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия непрерывности отображения эквивалентны:*

a) *отображение $f : X \to Y$ является непрерывным;*

b) *для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч.выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$;*

c) *для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ в X ее образ является сходящейся последовательностью $f(x_n) \to f(x)$ в Y.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (a) и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ существует шар $\boldsymbol{U}_\delta(x) \subset f^{-1}(\boldsymbol{U}_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (b). Пусть выполнено (b) и последовательность сходится $x_n \to x$ в X, т.е. для заданного $\delta > 0$ существует N, т.ч. $\rho_X(x,x_n) < \delta$ для всех $n \geqslant N$. В силу (b) выполняется $\rho_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Отсюда $f(x_n) \to f(x)$, т.е. выполнено (c). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \to x$, то по условию (c) получим $f(x_n) \to f(x)$, а из замкнутости $f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества открыт. □

Определение. Пара $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *метрическим линейным пространством*, если $\boldsymbol{E}$ линейное пространство, в котором определена метрика $\rho(x,y)$, т.ч.

a) метрика инвариантна $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ при всех $x,y,z \in \boldsymbol{E}$;

b) операция умножения на число $f(\lambda, x) \doteqdot \lambda x$, $f : \mathbb{F} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, непрерывна.

Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

Функция $\|x\| \doteqdot \rho(x,0)$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E}, \rho)$ называется *квазинормой*. Она удовлетворяет неравенству треугольника $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, симметрична $\|-x\| = \|x\|$ и не вырождена, т.е. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Однако свойство однородности $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ может не выполняться.

Лемма. *В полунормированном пространстве $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p})$ операции сложения $x+y$ и умножения λx на число $\lambda \in \mathbb{F}$ являются непрерывными.*

Доказательство. Для доказательства непрерывности операции λx умножения на число используем неравенство треугольника и однородность полунормы $\boldsymbol{p}$, тогда мы получим $\boldsymbol{p}(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leqslant |\lambda - \lambda_0| \boldsymbol{p}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| \boldsymbol{p}(x_0) + |\lambda_0| \boldsymbol{p}(x - x_0) < \varepsilon$, если $|\lambda_0| < a$, $\boldsymbol{p}(x_0) < b$, $\boldsymbol{p}(x - x_0) < \varepsilon/3a$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon/3b < a$. Непрерывность операции сложения $x+y$ можно доказать простым применением неравенства треугольника $\boldsymbol{p}(x+y-x_0-y_0) \leqslant \boldsymbol{p}(x-x_0) + \boldsymbol{p}(y-y_0) < \varepsilon$, если $\boldsymbol{p}(x-x_0) < \varepsilon/2$ и $\boldsymbol{p}(y-y_0) < \varepsilon/2$. □

Определение. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) являются метрическими пространствами. Отображение $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x,y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$.

Система $\{f_i\}_{i \in I}$ отображений $f_i : X \to Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$ для всех индексов $i \in \boldsymbol{I}$ и для всех $x,y \in X$, $\rho_X(x,y) < \delta$.

Пример. Метрика $\rho(x,y)$ в метрическом пространств (X,ρ) равномерно непрерывна по совокупности переменных, так как если $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)\in X\times X$ и выполняется неравенство $\rho^{(1)}(x,y)=\rho(x_1,y_1)+\rho(x_2,y_2)<\varepsilon$, то получаем $|\rho(x_1,x_2)-\rho(y_1,y_2)|\leqslant|\rho(x_1,x_2)-\rho(y_1,x_2)|+|\rho(y_1,x_2)-\rho(y_1,y_2)|\leqslant\rho(x_1,y_1)+\rho(x_2,y_2)<\varepsilon$.

Определение. Множество $M\subset\boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ называется *ограниченным*, если система отображений $\{f_x\}_{x\in M}$, где $f_x:\mathbb{F}\to\boldsymbol{E}$, т.ч. $f_x(\lambda)\doteqdot\lambda x$, является равностепенно непрерывной в нуле, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $\|\lambda x\|<\varepsilon$ при всех $|\lambda|<\delta$ и $x\in M$.

1. *Ограниченное множество $M\subset\boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве содержится в некотором шаре, т.е. $M\subset\boldsymbol{U}_r$. В нормированном пространстве это условие является необходимым и достаточным для ограниченности.*

В самом деле, по определению для любого $\varepsilon>0$ существует $n\in\mathbb{N}$, т.ч. $\|x/n\|<\varepsilon$ при $x\in M$. Поскольку $\|x\|\leqslant n\|x/n\|<n\varepsilon$ при всех $x\in M$, то $M\subset\boldsymbol{U}_{n\varepsilon}$. Обратно, если в нормированном пространстве $M\subset\boldsymbol{U}_r$, то $\|\lambda x\|<\varepsilon$, если $|\lambda|<\delta=\varepsilon/r$ и $x\in M$.

2. *Всякая сходящаяся последовательность $x_n\to x$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченной.*

В силу непрерывности операции умножения в нуле существуют $m\in\mathbb{N}$ и $\delta>0$, т.ч. $\|\lambda(x_n-x)\|<\varepsilon/2$ при всех $n>m$ и $|\lambda|<\delta$, а в силу непрерывности в нуле по переменной λ найдем такое $\delta>0$, что $\|\lambda x\|<\varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n-x)\|<\varepsilon/2$ при $n\leqslant m$ и $|\lambda|<\delta$. Следовательно, $\|\lambda x_n\|\leqslant\|\lambda x\|+\|\lambda(x_n-x)\|<\varepsilon$ при всех n и $|\lambda|<\delta$.

Определение. Отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ метрических линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ называется *ограниченным*, если для каждого ограниченного множества $M\subset\boldsymbol{E}$ его образ $f(M)\subset\boldsymbol{F}$ является ограниченным множеством.

Отображение $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ линейных пространств $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{F}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если $f(x+y)=f(x)+f(y)$ и $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ при всех $x,y\in\boldsymbol{E}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$.

Теорема. *Пусть $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ линейное отображение метрических линейных пространств. Тогда следующие условия эквивалентны: отображение непрерывно в нуле; отображение равномерно непрерывно; отображение ограничено.*

Доказательство. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, т.ч. $\|f(x)-f(y)\|=\|f(x-y)\|<\varepsilon$ при $\|x-y\|<\delta$, т.е. f равномерно непрерывно.

Если $M\subset\boldsymbol{E}$ ограничено, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, т.ч. $\|\lambda x\|<\varepsilon$ при всех $|\lambda|<\delta$ и $x\in M$. Так как f непрерывно в нуле, то существует $\varepsilon>0$, т.ч. $\|\lambda f(x)\|=\|f(\lambda x)\|<r$ при всех $|\lambda|<\delta$ и $x\in M$. Поэтому $f(M)$ ограничено.

Пусть $x_n\to0$. Выберем n_k, т.ч. $\|x_n\|<1/k^2$ при всех $n\geqslant n_k$, и положим $\lambda_n\doteqdot k$ при $n_k\leqslant n<n_{k+1}$. Тогда $\lambda_n\to\infty$ и $\lambda_nx_n\to0$, т.к. $\|\lambda_nx_n\|\leqslant\lambda_n\|x_n\|<1/k$. Поскольку $\{\lambda_nx_n\}$ ограничена, то образ $\{f(\lambda_nx_n)\}$ ограничен. Значит по определению ограниченного множества $f(x_n)=f(\lambda_nx_n)/\lambda_n\to0$, т.е. отображение f непрерывно в нуле. $\square$

Теорема (принцип равностепенной непрерывности)**.** *Предположим, что задана система* $\{f_i\}_{i\in I}$ *непрерывных линейных отображений* $f_i : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *пространства Фреше́* $(\boldsymbol{E}, \rho_E)$ *в метрическое линейное пространство* $(\boldsymbol{F}, \rho_F)$ *и для любого* $x \in \boldsymbol{E}$ *множества* $M_x \doteqdot \{y = f_i(x) \mid i \in I\}$ *являются ограниченными в пространстве* $\boldsymbol{F}$. *Тогда эта система отображений* $\{f_i\}_{i\in I}$ *равностепенно непрерывна.*

Доказательство. При каждом $\varepsilon > 0$ рассмотрим следующие множества:

$$B_n \doteqdot \bigcap_{i\in I} \left\{ x \in \boldsymbol{E} \,\Big|\, \Big\| \frac{f_i(x)}{n} \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как отображения f_i непрерывны, то все множества B_n являются замкнутыми. В силу условия ограниченности множества M_x для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|f_i(x)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $i \in I$. Поэтому имеет место равенство $\boldsymbol{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

В силу теоремы Бэ́ра существуют такие $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $y \in \boldsymbol{E}$, что $\boldsymbol{U}_\delta(y) \subset B_n$. Это равносильно неравенству $\|f_i(y+z)/n\| \leqslant \varepsilon/2$ при всех $z \in \boldsymbol{U}_\delta$ и $i \in I$. Применяя линейность отображений и неравенство треугольника, получим

$$\Big\| \frac{f_i(z)}{n} \Big\| \leqslant \Big\| \frac{f_i(z+y)}{n} \Big\| + \Big\| \frac{f_i(y)}{n} \Big\| \leqslant \varepsilon \text{ при всех } z \in \boldsymbol{U}_\delta \text{ и } i \in I.$$

Если $z \in \boldsymbol{U}_{\delta_n}$, где $\delta_n \doteqdot \delta/n$, то по неравенству треугольника $\|nz\| \leqslant n\|z\| < \delta$, т.е. $nz \in \boldsymbol{U}_\delta$. Таким образом, получаем $\|f_i(z)\| = \|f_i(nz)/n\| \leqslant \varepsilon$ при всех $z \in \boldsymbol{U}_{\delta_n}$ и $i \in I$, т.е. система отображений $\{f_i\}_{i\in I}$ равностепенно непрерывна в нуле. Следовательно, в силу линейности f_i она будет равностепенно непрерывной. □

Следствие (принцип равномерной ограниченности)**.** *В условиях теоремы система отображений* $\{f_i\}_{i\in I}$ *является равномерно ограниченной, т.е. для каждого ограниченного множества* $M \subset \boldsymbol{E}$ *объединение его образов* $\bigcup_{i\in I} f_i(M)$ *является ограниченным множеством в пространстве* $\boldsymbol{F}$.

В самом деле, если $M \subset \boldsymbol{E}$ ограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$ и $|\lambda| < \delta$. Поскольку система отображений $\{f_i\}_{i\in I}$ равностепенно непрерывна в нуле, то для любого $r > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|\lambda f_i(x)\| = \|f_i(\lambda x)\| < r$ при всех $i \in I$, $|\lambda| < \delta$ и $x \in M$. Поэтому объединение образов $\bigcup_{i\in I} f_i(M)$ является ограниченным множеством в пространстве $\boldsymbol{F}$.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Теорема (принцип продолжения по непрерывности)**.** *Пусть задано равномерно непрерывное отображение $f : A \to Y$, определенное на всюду плотном подмножестве $A \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X), со значениями в полном метрическом пространстве (Y, ρ_Y). Тогда существует единственное равномерно непрерывное отображение $g : X \to Y$, т.ч. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$.*

Доказательство. В силу равномерной непрерывности отображения f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in A$: $\rho_X(x, y) < \delta$. Так как A всюду плотно в X, то для каждого $x \in X$ существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$.

Выберем число N, т.ч. $\rho_X(x_n, x_m) < \delta$ при всех $n, m \geqslant N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ последовательность Коши и значит существует предел $g(x) \doteqdot \lim f(x_n)$. Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n \to x$, то, полагая $z_n \doteqdot x_k$ при $n = 2k - 1$ и $z_n \doteqdot y_k$ при $n = 2k$, мы получим, что $z_n \to x$. Тогда $g(x) = \lim f(z_n) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$. Поэтому значение $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и определение отображения g корректно.

Пусть $x, y \in X$ и $\rho_X(x, y) < \delta$. Выберем последовательности точек $x_n, y_n \in A$, т.ч. $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Тогда существует N, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < \delta$ при всех $n \geqslant N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, отображение $g : X \to Y$ равномерно непрерывно. □

Эта теорема обычно используется в случае непрерывных линейных отображений, определенных на всюду плотном подпространстве нормированного пространства или метрического линейного пространства, поскольку для линейных отображений понятия непрерывности и равномерной непрерывности равносильны.

Определение. Пусть (X, ρ) метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Множество $C \subset X$ называется *ε-сетью* множества $M \subset X$, если для любого $y \in M$ существует $x \in C$, т.ч. $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$, т.е. выполняется включение $M \subset \bigcup_{x \in C} S_\varepsilon(x)$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ для множества M.

1. *Вполне ограниченное множество $M \subset X$ содержится в некотором шаре.*

Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ 1-сеть множества M и $r_1 \doteqdot \max_{2 \leqslant k \leqslant n} \rho(x_1, x_k) + 1$. По условию 1-сети для любого $y \in M$ найдется k, т.ч. $\rho(x_1, y) \leqslant \rho(x_1, x_k) + \rho(x_k, y) \leqslant r_1$. Поэтому имеет место включение $M \subset S_{r_1}(x_1)$.

2. *Если множество $M \subset X$ является вполне ограниченным, то его замыкание $\overline{M}$ будет также вполне ограниченным.*

Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует ε-сеть множества M. Так как $M \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x)$, то из замкнутости шаров следует $\overline{M} \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x)$, т.е. C есть ε-сеть множества $\overline{M}$.

3. *Каждое вполне ограниченное множество $M \subset \boldsymbol{E}$ в метрическом линейном пространстве $(\boldsymbol{E},\rho)$ является ограниченным.*

В силу непрерывности операции умножения для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta$ и $\|x\| \leqslant \delta$. Пусть $C = \{x_k\}_{k=1}^n$ является δ-сетью множества M. Выберем $\delta > 0$, т.ч. $\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|\lambda x_k\| < \varepsilon/2$ при всех $|\lambda| < \delta$. Тогда для каждого $x \in M$ существует k, т.ч. $\|\lambda x\| \leqslant \|\lambda x_k\| + \|\lambda(x - x_k)\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < \delta$.

Пример 1. Докажем, что каждое ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ будет вполне ограниченным. Рассмотрим куб $[a,b]^n$, содержащий множество M. Разобьем куб на кубики с ребром $\delta \doteqdot (b-a)/k$. Тогда вершины кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$, где $m \doteqdot (k+1)^n$, образуют конечную ε-сеть для множества M, где число $\varepsilon \doteqdot \sqrt{m}\delta/2$ равно половине диагонали кубика.

Теорема. *В метрическом пространстве (X,ρ) следующие условия, которым удовлетворяет множество $M \subset X$, являются эквивалентными:*

a) компактность: для всякого открытого покрытия $M \subset \bigcup_{i\in I} B_i$ существует конечное подпокрытие $M \subset \bigcup_{k=1}^n B_{i_k}$, где $i_k \in I$;

b) счетная компактность: каждое бесконечное подмножество $A \subset M$ имеет предельную точку $x \in \acute{A}$, т.ч. $x \in M$;

c) секвенциальная компактность: для каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$, т.ч. $x \in M$.

d) критерий компактности Ха́усдорфа: множество $M \subset X$ является вполне ограниченным и полным.

Доказательство. $a) \Rightarrow b)$. Пусть $A \subset M$ является бесконечным множеством. Если пересечение $\acute{A} \cap M = \emptyset$ пусто, то для всякой точки $x \in M$ существует $r > 0$, т.ч. множество $\boldsymbol{U}_r(x) \cap A$ конечно. Так как эти шары $\boldsymbol{U}_r(x)$ покрывают M, то выбирая конечное подпокрытие, заключаем, что A конечно. Получили противоречие.

$b) \Rightarrow c)$. Мы можем считать, что последовательность $A = \{x_n\} \subset M$ состоит из различных точек. По условию существует $x \in \acute{A} \cap M$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \in \boldsymbol{U}_{1/k}(x)$. Отсюда следует, что $x_{n_k} \to x \in M$.

$c) \Leftrightarrow d)$. Полнота M вытекает из из свойства c). Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in M$. Тогда существует точка $x_1 \in M$, т.ч. $\rho(x_1,x_0) > \varepsilon$, иначе точка $\{x_0\}$ образует ε-сеть M. Аналогично, существует точка $x_2 \in M$, т.ч. $\rho(x_2,x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2,x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0,x_1\}$ образуют ε-сеть M, и т.д. По индукции существует $x_n \in M$, т.ч. $\rho(x_n,x_k) > \varepsilon$ при $k = 1,\ldots,n-1$. Если процесс выбора точек оборвется на некотором шаге n, то $\{x_k\}_{k=1}^n$ образует конечную ε-сеть для M. Иначе последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Обратно, пусть $\{x_n\} \subset M$. В силу условия вполне ограниченности существует конечное покрытие M шарами радиуса $r_1 = 1$. Следовательно, найдется шар $\boldsymbol{S}_{r_1}(y_1)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично существует конечное покрытие M шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и найдется шар $S_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, и т.д.

По индукции при $r_k = 1/k$ существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, содержащаяся в некотором шаре $S_{r_k}(y_k)$. Обозначим через $z_n \doteqdot x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как $\rho(z_n, z_m) \leqslant \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leqslant 2r_n$ при $m > n$, то $\{z_n\}$ последовательность Коши. В силу полноты M она имеет предел в M.

$d) \Rightarrow a)$. Пусть задано открытое покрытие $M \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. Покажем вначале, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in M$ существует индекс $i \in I$, т.ч. $S_\varepsilon(x) \subset B_i$. Иначе найдутся такие точки $x_n \in M$, что $S_{r_n}(x_n) \not\subset B_i$ при всех $i \in I$, где $r_n = 1/n$. По условию существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in M$. Так как $x \in B_i$ при некотором $i \in I$, то найдется шар $S_{2r}(x) \subset B_i$. Выберем n_k, т.ч. $r_{n_k} < r$ и $\rho(x_{n_k}, x) < r$. Тогда $S_{r_{n_k}}(x_{n_k}) \subset S_r(x_{n_k}) \subset S_{2r}(x) \subset B_i$, что противоречит нашему предположению.

Пусть $\{y_k\}_{k=1}^m$ конечная ε-сетью для множестве M. По доказанному существует индекс $i_k \in I$, т.ч. $S_\varepsilon(y_k) \subset B_{i_k}$. Поэтому $M \subset \bigcup_{k=1}^m S_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m B_{i_k}$. $\square$

Рассмотрим свойства непрерывных отображений метрических пространств.

1. *Всякое непрерывное отображение $f : X \to Y$, определенное на компакте X, является равномерно непрерывным.*

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$ при всех n. В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \to x$ и $y_{n_k} \to y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$, то $x = y$. В силу непрерывности отображения f существует n_k, т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leqslant \rho_Y(f(x_{n_k}), f(x)) + \rho_Y(f(y), f(y_{n_k})) < \varepsilon$. Получили противоречие.

2. *Образ $f(A) \subset Y$ любого компактного множества $A \subset X$ при непрерывном отображении $f : X \to Y$ является компактным.*

Пусть $y_n = f(x_n)$, где $x_n \in A$. В силу компактности A найдется подпоследовательность, т.ч. $x_{n_k} \to x \in A$. Тогда $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(A)$ в силу непрерывности f. Поэтому образ $f(A)$ является компактным множеством.

3. *Если отображение $f : X \to Y$, заданное на компакте, является биективным и непрерывным, то обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ непрерывно.*

Для доказательства заметим, что всякое замкнутое множество $A \subset X$ является компактным. Поэтому по свойству 2 его образ $f(A) \subset Y$ будет компактным и значит замкнутым. Отсюда образ любого открытого множества является открытым.

Определение. Множество $M \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *предкомпактным*, если его замыкание $\overline{M}$ компактно.

Например, в силу критерия Ха́усдорфа всякое вполне ограниченного множество в полном метрическом пространстве является предкомпактным, т.к. его замыкание является вполне ограниченным и полным.

Теорема (Арце́ла–Аско́ли)**.** *Пусть X компакт. Множество $M \subset \boldsymbol{C}(X)$ тогда и только тогда предкомпактно, когда ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M в $\boldsymbol{C}(X)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем равностепенную непрерывность. По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ множества M. Следовательно, для любого $f \in M$ существует k, т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon/3$ при всех $x \in X$. Поскольку функции f_k равномерно непрерывны, то существует $\delta_k > 0$, т.ч. $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta_k$. Обозначим через $\delta \doteqdot \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_k$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in X$, $\rho(x,y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. Из условия равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $x, y \in X$, $\rho(x,y) \leqslant \delta$. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ является δ-сетью компакта X, а $F : M \to \mathbb{F}^m$ обозначает отображение, заданное по формуле $F(f) \doteqdot \{f(x_j)\}_{j=1}^m$. Поскольку $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то оно вполне ограничено. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset M$ элементы прообраза $\varepsilon/3$-сети $\{F(f_k)\}_{k=1}^n$ множества $F(M)$. Для любого $x \in X$ выберем индекс j, т.ч. $\rho(x, x_j) \leqslant \delta$ и для любого $f \in M$ выберем индекс k, т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\|_{\mathbb{F}^m} \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ является ε-сетью множества M. □

Пример 2. Рассмотрим пространство ℓ_p, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}$ действительных или комплексных чисел $x_n \in \mathbb{F}$, т.ч. $\|x\|_{\ell_p} < \infty$, где

$$\|x\|_{\ell_p} \doteqdot \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1 \text{ (квазинорма)}; \\ \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty \text{ (норма)}; \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, & \text{если } p = \infty \text{ (норма)}. \end{cases}$$

Пространство ℓ_p при $0 < p < 1$ является метрическим линейным пространством, а при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ нормированным пространством. Для каждого $x \in \ell_p$ обозначим через $y = s_m(x)$ последовательность $y = \{y_n\}$, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leqslant m$ и $y_n = 0$ при $n > m$. Нетрудно доказать, что множество $M \subset \ell_p$ $(0 < p < \infty)$ является предкомпактным в том и только в том случае, когда множество M ограничено в ℓ_p и для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_m(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

4 МЕРА МНОЖЕСТВ

Обозначим через $\mathbf{2}^X$ множество всех подмножеств X, включая пустое множество. Непустое подмножество $S \subset \mathbf{2}^X$ называется *системой множеств* в X.

Определения. Система множеств S называется *кольцом*, если для всех $A, B \in S$ она также содержит объединение $A \cup B \in S$ и разность $A \setminus B \in S$.

Система множеств S называется *полукольцом*, если для всех $A, B \in S$ она также содержит пересечение $A \cap B \in S$, а разность $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$, где $B_k \in S$.

Множество $X \doteqdot \bigcup_{A \in S} A$ называется *единицей* системы S. Кольцо (полукольцо) S, содержащее единицу $X \in S$, называется *алгеброй* (*полуалгеброй*).

Кольцо (алгебра) S называется *σ-кольцом* (*σ-алгеброй*), если для всех $A_n \in S$ оно (она) содержит их счетное объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Для каждой системы множеств S можно образовать *минимальное кольцо* $\mathscr{R}(S)$ *минимальное σ-кольцо* $\mathscr{R}_\sigma(S)$, *минимальную алгебру* $\mathscr{A}(S)$ и *минимальную σ-алгебру* $\mathscr{A}_\sigma(S)$, содержащие систему S. Они получаются в результате пересечения соответственно всех колец, алгебр, σ-колец и σ-алгебр, содержащих систему S.

