

1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $X \times Y \doteq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ — прямое произведение множеств X и Y .

Определение. Функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *метрикой*, если выполняются

- а) симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ при всех $x, y \in X$;
- б) неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ при всех $x, y, z \in X$;
- с) невырожденность: $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Если выполнены (а) и (б), то ρ называется *полуметрикой*, а (X, ρ) *полуметрическим пространством*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* $x_n \rightarrow x$ к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ при всех $n \geq N$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$.

Если всякая последовательность Коши является сходящейся к некоторой точке $x \in X$, то метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*.

Всюду далее через E мы будем обозначать линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Функция $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *нормой*, если выполняются

- а) однородность: $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in E$;
- б) неравенство треугольника: $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ при всех $x, y \in E$;
- с) невырожденность: $p(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Норма обозначается через $p(x) \doteq \|x\|$ и пара (E, p) называется *нормированным пространством*. Если выполнены (а) и (б), то p называется *полунормой*, а (E, p) *полунормированным пространством*. Метрика (полуметрика) ρ в нормированном (полунормированном) пространстве определяется равенством $\rho(x, y) \doteq \|x - y\|$.

Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Пример 1. Нормированное пространство $\mathbb{F}^n \doteq \{x = \{x_k\}_{k=1}^n \mid x_k \in \mathbb{F}\}$ с нормой $\|x\| \doteq (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$ называется *конечномерным евклидовым пространством*.

Пример 2. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ называется *ограниченной* на множестве X , если существует число $c > 0$, т.ч. $|f(x)| \leq c$ при всех $x \in X$. Нормированное пространство $B(X) \doteq \{f : X \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ ограничена}\}$, состоящее из ограниченных функций с нормой $\|f\| \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством ограниченных функций*.

Пример 3. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ называется *непрерывной* в (X, ρ) , если для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, $\rho(x, y) < \delta$.

Нормированное пространство $C(X) \doteq \{f : X \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ ограничена и непрерывна}\}$, состоящее из ограниченных и непрерывных функций с нормой $\|f\| \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|$, называется *пространством непрерывных функций*.

Лемма. Нормированные пространства $B(X)$ и $C(X)$ являются полными.

Доказательство. Если $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $B(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и при всех $n, m \geq N$. По критерию Коши равномерной сходимости она сходится равномерно $f_n \Rightarrow f$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $n \geq N$. Отсюда $\|f_n - f\| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Так как $\|f\| \leq \|f_n - f\| + \|f_n\|$, то $f \in B(X)$.

Поскольку равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, то $C(X)$ является замкнутым подпространством в $B(X)$ и, следовательно, также будет полным нормированным пространством. $\square$

Открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве обозначаются через $U_r(x) \doteq \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$ и $S_r(x) \doteq \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$; $U_r \doteq U_r(0)$ и $S_r \doteq S_r(0)$. Для каждого множества $A \subset X$ введём следующие обозначения:

- $\mathring{A} \doteq \{x \in X \mid \exists r > 0, U_r(x) \subset A\}$ — множество *внутренних* точек;
- $\acute{A} \doteq \{x \in X \mid \forall r > 0, U_r(x) \cap A = \{\infty\}\}$ — множество *предельных* точек;
- $\tilde{A} \doteq \{x \in X \mid \exists r > 0, U_r(x) \cap A = \{x\}\}$ — множество *изолированных* точек;
- $\bar{A} \doteq \{x \in X \mid \forall r > 0, U_r(x) \cap A \neq \{\emptyset\}\}$ — множество точек *прикосновения*.

Множества $\mathring{A}$ и $\bar