Минимальная σ-алгебра, содержащая систему τ всех открытых множеств топологического пространства (X, τ), обозначается через $\mathscr{B}(X) \doteqdot \mathscr{A}_\sigma(\tau)$ и называется *борелевской σ-алгеброй*, а все ее элементы $A \in \mathscr{B}(X)$ называются *борелевскими множествами* в пространстве X. Далее через $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначается борелевская σ-алгебра евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

1. *Алгебра S в том и только в том случае является σ-алгеброй, когда она замкнута относительно операции счетного пересечения множеств.*

Для доказательства применяем следующие *формулы двойственности*:

$$X \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(X \setminus A_n \Big), \quad X \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(X \setminus A_n \Big).$$

2. *Система S тогда и только тогда является кольцом, когда для всех $A, B \in S$ она содержит пересечение $A \cap B \in S$ и симметрическую разность $A \triangle B \in S$.*

Если S кольцо, то $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in S$ и $A \triangle B \doteqdot (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in S$. Обратное следует из формул $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$.

3. *Если система S является полукольцом, то для любых множеств $A, B_k \in S$, $k = 1, \ldots, n$ вытекает, что $A \setminus \big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \big) = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_l$, где $C_j \in S$, $j = 1, \ldots, m$.*

Предположим по индукции, что утверждение верно для n. Тогда получим

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \Big(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k \Big) \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{m} C_i \setminus B_{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}, \quad C_{ij} \in S.$$

Таким образом, утверждение верно для $n+1$.

Лемма. *Минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$ полукольца S состоит из всех конечных дизъюнктных объединений $A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ элементов $A_k \in S$, $k=1,\ldots,n$.*

Доказательство. Пусть R обозначает систему множеств $A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$. Очевидно, что $S \subset R \subset \mathscr{R}(S)$. Докажем, что R является кольцом. Пусть множества $A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ и $B=\bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$, где $A_k, B_l \in S$. Тогда из свойства 3 получим

$$A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^{n} \big(A_k \setminus B\big) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{l=1}^{m_k} C_{kl}\,, \quad C_{kl} \in S\,.$$

Кроме того, $A \cup B = \big(A \setminus B\big) \sqcup B$. Поэтому R будет кольцом и значит $R=\mathscr{R}(S)$. □

Определения. Функция $\varphi : S \to \mathbb{F}$ называется *конечно-аддитивной* (аддитивной) на системе множеств S, если для всех n (при $n=2$) выполняется

$$\varphi\big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k) \text{ при всех } A_k \in S \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in S\,.$$

Функция φ называется *σ-аддитивной* (т.е. счетно-аддитивной), если

$$\varphi\big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \text{ при всех } A_n \in S \text{ и } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S\,.$$

Неотрицательная функция $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой* (σ-аддитивной мерой), если она задана на полукольце S и является σ-аддитивной функцией.

Неотрицательная функция $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ называется *конечно-аддитивной мерой*, если она задана на полукольце S и является конечно-аддитивной функцией.

Мера $\mathfrak{m}' : S' \to \mathbb{R}_+$ называется *продолжением* меры $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, если имеет место включение $S \subset S'$ и равенство $\mathfrak{m}'|_S = \mathfrak{m}$, т.е. $\mathfrak{m}'(A) = \mathfrak{m}(A)$ для всех $A \in S$.

Теорема. *Для всякой меры $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ существует единственное продолжение $\mathfrak{m}' : \mathscr{R}(S) \to \mathbb{R}_+$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$.*

Доказательство. Зададим меру $\mathfrak{m}'(A) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k)$ для всех множеств $A \in \mathscr{R}(S)$, где $A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ и $A_k \in S$. Если $A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_k, B_j \in S$, то

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} A_k \cap B_j\,, \quad \mathfrak{m}'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(B_j)\,,$$

т.е. определение меры $\mathfrak{m}'$ не зависит от представления множества $A \in \mathscr{R}(S)$.

Докажем σ-аддитивность функции $\mathfrak{m}'$. Пусть $A=\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in \mathscr{R}(S)$. Из леммы следует, что $A=\bigsqcup_{k=1}^{m} B_k$ и $A_n=\bigsqcup_{j=1}^{m_n} B_{nj}$, где $B_k, B_{nj} \in S$. Тогда имеем

$$B_k = A \cap B_k = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B_k = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} B_{nj} \cap B_k\,,\ A_n = A \cap A_n = \bigsqcup_{k=1}^{m} B_k \cap A_n = \bigsqcup_{k=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} B_k \cap B_{nj}\,.$$

В силу σ-аддитивности меры $\mathfrak{m}$ получим

$$\mathfrak{m}'(A) = \bigsqcup_{k=1}^{m} \mathfrak{m}(B_k) = \bigsqcup_{k=1}^{m} \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} \mathfrak{m}(B_{nj} \cap B_k) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} \mathfrak{m}(B_k \cap B_{nj}) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}'(A_n)\,.$$

Единственность продолжения меры $\mathfrak{m}$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$ очевидна. □

Далее продолжение меры $\mathfrak{m}$ на минимальное кольцо $\mathscr{R}(S)$ мы будем обозначать также через $\mathfrak{m}$. Рассмотрим свойства мер, заданной на полукольце S.

1. *Мера пустого множества* $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$, так как $\mathfrak{m}(\emptyset) = \mathfrak{m}(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2\mathfrak{m}(\emptyset)$.

2. *Монотонность: если* $A \supset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *где* $A, A_n \in S$, *то* $\mathfrak{m}(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$.

Пусть $A \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, где $B_j \in S$. Тогда $A = (\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} B_l\right)$ и

$$\mathfrak{m}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) + \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}(B_j) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) \text{ при } n \to \infty\,.$$

3. *Полуаддитивность: если* $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *где* $A, A_n \in S$, *то* $\mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. *Конечно-аддитивная мера является конечно-полуаддитивной.*

Представим множество A в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathscr{R}(S)$

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \text{ где } B_1 \doteqdot A_1 \cap A \text{ и } B_n \doteqdot (A_n \cap A) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \cap A\right) \text{ при } n > 1\,.$$

Тогда имеем $\mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$, т.к. мера σ-аддитивна и $B_n \subset A_n$.

4. Непрерывность снизу: *если* $A_n \nearrow A$, *где* $A_n, A \in S$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$. *Если конечно-аддитивная мера непрерывна снизу, то она* σ*-аддитивна.*

По условию $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $A_0 \doteqdot \emptyset$ и $B_n \doteqdot A_n \setminus A_{n-1}$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\,, \quad \mathfrak{m}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathfrak{m}(A_n) - \mathfrak{m}(A_{n-1})\big) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n)\,.$$

Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$. Положим $B_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$. Тогда имеем $B_n \nearrow A$ и

$$\mathfrak{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{m}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k)\,.$$

5. Непрерывность сверху: *если* $A_n \searrow A$, *где* $A_n, A \in S$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n) = \mathfrak{m}(A)$. *Если конечно-аддитивная мера непрерывна сверху, то она* σ*-аддитивна.*

По условию $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $B \doteqdot A_1 \setminus A$ и $B_n \doteqdot A_1 \setminus A_n$. Тогда имеем $B_n \nearrow B$ и значит $\mathfrak{m}(A_1) - \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = \mathfrak{m}(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(A_n)$.

Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A, A_n \in S$. Положим $B_n \doteqdot A \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right)$. Тогда $B_n \searrow \emptyset$ и значит предел $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(B_n) = 0$, т.е. $\mathfrak{m}(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) = 0$.

Пример 1. *Стандартная мера в пространстве* $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим полукольцо P_n полуинтервалов вида $[a,b) = [a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n)$, где $a = \{a_k\}_{k=1}^n$, $b = \{b_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, и определим на нем функцию $\mathfrak{m}_n([a,b)) \doteqdot \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$. Как известно, объем этого полуинтервала $[a,b)$ является конечно-аддитивной функцией. Поэтому $\mathfrak{m}_n$ является конечно-аддитивной мерой и обладает свойством регулярности.

Определение. Конечно-аддитивная мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$, заданная на полукольце S множеств метрического пространства, называется *регулярной*, если для всех $E \in S$ и $\varepsilon > 0$ существуют $A, B \in S$, т.ч. A предкомпактно, $\overline{A} \subset E \subset \mathring{B}$ и $\mathfrak{m}(B \setminus A) < \varepsilon$.

Теорема. *Каждая регулярная мера* $\mathfrak{m}$ *является* σ*-аддитивной. В частности, стандартная мера* $\mathfrak{m}_n$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *является* σ*-аддитивной.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup_{k=1}^\infty E_k$, где $E, E_k \in S$. В силу свойства монотонности имеем неравенство $\mathfrak{m}(E) \geqslant \sum_{k=1}^\infty \mathfrak{m}(E_k)$. Докажем обратное неравенство.

По условию регулярности меры для любого $\varepsilon > 0$ существуют $A, B, A_k, B_k \in S$, т.ч. A и A_k предкомпактны, $\overline{A} \subset E \subset \mathring{B}$, $\overline{A}_k \subset E_k \subset \mathring{B}_k$, $\mathfrak{m}(B \setminus A) < \varepsilon/2$, $\mathfrak{m}(B_k \setminus A_k) < \varepsilon/2^k$. Так как $\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^\infty \mathring{B}_k$, то в силу компактности получим $\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^N \mathring{B}_k$ при некотором N. Из свойства конечной полуаддитивности следует, что $\mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{k=1}^N \mathfrak{m}(B_k)$. Отсюда

$$\mathfrak{m}(E) \leqslant \mathfrak{m}(B) < \mathfrak{m}(A) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_{k=1}^N \mathfrak{m}(B_k) + \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^N \mathfrak{m}(A_k) + \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mathfrak{m}(E_k) + \varepsilon,$$

т.е. выполняется обратное неравенство. Поэтому $\mathfrak{m}(E) = \sum_{k=1}^\infty \mathfrak{m}(E_k)$. $\square$

Пример 2. *Стандартная мера Сти́лтьеса.* Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является неубывающей функцией. Рассмотрим на полукольце P_1 полуинтервалов $[a,b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, функцию $\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) \doteqdot \alpha(b) - \alpha(a)$. Она является конечно-аддитивной мерой, т.к. если $[a,b) = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k)$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то

$$\mathfrak{m}_\alpha([a,b)) = \alpha(b) - \alpha(a) = \sum_{k=1}^n \big(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^n \mathfrak{m}([x_{k-1}, x_k)).$$

Теорема. *Стандартная мера Сти́лтьеса* $\mathfrak{m}_\alpha$ *тогда и только тогда является* σ*-аддитивной, когда функция* $\alpha(x)$ *непрерывна слева.*

Доказательство. Так как мера является σ-аддитивной, то она непрерывна сверху. Пусть $x_n \nearrow x$, т.е. $[x_n, x) \searrow \emptyset$. Тогда $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x) - \lim \mathfrak{m}_\alpha([x_n, x)) = \alpha(x)$.

Обратно, докажем регулярность меры $\mathfrak{m}_\alpha$. Для каждого $[a,b)$ и для любого $\delta > 0$ имеем $[a, b-\delta] \subset [a,b) \subset (a-\delta, b)$. В силу непрерывности слева функции $\alpha(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\alpha(a) - \alpha(a-\delta) < \varepsilon/2$ и $\alpha(b) - \alpha(b-\delta) < \varepsilon/2$. Отсюда следует, что $\mathfrak{m}_\alpha([a-\delta, b) \setminus [a, b-\delta)) = \alpha(a) - \alpha(a-\delta) + \alpha(b) - \alpha(b-\delta) < \varepsilon$. Поэтому в силу регулярности мера $\mathfrak{m}_\alpha$ является σ-аддитивной. $\square$

5 ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $\overline{\mathbb{R}}_+ \doteqdot \mathbb{R}_+ \sqcup \{\infty\}$ обозначает расширенное множество неотрицательных чисел, в котором выполняются следующие свойства: если $a \in \mathbb{R}_+$, то $a < \infty$, $a + \infty \doteqdot \infty$, $a \cdot \infty \doteqdot \infty$ $(a \neq 0)$, $0 \cdot \infty \doteqdot 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$.

Определение. Неотрицательная функция $\lambda : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *внешней мерой на множестве* X, если выполняются следующие свойства:

a) невырожденность: $\lambda(\emptyset) = 0$;

b) монотонность: $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$ при всех $A \subset B$;

c) полуаддитивность: $\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ при всех $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Множество $E \subset X$ называется *измеримым* относительно внешней меры λ, если $\lambda(A) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. Совокупность всех измеримых множеств относительно заданной внешней меры λ обозначается через $\Sigma \doteqdot \Sigma_\lambda$.

Обозначим для краткости через $AB \doteqdot A \cap B$, $A' \doteqdot X \setminus A$ и $\lambda_A(B) \doteqdot \lambda(AB)$. Тогда включение $E \in \Sigma$ равносильно равенству $\lambda_A(X) = \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$ при всех $A \subset X$. Заметим, что измеримость множества $E \subset X$ вытекает из $\lambda(A) \geqslant \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$ при всех $A \subset X$, т.к. обратное неравенство следует из полуаддитивности.

Рассмотрим следующие свойства измеримых множеств:

1. $X \in \Sigma$. *Если* $\lambda(E) = 0$*, то* $E \in \Sigma$.

Так как в силу монотонности $\lambda_A(E) = 0$, то $\lambda_A(X) \geqslant \lambda_A(E') = \lambda_A(E) + \lambda_A(E')$.

2. *Если* $E \in \Sigma$*, то* $E' \in \Sigma$.

Из равенства $E'' = E$ следует, что $\lambda_A(X) = \lambda_A(E') + \lambda_A(E'')$.

3. *Если* $E_1, E_2 \in \Sigma$*, то* $E = E_1 E_2 \in \Sigma$.

Поскольку $E_1 E_2' = E_1 E'$ и $E_1' = E_1' E'$, то имеют место следующие равенства:

$$\lambda_A(X) = \lambda_A(E_1) + \lambda_A(E_1') = \lambda_A(E_1 E_2) + \lambda_A(E_1 E_2') + \lambda_A(E_1') =$$
$$= \lambda_A(E) + \lambda_A(E_1 E') + \lambda_A(E_1' E') = \lambda_A(E) + \lambda_A(E').$$

4. *Если* $E_1, E_2 \in \Sigma$*, то* $E_1 \setminus E_2, E_1 \cup E_2 \in \Sigma$*, т.е.* Σ *является алгеброй.*

Так как $E_1 \setminus E_2 = E_1 E_2'$ и $E_1 \cup E_2 = (E_1' E_2')'$, то $E_1 \setminus E_2 \in \Sigma$ и $E_1 \cup E_2 \in \Sigma$.

5. *Функция* $\lambda_A : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *является конечно-аддитивной мерой при всех* $A \subset X$.

Если $E = E_1 \sqcup E_2$, где $E_1, E_2 \in \Sigma$, то $\lambda_A(E) = \lambda_A(EE_1) + \lambda_A(EE_1') = \lambda_A(E_1) + \lambda_A(E_2)$.

Теорема (Каратеодóри). *Если* $\lambda : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *внешняя мера на множестве* X*, то система* Σ *всех измеримых множеств является* σ*-алгеброй и функция* $\mu \doteqdot \lambda|_\Sigma$*, заданная на этой* σ*-алгебре, является* σ*-аддитивной мерой.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и $E_k \in \Sigma$. Положим $F_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$, тогда $F_n \in \Sigma$. Применяя конечную аддитивность меры λ_A и устремляя $n \to \infty$, имеем

$$\lambda_A(X) = \lambda_A(F_n) + \lambda_A(F_n') \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_A(E_k) + \lambda_A(E') \to \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A(E_k) + \lambda_A(E') \geqslant \lambda_A(E) + \lambda_A(E').$$

Отсюда следует, что $E \in \Sigma$ и выполняется равенство $\lambda_A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A(E_k) + \lambda_A(E')$. Заменяя в этом равенстве A на E, получим $\lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$. □

Всюду далее будем предполагать, что мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ является *σ-конечной*, т.е. единица полукольца S имеет представление $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \in S$ и $\mathfrak{m}(X_n) < \infty$.

Определение. *Внешней мерой Лебéга* $\mathfrak{m}^* : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется функция

$$\mathfrak{m}^*(A) \doteqdot \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n) \,\Big|\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,,\ A_n \in S \Big\} \text{ при всех } A \subset X\,.$$

Функция $\mathfrak{m}^*$ обладает свойствами внешней меры:

1. $\mathfrak{m}^*(\emptyset) = 0$.

2. *Если $A \subset B$, то $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(B)$.*

3. *Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n)$.*

Докажем свойство 3. Если $\mathfrak{m}^*(A_n) = \infty$ при некотором n, то утверждение верно. Пусть $\mathfrak{m}^*(A_n) < \infty$ при всех n. По определению внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $B_{nk} \in S$, т.ч. $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}\,, \quad \mathfrak{m}^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_n) + \varepsilon\,.$$

Теорема (о продолжении меры)**.** *Если мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ является σ-конечной, то функция $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$, определенная на σ-алгебре Σ всех измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$, является мерой и $\mu|_S = \mathfrak{m}$.*

Доказательство. Из полуаддитивности меры $\mathfrak{m}$ для всех $A, A_n \in S$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, получим $\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n)$. Отсюда $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(A)$ при всех $A \in S$. Поэтому на основании теоремы Каратеодóри осталось доказать, что $S \subset \Sigma$.

Пусть $E \in S$. Если $\mathfrak{m}^*(A) = \infty$, то равенство $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E)$ верно. Если $\mathfrak{m}^*(A) < \infty$, то в силу определения внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существуют $B_n \in S$, т.ч. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$. Отсюда, применяя полуаддитивность внешней меры $\mathfrak{m}^*$ и аддитивности меры $\mathfrak{m}$, получим

$$\mathfrak{m}^*(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathfrak{m}(B_n \cap E) + \mathfrak{m}(B_n \setminus E) \big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_n) < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon.$$

Следовательно, $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \setminus E)$ при всех $A \subset X$. □

Теорема (единственности). *Всякая σ-конечная мера $\mathfrak{m} : S \to \mathbb{R}_+$ допускает единственное продолжение на σ-алгебру Σ измеримых множеств.*

Доказательство. Пусть $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_\Sigma$ и $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является продолжением меры $\mathfrak{m}$. Покажем, что $\nu(E) = \mu(E)$ для всех $E \in \Sigma$. По условию σ-конечности достаточно рассмотреть случай, когда $E \subset X \in S$ и $\mathfrak{m}(X) < \infty$. В силу полуаддитивности ν

$$\nu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_n) \text{ для всех } A_n \in S, \text{ т.ч. } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

По определению внешней меры $\nu(E) \leqslant \mathfrak{m}^*(E) = \mu(E)$, а также $\nu(X \setminus E) \leqslant \mu(X \setminus E)$. А поскольку $\nu(E) + \nu(X \setminus E) = \mathfrak{m}(X) = \mu(E) + \mu(X \setminus E)$, то $\nu(E) = \mu(E)$. $\square$

Определение. Тройка (X, Σ, μ) называется *измеримым пространством* меры $\mathfrak{m}$, где мера $\mu \doteqdot \mathfrak{m}^*|_\Sigma$ и система $\Sigma \doteqdot \Sigma_{\mathfrak{m}^*}$ является σ-алгеброй измеримых множеств.

Лемма (об измеримой оболочке). *Для каждого множества $E \subset X$ существует такое множество $A \in \mathscr{R}_\sigma(S)$, что $E \subset A$ и $\mathfrak{m}^*(E) = \mu(A)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{m}^*(E) = \infty$, то можно взять $A = X$. Если $\mathfrak{m}^*(E) < \infty$, то по определению внешней меры Лебега для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $B_{nk} \in S$, т.ч.

$$E \subset B_n \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} , \quad \mu(B_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(B_{nk}) < \mathfrak{m}^*(E) + \frac{1}{n} .$$

Положим $A \doteqdot \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $E \subset A$ и $\mu(A) \leqslant \mu(B_n) < \mathfrak{m}^*(E) + 1/n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\mu(A) \leqslant \mathfrak{m}^*(E)$. Обратное неравенство $\mu(A) = \mathfrak{m}^*(A) \geqslant \mathfrak{m}^*(E)$ очевидно. $\square$

Теорема (критерий измеримости Валле́-Пуссе́на). *Пусть $\mu(X) < \infty$. Множество $E \subset X$ является измеримым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{R}(S)$, т.ч. $\mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \varepsilon$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры Лебега существуют такие $A_k \in S$, что $E \subset A \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \mu(A \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Выберем число $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) < \varepsilon/2$, и положим $B_n \doteqdot \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Так как $E \subset A$ и $B_n \subset A$, то применяя полуаддитивность и монотонность меры μ, получим

$$\mu(E \triangle B_n) \leqslant \mu(A \setminus B_n) + \mu(A \setminus E) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{m}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Достаточность. Так как $E \subset B \cup (E \triangle B)$ и $E' \subset B' \cup (E \triangle B)$, где $E' \doteqdot X \setminus E$ и $B' = X \setminus B$, то по условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathscr{R}(S)$, т.ч.

$$|\mathfrak{m}^*(E) - \mu(B)| \leqslant \mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\mathfrak{m}^*(E') - \mu(B')| \leqslant \mathfrak{m}^*(E \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Поскольку $\mu(X) = \mu(B) + \mu(B')$, то складывая эти два неравенства, мы получим $|\mu(X) - \mathfrak{m}^*(E) - \mathfrak{m}^*(E')| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu(X) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E')$. По лемме существуют измеримые множества $A, B \in \Sigma$, т.ч. $E \subset A$, $E' \subset B$, $\mu(A) = \mathfrak{m}^*(E)$ и $\mu(B) = \mathfrak{m}^*(E')$. Тогда $A \cup B = X$ и значит выполняется равенство

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B) = \mathfrak{m}^*(E) + \mathfrak{m}^*(E') - \mu(X) = 0.$$

Поскольку $A \setminus E \subset A \cap B$, то $\mu(A \setminus E) = 0$. Поэтому множество $A \setminus E \in \Sigma$ измеримо. Тогда множество $E = A \setminus (A \setminus E) \in \Sigma$ также измеримо. □

Определение. Мера $\lambda_n \doteqdot \mathfrak{m}_n^*|_{\Lambda_n}$, которая получается в результате продолжения стандартной меры $\mathfrak{m}_n : P_n \to \mathbb{R}_+$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ с полукольца полуинтервалов на σ-алгебру Λ_n измеримых множеств, называется *мерой Лебе́га в* $\mathbb{R}^n$.

Мера $\lambda_\alpha \doteqdot \mathfrak{m}_\alpha^*|_{\Lambda_\alpha}$, которая является продолжением стандартной меры Сти́лтьеса $\mathfrak{m}_\alpha : P_1 \to \mathbb{R}_+$ с полукольца полуинтервалов на σ-алгебру Λ_α измеримых множеств, называется *мерой Лебе́га–Сти́лтьеса*.

Лемма. *Мера Лебега λ_n в пространстве $\mathbb{R}^n$ является регулярной на каждом измеримом множестве $E \in \Lambda_n$ конечной меры $\lambda_n(E) < \infty$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры Лебега существуют такие открытые интервалы $B_k, C_k \subset \mathbb{R}^n$, что $E \subset B \doteqdot \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, $B \setminus E \subset C \doteqdot \bigcup_{k=1}^\infty C_k$, $\lambda_n(B \setminus E) < \varepsilon/3$ и $\lambda_n(C \setminus (B \setminus E)) < \varepsilon/3$. Отсюда B открыто, а $D \doteqdot B \setminus C$ замкнуто. Так как $B \setminus D \subset (B \setminus E) \cup (C \setminus (B \setminus E))$, то $\lambda_n(B \setminus D) < 2\varepsilon/3$. Положим $A_k \doteqdot D \cap [-k, k]$, тогда $A_k \nearrow D$ и в силу непрерывности меры снизу $\lambda_n(D \setminus A_k) < \varepsilon/3$. Таким образом, $A \doteqdot A_k$ компактно, B открыто, $A \subset E \subset B$ и $\lambda_n(B \setminus A) = \lambda_n(B \setminus D) + \lambda_n(D \setminus A) < \varepsilon$. □

Пример (Вита́ли). *Неизмеримое множество меры Лебега* на отрезке $[0,1]$.

Введем отношение эквивалентности точек $x, y \in [0,1]$, полагая, что $x \sim y$, если точка $x - y \in \mathbb{Q}^n$ рациональна. Поэтому $[0,1] = \bigsqcup_{i \in I} K_i$, где K_i непересекающиеся классы эквивалентных точек. В каждом классе выберем по одной точке $x_i \in K_i$ и образуем множество $E \doteqdot \{x_i\}_{i \in I}$, состоящее из неэквивалентных точек.

Пусть $\{r_k\}_{k=1}^\infty \doteqdot [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ обозначают все рациональные точки отрезка $[-1,1]$. Заметим, что множества $E_k \doteqdot E + r_k$ не пересекаются, поскольку если $x \in E_k \cap E_s$, то $x = x_i + r_k = x_j + r_s$, что невозможно, т.к. элементы x_i и x_j не эквивалентны.

Если множество $E \in \Lambda_1$ измеримо, то $E_k \in \Lambda_1$ также измеримо и $\lambda_1(E_k) = \lambda_1(E)$. Так как имеют место включения $[0,1] \subset \bigsqcup_{k=1}^\infty E_k \subset [-1,2]$, то $1 \leqslant \sum_{k=1}^\infty \lambda_1(E_k) \leqslant 3$, что невозможно, поскольку все множества E_k имеют одну и ту же меру $\lambda_1(E)$. Таким образом, множество $E \notin \Lambda_1$ неизмеримо.

6 ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Тройку (X, Σ, μ) называют *измеримым пространством* меры $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, если она задана на σ-алгебре Σ с единицей X. Множества $E \in \Sigma$ называются *измеримыми*. Кроме того, всюду далее предполагается, что мера μ является *полной*, т.е. каждое подмножество множества меры нуль является измеримым и имеет меру нуль.

Определение. Действительная функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если при всех $c \in \mathbb{R}$ прообразы интервалов $E(f < c) \doteqdot \{x \in E | f(x) < c\} \in \Sigma$ измеримы.

Измеримые функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ называются *эквивалентными* и обозначаются через $f \sim g$, если существует $N \in \Sigma$, т.ч. $\mu(N) = 0$ и $f = g$ на $E \setminus N$.

Так как совокупность всех измеримых множеств Σ образует σ-алгебру, то из определения измеримости функции f вытекает измеримость следующих множеств:

$E(f \leqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + \frac{1}{n}) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(f \geqslant c) = E \setminus E(f < c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(f > c) = E \setminus E(f \leqslant c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$;

$E(a \leqslant f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a < f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f \leqslant a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$;

$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f < a) \in \Sigma$ при всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathscr{A}$ систему всех множеств $A \subset \mathbb{R}$, т.ч. $f^{-1}(A) \in \Sigma$. Тогда $(a, b) \in \mathscr{A}$. Поскольку всякое открытое множество $A \subset \mathbb{R}$ является объединением счетного числа интервалов $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, то $f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n) \in \Sigma$, отсюда $A \in \mathscr{A}$. Так как операция прообраза сохраняет операции с множествами, т.е.

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \quad f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

то система $\mathscr{A}$ является σ-алгеброй, содержащей все открытые множества. Поэтому в силу минимальности борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ получим $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$. Таким образом, прообраз любого борелевского множества является измеримым.

Лемма. *Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримы, функция двух переменных $h(u, v)$ непрерывна на открытом множестве $B \subset \mathbb{R}^2$ и $(f(x), g(x)) \in B$ при всех $x \in E$. Тогда функция $F(x) \doteqdot h(f(x), g(x))$ является измеримой на множестве E.*

Доказательство. В силу непрерывности $h(u, v)$ множество $B(h < c) \subset \mathbb{R}^2$ является открытым. Тогда $B(h < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$, где $\Pi_n \doteqdot (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$. Отсюда множество

$$E(F < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\big((f, g) \in \Pi_n\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(a_n < f < b_n) \cap E(c_n < g < d_n) \in \Sigma$$

будет также измеримым, поскольку Σ является σ-алгеброй. $\square$

В качестве следствия получается следующие свойства измеримых функций.

1. *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ измеримые функции. Тогда сумма $f + g$ и произведение fg также измеримы. Если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in E$, то частное f/g измеримо. Если $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$ при всех $x \in E$, то степень f^g измерима.*

2. *Если $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримые функции и $\inf f_n(x)$, $\sup f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ принимают конечные значения на E, то они будут измеримыми функциями.*

3. *Если $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримые функции и предел $f(x) = \lim f_n(x)$ существует на множестве E, то f является измеримой функцией.*

Измеримость нижней $\inf f_n(x)$ и верхней $\sup f_n(x)$ граней последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций доказывается при помощи следующих соотношений:

$$E(\inf f_n < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < c), \quad E(\sup f_n > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > c).$$

Поскольку при всех $x \in E$ справедливы равенства

$$\overline{\lim}\, f_n(x) = \inf_{m \geqslant 1} \{\sup_{n \geqslant m} f_n(x)\}, \quad \underline{\lim}\, f_n(x) = \sup_{m \geqslant 1} \{\inf_{n \geqslant m} f_n(x)\},$$

то верхний и нижний пределы будут измеримыми. Отсюда предел $f(x) = \lim f_n(x)$ будет измеримым, так как имеет место равенство $f(x) = \overline{\lim}\, f_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x)$.

Введем следующие обозначения: $f \leqslant g$ на E, если $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in E$; $f_n \to f$ на E, если $f(x) = \lim f_n(x)$ при всех $x \in E$; $f_n \nearrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ на E; $f_n \searrow f$ на E, если $f_n \to f$ и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$ на E.

Определение. Функция $h : E \to \mathbb{R}$ называется *простой* на множестве E, если она принимает конечное число значений, т.е. имеет представление

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \chi_{H_k}(x), \text{ где } E = \bigsqcup_{k=1}^{n} H_k \text{ и } \chi_A(x) \doteqdot \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Теорема. *Для всякой $f : E \to \mathbb{R}_+$ неотрицательной измеримой функции существуют простые измеримые функции $h_n : E \to \mathbb{R}_+$, т.ч. $h_n \nearrow f$. При этом, если функция f ограничена, то сходимость будет равномерной.*

Доказательство. Определим последовательность простых функций по формуле

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{H_{nk}}(x) + 2^n \chi_{H_n}(x), \quad x \in E = H_n \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{2^{2n}} H_{nk},$$

где $H_{nk} \doteqdot E(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n})$ и $H_n \doteqdot E(f \geqslant 2^n)$. Тогда имеем $H_{nk} = H_{n+1,2k-1} \sqcup H_{n+1,2k}$ и $h_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant h_{n+1}(x)$ при $x \in H_{nk}$ и $k = 1, \ldots, 2^{2n}$. Поскольку выполняется неравенство $f(x) - h_n(x) < 1/2^n$ при всех $x \in E(f < 2^n)$, то $h_n \nearrow f$ сходится на E. □

Рассмотрим различные типы сходимости последовательности $f_n : E \to \mathbb{R}$ измеримых функций. Их пределы будут определяться с точностью до эквивалентности.

Определение. Последовательность $f_n \to f$ *сходится почти всюду* (п.в.) на E, если существует $N \in \Sigma$ меры нуль $\mu(N) = 0$, т.ч. $f_n \to f$ сходится на $E \setminus N$.

Последовательность $f_n \to f$ *сходится почти равномерно* (п.р.) на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $A \in \Sigma$ с мерой $\mu(A) < \varepsilon$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A$.

Последовательность $f_n \to f$ *сходится по мере* (п.м.) на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $\mu\big(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

Теорема (Его́рова)**.** *Если $\mu(E) < \infty$ и последовательность $f_n \to f$ сходится п.в. на E, то она сходится п.р. на E. Обратно, если последовательность $f_n \to f$ сходится п.р. на E, то она сходится п.в. на E.*

Доказательство. Предположим, что $f_n \to f$ сходится всюду на множестве $E \setminus N$ и мера $\mu(N) = 0$. При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующие множества:

$$B_n \doteqdot \bigcap_{l=n}^{\infty} E\left(|f_l - f| < \frac{1}{k}\right), \text{ тогда } B_1 \subset B_2 \subset \ldots \text{ и } B_n \setminus N \nearrow E \setminus N.$$

В силу непрерывности меры снизу $\lim \mu(B_n) = \mu(E)$. Полагая $A_n \doteqdot E \setminus B_n$, имеем $\lim \mu(A_n) = 0$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует индекс n_k, т.ч. $\mu(A_{n_k}) < \varepsilon/2^k$. Пусть $A \doteqdot \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, тогда $A \in \Sigma$ и $\mu(A) < \varepsilon$. Если $x \in E \setminus A \subset B_{n_k}$, то неравенство $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ будет выполняться при всех $x \in E \setminus A$ и $n \geqslant n_k$. Таким образом, последовательность $f_n \rightrightarrows f$ сходится равномерно на множестве $E \setminus A$.

Обратно, в силу определения п.р. сходимости существуют такие $A_k \in \Sigma$ с мерой $\mu(A_k) < 1/k$, что $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus A_k$. Тогда, полагая $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, получаем $\mu(A) = 0$ и последовательность $f_n \to f$ сходится на $E \setminus A$. □

Теорема (Рисса)**.** *Если $f_n \to f$ сходится п.м. на E, то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, т.ч. $f_{n_k} \to f$ сходится п.в. на E. Обратно, если $\mu(E) < \infty$ и последовательность $f_n \to f$ сходится п.в. на E, то она сходится п.м. на E.*

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ сходится п.м. на E. Тогда существует подпоследовательность $\{n_k\}$, т.ч. $\mu\big(E(|f_{n_k} - f| \geqslant 1/2^k)\big) < 1/2^k$. Рассмотрим множества

$$A_k \doteqdot \bigcup_{l=k}^{\infty} E\left(|f_{n_l} - f| \geqslant \frac{1}{2^l}\right), \quad \mu(A_k) < \frac{1}{2^{k-1}}; \quad A \doteqdot \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \mu(A) = 0.$$

Пусть $x \in E \setminus A$, то $x \in E \setminus A_k$ при некотором k. Поэтому имеем $|f_{n_l}(x) - f(x)| < 1/2^l$ при всех $l \geqslant k$. Отсюда подпоследовательность $f_{n_k} \to f$ сходится на $E \setminus A$.

Если $f_n \to f$ сходится п.в. на E и мера $\mu(E) < \infty$, то по теореме Его́рова для любого $\varepsilon > 0$ существует N, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $x \in E \setminus A$, где $A \in \Sigma$ и $\mu(A) < \varepsilon$. Таким образом, получаем, что $\mu\big(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) \leqslant \mu(A) < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, т.е. последовательность $f_n \to f$ сходится п.м. на E. □

Рассмотрим меру Лебега λ_m в $\mathbb{R}^m$ и ее σ-алгебру Λ_m измеримых множеств. Тогда открытые и замкнутые множества измеримы и мера Лебега является регулярной.

Определение. Говорят, что функция $f: E \to \mathbb{R}$ на измеримом множестве $E \in \Lambda_m$ обладает *обладает C-свойством*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset E$, что $\lambda_m(E \setminus K) < \varepsilon$ и сужение $g = f|_K$ является непрерывной функцией.

Теорема (критерий измеримости Лу́зина). *Функция $f: E \to \mathbb{R}$ на измеримом множестве $E \in \Lambda_m$ конечной меры $\lambda_m(E) < \infty$ тогда и только тогда является измеримой, когда она обладает C-свойством.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ счетная система всех интервалов в $\mathbb{R}$ с рациональными концами и $I_0 = \mathbb{R}$. В силу регулярности меры λ_m найдутся такие A_k, B_k, что A_k компактно, B_k открыто, $A_k \subset f^{-1}(I_k) \subset B_k$ и $\lambda_m(B_k \setminus A_k) < \varepsilon/2^{k+1}$. Пусть $B \doteq \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \setminus A_k$ открытое множество. Поэтому $K \doteq E \setminus B = A_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \setminus A_k$ компактное множество и $\lambda_m(E \setminus K) = \lambda_m(B) < \varepsilon$. Поскольку

$$K \cap B_n = B_n \setminus B = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_n \setminus (B_k \setminus A_k) = A_n \cap \bigcap_{k=0, k\neq n}^{\infty} B_n \setminus (B_k \setminus A_k) = K \cap A_n \,,$$

и $K \cap A_n \subset K \cap f^{-1}(I_n) \subset K \cap B_n$, то прообраз $g^{-1}(I_n) = K \cap f^{-1}(I_n) = K \cap B_n$ является открытым множеством в K, где $g \doteq f|_K$. Так как всякое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением некоторой подсистемы интервалов I_n, то прообраз каждого открытого множества открыт и значит функция g непрерывна.

Достаточность. По условию C-свойства для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется компактное множество $K_n \subset E$, т.ч. $\lambda_m(E \setminus K_n) < 1/n$ и сужение $g_n \doteq f|_{K_n}$ непрерывно. Так как прообраз $g_n^{-1}(I)$ интервала открыт в K_n, то существуют открытые множества B_n, т.ч. $g_n^{-1}(I) = K_n \cap f^{-1}(I) = K_n \cap B_n$. Пусть $N \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E \setminus K_n$, тогда множество

$$f^{-1}(I) \setminus N = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I) \setminus (E \setminus K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cap f^{-1}(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cap B_n$$

является измеримым. Поскольку мера $\mu(N) = 0$, то прообраз $f^{-1}(I)$ измерим для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ и, следовательно, функция f будет измеримой. $\square$

Пример (Ри́сса). Построим пример последовательности функций $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, которая $f_n \to 0$ сходится п.м., однако не сходится ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

Определим функции $f_n(x) \doteq \chi_{A_n}(x)$, где $A_n \doteq [k/2^m, (k+1)/2^m]$ при $n = 2^m + k$ и $k = 0, \ldots, 2^m - 1$. Тогда имеем $\lambda_1(E(f_n \geqslant \varepsilon)) \leqslant 1/2^m$ при $\varepsilon > 0$. Поэтому $f_n \to 0$ сходится п.м. на $[0,1]$. Однако $\overline{\lim} f_n(x) = 1$ и $\underline{\lim} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$, т.е. последовательность $\{f_n\}$ не сходится ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

7 ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕ́ГА

Пусть (X,Σ,μ) есть измеримое пространство, в котором мера μ является полной. Рассмотрим $\tau=\{T_k\}_{k=1}^n$ измеримое разбиение множества $E\in\Sigma$, где $E=\bigsqcup_{k=1}^n T_k$ и $T_k\in\Sigma$. *Нижней суммой Дарбу́* для неотрицательной функции $f:E\to\mathbb{R}_+$ по данному разбиению τ называется следующая сумма:

$$\underline{D}_\tau(f)\doteqdot\sum_{k=1}^n \underline{d}_k(f)\mu(T_k)\,,\ \text{где}\ \underline{d}_k(f)\doteqdot\inf_{x\in T_k}f(x)\,.$$

Определение. *Интегралом Лебе́га от неотрицательной измеримой функции* $f:E\to\mathbb{R}_+$ называется верхняя грань нижних сумм Дарбу́ по всем разбиениям τ

$$\int_E f\,d\mu\doteqdot\sup_\tau \underline{D}_\tau(f)=\sup_\tau\sum_{k=1}^n \underline{d}_k(f)\mu(T_k).$$

Интегралом Лебе́га от измеримой функции произвольного знака $f:E\to\mathbb{R}$ называется разность интегралов от соответствующих неотрицательных функций

$$\int_E f\,d\mu\doteqdot\int_E f_+\,d\mu-\int_E f_-\,d\mu,\ \text{где}\ f_\pm(x)\doteqdot\max\{\pm f(x),0\}.$$

При этом предполагается, что один из интегралов от $f_\pm$ является конечным, иначе интеграл не имеет смысла. Функция $f:E\to\mathbb{R}$ называется *интегрируемой на* E и обозначается $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, если она измерима и интегралы от неотрицательных функций $f_\pm$ принимают конечные значения.

Замечание. Данное определение интеграла Лебе́га распространяется на функции $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, принимающие бесконечные значения. Так как для каждой интегрируемой функции мера множеств $E(f=\pm\infty)$ равна нулю, то она эквивалентна функции, принимающей только конечные значения. При этом из определения легко вывести, что эквивалентные функции имеют равные интегралы Лебе́га.

1. Невырожденность. *Интеграл от неотрицательной и измеримой функции* $f:E\to\mathbb{R}_+$ *равен* $\int_E f\,d\mu=0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x)=0$ *п.в. на* E.

Так как $\int_E f\,d\mu=0$, то по определению все нижние суммы Дарбу́ $\underline{D}_\tau(f)=0$. Поскольку $E_n\doteqdot E(f\geqslant 1/n)\nearrow E(f>0)$ и $\mu(E_n)=0$, то по свойству непрерывности снизу получим $\mu(E(f>0))=\lim\mu(E_n)=0$. Обратно, из равенства $\mu(E(f>0))=0$ следует, что $\underline{D}_\tau(f)=0$. Поэтому интеграл $\int_E f\,d\mu=0$.

2. Монотонность. *Если интегрируемые функции* $f\in\boldsymbol{L}(E,\mu)$, *т.ч.* $f\leqslant g$ *на* E, *то их интегралы удовлетворяют неравенству* $\int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu$.

Для доказательства заметим, что если функции удовлетворяют неравенству $0\leqslant f\leqslant g$ на E, то их суммы Дарбу́ удовлетворяют неравенству $\underline{D}_\tau(f)\leqslant\underline{D}_\tau(g)$ для любого разбиения τ. Поэтому, так как $f_+\leqslant g_+$ и $f_-\geqslant g_-$, то выполняются неравенства $\int_E f_+\,d\mu\leqslant\int_E g_+\,d\mu$ и $\int_E f_-\,d\mu\geqslant\int_E g_-\,d\mu$. Отсюда $\int_E f\,d\mu\leqslant\int_E g\,d\mu$.

Лемма. *Интеграл от неотрицательной измеримой функции f равен верхней грани интегралов простых измеримых функций h, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$ на E, т.е.*

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{0\leqslant h\leqslant f} \int_E h\,d\mu.$$

Доказательство. В самом деле, $\int_E h\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$ при всех $0 \leqslant h \leqslant f$. Кроме того, каждая нижняя сумма Дарбу́ $\underline{D}_\tau(f)$ является интегралом простой неотрицательной измеримой функции h, т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$. Для этого покажем, что

$$(*)\qquad \int_E h\,d\mu = \sum_{l=1}^{m} h_l\,\mu(H_l),\ \text{если}\ h(x) = \sum_{l=1}^{m} h_l \chi_{H_l}(x)\,,\ H_l \in \Sigma\ \text{и}\ E = \bigsqcup_{l=1}^{m} H_l\,.$$

Пусть задано разбиение $\tau = \{T_k\}_{k=1}^n$ и $A_{kl} \doteqdot T_k \cap H_l$. Тогда имеем $T_k = \bigsqcup_{l=1}^m A_{kl}$ и $H_l = \bigsqcup_{k=1}^n A_{kl}$. Так как $\underline{d}_k(h) \leqslant h_l$, если $A_{kl} \neq \emptyset$ не пусто, то

$$\underline{D}_\tau(h) = \sum_{k=1}^{n} \underline{d}_k(h)\mu(T_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \underline{d}_k(h)\mu(A_{kl}) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} h_l\mu(A_{kl}) = \sum_{l=1}^{m} h_l\mu(H_l)\,.$$

В случае, когда $\tau = \{H_l\}_{l=1}^m$, это неравенство является равенством. □

Теорема (о счетной аддитивности)**.** *Интеграл функции $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ обладает свойством σ-аддитивнсти, т.е. имеет место равенство*

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu\,, \quad \textit{где}\ E_n \in \Sigma\ \textit{и}\ E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\,.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для неотрицательных функций f. Если функция f является простой, то утверждение теоремы легко вытекает из представления интеграла $(*)$ простой функции и σ-аддитивности меры μ.

В общем случае, для каждой простой неотрицательной измеримой функции h т.ч. $0 \leqslant h \leqslant f$, имеют место неравенства

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} h\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu \ \text{ и, значит, }\ \int_E f\,d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu\,.$$

Докажем обратное неравенство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем простые неотрицательные измеримые функции h_k, равные нулю $h_k = 0$ вне E_k, так, чтобы $0 \leqslant h_k(x) \leqslant f(x)$ при всех $x \in E_k$ и выполнялись неравенства

$$\int_{E_k} h_k\,d\mu > \int_{E_k} f\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2^k}\,, \quad \text{где}\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Тогда, полагая $F_n \doteqdot \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ и $h(x) \doteqdot \sum_{k=1}^n h_k(x)$ на множестве F_n, получим

$$\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{F_n} f\,d\mu \geqslant \int_{F_n} h\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} h_k\,d\mu > \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f\,d\mu - \varepsilon\,.$$

Устремляя теперь $\varepsilon \to 0$ и $n \to \infty$, устанавливаем обратное неравенство. □

Теорема (о монотонной сходимости)**.** *Пусть последовательность неотрицательных измеримых функций $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ монотонно сходится $f_n \nearrow f$ на E. Тогда предел их интегралов равен* $\lim \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$.

Доказательство. В силу монотонной сходимости $f_n \nearrow f$ существует конечный или бесконечный предел $I \doteqdot \lim \int_E f_n \, d\mu$ и $I \leqslant \int_E f \, d\mu$. Докажем обратное неравенство.

Пусть $0 \leqslant h \leqslant f$ на E, где h — простая измеримая функция. Возьмем $0 < \varepsilon < 1$ и определим множества $E_n \doteqdot E(\varepsilon h \leqslant f_n)$. Тогда $E_n \nearrow E$ и выполняются неравенства

$$\varepsilon \int_{E_n} h \, d\mu = \int_{E_n} \varepsilon h \, d\mu \leqslant \int_{E_n} f_n \, d\mu \leqslant \int_E f_n \, d\mu \leqslant I.$$

В силу непрерывности снизу интеграла от простой функции $\lim \int_{E_n} h \, d\mu = \int_E h \, d\mu$. Тогда $\varepsilon \int_E h \, d\mu \leqslant I$ при всех $0 < \varepsilon < 1$. Поэтому $\int_E h \, d\mu \leqslant I$ при всех $0 \leqslant h \leqslant f$ и в силу леммы 7 получим $\int_E f \, d\mu \leqslant I$. Таким образом, $\int_E f \, d\mu = I$. □

3. Линейность интеграла. *Если $f, g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda f, f+g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и*

$$\int_E \lambda f \, d\mu = \lambda \int_E f \, d\mu, \quad \int_E (f+g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

Первое равенство выводится из определений. Докажем второе. Для простых функций это следует из представления $(*)$ интеграла простой функции. Пусть f и g неотрицательные измеримые функции. Тогда найдутся такие монотонные последовательности простых неотрицательных измеримых функций, что $f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$. Так как $f_n + g_n \nearrow f + g$, то по теореме о монотонной сходимости

$$\int_E (f+g) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n + g_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

В общем случае, пусть $f = f_+ - f_-$ и $g = g_+ - g_-$. Тогда из $f + g = (f+g)_+ - (f+g)_-$ следует, что $(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$. Интегрируя это равенство, а затем группируя его слагаемые, получим требуемый результат.

4. Интеграл модуля. *Если $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, то $|f| \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и* $|\int_E f \, d\mu| \leqslant \int_E |f| \, d\mu$.

Интегрируемость модуля $|f| = f_+ + f_-$ получается из определения интеграла и свойства 3, а неравенство следует из свойства 2, поскольку $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$.

Лемма (Фату́)**.** *Пусть функции $f_n : E \to \mathbb{R}_+$ являются неотрицательными и измеримыми, а $f = \underline{\lim} f_n$ п.в. их нижний предел. Тогда* $\int_E f \, d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$.

Доказательство. Исключая множество меры нуль, можем считать, что $f = \underline{\lim} f_n$ всюду на E. Пусть $g_m \doteqdot \inf_{n \geqslant m} f_n$, тогда $g_m \nearrow f$ и $\int_E g_m \, d\mu \leqslant \int_E f_n \, d\mu$ при всех $n \geqslant m$. Отсюда $\int_E g_m \, d\mu \leqslant \inf_{n\geqslant m} \int_E f_n \, d\mu$ и по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m \, d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} \int_E f_n \, d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Таким образом, неравенство доказано. □

Теорема (Лебе́га о мажорируемой сходимости). *Пусть функция* $f = \lim f_n$ *п.в. является пределом измеримых функций* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *и существует мажоранта* $g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$*, т.ч.* $|f_n| \leqslant g$ *п.в. на* E*. Тогда* $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ *и* $\int_E f\,d\mu = \lim \int_E f_n\,d\mu$.

Доказательство. Так как $f_{n\pm}, f_\pm \leqslant g$ п.в., то по свойству 2 имеем $f_n, f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$. Поскольку $g \pm f_n \geqslant 0$ п.в. и $g \pm f_n \to g \pm f$ п.в. на множестве E, то по лемме Фату́

$$\int_E (g+f)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g+f_n)\,d\mu, \quad \int_E (g-f)\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\,d\mu.$$

По свойству 3, сокращая интеграл $\int_E g\,d\mu$ в этих неравенствах, мы получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_i\,d\mu.$$

Так как нижний предел не превосходит верхний, то эти неравенства являются равенствами, т.е. предел $\lim \int_E f_n\,d\mu$ существует и равен интегралу $\int_E f\,d\mu$. □

Неравенство Чебышёва: если $f : E \to \mathbb{R}_+$ неотрицательна и измерима, то

$$\mu(E(f \geqslant \varepsilon)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_E f\,d\mu \ \text{ при всех } \ \varepsilon > 0.$$

В самом деле, $\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{E(f\geqslant\varepsilon)} f\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E(f \geqslant \varepsilon))$. Отсюда вытекает достаточное условие сходимости $f_n \to f$ п.м., т.к. если $f_n, f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и $\int_E |f_n - f|\,d\mu \to 0$, то

$$\mu(E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f_n - f|\,d\mu \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Определение. *Функцией распределения* неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ называется функция $F(t) \doteqdot \mu(E_t)$, равная мере множества $E_t \doteqdot E(f \geqslant t)$. Если функции распределения двух неотрицательных измеримых функций f_1 и f_2 совпадают $F_1(t) = F_2(t)$ при всех $t \geqslant 0$, то f_1 и f_2 называются *равноизмеримыми*.

Функция распределения $F(t)$ может принимать бесконечные значения $F(t) = \infty$ на некотором отрезке $[0,a]$ и обладает следующими свойствами при всех $t > a$: 1) $F(t) \geqslant 0$ неотрицательна; 2) $F(t)\downarrow$ не возрастает; 3) $F(t-0) = F(t)$ непрерывна слева; 5) если мера $\mu(E(f = t)) > 0$, то t является точкой разрыва функции $F(t)$.

Заметим, что интеграл Лебега неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ равен мере подграфика $\Gamma_f \doteqdot \{(x,t) \mid x \in E,\, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ относительно произведения $E \times \mathbb{R}_+$ меры $d\mu$ и меры Лебе́га dt в $\mathbb{R}_+$. Поэтому по теореме Фуби́ни о повторных интегралах, которая будет доказана далее, имеют место равенства

$$\int_E f\,d\mu = \int_E \Big(\int_0^{f(x)} dt\Big)\,d\mu = \int_0^\infty \Big(\int_{E_t} d\mu\Big)\,dt = \int_0^\infty \mu(E_t)\,dt = \int_0^\infty F(t)\,dt\,.$$

Таким образом, равноизмеримые функции имеют равные интегралы Лебе́га.

8 АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть (X,Σ,μ) измеримое пространство, т.ч. мера является полной и σ-конечной, и $\Sigma_E \doteqdot \{A \subset E \mid A \in \Sigma\}$ σ-алгебра измеримых подмножеств множества $E \in \Sigma$.

Определение. Функция $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной мерой* или *зарядом* на множестве E, если она является σ-аддитивной функцией на σ-алгебре Σ_E.

Заряд $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывным* и обозначается $\varphi \ll \mu$ на E, если $\varphi(A) = 0$ для каждого множества $A \in \Sigma_E$ меры нуль $\mu(A) = 0$.

Теорема (Радóна–Никоди́ма). *Если заряд $\varphi : \Sigma_E \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывен $\varphi \ll \mu$ на E, то существует единственная функция $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ с точностью до эквивалентности, т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma_E$* (без доказательства).

Указанная функция $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ называется *производной Радóна–Никоди́ма* и обозначается через $f \doteqdot d\varphi/d\mu$. Докажем, что ее единственность. Пусть функции $f,g \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ удовлетворяют условию $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma_E$. Положим $A_n \doteqdot E(f-g > 1/n)$, тогда мера $\mu(A_n) \leqslant n\int_{A_n}(f-g)\,d\mu = 0$ и значит множество $E(f-g>0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет меру нуль. Аналогично множество $E(g-f>0)$ имеет меру нуль. Поэтому функции $f \sim g$ эквивалентны на E.

Теорема (критерий абсолютной непрерывности). *Заряд является абсолютно непрерывным $\varphi \ll \mu$ на $E \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|\varphi(A)| < \varepsilon$ при всех $A \in \Sigma_E$, $\mu(A) < \delta$.*

Доказательство. Достаточность очевидна, т.к. если $\mu(A) = 0$, то $\mu(A) < \delta$ при всех $\delta > 0$. Поэтому $|\varphi(A)| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\varphi(A) = 0$.

Для доказательства необходимости применяем теорему Радóна–Никоди́ма. Тогда существует функция $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, т.ч. $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$ при всех $A \in \Sigma_E$. Поскольку $f = f_+ - f_-$, то достаточно рассмотреть случай, когда функция f неотрицательна. Полагая $E_n \doteqdot E(f \leqslant n)$, имеем $E_n \nearrow E$ и в силу свойства непрерывности снизу $\lim \varphi(E_n) = \varphi(E)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует n, т.ч. $\varphi(E \setminus E_n) < \varepsilon/2$. Отсюда для всех $A \in \Sigma_E$ с мерой $\mu(A) < \delta \doteqdot \varepsilon/2n$ получим

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu = \int_{A\cap E_n} f\,d\mu + \int_{A\setminus E_n} f\,d\mu \leqslant n\mu(A) + \varphi(E \setminus E_n) < \varepsilon\,.$$

Таким образом, заряд φ удовлетворяет указанному условию. □

Определение. Говорят, что функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, если величина ее вариации конечна на отрезке $[a,b]$, т.е.

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(F) \doteqdot \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau \doteqdot \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Через $\boldsymbol{BV}[a,b]$ обозначается нормированное пространство всех функции ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|F\| \doteqdot |F(a)| + \mathbf{V}_a^b(F)$.

Имеют место следующие свойства (см. учебник Колмогорова и Фомина):

1. *Если $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, то $\mathbf{V}_a^b(F) = \mathbf{V}_a^c(F) + \mathbf{V}_c^b(F)$ при $a < c < b$.*

Для доказательства нужно рассмотреть все разбиения, содержащие точку c.

2. *Если $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ непрерывна слева, то $\mathbf{V}(x) \doteqdot \mathbf{V}_a^x(F)$ непрерывна слева.*

Для доказательства нужно рассмотреть разбиения $a = x_0 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x$, для которых точка x_{n-1} находится в малой окрестности точки x.

3. *Разложение Жордáна. Если $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$, то найдутся такие неубывающие функции α и β, что выполняются следующие свойства:*

$$F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x), \quad \mathbf{V}(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \alpha(a) = \beta(a) = 0.$$

Эти неубывающие функции α и β вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{\mathbf{V}(x) + F(x) - F(a)\Big\}, \quad \beta(x) \doteqdot \frac{1}{2}\Big\{\mathbf{V}(x) - F(x) + F(a)\Big\}.$$

Теорема (Лебéга)**.** *Всякая функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ ограниченной вариации имеет производную $F'(x)$ п.в. на отрезке $[a,b]$* (без доказательства).

Определение. Интегралом Рѝмана–Стѝлтьеса называется предел интегральных сумм Рѝмана-Стѝлтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$, когда диаметр разбиения $d_\tau \to 0$, т.е.

$$\int_a^b f\,dF \doteqdot \lim_{d_\tau \to 0} R_\tau(f,\xi,F), \text{ где } R_\tau(f,\xi,F) \doteqdot \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

где $d_\tau \doteqdot \max(x_k - x_{k-1})$, $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ и $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Если $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ есть разложение Жордáна, то интеграл равен разности интегралов

$$\int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f\,d\beta.$$

Пусть функция $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ непрерывна слева и $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ есть разложение Жордáна. Рассмотрим меры Лебéга–Стѝлтьеса λ_α и λ_β, определенные по неубывающим функциям α и β. Разность этих мер $\varphi_F \doteqdot \lambda_\alpha - \lambda_\beta$ называется *обобщенной мерой* или *зарядом* Лебéга–Стѝлтьеса. Он задается на пересечении $\Lambda_F \doteqdot \Lambda_\alpha \cap \Lambda_\beta$ σ-алгебр измеримых множеств соответствующих мер λ_α и λ_β.

Определение. Интегралом Лебéга–Стѝлтьеса называется разность интегралов

$$\int_a^b f\,d\varphi_F \doteqdot \int_a^b f\,d\lambda_\alpha - \int_a^b f\,d\lambda_\beta$$

по мерам Лебéга–Стѝлтьеса λ_α и λ_β на $[a,b]$. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{F}$ называется *интегрируемой по заряду* φ_F, если она интегрируема по мерам λ_α и λ_β.

Отметим без доказательства, что если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена, то из существования интеграла Рѝмана–Стѝлтьеса по функции $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ вытекает существование соответствующего интеграла Лебéга–Стѝлтьеса и их равенство.

Лемма. *Интеграл Ри́мана–Сти́лтьеса по $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ существует для всякой непрерывной функции $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ и равен интегралу Лебе́га–Сти́лтьеса. Он не зависит от изменения $F(x)$ на счетном множестве точек интервала (a,b).*

Доказательство. Суммы Ри́мана–Сти́лтьеса $R_\tau(f,\xi,F)$ совпадают с интегралами Лебе́га–Сти́лтьеса от простых функций $h_\tau(x) = f(\xi_k)$ при $x \in [x_{k-1},x_k)$ и $k = 1,\ldots,n$. Поскольку функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, то $h_\tau \rightrightarrows f$ при $d_\tau \to 0$. По теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости существует предел интегралов от простых функций и значит f интегрируема по F в смысле Ри́мана–Сти́лтьеса. □

Определение. Функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всякой дизъюнктной системы интервалов $\bigsqcup_{k=1}^n (a_k,b_k) \subset [a,b]$ с суммой длин $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$. Через $\boldsymbol{AC}[a,b]$ обозначается нормированное пространство всех абсолютно непрерывных функций с нормой $\|F\| \doteqdot |F(a)| + \int_a^b |F'(t)|\,dt$.

1. *Если $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, т.е. при некотором $c > 0$ выполняется условие Ли́пшица $|F(x) - F(y)| \leqslant c\,|x-y|$ при всех $x,y \in [a,b]$, то $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$.*

В самом деле, если $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta < \varepsilon/c$, то $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < c\delta < \varepsilon$.

2. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$. Поэтому производная $F'(x)$ абсолютно непрерывной функции по теореме Лебега существует п.в. на $[a,b]$.*

Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, как было указано в определении абсолютной непрерывности. Тогда если $(x_k - x_{k-1}) = \frac{(b-a)}{n} < \delta$, то $\mathbf{V}_a^b(F) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_{x_{k-1}}^{x_k}(F) \leqslant n\varepsilon$.

3. *Если $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$ разложение Жорда́на функции $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то функции $\alpha,\beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ абсолютно непрерывны.*

Докажем, что $\mathbf{V} \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, как было указано в определении абсолютной непрерывности. Тогда если $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, то

$$\sum_{k=1}^n |\mathbf{V}(b_k) - \mathbf{V}(a_k)| = \sum_{k=1}^n \mathop{\mathbf{V}}_{a_k}^{b_k}(F) < \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_k} |F(x_{k,l}) - F(x_{k,l-1})| + \varepsilon < 2\varepsilon\,,$$

где $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,n_k} = b_k$, т.ч. $\mathbf{V}_{a_k}^{b_k}(F) < \sum_{l=1}^{n_k} |F(x_{k,l}) - F(x_{k,l-1})| + \varepsilon/2^k$.

4. *Если $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то существует такая единственная функция $f \in \boldsymbol{L}[a,b]$ с точностью до эквивалентности, что $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x \in [a,b]$.*

Рассмотрим разложение Жорда́на $F(x) = F(a) + \alpha(x) - \beta(x)$, где $\alpha,\beta \in \boldsymbol{AC}[a,b]$. Тогда меры Лебе́га–Сти́лтьеса λ_α, λ_β и заряд $\varphi_F \doteqdot \lambda_\alpha - \lambda_\beta$ абсолютно непрерывны по мере Лебега λ_1. В силу теоремы Радо́на–Никоди́ма существуют единственные (с точностью до эквивалентности) функции $f_\alpha, f_\beta, f \doteqdot f_\alpha - f_\beta \in \boldsymbol{L}[a,b]$, т.ч.

$$F(x) - F(a) = \lambda_\alpha([a,x)) - \lambda_\beta([a,x)) = \int_a^x f_\alpha(t)\,dt - \int_a^x f_\beta(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Лемма. *Если F неубывающая функция на $[a,b]$, то $\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b)-F(a)$. Если функция $F \in \mathrm{Lip}[a,b]$, то это неравенство является равенством.*

Доказательство. Пусть $F_n(t) \doteqdot n(F(t+1/n)-F(t))$, где $F(t) \doteqdot F(b)$ при $t\in[b,b+1]$. Так как предел $\lim F_n(t) = F'(t)$ существует п.в. на $[a,b]$, то по лемме Фату́

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b F_n(t)\,dt = \varliminf_{n\to\infty}\left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\,dt\right) \leqslant F(b)-F(a).$$

Если $F\in\mathrm{Lip}[a,b]$, то $|F_n(t)|\leqslant c$ при всех $t\in[a,b]$. Применяя, как и выше, вместо леммы Фату́ теорему Лебе́га о мажорируемой сходимости, получим равенство. □

Теорема (формула Ньюто́на–Ле́йбница для абсолютно непрерывных функций). *Если $F\in \boldsymbol{AC}[a,b]$, то $F'(x)\in \boldsymbol{L}[a,b]$ и $F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\,dt$ при $x\in[a,b]$.*

Доказательство. По теореме Радо́на-Никоди́ма существует функция $f\in \boldsymbol{L}[a,b]$, т.ч. $F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt$ при всех $x\in[a,b]$ (см. свойство 4). Представляя функцию в виде $f=f_+-f_-$, где $f_\pm \doteqdot \max\{\pm f,0\}$, мы сведем доказательство к случаю, когда функция $f(x)\geqslant 0$ неотрицательна, а функция $F(x)$ неубывающая и $F(a)=0$. Нам осталось доказать, что имеет место равенство $F'(x)=f(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Пусть $F_n(x)\doteqdot\int_a^x f_n(t)\,dt$, где $f_n(t)\doteqdot\min\{f(t),n\}$. Тогда $F_n\in\mathrm{Lip}[a,b]$ и по лемме мы получим $F_n(x)=\int_a^x F_n'(t)\,dt$ при всех $x\in[a,b]$. В силу единственности производной Радо́на-Никоди́ма $F_n'(x)=f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$. Отсюда $F(x)-F_n(x)=\int_a^x(f-f_n)(t)\,dt$. Так как здесь подынтегральная функция неотрицательна, то функция $F(x)-F_n(x)$ неубывающая и, следовательно, у нее существует неотрицательная производная $F'(x)-F_n'(x)\geqslant 0$ п.в. на $[a,b]$. Поэтому $F'(x)\geqslant F_n'(x)=f_n(x)$ п.в. на $[a,b]$.

Переходя к пределу в этом неравенстве получим, что $F'(x)\geqslant f(x)$ п.в. на $[a,b]$. Тогда интеграл $\int_a^b(F'-f)(t)\,dt\geqslant 0$. С другой стороны, в силу леммы выполняется обратное неравенство $\int_a^b(F'-f)(t)\,dt\leqslant 0$. Таким образом, этот интеграл равен нулю $\int_a^b(F'-f)(t)\,dt=0$. Так как подынтегральная функция является неотрицательной п.в. на отрезке $[a,b]$, то функция $F'(x)-f(x)=0$ п.в. на $[a,b]$. □

Пример. Рассмотрим пример непрерывной и п.в. дифференцируемой функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, которая не является абсолютно непрерывной $f\notin\boldsymbol{AC}[a,b]$.

Как известно, функция Ка́нтора $k:[0,1]\to[0,1]$ является на $[0,1]$ монотонной и непрерывной, а ее производная равна нулю $k'(x)=0$ п.в. на отрезке $[0,1]$, т.к. на каждом дополнительном интервале к канторову множеству $C\subset[0,1]$ она равна константе, а канторово множество имеет меру нуль $\mu(C)=0$. Отсюда имеем

$$1=k(1)-k(0)\neq\int_0^1 k'(t)\,dt=0,$$

т.е. $k\notin\boldsymbol{AC}[0,1]$ не является абсолютно непрерывной. В частности, $k\notin\mathrm{Lip}[0,1]$.

9 ТЕОРЕМА ФУБИ́НИ

Пусть меры $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ заданы на полукольцах S_1 и S_2. Обозначим через $S \doteqdot S_1 \times S_2$, где $S_1 \times S_2 \doteqdot \{A = A_1 \times A_2 \,|\, A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$, прямое произведение полуколец S_1 и S_2. Функция $\mathfrak{m}(A) \doteqdot \mathfrak{m}_1(A_1) \cdot \mathfrak{m}_2(A_2)$, определенная при всех $A = A_1 \times A_2 \in S$, называется *прямым произведением мер* и обозначается через $\mathfrak{m} \doteqdot \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$.

Лемма. *Прямое произведение мер $\mathfrak{m} \doteqdot \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ являются мерой, определенной на полукольце множеств $S = S_1 \times S_2$.*

Доказательство. Докажем, что $S = S_1 \times S_2$ является полукольцом. Если $A, B \in S$, то их пересечение $A \cap B$ разность $A \setminus B$ представляется в виде

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2), \quad A \setminus B = \big((A_1 \setminus B_1) \times A_2\big) \sqcup \big((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big).$$

Отсюда $A \cap B \in S$. Так как $A_1 \setminus B_1$ и $A_2 \setminus B_2$ являются дизъюнктным объединением элементов S_1 и S_2 соответственно, то разность $A \setminus B$ представляется дизъюнктным объединением элементов S. Следовательно, S образует полукольцо.

Докажем, что функция $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ является σ-аддитивной. Пусть $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $A = A_1 \times A_2$ и $B_n = B_{n1} \times B_{n2}$ элементы S. Тогда $A_2 = \bigsqcup_{x_1 \in B_{n1}} B_{n2}$, т.е. для любого $x_1 \in A_1$ множество A_2 является дизъюнктным объединением тех множеств B_{n2}, для которых индекс n удовлетворяет условию $x_1 \in B_{n1}$. Поэтому имеет место равенство $\mathfrak{m}_2(A_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1)$ при всех $x_1 \in A_1$, где $f_n(x_1) \doteqdot \mathfrak{m}_2(B_{n2})\, \chi_{B_{n1}}(x_1)$.

Обозначим через $\mu_1 = \mathfrak{m}_1^*|_{\Sigma_1}$ продолжение меры $\mathfrak{m}_1$ на σ-алгебру Σ_1 измеримых множеств. Так как $f_n \geqslant 0$, то частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} f_n(x_1)$ монотонно сходятся на множестве A_1. Применяя теорему о монотонной сходимости, получим

$$\mathfrak{m}_1(A_1)\mathfrak{m}_2(A_2) = \int_{A_1} \mathfrak{m}_2(A_2)\, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_1} f_n\, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_1(B_{n1})\mathfrak{m}_2(B_{n2}).$$

Таким образом, функция $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$ является σ-аддитивной мерой. □

Определение. Пусть (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2) заданные измеримые пространства с полными и σ-конечными мерами μ_1 и μ_2. Мера $\mathfrak{m} \doteqdot \mu_1 \times \mu_2$ является прямым произведением мер. Произведением измеримых пространств называется (X, Σ, μ), где $X \doteqdot X_1 \times X_2$ и мера $\mu = \mathfrak{m}^*|_{\Sigma}$, определенная на σ-алгебре Σ измеримых множеств внешней меры $\mathfrak{m}^*$, является продолжением меры $\mathfrak{m}$. Мера $\mu \doteqdot \mu_1 \otimes \mu_2$, определенная на σ-алгебре $\Sigma \doteqdot \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, называется *произведением мер*.

Если множество $E \subset X = X_1 \times X_2$, то следующие множества

$$E_{x_1} \doteqdot \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in E\} \subset X_2, \quad E_{x_2} \doteqdot \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in E\} \subset X_1$$

называются *сечениями множества* E по переменным x_1 и x_2. Если $f : E \to \mathbb{R}$, то функции $f_{x_1} : E_{x_1} \to \mathbb{R}$, где $f_{x_1}(x_2) \doteqdot f(x_1, x_2)$, и $f_{x_2} : E_{x_2} \to \mathbb{R}$, где $f_{x_2}(x_1) \doteqdot f(x_1, x_2)$, называются *сечениями функции* f по переменным x_1 и x_2, где $x = (x_1, x_2)$.

Теорема (вычисление меры при помощи сечений)**.** *Для всех множеств* $E \in \Sigma$

$$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(E_{x_2})\, d\mu_2.$$

Доказательство. Мы докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Заметим, что теорема автоматически включает в себя утверждение о том, что при п.в. $x_1 \in X_1$ множество $E_{x_1} \in \Sigma_2$ и функция $\mu_2(E_{x_1})$ являются измеримыми.

В силу σ-конечности меры μ, достаточно рассмотреть множества E конечной меры $\mu(E) < \infty$. Пусть $S \doteqdot \Sigma_1 \times \Sigma_2$ полукольцо и $E = E_1 \times E_2 \in S$, тогда имеем

$$\mu(E) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) = \int_{E_1} \mu_2(E_2)\, d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1\,.$$

Если множество $E \in \mathscr{R}(S)$, т.е. является дизъюнктным объединением элементов S, то утверждение теоремы вытекает из аддитивности мер и линейности интеграла.

Пусть $E \in \Sigma$ произвольное измеримое множество конечной меры. Обозначим через A измеримую оболочку множества E, определенную по формуле

$$A \doteqdot \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\,, \text{ где } E \subset B_k \doteqdot \bigcup_{l=1}^{\infty} B_{kl}\,,\ B_{kl} \in S \text{ и } \mu(B_k) < \mu(E) + \frac{1}{k}\,.$$

Тогда $E \subset A$ и $\mu(A \setminus E) = 0$. Пусть $A_n \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} B_k$ и $A_{nm} \doteqdot \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} B_{kl} \in \mathscr{R}(S)$. Так как $A_n \searrow A$ и $A_{nm} \nearrow A_n$, то соответствующие сечения $A_{nx_1} \searrow A_{x_1}$ и $A_{nmx_1} \nearrow A_{nx_1}$ монотонно сходятся при всех $x_1 \in X_1$. Применяя свойства непрерывности сверху и снизу для соответствующих мер μ и μ_2, а также теорему о монотонной сходимости интеграла по мере μ_1, получим следующие равенства:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \mu(A_{nm}) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \int_{X_1} \mu_2(A_{nmx_1})\, d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1\,.$$

Отсюда нетрудно доказать утверждение теоремы для множества E. В самом деле, по построению множество $B = A \setminus E$ имеет меру $\mu(B) = 0$. Поэтому также как в предыдущем случае, можно построить измеримую оболочку C множества B. Тогда получим $B \subset C$ и $\mu(C) = \int_{X_1} \mu_2(C_{x_1})\, d\mu_1 = 0$. Так как множество $B_{x_1} \subset C_{x_1}$, то $\mu(B) = \int_{X_1} \mu_2(B_{x_1})\, d\mu_1 = 0$. Таким образом, в силу аддитивности мер и интеграла будет выполняться равенство $\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1$. □

Лемма. *Подграфик* $\Gamma_f \doteqdot \{(x,t) \mid x \in E,\, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ *неотрицательной измеримой функции* $f : E \to \mathbb{R}_+$ *является измеримым множеством в* $X \times \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Рассмотрим следующие «ступенчатые» функции:

$$h_n(x) \doteqdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{H_{nk}}(x)\,, \text{ где } H_{nk} \doteqdot E\Big(\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\Big).$$

Поскольку множества H_{nk} измеримы, то подграфик Γ_{h_n} функции h_n измерим, а так как $h_n \searrow f$ на E, то $\Gamma_{h_n} \searrow \Gamma_f$ и подграфик $\Gamma_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_{h_n}$ является измеримым. □

Вычислим меру подграфика Γ_f неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ при помощи сечений. Пусть $\nu \doteqdot \mu \otimes \lambda_1$ произведение мер в $X \times \mathbb{R}_+$, тогда получим

$$\nu(\Gamma_f) = \int_E f(x)\,d\mu = \int_0^\infty \mu(\Gamma_{ft})\,dt = \int_0^\infty F(t)\,dt\,,$$

где $f(x)$ мера сечения Γ_f по x, а $F(t) = \mu(E(f \geqslant t))$ мера сечения Γ_f по t.

Теорема (Фуби́ни)**.** *Если* $f \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, *то выполняются равенства*

$$\int_E f\,d\mu = \int_{X_1}\Big(\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\,d\mu_2\Big)\,d\mu_1 = \int_{X_2}\Big(\int_{E_{x_2}} f_{x_2}\,d\mu_1\Big)\,d\mu_2.$$

Доказательство. Мы докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Представляя $f = f_+ - f_-$ разностью функций $f_\pm \geqslant 0$, мы сведем доказательство к случаю, когда $f \geqslant 0$. Пусть $\nu \doteqdot \mu \otimes \lambda_1 = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \lambda_1 = \mu_1 \otimes \nu_1$, где $\nu_1 \doteqdot \mu_2 \otimes \lambda_1$ задает меру в $X_2 \times \mathbb{R}_+$. Вычисляя меру подграфика $\Gamma_f \doteqdot \{(x,t) \mid x \in E,\, 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ при помощи сечений по x и по x_1, мы получим

$$\nu(\Gamma_f) = \int_E f(x)\,d\mu = \int_{X_1} \nu_1(\Gamma_{fx_1})\,d\mu_1 = \int_{X_1}\Big(\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\,d\mu_2\Big)\,d\mu_1\,,$$

где $f(x)$ мера сечения Γ_f по x и $\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\,d\mu_2$ мера сечения Γ_f по x_1. □

Рассмотрим ограниченную функцию $f : I \to \mathbb{R}$, заданную на отрезке $I = [a,b]$, где $[a,b] \doteqdot [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_m,b_m]$ отрезок в пространстве $\mathbb{R}^m$. Обозначим через

$$\underline{f}(x) \doteqdot \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{y\in\Delta_\varepsilon(x)} f(y)\,, \quad \overline{f}(x) \doteqdot \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{y\in\Delta_\varepsilon(x)} f(y)\,, \quad \text{где } \Delta_\varepsilon(x) = I \cap \boldsymbol{S}_\varepsilon(x)\,,$$

нижнюю и *верхнюю* функции Бэ́ра для функции f. Тогда $\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x)$ при всех $x \in [a,b]$. При этом равенство $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда функция f непрерывна в точке $x \in I$, т.е. $N_f \doteqdot \{x \in I \mid \underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)\}$ образует множество точек разрыва. Так как $\{x \in I | \underline{f}(x) > c\}$ и $\{x \in I | \overline{f}(x) < c\}$ будут открытыми множествами на отрезке I, то функции Бэра $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ являются измеримыми по Лебе́гу. Отсюда множество N_f будет измеримым в $\mathbb{R}^m$.

Выясним связь между интегралами Ри́мана и Лебе́га. Обозначим через $\boldsymbol{R}(I)$ и $\boldsymbol{L}(I)$ соответственно пространства всех функций $f : I \to \mathbb{R}$, интегрируемых по Ри́ману и по мере Лебе́га λ_m в пространстве $\mathbb{R}^m$. Из курса анализа известно, что для существования интеграла Римана необходимо и достаточно, чтобы нижний интеграл Дарбу́ совпадал с верхним интегралом Дарбу́, т.е.

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx \doteqdot \sup_\tau \underline{D}_\tau(f) = \inf_\tau \overline{D}_\tau(f) \doteqdot \overline{\int_I} f(x)\,dx\,,$$

где $\underline{D}_\tau(f) \doteqdot \sum_{k=1}^n \underline{d}_k\,\lambda_m(I_k)$ и $\underline{d}_k \doteqdot \inf_{x\in I_k} f(x)$; $\overline{D}_\tau(f) \doteqdot \sum_{k=1}^n \overline{d}_k\,\lambda_m(I_k)$ и $\overline{d}_k \doteqdot \sup_{x\in I_k} f(x)$, обозначают нижние и верхние суммы Дарбу́, определенные по разбиению τ отрезка $I = [a,b]$ на отрезки $I_k = [a_k,b_k]$, т.ч. $(a_k,b_k) \cap (a_l,b_l) = \emptyset$ при $k \neq l$.

Теорема (критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.** *Функция $f : I \to \mathbb{R}$, где $I = [a,b] \subset \mathbb{R}^m$, интегрируема по Риману $f \in \boldsymbol{R}(I)$ тогда и только тогда, когда она ограничена и множество $N_f \subset I$ ее точек разрыва имеет меру $\lambda_m(N_f) = 0$. При этом, если функция $f \in \boldsymbol{R}(I)$, то $f \in \boldsymbol{L}(I)$ и интегралы совпадает.*

Доказательство. Ограниченность функции f на отрезке I является необходимым условием интегрируемости функции по Риману, так как иначе нижние или верхние суммы Дарбу́ будут принимать бесконечные значения.

Докажем, что нижний и верхний интегралы Дарбу́ от ограниченной функции f равны соответственно интегралам Лебе́га от нижней $\underline{f}$ и верхней $\overline{f}$ функций Бэ́ра. Построим последовательность разбиений $\tau_k = \{I_{kl}\}_{l=1}^{n_k}$ на отрезке I, т.ч. диаметры разбиений $d(\tau_k) \to 0$, разбиение τ_{k+1} является продолжением разбиения τ_k и предел нижних сумм Дарбу́ $\underline{D}_{\tau_k}(f)$ равен нижнему интегралу Дарбу́, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \underline{D}_{\tau_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{n_k} \underline{d}_{kl}\, \lambda_m(I_{kl}) = \underline{\int_I} f(x)\, dx\,.$$

Рассмотрим функции $h_k(x) \doteqdot \sum_{l=1}^{n_k} \underline{d}_{kl}\, \chi_{I_{kl}}(x)$. Так как $h_k(x) \nearrow \underline{f}(x)$, если $x \notin \partial I_{kl}$ при всех k и l, то $h_k \nearrow \underline{f}$ п.в. на I. По теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости

$$\int_I \underline{f}\, d\lambda_m = \lim_{l\to\infty} \int_I h_k\, d\lambda_m = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{n_k} \underline{d}_{kl}\, \lambda_m(I_{kl}) = \underline{\int_I} f(x)\, dx\,.$$

Аналогично доказывается второе равенство. В силу интегрируемости функции по Ри́ману нижний и верхний интегралы Дарбу́ совпадают. Тогда $\int_I (\overline{f} - \underline{f})\, d\lambda_m = 0$. Так как $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) \geqslant 0$, то $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$ п.в. на I. Поэтому первое утверждение доказано. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ п.в. на I и значит их интегралы Лебега совпадают. Следовательно, интеграл Лебе́га функции f равен нижнему и верхнему интегралам Дарбу́. □

Пример (Серпинского)**.** Пусть множество $E \subset [0,1]^2$, т.ч. все сечения E_{x_1} не более, чем счетны, а все сечения E_{x_2} имеют не более, чем счетные дополнения $[0,1] \setminus E_{x_2}$. Его существование можно вывести из гипотезы континуума. Поскольку

$$\lambda_1(E_{x_1}) = 0 \ \text{ и } \int_0^1 \lambda_1(E_{x_1})\, d\lambda_1 = 0; \quad \lambda_1(E_{x_2}) = 1 \ \text{ и } \int_0^1 \lambda_1(E_{x_2})\, d\lambda_1 = 1\,,$$

то интегралы не совпадают и, следовательно, в силу теоремы о вычислении меры при помощи сечений множество E не является измеримым по Лебе́гу.

10 ПРОСТРАНСТВА $L_p(E,\mu)$ ПРИ $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство с полной и σ-конечной мерой μ, а $\mathbb{F}$ обозначает поле действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

Определение. *Комплекснозначная функция* $f : E \to \mathbb{C}$ называется *измеримой*, если $f = u + iv$, где $u(x) \doteqdot \Re f(x)$ и $v(x) \doteqdot \Im f(x)$ являются измеримыми функциями. Функция называется *интегрируемой* $f \in L(E,\mu)$, если $u, v \in L(E,\mu)$, при этом

$$\int_E f\,d\mu \doteqdot \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu\,.$$

1. *Если* $f,g \in L(E,\mu)$ *и* $\lambda \in \mathbb{F}$*, то* $\lambda f, f+g \in L(E,\mu)$ *и выполняются равенства*

$$\int_E \lambda f\,d\mu = \lambda\int_E f\,d\mu \ \text{ и } \ \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu\,.$$

Докажем, например, первое равенство. Пусть $\lambda = a+ib$ и $f = u+iv$, тогда имеем $\lambda f = (au-bv)+i(av+bu)$. Отсюда по определению интеграла получим

$$\int_E \lambda f\,d\mu = \Big(a\int_E u\,d\mu - b\int_E v\,d\mu\Big) + i\Big(a\int_E v\,d\mu + b\int_E u\,d\mu\Big) = \lambda\int_E f\,d\mu\,.$$

Таким образом, $L(E,\mu)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

2. *Если* $f \in L(E,\mu)$ *, то модуль* $|f| \in L(E,\mu)$ *и* $|\int_E f\,d\mu| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.

Так как $|f| \leqslant |u|+|v|$, то $|f| \in L(E,\mu)$. Если $\int_E f\,d\mu = e^{i\theta}|\int_E f\,d\mu|$, то получаем

$$\Big|\int_E f\,d\mu\Big| = \Re\big(e^{-i\theta}\int_E f\,d\mu\big) = \int_E \Re\big(e^{-i\theta}f\big)\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu\,.$$

3. *Если* $f_1 \sim g_1$ *и* $f_2 \sim g_2$*, то* $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$ *и* $\lambda f_1 \sim \lambda g_1$*. Пространство классов эквивалентности измеримых функций является линейным пространством над полем* $\mathbb{F}$*. При этом если* $f \sim g$ *и* $f \in L(E,\mu)$*, то* $g \in L(E,\mu)$ *и интегралы равны.*

Указанные свойства отношения эквивалентности очевидны.

Определение. *Пространством* $L_\infty(E,\mu)$ *существенно ограниченных функций* называется множество всех классов эквивалентности ограниченных и измеримых функций $f : E \to \mathbb{F}$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} \doteqdot \inf_{\mu(A)=0}\sup_{x\in E\setminus A}|f(x)|$.

Пространство $L_\infty(E,\mu)$ рассматривается, как факторпространство пространства ограниченных функций $B(E)$ по подпространству функций, эквивалентных нулю. Мы будем обращаться с классами эквивалентности как с обычными функциями.

Норма $\|f\|_{L_\infty}$ называется *существенной верхней гранью модуля функции* $|f|$. Покажем, что указанная нижняя грань достигается на некотором множестве меры нуль. Выберем множества $A_n \subset E$, т.ч. $\mu(A_n)=0$ и $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L_\infty}+1/n$ при всех $x \in E\setminus A_n$. Тогда их объединение $N_f = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ имеет меру нуль $\mu(N_f)=0$ и значит существенная верхняя грань равна верхней грани $\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x\in E\setminus N_f}|f(x)|$.

Докажем свойства нормы. Если $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 0$, то по доказанному выше имеем $f \sim 0$. Однородность нормы $\|\lambda f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = |\lambda| \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ очевидна. Выберем множества N_f и N_g меры нуль $\mu(N_f) = \mu(N_g) = 0$, т.ч. $\|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in E \setminus N_f} |f(x)|$ и $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in E \setminus N_g} |g(x)|$. Полагая $N = N_f \cup N_g$, получим $\mu(N) = 0$ и выполняется неравенство

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant \sup_{x \in E \setminus N} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x \in E \setminus N} |f(x)| + \sup_{x \in E \setminus N} |g(x)| \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty} + \|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty}.$$

Теорема. *Пространство $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ является ба́наховым пространством.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$ и множество $N = \bigcup_{n,m=1}^\infty N_{(f_n - f_m)}$ имеет меру нуль $\mu(N) = 0$. Так как выполняются равенства $\|f_n - f_m\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = \sup_{x \in E \setminus N} |f_n(x) - f_m(x)|$, то $\{f_n\}$ является последовательностью Коши в пространстве $\boldsymbol{B}(E \setminus N)$ ограниченных функций и в силу его полноты имеет предел $f_n \rightrightarrows f \in \boldsymbol{B}(E \setminus N)$. Полагая функцию $f(x) = 0$ при всех $x \in N$, мы получим ограниченную измеримую функцию $f \in \boldsymbol{B}(E)$, при этом из равномерной сходимости на $E \setminus N$ следует, что $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} = 0$. □

Определение. *Пространством $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ суммируемых функций степени $p \geqslant 1$* называется множество классов эквивалентности измеримых функций $f : E \to \mathbb{F}$, т.ч. $|f|^p \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$ и норма определяются по формуле $\|f\|_{\boldsymbol{L}_p} \doteqdot \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Пространство $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ является факторпространством пространства измеримых функций, т.ч. $|f|^p \in \boldsymbol{L}(E,\mu)$, по подпространству функций, эквивалентных нулю. Мы будем обращаться с классами эквивалентности как с обычными функциями. Если функции $f, g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$, то $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ и значит $f+g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поэтому $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ является линейным пространством. Докажем свойства нормы.

Неравенство Гёльдера. Если $f, g : E \to \mathbb{F}$ являются измеримыми функциями, то

$$\int_E |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} \|g\|_{Lq} \quad \text{при } 1 \leqslant p, q \leqslant \infty \text{ и } 1/p + 1/q = 1.$$

Пусть $1 < p, q < \infty$. Докажем неравенство Ю́нга: $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$ при $a, b \in \mathbb{R}_+$. Функции $y = x^{p-1}$ и $x = y^{q-1}$ взаимно обратные на полуоси $\mathbb{R}_+$, т.к. $1/(p-1) = q-1$. Поэтому площадь прямоугольника ab оценивается суммой интегралов

$$ab \leqslant \int_0^a x^{p-1}\, dx + \int_0^b y^{q-1}\, dy = a^p/p + b^q/q.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда $a^{p-1} = b$, т.е. $a^p = b^q$.

Пусть $A = \int_E |f|^p d\mu$ и $B = \int_E |g|^q d\mu$. Если один из этих интегралов равен нулю или бесконечности, то утверждение верно. Иначе, полагая в неравенстве Юнга $a \doteqdot |f|/A^{1/p}$ и $b \doteqdot |g|/B^{1/q}$, а затем интегрируя обе его части, получим

$$\int_E ab\, d\mu \leqslant \int_E f^p d\mu / pA + \int_E g^q d\mu / qB = 1/p + 1/q = 1.$$

Отсюда имеем неравенство Гёльдера. При $p = 1$ и $q = \infty$ неравенство очевидно.

Неравенство Минко́вского. Если $f,g : E \to \mathbb{F}$ измеримые функции, то

$$\|f+g\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g\|_{\boldsymbol{L}_p} \quad \text{при } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

В случае $p=1$ неравенство очевидно, а случае $p=\infty$ оно было доказано выше. При $1<p<\infty$ введем обозначения $A = \int_E |f|^p\,d\mu$, $B = \int_E |g|^p\,d\mu$, $C = \int_E |f+g|^p\,d\mu$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, имеем

$$C = \int_E |f+g|^p\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_E |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leqslant A^{1/p}C^{1/q} + B^{1/p}C^{1/q}.$$

Поделив на множитель $C^{1/q}$, получим неравенство Минко́вского.

Обобщенное неравенство Минко́вского. Если функция $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{F}$ измерима на произведении двух измеримых пространств (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2), то

$$\Big(\int_{E_1}\Big(\int_{E_2} |f_{x_1}| d\mu_2\Big)^p d\mu_1\Big)^{1/p} \leqslant \int_{E_2}\Big(\int_{E_1} |f_{x_2}|^p d\mu_1\Big)^{1/p} d\mu_2 \quad \text{при } 1<p<\infty.$$

По теореме Фуби́ни функция $g(x_1) \doteqdot \int_{E_2} |f_{x_1}|\,d\mu_2$ определена п.в. и измерима на E_1. Изменяя порядок интегрирования и применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int_{E_1} g^p d\mu_1 = \int_{E_2}\Big(\int_{E_1} |f_{x_2}|\,g^{p-1} d\mu_1\Big) d\mu_2 \leqslant \int_{E_2}\Big(\int_{E_1} |f_{x_2}|^p d\mu_1\Big)^{1/p} d\mu_2 \,\Big(\int_{E_1} g^p d\mu_1\Big)^{1/q}.$$

где $(p-1)q = p$. Осталось поделить обе части неравенства на последнюю скобку.

Теорема. $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$ *является банаховым пространством.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши́ в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Выберем $n_1 < n_2 < \ldots$, т.ч. $\|f_i - f_j\|_{\boldsymbol{L}_p} < 2^{-k}$ при всех $i,j \geqslant n_k$ и положим

$$g(x) \doteqdot |f_{n_1}(x)| + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Поскольку частичные суммы $g_n(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ монотонно сходятся $g_n(x) \nearrow g(x)$ и в силу неравенства Минко́вского $\|g_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f_{n_1}\|_{\boldsymbol{L}_p} + 1$, то по теореме о монотонной сходимости $g \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поэтому функция $g(x)$ является п.в. конечной на E и следующий ряд сходится абсолютно

$$f(x) \doteqdot f_{n_1}(x) + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{п.в. на } E.$$

При этом из неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ вытекает, что $f \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. Поскольку

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant \textstyle\sum_{l=k}^{\infty} |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| \text{ п.в. на } E,$$

то по теореме о монотонной сходимости $\|f - f_{n_k}\|_{\boldsymbol{L}_p} < 2^{1-k}$, т.е. $\lim \|f - f_{n_k}\|_{\boldsymbol{L}_p} = 0$. Поскольку последовательность Коши $\{f_n\}$ содержит сходящуюся к f в $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, то $\{f_n\}$ сходится к f в $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$. $\square$

Следствие. *Если* $\{f_n\} \subset \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *есть последовательность Коши, то найдется подпоследовательность* $\{f_{n_k}\}$, *т.ч.* $f_{n_k} \to f$ *сходится п.в. на* E.

Лемма. *Множество $\mathcal{H}(E,\mu)$ простых измеримых функций $h : E \to \mathbb{F}$ всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_p(E,\mu)$ и $f = f_+ - f_-$, где $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$. Тогда существуют простые неотрицательные функции $h_n^\pm \in \mathcal{H}(E,\mu)$, т.ч. $h_n^\pm \nearrow f_\pm$. При этом если функция f ограничена, то сходимость будет равномерной. Пусть $h_n \doteqdot h_n^+ - h_n^-$, тогда по теореме о монотонной сходимости $\|f - h_n\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f_+ - h_n^+\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|f_- - h_n^-\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$. □

Теорема (Штейнга́уза). *Для каждого непрерывного линейного функционала $\alpha : \boldsymbol{L}_1(E,\mu) \to \mathbb{F}$ существует единственная функция $g \in \boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$, для которой имеет место равенство $\alpha(f) = \int_E fg\,d\mu$ при всех $f \in \boldsymbol{L}_1(E,\mu)$.*

Доказательство. Так как функционал α является непрерывным, то он ограничен. Поэтому существует $c > 0$, т.ч. $|\alpha(f)| \leqslant c$ для всех функций $\|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant 1$. Рассмотрим функцию множества $\varphi(A) \doteqdot \alpha(\chi_A)$, определенную для всех измеримых множеств $A \in \Sigma_E$ конечной меры $\mu(A) < \infty$. В силу линейности функционала α получим

$$\varphi\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \alpha\big(\chi_{A_k}\big) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k),$$

т.е. функция φ является конечно-аддитивной. Если $A = \sum_{n=1}^\infty A_n$, где $A, A_n \in \Sigma_E$ множества конечной меры, то из счетной аддитивности меры μ следует, что ряд $\chi_A = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$ сходится в $\boldsymbol{L}_1(E,\mu)$. Поэтому в силу непрерывности функционала α имеем $\varphi(A) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(A_n)$, т.е. φ является σ-аддитивной. Так как $|\varphi(A)| \leqslant c\mu(A)$, то функция φ абсолютно непрерывна относительно меры μ.

Пусть $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$, где E_n измеримые множества конечной меры $\mu(E_k) < \infty$. Так как на каждом E_n функция φ является зарядом, то по теореме Радона-Никодима она имеет единственное представление $\varphi(A) = \int_A g_n\,d\mu$ для всех измеримых $A \subset E_n$, где $g_n \in \boldsymbol{L}_1(E_n,\mu)$ и равна нулю вне множества E_n. Полагая $g \doteqdot \sum_{n=1}^\infty g_n$, получим, что $\alpha(h) = \int_E hg\,d\mu$ для всех простых интегрируемых функций $h \in \mathcal{H}(E,\mu)$.

Если множество $A_n = \{x \in E_n \,|\, |g(x)| > c\}$ имеет положительную меру $\mu(A_n) > 0$, то определим функцию $f_n \doteqdot \chi_{A_n} e^{-i\arg g}/\mu(A_n)$. Тогда имеем $c < \int_E f_n g\,d\mu = \alpha(f_n) \leqslant c$, что невозможно. Таким образом, $\|g\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant c$ и, следовательно, функция $g \in \boldsymbol{L}_\infty(E,\mu)$. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_1(E,\mu)$. Рассмотрим простые функции $h_n \in \mathcal{H}(E,\mu)$, которые указаны в лемме. Тогда мы имеем $\|f - h_n\|_{\boldsymbol{L}_1} \to 0$. Используя непрерывность функционала, а затем применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим

$$\alpha(f) = \lim_{n\to\infty} \alpha(h_n) = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n g\,d\mu = \int_E fg\,d\mu$$

для всех функций $f \in \boldsymbol{L}_1(E,\mu)$. □

11 ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Топологическим линейным пространством называется линейное пространство $\boldsymbol{E}$, в котором определена топология τ, т.ч. линейные операции сложения и умножения на число непрерывны. Топологическое линейное пространство $(\boldsymbol{E},\tau)$ называют *отделимым*, если каждая его точка является замкнутым множеством.

Система окрестностей нуля β_0 называется *локальной базой* пространства $(\boldsymbol{E},\tau)$, если для любого $0\in A\in\tau$ существует $0\in B\in\beta_0$, т.ч. $B\subset A$. Так как отображения сдвига $f_a(x)\doteqdot x+a$ являются гомеоморфизмами, то все множества вида $a+B$, где $a\in\boldsymbol{E}$ и $B\in\beta_0$, образуют базу β топологии пространства $(\boldsymbol{E},\tau)$.

Определение. *Локально выпуклым пространством* $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ называется линейное пространство $\boldsymbol{E}$ с заданной системой полунорм $\mathcal{P}$, в котором локальная база β_0 топологии τ определяется системой окрестностей нуля, состоящей из множеств вида $B\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\,|\,\max_{\boldsymbol{p}\in\Delta}\boldsymbol{p}(x)<\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$ и $\Delta\subset\mathcal{P}$ конечное множество.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* в пространстве $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$, если она сходится по каждой полунорме из $\mathcal{P}$, т.е. $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{p}(x_n-x)=0$ при всех $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши* в $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$, если $\lim_{n,m\to\infty}\boldsymbol{p}(x_n-x_m)=0$ при всех $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$. Пространство $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Система полунорм $\mathcal{P}$ называется *направленной*, если для любых двух полунорм $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\in\mathcal{P}$ найдется $\boldsymbol{p}_3\in\mathcal{P}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_1\leqslant\boldsymbol{p}_3$ и $\boldsymbol{p}_2\leqslant\boldsymbol{p}_3$. Каждую систему полунорм $\mathcal{P}$ можно сделать направленной, создав новую систему $\mathcal{Q}$ по формуле $\boldsymbol{q}\doteqdot\max_{\boldsymbol{p}\in\Delta}\boldsymbol{p}$, где $\Delta\subset\mathcal{P}$ конечное множество. При этом локальная база β_0 не изменится.

1. *Локальная база β_0 в локально выпуклом пространстве $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ определяет некоторую топологию τ, относительно которой линейные операции сложения и умножения на число являются непрерывными.*

В самом деле, топология τ локально выпуклого пространства $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ состоит из всех объединений $\bigcup_{i\in I}a_i+B_i$, где $a_i\in\boldsymbol{E}$ и $B_i\in\beta_0$. Поэтому аксиома объединения в топологии очевидно выполнена. Чтобы проверить аксиому пересечения достаточно показать, что для любых $B_k\in\beta_0$, $k=1,\ldots,n$, существует $B\in\beta_0$, т.ч. $B\subset\bigcap_{k=1}^n B_k$. Для этого заметим, что если $\Delta=\bigcup_{k=1}^n\Delta_k$ и $\varepsilon=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\varepsilon_k$, то из $\max_{\boldsymbol{p}\in\Delta}\boldsymbol{p}(x)<\varepsilon$ следует $\max_{\boldsymbol{p}\in\Delta_k}\boldsymbol{p}(x)<\varepsilon_k$ при всех $k=1,\ldots,n$. Непрерывность линейных операций можно доказать также как в полунормированном пространстве (см. лекцию 2).

2. *Локально выпуклое пространство $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ отделимо в том и только в том случае, когда для любого $x\neq0$ существует $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x)\neq0$.*

В самом деле, поскольку точка $x\neq0$ является замкнутым множеством, то существует $B\in\beta_0$, т.ч. $x\notin B$. Откуда имеем $\boldsymbol{p}(x)\neq0$ для некоторого $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$. Обратно, если $x\neq y$, то существует $B\in\beta_0$, т.ч. $x-y\notin B$ и значит $x\notin y+B$. Следовательно, множество $\boldsymbol{E}\setminus x$ является открытым, а точка x будет замкнутым множеством.

3. *Пусть* $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ *и* $(\boldsymbol{F},\mathcal{Q})$ *имеют направленные системы полунорм. Линейное отображение* $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ *непрерывно тогда и только тогда, когда для любого* $\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}$ *найдутся* $c>0$ *и* $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$*, т.ч.* $\boldsymbol{q}(f(x))\leqslant c\,\boldsymbol{p}(x)$ *при всех* $x\in\boldsymbol{E}$.

Действительно, если отображение f непрерывно в нуле, то для любых $\varepsilon>0$ и $\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}$ существуют $\delta>0$ и $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x))<\varepsilon$ для всех $x\in\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{p}(x)\leqslant\delta$. Отсюда $\boldsymbol{q}(f(x))<(\varepsilon/\delta)\,\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x)=\delta$. В силу однородности полунорм это неравенство выполнено при всех $x\in\boldsymbol{E}$. Обратно, если $\boldsymbol{q}(f(x))\leqslant c\,\boldsymbol{p}(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$, то отображение f, очевидно, непрерывно в нуле и значит непрерывно.

Говорят, что полунорма $\boldsymbol{q}$ *мажорирует* полунорму $\boldsymbol{p}$ в $\boldsymbol{E}$ и обозначают $\boldsymbol{p}\ll\boldsymbol{q}$, если существует $c>0$, т.ч. $\boldsymbol{p}(x)\leqslant c\,\boldsymbol{q}(x)$ для всех $x\in\boldsymbol{E}$. Две направленные системы полунорм $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ называются *эквивалентными* $\mathcal{P}\sim\mathcal{Q}$ в $\boldsymbol{E}$, если для любого $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$ существует $\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}$, т.ч. $\boldsymbol{p}\ll\boldsymbol{q}$, и для любого $\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}$ существует $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}$, т.ч. $\boldsymbol{q}\ll\boldsymbol{p}$.

4. *Две направленные системы полунорм* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{Q}$ *тогда и только тогда задают одну и ту же топологию в пространстве* $\boldsymbol{E}$*, когда они эквивалентны* $\mathcal{P}\sim\mathcal{Q}$.

Для доказательства нам достаточно применить свойство 3 к тождественному отображению $I:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$, т.ч. $I(x)=x$ при всех $x\in\boldsymbol{E}$.

Теорема (метризуемости). *Отделимое локально выпуклое пространство* $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ *тогда и только тогда является метрическим линейным пространством, когда его топология может быть задана счетной системой полунорм.*

Доказательство. Если $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ является метрическим линейным пространством, то его топология задается инвариантной метрикой $\rho(x,y)$, при этом открытые шары $\boldsymbol{U}_{r_n}\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}|\,\rho(x,0)<r_n\}$, где $r_n=1/n$, составляют локальную базу метрической топологии. Следовательно, для каждого $B\in\beta_0$ существует $n\in\mathbb{N}$, т.ч. $U_{r_n}\subset B$. С другой стороны, поскольку система множеств β_0 является локальной базой, то для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует $\varepsilon_n>0$ и конечное множество $\Delta_n\subset\mathcal{P}$, т.ч. множество $B_n\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\,|\,\max_{\boldsymbol{p}\in\Delta_n}\boldsymbol{p}(x)<\varepsilon_n\}\subset\boldsymbol{U}_{r_n}$. Таким образом, счетная система полунорм $\mathcal{Q}\doteqdot\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ определяет топологию пространства $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$.

Предположим теперь, что система полунорм $\mathcal{P}=\{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ счетна и определим квазинорму по формуле $\|x\|\doteqdot\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\min\{\boldsymbol{p}_n(x),1\}$. Легко проверяются, что она невырождена, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника. Поэтому функция $\rho(x,y)\doteqdot\|x-y\|$ определяет инвариантную метрику в пространстве $\boldsymbol{E}$ и шары $\boldsymbol{U}_{r_n}\subset\boldsymbol{E}$, где $r_n=1/2^n$, образуют локальную базу метрической топологии.

Поскольку в топологии пространства $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ квазинорма $\|x\|$, очевидно, будет непрерывной, то шары $\boldsymbol{U}_{r_n}$ являются открытыми в топологии пространстве $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ и, следовательно, топология в $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ сильнее метрической. С другой стороны, шар $\boldsymbol{U}_{r_n}$ содержится в множестве $B_n\doteqdot\{x\in\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{p}_n(x)<1\}$, т.к. если имеет место неравенство $\boldsymbol{p}_n(x)\geqslant 1$, то $\|x\|\geqslant 1/2^n$. Поэтому топология в $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ слабее метрической. Таким образом, топологии $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ и $(\boldsymbol{E},\rho)$ совпадают. $\square$

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}^*$ обозначает пространство всех линейных функционалов $f:\boldsymbol{E}\to\mathbb{F}$ на пространстве $\boldsymbol{E}$. Подпространство $\boldsymbol{E}'\subset\boldsymbol{E}^*$, состоящее из непрерывных функционалов на $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$, называется *сопряженным пространством* к $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$.

Слабая топология τ_w в локально выпуклом пространстве $(\boldsymbol{E},\mathcal{P})$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_f(x)\doteqdot|f(x)|$, $f\in\boldsymbol{E}'$. *Слабая* топология* τ_{w*} в сопряженном пространстве $\boldsymbol{E}'$ определяется системой полунорм $\boldsymbol{p}_x(f)\doteqdot|f(x)|$, $x\in\boldsymbol{E}$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{E}_1\subset\boldsymbol{E}_2\subset\ldots$ возрастающая последовательность локально выпуклых пространств $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$ в линейном пространстве $\boldsymbol{E}$, которая удовлетворяет следующим трем условиям: 1) объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{E}$; 2) системы полунорм $\mathcal{P}_n$ являются направлеными; 3) сужение $\mathcal{P}_{n+1}|_{\boldsymbol{E}_n}=\mathcal{P}_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех *допустимых полунорм* $\boldsymbol{p}$ в $\boldsymbol{E}$, которые на каждом подпространстве $\boldsymbol{E}_n$ мажорируются $\boldsymbol{p}\ll\boldsymbol{q}$ некоторой полунормой $\boldsymbol{q}\in\mathcal{P}_n$.

Локально выпуклое пространство $(\boldsymbol{E},\mathcal{D})$ называется *индуктивным пределом* последовательности локально выпуклых пространств $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$.

1. *Сужение топологии индуктивного предела* $(\boldsymbol{E},\mathcal{D})$ *на подпространство* $\boldsymbol{E}_n$ *совпадает с топологией этого пространства* $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$.

Так как любая полунорма из $\mathcal{D}$ мажорируется на подпространстве $\boldsymbol{E}_n$ некоторой полунормой из $\mathcal{P}_n$, то топология $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$ сильнее суженной топологии. Обратно, пусть $\boldsymbol{p}_n\in\mathcal{P}_n$. Так как по условию $\mathcal{P}_{n+k}|_{\boldsymbol{E}_{n+k-1}}=\mathcal{P}_{n+k-1}$, то существуют $\boldsymbol{p}_{n+k}\in\mathcal{P}_{n+k}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_{n+k}|_{\boldsymbol{E}_{n+k-1}}=\boldsymbol{p}_{n+k-1}$, $k=1,2,\ldots$. Обозначим через $\boldsymbol{p}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{p}_{n+k}$ предел этих полунорм. Тогда $\boldsymbol{p}\in\mathcal{D}$ и значит топология $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$ слабее суженной топологии.

2. *Если локально выпуклые пространства* $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$ *являются отделимыми, то их индуктивный предел* $(\boldsymbol{E},\mathcal{D})$ *будет отделимым пространством.*

В самом деле, если $x\neq 0$ и $x\in\boldsymbol{E}_n$, то существует $\boldsymbol{p}_n\in\mathcal{P}_n$, т.ч. $\boldsymbol{p}_n(x)\neq 0$. Тогда, как показано выше, найдется $\boldsymbol{p}\in\mathcal{D}$, т.ч. $\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{E}_n}$. Отсюда $\boldsymbol{p}(x)\neq 0$.

3. *Отображение* $f:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ *индуктивного предела* $(\boldsymbol{E},\mathcal{D})$ *в локально выпуклое пространство* $(\boldsymbol{F},\mathcal{Q})$ *тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывны все его сужения* $f|_{\boldsymbol{E}_n}$ *на подпространства* $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$.

Поскольку топология $(\boldsymbol{E}_n,\mathcal{P}_n)$ совпадает с сужением топологии $(\boldsymbol{E},\mathcal{D})$ на $\boldsymbol{E}_n$, то непрерывность $f|_{\boldsymbol{E}_n}$ следует из непрерывности f. Обратно, если сужения $f|_{\boldsymbol{E}_n}$ непрерывны, то для любого $q\in\mathcal{Q}$ найдутся $c_n>0$ и $\boldsymbol{p}_n\in\mathcal{P}_n$, т.ч. $\boldsymbol{q}(f(x))\leqslant c_n\boldsymbol{p}_n(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{E}_n$. Поэтому $\boldsymbol{q}\cdot f\in\mathcal{D}$ и значит отображение f непрерывно.

Обозначим через $\boldsymbol{C}^\infty(X)$ *пространство всех бесконечно дифференцируемых функций* $\varphi:X\to\mathbb{F}$ на открытом множестве $X\subset\mathbb{R}^m$, у которых существуют все частные производные $\partial^\alpha\varphi(x)$, а через $\boldsymbol{C}_0^\infty(Y)\subset\boldsymbol{C}^\infty(X)$ подпространство функций с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi\Subset Y\subset X$. Здесь $\partial^\alpha\varphi(x)\doteqdot\partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_m^{\alpha_m}\varphi(x)$ обозначает дифференциальный оператор порядка $|\alpha|\doteqdot\alpha_1+\ldots+\alpha_m$, $\partial_j\varphi(x)\doteqdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}$ частные производные и $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}_+^m$ мультииндекс.

Лемма. *Локально выпуклое пространство $\mathscr{E}(X) = \boldsymbol{C}^\infty(X)$ с системой полунорм $\boldsymbol{p}_{k,K}(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $k \in \mathbb{N}$ и $K \Subset X$, является пространством Фреше́.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, т.ч. $K_n \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| \leqslant n, \rho(x, \partial X) \geqslant 1/n\}$, где $\rho(x, \partial X) \doteqdot \inf_{x\in\partial X} \|x - y\|$ расстояние от x до границы ∂X. Поскольку всякий компакт $K \Subset X$ содержится в некотором K_n, то система полунорм $\{\boldsymbol{p}_{k,K}\}$ будет эквивалентна системе полунорм $\{\boldsymbol{p}_{n,K_n}\}$.

В силу теоремы метризуемости в пространстве $\mathscr{E}(X)$ можно ввести квазинорму $\|\varphi\| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \min\{\boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi), 1\}$ и инвариантную метрику $\rho(\varphi_1, \varphi_2) \doteqdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, для которой топология совпадает с топологией локально выпуклого пространства $\mathscr{E}(X)$. Докажем полноту этого метрического линейного пространства.

Пусть $\{\varphi_k\}$ последовательность Коши. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует N, т.ч. $2^{-n}\boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi_k - \varphi_l) \leqslant \|\varphi_k - \varphi_l\| < \varepsilon$ при всех $k, l > N$. В силу критерия Коши $\{\varphi_k\}$ сходится равномерно вместе со всеми производными на каждом компакте K_n. Отсюда пределы последовательности и всех ее производных будут непрерывны. Следовательно, существует $\varphi \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$, т.ч. $\varphi_k \to \varphi$ сходится в метрике $\mathscr{E}(X)$. □

Следствие. *Локально выпуклые пространства $\mathscr{D}(K) = \boldsymbol{C}_0^\infty(K)$ с определенной системой норм $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{p}_k\}_{k=1}^\infty$, где $K \Subset X$ компакт и $\boldsymbol{p}_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, являются пространствами Фреше́.*

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ является открытым множеством и задана такая возрастающая последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, что $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$. Тогда имеем $\mathscr{D}(K_1) \subset \mathscr{D}(K_2) \subset \dots$ и $\mathscr{D}(X) \doteqdot \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{D}(K_n) = \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$.

Пространством *основных функций* $\mathscr{D}(X)$ на открытом множестве X называется индуктивный предел последовательности локально выпуклых пространств $\mathscr{D}(K_n)$. Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$ к пространству $\mathscr{D}(X)$, в котором введена слабая* топология, называется пространством *обобщенных функций*.

Определение индуктивного предела не зависит от выбора последовательности компактов. В самом деле, если $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ — возрастающая последовательность компактов, т.ч. $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$, то всякий компакт $K \Subset X$ содержится в некотором K_n. Предположим обратное. Тогда существует последовательность точек $x_n \in K \setminus K_n$. Поскольку $x_k \notin K_n$ при всех $k \geqslant n$, то эта последовательность не имеет предельных точек в X. Однако в силу компактности множества K существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x \in K \subset X$. Таким образом, получили противоречие.

12 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним некоторые определения и выводы предыдущей лекции. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ открытое множество, $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \Subset X$ и системой полунорм $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{p}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, где $\boldsymbol{p}_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in X} |\partial^\alpha \varphi(x)|$. Его подпространства $\mathscr{D}(K) \subset \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$ функций к носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, где $K \Subset X$ компактно, являются пространствами Фреше́.

Пусть задана $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ возрастающая последовательность компактов, т.ч. $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathring{K}_n$. Отсюда получим $\mathscr{D}(K_1) \subset \mathscr{D}(K_2) \subset \dots$ и $\mathscr{D}(X) \doteqdot \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{D}(K_n) = \boldsymbol{C}_0^\infty(X)$. Локально выпуклое пространство $\mathscr{D}(X)$ с системой всех допустимых полунорм $\mathcal{D}$ называется индуктивным пределом последовательности подпространств $\mathscr{D}(K_n)$.

Пространство $\mathscr{D}(X)$ называют пространством *основных функций*. Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$ называют пространством *обобщенных функций*. Оно состоит из всех непрерывных линейных функционалов $f : \mathscr{D}(X) \to \mathbb{F}$ на пространстве $\mathscr{D}(X)$. Значение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ (как линейного функционала) на основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ далее будем обозначать через $\langle f, \varphi\rangle \doteqdot f(\varphi)$.

Говорят, что множество $M \subset \boldsymbol{E}$ *ограничено* в локально выпуклом пространстве $(\boldsymbol{E}, \mathcal{Q})$, если оно является ограниченным относительно каждой полунормы $\boldsymbol{p} \in \mathcal{Q}$, т.е. $\sup_{x\in M} \boldsymbol{p}(x) < \infty$ при всех $\boldsymbol{p} \in \mathcal{Q}$. В частности, множество $M \subset \mathscr{D}(X)$ является ограниченным, если $\sup_{\varphi\in M} \boldsymbol{p}(\varphi) < \infty$ при всех допустимых полунорм $\boldsymbol{p} \in \mathcal{D}$.

1. *Для всякого ограниченного множества $M \subset \mathscr{D}(X)$ существует такой компакт $K \Subset X$, что множество $M \subset \mathscr{D}(K)$ и является ограниченным в $\mathscr{D}(K)$.*

Предположим обратное. Тогда существуют такие последовательности $\varphi_n \in M$ и $x_n \in X \setminus K_n$, что $\varphi_n(x_n) \neq 0$. Так как любой компакт K_n содержит конечное число точек x_n, то полунорма $\boldsymbol{p}(\varphi) \doteqdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |n\varphi(x_n)/\varphi_n(x_n)|$ допустима, т.е. $\boldsymbol{p} \in \mathcal{D}$. При этом имеем $\boldsymbol{p}(\varphi_n) \geqslant n \to \infty$, что противоречит ограниченности M.

2. *Пространство основных функций $\mathscr{D}(X)$ является полным.*

Всякая последовательность Коши $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена, так как из неравенства $|\boldsymbol{p}(\varphi_k) - \boldsymbol{p}(\varphi_l)| \leqslant \boldsymbol{p}(\varphi_k - \varphi_l) < \varepsilon$ при $k, l \geqslant n$ следует $\sup \boldsymbol{p}(\varphi_n) < \infty$ для всех $\boldsymbol{p} \in \mathcal{D}$. Поэтому она содержится в некотором $\mathscr{D}(K)$ и в силу полноты $\mathscr{D}(K)$ сходится.

Теорема. *Сопряженное пространство $\mathscr{D}'(X)$ полно в слабой* топологии.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ последовательность Коши в слабой* топологии $\mathscr{D}'(X)$, то существует предел $\lim_{n\to\infty}\langle f_n, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Тогда f является линейным функционалом и согласно свойству индуктивного предела достаточно проверить его непрерывность на каждом подпространстве $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(X)$. Применяя принцип равностепенной непрерывности в нуле для любого $\varepsilon > 0$ существуют $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, т.ч. $|\langle f_n, \varphi\rangle| < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, т.ч. $\boldsymbol{p}_k(\varphi) < \delta$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(K)$, т.ч. $\boldsymbol{p}_k(\varphi) < \delta$. Поэтому f непрерывен на $\mathscr{D}(K)$ и значит непрерывен на $\mathscr{D}(X)$. $\square$

В силу доказанных ранее утверждений имеют место следующие свойства:

a) последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в топологии пространства $\mathscr{D}(X)$ в том и только в том случае, когда 1) существует компакт $K \Subset X$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и 2) предел $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_k(\varphi_n - \varphi) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$;

b) функционал $f : \mathscr{D}(X) \to \mathbb{F}$ тогда и только тогда $f \in \mathscr{D}'(X)$, когда он 1) линейный, т.е. $\langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle f, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle f, \varphi_2\rangle$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(X)$ и 2) непрерывный, т.е. из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{D}(X)$ следует $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$;

c) линейный оператор $A : \mathscr{D}(X) \to \mathscr{D}(X)$ непрерывен тогда и только тогда, когда из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{D}(X)$ следует сходимость $A\varphi_n \to A\varphi$ в $\mathscr{D}(X)$.

d) если последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ слабо* сходится в $\mathscr{D}'(X)$, т.е. если $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ для каждой функции $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, то $f \in \mathscr{D}'(X)$.

Пример 1. *Примеры основных функций из пространства* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим функцию $e(t) \doteq e^{-1/t}$ при всех $t > 0$ и $e(t) \doteq 0$ при всех $t \leqslant 0$. Тогда по правилу Лопитáля нетрудно проверить, что функция $e(t)$ является бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$. Следовательно, функция $\xi(x) \doteq e(1 - \|x\|^2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ является бесконечно дифференцируемой, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$ и имеет носитель в единичном шаре $\operatorname{supp}\xi = \boldsymbol{S}_1 \doteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Система функций $\theta_r(x) \doteq c_r\xi(x/r)$ называется *аппроксимативной единицей*, где константы $c_r > 0$ подобраны так, чтобы ее интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x)\,dx = 1$. Функции $\theta_r(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ являются бесконечно дифференцируемыми, неотрицательными и имеют носитель $\operatorname{supp}\theta_r = \boldsymbol{S}_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leqslant r\}$ в шаре радиуса $r > 0$.

Рассмотрим функцию $\eta(x) \doteq \int_{\boldsymbol{S}_{3/4}} \theta_{1/4}(x-y)\,dy$. Ясно, что $\eta(x) = 1$ при $x \in \boldsymbol{S}_{1/2}$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin \boldsymbol{S}_1$. При этом функция $\eta(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ будет бесконечно дифференцируемой, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ и имеет носитель $\operatorname{supp}\eta = \boldsymbol{S}_1$ в единичном шаре.

Пример 2. *Примеры обобщенных функций из пространства* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Обобщенная функция $\delta(x - x_0) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\langle \delta(x - x_0), \varphi\rangle \doteq \varphi(x_0)$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, называется ***δ*-*функцией*** в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$. В частности, $\langle \delta(x), \varphi\rangle \doteq \varphi(0)$.

Обобщенная функция $\operatorname{vp}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, называемая главным значением функции $\frac{1}{x}$, определяется по формуле $\langle \operatorname{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle \doteq \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

$$\left\langle \operatorname{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx, \text{ где } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

В силу слабой* полноты пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ функционал является непрерывным.

Каждая локально интегрируемая функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ определяет обобщенную функцию по формуле $\langle f, \varphi\rangle \doteq \int_X f(x)\varphi(x)\,dx$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Непрерывность этого функционала вытекает из теоремы Лебéга о мажорируемой сходимости, т.к. из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{D}(X)$ следует сходимость интегралов $\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$.

Рассмотрим действия с обобщенными функциями $f \in \mathscr{D}'(X)$.

3. *Произведение обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ на функцию $g \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$ определяется по формуле $\langle gf, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, g\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$.*

Непрерывность функционала gf в $\mathscr{D}(X)$ вытекает из непрерывности оператора умножения $M_g(\varphi) \doteqdot g\varphi$ на функцию $g \in \boldsymbol{C}^\infty(X)$ на пространстве $\mathscr{D}(X)$.

4. *Операторы сдвига $\tau_a f$ и растяжения $\rho_\lambda f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяются по формулам $\langle \tau_a f, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle$ и $\langle \rho_\lambda f, \varphi\rangle \doteqdot |\lambda|^m \langle f, \rho_{\lambda^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и $\lambda \neq 0$, где $\tau_a\varphi(x) \doteqdot \varphi(x-a)$ и $\rho_\lambda\varphi(x) \doteqdot \varphi(\lambda^{-1}x)$.*

Непрерывность функционалов $\tau_a f$ и $\rho_\lambda f$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ вытекает из непрерывности соответствующих операторов сдвига τ_a и растяжения ρ_λ в пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$.

5. *Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное отображение, т.ч. определитель $\det A \neq 0$. Тогда замена переменных $y = A(x)$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ определяется по формуле $\langle T_A f, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, |\det A|\, T_{A^{-1}}\varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, где $T_A\varphi(y) = \varphi(A^{-1}(y))$.*

Непрерывность функционала $T_A f$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$ следует из непрерывности оператора замены переменных $T_A\varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$.

6. *Производные обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ степени $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ определяются по формуле $\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle \doteqdot (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, где $|\alpha| = \sum_{k=1}^m \alpha_k$.*

Непрерывность функционала $\partial^\alpha f$ в $\mathscr{D}(X)$ вытекает из непрерывности оператора дифференцирования $\partial^\alpha\varphi$ в пространстве $\mathscr{D}(X)$.

Определение. Обобщенные функции $f, g \in \mathscr{D}'(X)$ совпадают $f = g$ на множестве $A \subset X$, если $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset A$. Обобщенные функции $f, g \in \mathscr{D}'(X)$ совпадают $f(x) = g(x)$ в точке $x \in X$, если они совпадают в некоторой открытой окрестности этой точки. Замкнутое множество

$$\operatorname{supp} f \doteqdot \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

называется *носителем обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$*.

Лемма (о локализации). *Если обобщенные функции $f, g \in \mathscr{D}'(X)$ совпадают в каждой точке $x \in A$ открытого множества $A \subset X$, то они равны на A.*

Доказательство. Рассмотрим все открытые шары $\boldsymbol{U}_{2r}(x)$, содержащиеся в A, для которых $f = g$. Поскольку основная функция $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ имеет компактный носитель $K = \operatorname{supp}\varphi \subset A$, то существует конечное покрытие компакта $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \boldsymbol{U}_{r_j}(x_j)$. Определим основные функции $\varepsilon_i \in \mathscr{D}(X)$ по формуле

$$\varepsilon_i(x) \doteqdot \vartheta_{r_i}(x - x_i) / \textstyle\sum_{j=1}^m \vartheta_{r_j}(x - x_j), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\vartheta_r(x)$ аппроксимативная единица. Так как носитель функции ε_i содержится в шаре $\operatorname{supp}\varepsilon_i \subset \boldsymbol{U}_{2r_i}(x_i)$ и их сумма равна $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x) = 1$ на множестве K, то получаем $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle f, \varepsilon_i\varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle g, \varepsilon_i\varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi \subset A$. $\square$

Рассмотрим структуру сопряженного пространства $\mathscr{E}'(X)$ к локально выпуклому пространству $\mathscr{E}(X) = \boldsymbol{C}^\infty(X)$ с системой полунорм $\boldsymbol{p}_{k,K}(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, где $k \in \mathbb{N}$ и $K \Subset X$. Эта система полунорм в $\mathscr{E}(X)$ эквивалентна счетной системе полунорм $\boldsymbol{p}_{n,K_n}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $K_n \doteqdot \{x \in X \mid \|x\| \leqslant n, \rho(x, \partial X) \geqslant 1/n\}$.

Теорема. *Обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(X)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда существует единственная $g \in \mathscr{E}'(X)$, т.ч. $g|_{\mathscr{D}(X)} = f$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим основные функции $\eta_n \in \mathscr{D}(X)$, где

$$\eta_n(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} \theta_{1/4n}(x-y)\chi_{K_{4n/3}}(y)\,dy = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_n; \\ 0, & \text{если } x \notin K_{2n}. \end{cases}$$

Определим линейный функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ по формуле $\langle g, \varphi\rangle \doteqdot \langle f, \eta_n \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$, где число $n \in \mathbb{N}$ выбрано, т.ч. $\operatorname{supp} f \subset K_n$. Так как линейный оператор $A_n\varphi \doteqdot \eta_n\varphi$ является непрерывным в пространстве $\mathscr{E}(X)$, то $g \in \mathscr{E}'(X)$. Поскольку $\operatorname{supp} f \subset K_n$ и функция $\varphi(x) - \eta_n(x)\varphi(x) = 0$ при всех $x \in K_n$, то

$$\langle g, \varphi\rangle = \langle f, \eta_n\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle - \langle f, \varphi - \eta_n\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X).$$

Единственность. Допустим, что существуют $g_1, g_2 \in \mathscr{E}(X)$, т.ч. $\langle g_1, \varphi\rangle = \langle g_2, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathscr{E}(X)$ полагаем $\varphi_n(x) \doteqdot \eta_n(x)\varphi(x)$. Тогда имеем $\varphi_n \in \mathscr{D}(X)$ и $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathscr{E}(X)$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\langle g_1, \varphi\rangle = \lim\langle g_1, \varphi_n\rangle = \lim\langle g_2, \varphi_n\rangle = \langle g_2, \varphi\rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{E}(X).$$

Достаточность. Если функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$, то $f \doteqdot g|_{\mathscr{D}(X)}$ будет непрерывным линейным функционалом на пространстве $\mathscr{D}(X)$, так как индуктивная топология $\mathscr{D}(X)$ сильнее суженной топологии из пространства $\mathscr{E}(X)$. Поскольку функционал $g \in \mathscr{E}'(X)$ непрерывен, то найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $c_n > 0$, т.ч. $|\langle g, \varphi\rangle| \leqslant c_n \boldsymbol{p}_{n,K_n}(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathscr{E}(X)$. Следовательно, имеем $\langle g, \varphi\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, т.ч. $\operatorname{supp}\varphi \subset X \setminus K_n$. Таким образом, носитель $\operatorname{supp} f \subset K_n$ является компактным. □

Следствие. *Отображение $\mathscr{E}'(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$, которое каждой $f \in \mathscr{E}'(X)$ ставит в соответствие $g \doteqdot f|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)}$, является непрерывным и инъективным, а его образ состоит из всех обобщенных функций с компактным носителем.*

Инъективность следует из единственности. Для доказательства непрерывности возьмем $U = \{f \in \mathscr{D}'(X) | \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle f, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ слабую* окрестность нуля в $\mathscr{D}'(X)$, тогда $V = \{g \in \mathscr{E}'(X) | \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ является слабой* окрестностью нуля в $\mathscr{E}'(X)$. Так как $V \subset U$, то указанное отображение непрерывно.

13 РЕГУЛЯРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. *Усреднением функции* $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ в смысле Со́болева называется следующая система функций, определенных на пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$f_r(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y)\, f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x-y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m \text{ и } r > 0,$$

где $\theta_r(x)$ аппроксимативная единица и $f(x) = 0$ при всех $x \notin X$.

1. *Функция $f_r \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ является бесконечно дифференцируемой и ее носитель содержится в множестве $Y_r \doteqdot \{y \in \mathbb{R}^m \mid \rho(y,X) \leqslant r\}$, где $\rho(y,X) \doteqdot \inf_{x\in X} |y-x|$.*

Поскольку $\theta_r \in \boldsymbol{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то в силу теоремы Лебе́га о мажорируемой сходимости усреднение $f_r(x)$ можно дифференцировать под знаком интеграла Лебега

$$\partial^\alpha f_r(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \partial^\alpha \theta_r(x-y)\, f(y)\, dy \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^m \text{ и } r > 0.$$

Так как носитель $\operatorname{supp} \theta_r \subset \boldsymbol{S}_r$, то $f_r(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, т.ч. $\rho(x,X) > r$.

2. *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то выполняется неравенство $\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$.*

Поскольку $\int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(x)\, dx = 1$, то, применяя обобщенное неравенство Минко́вского и инвариантность нормы $\|\tau_y f\|_{\boldsymbol{L}_p} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}$ при сдвиге $\tau_y f(x) \doteqdot f(x-y)$, получим

$$\|f_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \theta_r(y) \|\tau_y f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy = \|f\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

3. *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то $\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $r \to 0$.*

Поскольку $\int_{\boldsymbol{S}_r} \theta_r(x)\, dx = 1$, то $f_r(x) - f(x) = \int_{\boldsymbol{S}_r} \theta_r(y) \big(\tau_y f(x) - f(x)\big)\, dy$. Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минко́вского, имеем следующие неравенства:

$$\|f_r - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \int_{\boldsymbol{S}_r} \theta_r(y)\, \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} dy \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \|\tau_y f - f\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \|\tau_y f - \tau_y h\|_{\boldsymbol{L}_p} +$$
$$+ \sup_{\|y\|\leqslant r} \|\tau_y h - h\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|f - h\|_{\boldsymbol{L}_p} = 2\|f-h\|_{\boldsymbol{L}_p} + \sup_{\|y\|\leqslant r} \|\tau_y h - h\|_{\boldsymbol{L}_p}.$$

Так как множество всех простых функций $h = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_p(X)$, то в силу этого неравенства достаточно доказать, что $\|\tau_y h - h\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ при $\|y\| \to 0$. Применяя неравенство треугольника, достаточно показать, что $\|\tau_y \chi_E - \chi_E\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ для каждого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ конечной меры. Используя формулу

$$\|\chi_E - \chi_B\|_{\boldsymbol{L}_p} = \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |\chi_E - \chi_B|^p d\lambda_m\Big)^{1/p} = \lambda_m^{1/p}(E \triangle B)$$

и теорему Валле́–Пуссе́на, каждую характеристическую функцию χ_E множества конечной меры аппроксимируем характеристической функцией χ_B конечного объединения интервалов $B = \bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$. Таким образом, достаточно проверить, что $\|\tau_y \chi_{(a,b)} - \chi_{(a,b)}\|_{\boldsymbol{L}_p} \to 0$ для каждого интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}^m$, что очевидно верно.

Теорема (о плотности основных функций). *Если $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ и $1 \leqslant p < \infty$, то существуют $\varphi_n \subset \mathscr{D}(X)$, т.ч. $\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_\infty} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_\infty}$ и $\lim_{n\to\infty}\|f-\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_p} = 0$.*

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем компактное множество $K_c \Subset X$, т.ч. $\int_{X\setminus K_c} |f(x)|^p dx < (\varepsilon/2)^p$, где $K_c \doteqdot \{x \in X \,|\, \|x\| \leqslant c, \rho(x,X) \geqslant 1/c\}$, а затем положим $g(x) = f(x)\chi_{K_c}(x)$. В силу доказанных выше свойств усреднения g_r получим, что $\operatorname{supp} g_r \Subset X$ и $\|g-g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon/2$ при всех $0 < r < \delta < 1/c$. Тогда, применяя неравенство треугольника, имеем $\|f-g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} \leqslant \|f-g\|_{\boldsymbol{L}_p} + \|g-g_r\|_{\boldsymbol{L}_p} < \varepsilon$ при всех $0 < r < \delta$. Таким образом, функции $\varphi_n(x) \doteqdot g_{1/cn}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. □

Определение. Пусть $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ пространство локально интегрируемых функций на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, т.е. $f \in \boldsymbol{L}_1(K)$ на любом компакте $K \Subset X$. Для каждой функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$, определенный по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle \doteqdot \int_X f(x)\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X),$$

называется *регулярной обобщенной функцией* на множестве X.

Непрерывность этого функционала следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Введем в пространство $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ систему полунорм $\boldsymbol{p}_{X_n}(f) \doteqdot \int_{X_n} |f(x)|\,dx$, где $n \in \mathbb{N}$ и $X_n \doteqdot X \cap \boldsymbol{U}_n$ ограниченные множества, т.ч. $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ и $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Поэтому $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ отделимое локально выпуклое пространство и в силу полноты пространств $\boldsymbol{L}_1(X_n)$ получим, что $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ является пространством Фреше́.

Теорема. *Отображение $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \hookrightarrow \mathscr{D}'(X)$, которое функции $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ ставит в соответствие функционал $f \in \mathscr{D}'(X)$ является инъективным и непрерывным.*

Доказательство. Докажем инъективность этого отображения. Пусть $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ и предположим, что $\int_X f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Определим ограниченную функцию по формуле $e(x) \doteqdot |f(x)|/f(x)$, если $f(x) \neq 0$, и $e(x) = 0$, если $f(x) = 0$.

Применяя теорему о плотности основных функций $\mathscr{D}(X_n)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(X_n)$, получим последовательность функций $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}(X_n)$, т.ч. $|\varphi_k(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$ и $\varphi_k \to e$ сходится в $\boldsymbol{L}_1(X_n)$. Выберем из нее такую подпоследовательность $\{\varphi_{k_j}\}$, которая сходится к функции $e(x)$ п.в. на множестве X_n. Тогда из теоремы Лебе́га о мажорируемой сходимости получим следующее равенство:

$$\int_{X_n} |f(x)|\,dx = \int_{X_n} f(x)\,e(x)\,dx = \lim \int_{X_n} f(x)\left(e(x) - \varphi_{k_j}(x)\right)dx = 0.$$

Поэтому $f(x) = 0$ при п.в. на множестве X_n. Поскольку это равенство имеет место при всех $n \in \mathbb{N}$, то функция $f(x) = 0$ п.в. на множестве X.

Если $U = \{f \in \mathscr{D}'(X) \,|\, \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle f, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ слабая* окрестность нуля в $\mathscr{D}'(X)$, то $V = \{g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \,|\, \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ является окрестностью нуля в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$, т.к. каждое из множеств $\{g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X) \,|\, |\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ является открытым в $\boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$. Так как $V \subset U$, то указанное отображение непрерывно. □

Определение. Говорят, что функция $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ имеет производную $g \doteqdot \partial^\alpha f$ *в смысле Со́болева* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^m$, если $g \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(X)$ и

$$\int_X g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_X f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx \text{ при всех } \varphi \in \mathscr{D}(X).$$

В силу доказанной теоремы производная в смысле Со́болева $g \doteqdot \partial^\alpha f$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности функций на множестве X.

Пространство Со́болева $\mathscr{W}_p^k(X)$ состоит из классов эквивалентности функций $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$, у которых производные в смысле Со́болева $\partial^\alpha f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Норма функции $f \in \mathscr{W}_p^k(X)$ в этом пространстве определяется по формуле

$$\|f\|_{\mathscr{W}_p^k} \doteqdot \textstyle\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha f\|_{\boldsymbol{L}_p}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Теорема. *Пространства Соболева $\mathscr{W}_p^k(X)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ являются ба́наховыми пространствами.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ является последовательностью Коши́ в пространстве $\mathscr{W}_p^k(X)$. Тогда $\{\partial^\alpha f_n\}$ будет последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$. Так как $\boldsymbol{L}_p(X)$ полно, то последовательность $f_n \to f$ сходится и все производные $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ сходятся в $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $|\alpha| \leqslant k$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| \leqslant \int_X |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{\boldsymbol{L}_p}\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_q} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, где $1/p + 1/q = 1$. Следовательно, $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ и аналогично $\langle\partial^\alpha f_n, \varphi\rangle \to \langle g_\alpha, \varphi\rangle$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$. Поэтому по определению производной в смысле Соболева получаем следующие равенства:

$$\langle g_\alpha, \varphi\rangle = \lim_n\langle\partial^\alpha f_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_n\langle f_n, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha\varphi\rangle$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, т.е. $\partial^\alpha f = g_\alpha$. Таким образом, $f_n \to f$ сходится в $\mathscr{W}_p^k(X)$. □

Лемма. *Если обобщенная функция $f \in \mathscr{D}'(a,b)$ имеет $\partial^1 f = 0$, то $f = const$.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathscr{D}(a,b)$, т.ч. $\int_a^b \theta(x)\,dx = 1$. Всякая функция $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ допускает представление $\varphi(x) = \varphi_0(x) + c\,\theta(x)$, где $c = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi_0(x)\,dx = 0$. Тогда $\varphi_0 \in \mathscr{D}(a,b)$ является производной от основной функции $\varphi_1(x) = \int_a^x \varphi_0(t)\,dt$. Поэтому $\langle f', \varphi_1\rangle = -\langle f, \varphi_0\rangle = 0$ и значит для всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\langle f, \varphi\rangle = c\,\langle f, \theta\rangle = \int_a^b \langle f, \theta\rangle\,\varphi(x)\,dx = \langle c_1, \varphi\rangle, \text{ где } c_1 \doteqdot \langle f, \theta\rangle.$$

Следовательно, функционал равен $f = const$ на пространстве $\mathscr{D}(a,b)$. □

Определение. Функция $F : X \to \mathbb{F}$ называется *локально абсолютно непрерывной* на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$ и обозначается $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, если она абсолютно непрерывна $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом отрезке $[a,b] \subset X$.

Теорема. *Для того чтобы существовала производная $\partial^1 f$ в смысле Соболева обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(X)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, т.ч. $F = f$ п.в. на X.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $g(x) \doteqdot \int_a^x \partial^1 f(t)\,dt$ на отрезке $[a,b] \subset X$. По теореме Фубини при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b \Big(\int_a^x \partial^1 f(t)\,dt\Big)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b \partial^1 f(t)\varphi(t)\,dt = \int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Отсюда $\int_a^b (f(t)-g(t))\,\varphi'(t)\,dt = 0$ при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$. Следовательно, по лемме имеет место равенство $f = g + c$ п.в. на отрезке $[a,b] \subset X$. Поэтому существует функция $F \in \boldsymbol{AC}_{\ell oc}(X)$, т.ч. $F = f$ п.в. на множестве X.

Достаточность. Пусть $f = F$ п.в. на X, где $F \in \boldsymbol{AC}[a,b]$ на каждом $[a,b] \subset X$. По формуле Ньюто́на–Ле́йбница $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$. Тогда при всех $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b F(a)\varphi'(x)\,dx + \int_a^b \Big(\int_a^x F'(t)\,dt\Big)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b F'(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Следовательно, $\partial^1 f = F'$ является производной в смысле Соболева функции f. □

Пример 1. Докажем, что δ-функция $\delta(x)$ не является регулярной на прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим основную функцию $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и пусть $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(nx)$. Если $\delta(x)$ регулярна, то для некоторой $f \in \boldsymbol{L}_{\ell oc}(\mathbb{R})$ получим $\langle \delta(x), \varphi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако это невозможно, поскольку $\varphi_n(x) \to 0$ при всех $x \neq 0$ и значит интеграл также стремится к нулю.

Пример 2. Обобщенная производная функции Хевиса́йда $\theta(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$ равна $\partial^1\theta(x) = \delta(x)$ δ-функции, которая нерегулярна на прямой $\mathbb{R}$. Поэтому функция Хевиса́йда $\theta(x)$ не имеет производной в смысле Со́болева.

Пусть $F : X \to \mathbb{F}$ имеет локально ограниченную вариацию на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}$, т.е. $F \in \boldsymbol{BV}[a,b]$ на каждом отрезке $[a,b] \subset X$. Обобщенная производная $\partial^1 F$ называется *обобщенной мерой*, поскольку значения функционала $\partial^1 F$

$$\langle \partial^1 F, \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dF(x)$$

при всех $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ совпадают с интегралом по обобщенной мере Сти́лтьеса.

14 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ называется *быстро убывающей*, если $\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m$, где $x \doteqdot (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\beta \doteqdot (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ $x^\beta \doteqdot x_1^{\beta_1} \ldots x_m^{\beta_m}$. Через $\|x\| \doteqdot \left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^{1/2}$ обозначается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Определение. *Пространством Шва́рца* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ называется локально выпуклое пространство быстро убывающих функций с системой норм $Q = \{q_k\}_{k=1}^\infty$, где

$$q_k(\varphi) \doteqdot \sup_{|\alpha|\leqslant k, x\in\mathbb{R}^m} (1 + \|x\|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Сопряженное пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ в слабой* топологии называется пространством *обобщенных функций медленного роста*.

Лемма. *Множество $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Пусть основная функция $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, т.ч. $\eta(x) \geqslant 0$, $\eta(x) = 1$ при $\|x\| \leqslant 1/2$ и $\eta(x) = 0$ при $\|x\| \geqslant 1$. Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то положим $\varphi_n(x) \doteqdot \eta(x/n)\varphi(x)$. Тогда $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ и по формуле Ле́йбница имеем следующее неравенство:

$$|\partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)| = |\partial^\alpha\big((\eta(x/n) - 1)\,\varphi(x)\big)| \ll \textstyle\sum_{\beta\leqslant\alpha} |\partial^{\alpha-\beta}\big(\eta(x/n) - 1\big)\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем N, т.ч. $(1 + \|x\|^2)^k |\partial^\beta \varphi(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| \geqslant N$ и $|\beta| \leqslant k$. Так как $\eta(x/n) - 1 = 0$ при всех $\|x\| \leqslant n/2$, то $(1 + \|x\|^2)^k |\partial^\alpha\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)| \ll \varepsilon$ при всех $n \geqslant 2N$ и $|\alpha| \leqslant k$. Таким образом, получаем $q_k(\varphi_n - \varphi) \to 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \to \infty$, т.е. последовательность $\varphi_n \to \varphi$ сходится в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Теорема. *Отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, которое каждому $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ставит в соответствие $g \doteqdot f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}$, является инъективным и непрерывным.*

Доказательство. Если $K \Subset X$ и $k \in \mathbb{N}$, то существует $c_k > 0$, т.ч. $q_k(\varphi) \leqslant c_k p_k(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, т.е. $q_k \in \mathcal{D}$. Поэтому вложение $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ непрерывно и, значит, $g \doteqdot f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)}$ является непрерывным функционалом, т.е. $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Докажем инъективность этого отображения. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. В силу леммы для каждой функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ существует такая последовательность функций $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, что $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому получаем $\langle f, \varphi\rangle = \lim\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Отсюда функционал $f = 0$ на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и, следовательно, отображение инъективно.

Если $U = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) |\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle f, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ слабая* окрестность нуля в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, то $V = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) |\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\langle g, \varphi_k\rangle| < \varepsilon\}$ является слабой* окрестностью нуля в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Так как $V \subset U$, то указанное отображение непрерывно. $\square$

Пример 1. Функция $f(x) \doteqdot e^{x^2} \in L_{\ell oc}(\mathbb{R})$ определяет регулярный функционал, но функционал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, заданный на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, не имеет непрерывного продолжения на пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, т.е. $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. В самом деле, пусть функция $\varphi(x) = e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Применяя лемму, построим функции $\varphi_n(x) = \eta(x/2n)\varphi(x)$, т.ч. $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\varphi_n \to \varphi$ сходится в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Однако имеем $\langle f, \varphi_n\rangle > \int_{-n}^n e^{x^2/2} dx \to \infty$.

Определение. Пусть $\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{m}x_k y_k$ скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^m$, тогда $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. Для всех функций $f\in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ полагаем

$$\widehat{f}(x)\doteqdot \varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy,\quad \widetilde{f}(x)\doteqdot \varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy,\quad \varkappa\doteqdot 1/\sqrt{2\pi}.$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f)\doteqdot\widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f)\doteqdot\widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функции f, интегрируемой по Лебе́гу.

Заметим, что в силу теоремы Фубини многомерное преобразование Фурье в $\mathbb{R}^m$ является композицией одномерных преобразование Фурье по каждой переменной.

Пример 2. Функция $h_0(x)=\boldsymbol{e}^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора Фурье́ с собственным значением 1, т.е. $\mathcal{F}(h_0)=h_0$. В самом деле, имеем

$$\widehat{h_0}(x)=\varkappa\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}-\boldsymbol{i}xy}dy=\varkappa\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\frac{(y+\boldsymbol{i}x)^2}{2}}dy=\varkappa\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\frac{y^2}{2}}dy=h_0(x),$$

т.к. по теореме Коши́ $\int_{\Im z=x}\boldsymbol{e}^{-z^2/2}dz=\int_{\Im z=0}\boldsymbol{e}^{-z^2/2}dz=\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-y^2/2}dy=\sqrt{2\pi}$.

Теорема. *Оператор Фурье́ $\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ в пространстве Шва́рца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным и биективным .*

Доказательство. Дифференцируя и интегрируя по частям для всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)=\varkappa^m\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)(-\boldsymbol{i}y)^\alpha\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy,\quad \widehat{\partial^\alpha\varphi}(x)=\varkappa^m(\boldsymbol{i}x)^\alpha\int_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}dy.$$

Тогда $(1+\|x\|^2)^k\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)=\mathcal{F}\{(1-\Delta)^k(-\boldsymbol{i}y)^\alpha\varphi(y)\}$, где $\Delta=\sum_{j=1}^{m}\partial_j^2$ оператор Лапласа.

$$\boldsymbol{q}_k(\widehat{\varphi})=\sup_{|\alpha|\leqslant k,\,x\in\mathbb{R}^m}(1+\|x\|^2)^k\partial^\alpha\widehat{\varphi}(x)|\leqslant\varkappa^m\sup_{|\alpha|\leqslant k}\int_{\mathbb{R}^m}|(1-\Delta)^k y^\alpha\varphi(y)|\,dy\ll\boldsymbol{q}_{2km}(\varphi).$$

Таким образом, имеет место неравенство $\boldsymbol{q}_k(\widehat{\varphi})\ll\boldsymbol{q}_{2km}(\varphi)$ для всех $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому оператор $\mathcal{F}$ непрерывен на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Для доказательства биективности оператора $\mathcal{F}$ докажем равенство $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x)=\varphi(x)$. В силу теоремы Фубини достаточно проверить это равенство в случае $m=1$.

$$\widetilde{\widehat{\varphi}}(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(y)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}yz}dz\Big)\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}xy-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa^2\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\Big(\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(z-x)y-\frac{(\varepsilon y)^2}{2}}dy\Big)\,dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\Big(\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(\frac{z-x}{\varepsilon})y-\frac{y^2}{2}}dy\Big)\,dz=$$

$$\text{(см. пример 2)}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varkappa}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\varphi(z)\,\boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)^2}dz=\lim_{\varepsilon\to+0}\varkappa\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+\varepsilon t)\boldsymbol{e}^{-\frac{t^2}{2}}dz=\varphi(x).$$

Аналогично имеем $\widehat{\widehat{\varphi}}(x)=\varphi(x)$. Отсюда композиция операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ совпадает с тождественным оператором, т.е. $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}=I$. Таким образом, преобразование Фурье является биективным в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Определение. Для каждой функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ по определению полагаем

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle \doteqdot \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle \quad \text{при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Линейные операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ медленного роста.

Теорема. *Оператор Фурье́ $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ в пространстве обобщенных функций медленного роста является биективным и непрерывным.*

Доказательство. Так как преобразование Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывным, то $\widehat{f}, \widetilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, а так как является биективным, то

$$\langle \widetilde{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\widetilde{\varphi}} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \text{ и } \langle \widehat{\widetilde{f}}, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \text{ при всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда композиция прямого и обратного операторов $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F} = I$ является тождественным оператором в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и, значит, оператор $\mathcal{F}$ биективен в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть $U = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) | \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\langle f, \varphi_k \rangle| < \varepsilon\}$ слабая* окрестность нуля в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\mathcal{F}^{-1}U = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) | \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\langle g, \widehat{\varphi}_k \rangle| < \varepsilon\}$ является слабой* окрестностью нуля в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Поэтому отображение $\mathcal{F}$ непрерывно. □

Рассмотрим формулы для преобразования Фурье́ обобщенных функций.

1. *Формула сдвига. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x - a)$, где $a \in \mathbb{R}^m$, то*

$$\mathcal{F}(\tau_a f) = e^{-\boldsymbol{i}\langle a,x \rangle} \mathcal{F} f(x), \quad \tau_a \mathcal{F} f = \mathcal{F}(e^{\boldsymbol{i}\langle a,y \rangle} f).$$

Для всех функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ формулы легко доказываются, применяя замену переменных в интеграле преобразования Фурье́. Используя эти формулы, получим

$$\langle \mathcal{F}(\tau_a f), \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(e^{-\boldsymbol{i}\langle a,y \rangle} \varphi) \rangle = \langle e^{-\boldsymbol{i}\langle a,x \rangle} \mathcal{F} f, \varphi \rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула

$$\langle \tau_a(\mathcal{F} f), \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi) \rangle = \langle f, e^{\boldsymbol{i}\langle a,x \rangle}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(e^{\boldsymbol{i}\langle a,y \rangle} f), \varphi \rangle.$$

2. *Формула замены переменных. Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ невырожденный линейный оператор и $T_A \varphi(x) \doteqdot \varphi(A^{-1}x)$. Тогда если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то имеют место формулы*

$$\mathcal{F}(T_A f) = |\det A'| \, T_{A'^{-1}}(\mathcal{F} f), \quad T_A(\mathcal{F} f) = |\det A'| \, \mathcal{F}(T_{A'^{-1}} f).$$

В этих формулах сопряженный оператор $A' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ однозначно определяется равенством $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle$ при всех $x, y \in \mathbb{R}^m$.

В самом деле, применяя формулы замены переменных в обобщенной функции для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим следующие равенства:

$$\langle \mathcal{F}(T_A f), \varphi \rangle = |\det A| \, \langle f, T_{A^{-1}}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(T_{A'}\varphi) \rangle = |\det A'| \, \langle T_{A'^{-1}} \mathcal{F} f, \varphi \rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула

$$\langle T_A(\mathcal{F} f), \varphi \rangle = |\det A| \, \langle f, \mathcal{F}(T_{A^{-1}}\varphi) \rangle = \langle f, T_{A'}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = |\det A'| \, \langle \mathcal{F}(T_{A'^{-1}} f), \varphi \rangle.$$

3. *Формула дифференцирования. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$*

$$\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y)), \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \mathcal{F}f(x),$$

где производные берутся в смысле обобщенных функций.

При помощи дифференцирования и интегрирования по частям преобразования Фурье́, эти формулы нетрудно доказать для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому, используя определение производной и преобразования Фурье́, получим

$$\langle \partial^\alpha(\mathcal{F}f), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, (\boldsymbol{i}x)^\alpha \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha f(y)), \varphi\rangle.$$

Аналогично доказывается вторая формула

$$\langle \mathcal{F}(\partial^\alpha f), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha(\mathcal{F}\varphi)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \mathcal{F}((-\boldsymbol{i}y)^\alpha \varphi)\rangle = \langle (\boldsymbol{i}x)^\alpha \mathcal{F}f(y)), \varphi\rangle.$$

Лемма (Ри́мана–Лебе́га). *Если $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то преобразование Фурье́ $\widehat{f} \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}^m)$ является непрерывной функцией, $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa^m \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$ и $\lim_{\|x\|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Неравенство $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \varkappa^m \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}$ вытекает из определения $\widehat{f}$. Пусть $\tau_a f(x) \doteqdot f(x-a)$ обозначает оператор сдвига, тогда при $\|a\| \to 0$ получим

$$|\tau_a \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leqslant \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \left| f(y)\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle a,y\rangle} - 1\right)\right| dy = 2\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \left| f(y) \sin\frac{\langle a,y\rangle}{2}\right| dy \to 0$$

по теореме Лебе́га о мажорируемой сходимости. Поэтому функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна. Для доказательства последнего утверждения заметим, что $\widehat{\tau_a f} = -\widehat{f}$ при всех $a \doteqdot \frac{\pi x}{\langle x,x\rangle}$ и $x \neq 0$. Следовательно, мы имеем

$$|\widehat{f}(x)| \leqslant \frac{1}{2}\|\widehat{f} - \widehat{\tau_a f}\|_{\boldsymbol{C}} \leqslant \frac{\varkappa^m}{2}\|f - \tau_a f\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \frac{\varkappa^m}{2}\Big(2\|f-\varphi\|_{\boldsymbol{L}_1} + \|\varphi - \tau_a\varphi\|_{\boldsymbol{L}_1}\Big).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем функцию $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ и число $\delta > 0$, т.ч.

$$\|f-\varphi\|_{\boldsymbol{L}_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \quad \text{и} \quad \|\varphi - \tau_a\varphi\|_{\boldsymbol{L}_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa^m} \text{ при всех } \|a\| = \frac{\pi}{\|x\|} < \delta$$

Тогда получим $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$ при всех $\|x\| > \pi/\delta$. □

Пример 3. Преобразование Фурье́ производной $\partial^\alpha\delta(x)$ от δ-функции. В силу определения преобразования Фурье́ и производной для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\langle \mathcal{F}\partial^\alpha\delta(x), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \delta(x), \partial^\alpha \mathcal{F}\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathcal{F}\varphi(0) = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\,(\boldsymbol{i}y)^\alpha dy.$$

Таким образом, имеем формулы $\mathcal{F}(\partial^\alpha\delta(x)) = \varkappa^m(\boldsymbol{i}y)^\alpha$ и $\mathcal{F}^{-1}((\boldsymbol{i}y)^\alpha) = \varkappa^{-m}\partial^\alpha\delta(x)$. Поэтому преобразование Фурье степени $\mathcal{F}(y^\alpha) = \mathcal{F}^{-1}((-y)^\alpha) = \varkappa^{-m}\boldsymbol{i}^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(x)$.

15 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ́ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R}^m)$

Напомним, что операторы $\mathcal{F}(f) \doteqdot \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteqdot \widetilde{f}$, определенные по формулам

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dy \quad \text{и} \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{i\langle x,y\rangle} dy,$$

называются *прямым* и *обратным преобразованием Фурье́* функций из $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, где $\varkappa \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}$, $\langle x,y\rangle \doteqdot \sum_{k=1}^m x_k y_k$, $x=(x_1,\ldots,x_m)$ и $y=(y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Теорема (условие Ди́ни). *Если функция $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Дини в точке $x \in \mathbb{R}$, т.е. при некотором $\delta > 0$*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right| dt < \infty, \quad \text{то} \quad \lim_{n\to\infty} \varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. По теореме Фуби́ни, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \varkappa^2 \int_{\mathbb{R}} f(z) \Big(\int_{-n}^{n} e^{i(x-z)y} dy \Big)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z}\, dz.$$

Производя замену переменных и используя равенство $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$, получим

$$\varkappa \int_{-n}^{n} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t|\leqslant\delta} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt\, dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t|>n\delta} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Здесь первые два интеграла стремятся к нулю при $n \to \infty$ по лемме Ри́мана–Лебе́га, а последний интеграл достаточно мал в силу его сходимости в бесконечности. □

Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняется равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фуби́ни, получаем равенство

$$\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dy \Big)\, g(x)\, dx = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\, e^{-i\langle x,y\rangle} dx \Big)\, dy.$$

В частности, отсюда вытекает, что преобразование Фурье́ любой интегрируемой функции совпадает п.в. с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если функция и преобразование Фурье́ $f, \widehat{f} \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то выполняются равенства $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Применяя формулы умножения и обращения для функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Поэтому $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Формулы дифференцирования. Если функция $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $x^\alpha f(x) \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, то $\partial^\alpha \widehat{f}(x) = \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha f}(y)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$. Если функция $f \in \mathscr{W}_1^k(\mathbb{R}^m)$ и $|\alpha| \leqslant k$, то $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$.*

Первая формула доказывается дифференцированием под знаком интеграла Лебе́га. Для доказательства второй формулы при всех $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\langle \widehat{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \widehat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \widehat{(-\boldsymbol{i}y)^\alpha \varphi}(y) \rangle = \langle (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x), \varphi \rangle$$

Отсюда следует равенство $\widehat{\partial^\alpha f}(x) = (\boldsymbol{i}x)^\alpha \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$, а так как функции непрерывны, то это равенство выполняется всюду.

4. *Формула свертки. Свертка $f * g(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, g(x-y)\, dy$ функций $f, g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $f * g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m} \widehat{f}(x)\, \widehat{g}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$.*

Линейное преобразование $A(x,y) = (y, x-y)$ отображает биективно измеримые множества в $\mathbb{R}^{2m}$ в измеримые в $\mathbb{R}^{2m}$. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. При помощи обобщенного неравенства Минко́вского получим $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_1} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1} \|g\|_{\boldsymbol{L}_1}$. Отсюда $f * g \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и

$$\varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(z) g(y-z)\, dz \Big)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y \rangle} dy = \varkappa^m \int_{\mathbb{R}^m} f(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^m} g(y-z)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x, y-z \rangle} dy \Big)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,z \rangle} dz.$$

Производя замену переменных во внутреннем интеграле, получим, что повторный интеграл равен произведению интегралов.

Определение. Пусть $\Delta_n \doteqdot (-n,n)^m$ обозначает открытый куб в $\mathbb{R}^m$ с ребром $2n$. Преобразованием Фурье́ функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ называется предел преобразований Фурье́ функций $f_{(n)} \doteqdot f \chi_{\Delta_n} \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ по норме пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, т.е.

$$\widehat{f}(x) \doteqdot \lim_{n \to \infty} \varkappa^m \int_{\Delta_n} f(y)\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\langle x,y \rangle} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteqdot \lim_{n \to \infty} \varkappa^m \int_{\Delta_n} f(y)\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\langle x,y \rangle} dy.$$

Теорема (Планшере́ля)**.** *Для всех $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ существует предел $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_{(n)}}$ по норме $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет место равенство Парсева́ля $\|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|f\|_{\boldsymbol{L}_2}$.*

Доказательство. Предположим вначале, что $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $f(x) = 0$ при $x \notin \Delta_c$. Тогда существуют $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Delta_c)$, т.ч. $\|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как по формулам умножения и обращения для всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет место равенство

$$\|\varphi\|_{\boldsymbol{L}_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\varphi}(x)} dx = \|\widehat{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}_2}^2.$$

то имеем $\|\varphi_k - \varphi_l\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{\varphi}_k - \widehat{\varphi}_l\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Поэтому $\{\widehat{\varphi_n}\}$ является последовательностью Коши́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Применяя неравенство Гёльдера при $p = 2$, получим

$$|\widehat{f}(x) - \widehat{\varphi_n}(x)| \leqslant \varkappa^m \int_{\Delta_c} |f(y) - \varphi_n(y)|\, dy \leqslant \varkappa^m \sqrt{(2c)^m} \|f - \varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{f}$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\varphi_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\widehat{\varphi}_n\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2}$.

Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ произвольная функция, то по теореме о монотонной сходимости $f_{(n)} \to f$ сходится в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Так как по доказанному $\|f_{(k)} - f_{(l)}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f_{(k)}} - \widehat{f_{(l)}}\|_{\boldsymbol{L}_2}$, то $\{\widehat{f_{(n)}}\}$ является последовательностью Коши в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, существует предел $\lim\widehat{f_{(n)}} \doteqdot \widehat{f} \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|f_{(n)}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \lim\|\widehat{f_{(n)}}\|_{\boldsymbol{L}_2} = \|\widehat{f}\|_{\boldsymbol{L}_2}$. $\square$

В силу теоремы Планшере́ля операторы Фурье́ $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) = \widetilde{f}$ являются *унитарными*, т.е. задают биективное и изометрическое отображение пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим свойства преобразования Фурье́ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$.

1. *Формула умножения. Если $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то выполняются равенства*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{f}(x)\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widetilde{g}(x)\, dx.$$

Эти равенства получаются предельным переходом $g_{(n)} \to f$ и $f_{(n)} \to g$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ из соответствующих равенств для $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$. В частности, отсюда преобразование Фурье́ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ совпадает с обобщенным преобразованием Фурье́.

2. *Формула обращения. Если $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то $\widetilde{\widehat{f}}(x) = \widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Из формул умножения и обращения преобразования Фурье́ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{\widehat{f}}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x)\, dx \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

Отсюда $\widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$. Аналогично $\widehat{\widetilde{f}}(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Формула свертки. Свертка функций $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ принадлежит $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и выполняется равенство $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.*

В силу обобщенного неравенства Минко́вского $\|f * g\|_{\boldsymbol{L}_2} \leqslant \|f\|_{\boldsymbol{L}_1}\|g\|_{\boldsymbol{L}_2}$. Отсюда свертка $f * g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и непрерывна по второму аргументу в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Поскольку $g_{(n)} \to g$ в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то, применяя формулу свертки в $\boldsymbol{L}_1(\mathbb{R}^m)$, получим

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \widehat{f * g_{(n)}}, \varphi\rangle = \varkappa^{-m}\lim_{n\to\infty}\langle \widehat{f}\,\widehat{g_{(n)}}, \varphi\rangle = \varkappa^{-m}\langle \widehat{f}\,\widehat{g}, \varphi\rangle$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, $\widehat{f * g}(x) = \varkappa^{-m}\widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^m$.

Определение. Пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ является бесконечномерным евклидовым пространством относительно скалярного произведения и нормы

$$\langle f, g\rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\overline{g(x)}\, dx, \quad \|f\| \doteqdot \sqrt{\langle f, g\rangle} = \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}, \quad f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m).$$

Функции $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ называются *ортогональными*, если $\langle f, g\rangle = 0$. Систему функций $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *ортонормированной системой* в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, если $\langle e_k, e_l\rangle = 0$ при $k \neq l$ и $\langle e_k, e_k\rangle = 1$ при $k = l$.

Система функций $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *полной* в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$, если из того, что $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^m)$ ортогональна $\langle f, e_n\rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, следует $f = 0$.

Определение. *Функциями Эрми́та* называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteqdot c_n e^{x^2/2}\big(e^{-x^2}\big)^{(n)} = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где функции $H_n(x) = c_n(-2x)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ называются *многочленами Эрми́та*.

Функции Эрми́та обладают свойством ортогональности в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при всех $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x)\,h_n(x)\,dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_k(x)\big(e^{-x^2}\big)^{(n)}dx = c_n(-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\big(H_k(x)\big)^{(n)}dx = 0.$$

В случае $k = n$ имеем $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\,dx = c_n^2 2^n n!\sqrt{\pi}$. Таким образом, при $c_n = 1/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$ система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной системой.

Предположим, что функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ ортогональна $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,h_n(t)\,dt = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ функциям Эрми́та. Заметим, что функция $F(z) \doteqdot \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-\frac{t^2}{2} - itz}dt$ является целой в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ее производные в нуле равны нулю

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,(-it)^n e^{-\frac{t^2}{2} - itz}dt|_{z=0} = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} f(t)\,t^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0 \text{ при } n \in \mathbb{Z}_+,$$

т.к. функция $t^n e^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^{n} b_k h_k(t)$ выражается линейной комбинацией функций Эрми́та. Поэтому $F(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. В частности, $F(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Отсюда по формуле обращения преобразования Фурье́ получим, что $f(t) = 0$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, система функций Эрми́та полна в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

Теорема. *Система функций Эрми́та $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье́ с собственными значениями $\lambda_n = (-i)^n$, т.е. $\mathcal{F}(h_n) = \lambda_n h_n$ при $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Применяем простые преобразования и интегрирование по частям

$$\widehat{h_n}(x) = \varkappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y)\,e^{-ixy}dy = \varkappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2 - 2ixy}{2}}\big(e^{-y^2}\big)^{(n)}dy = \varkappa c_n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}}\big(e^{-y^2}\big)^{(n)}dy =$$

$$\varkappa c_n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\Big(e^{\frac{(y-ix)^2}{2}}\Big)_y^{(n)}dy = \varkappa c_n(-i)^n e^{\frac{x^2}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}}dy\Big)_x^{(n)} = (-i)^n h_n(x).$$

В последнем равенстве мы использовали то, что функция $h_0(x) = e^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора Фурье́ с собственным значением 1. $\square$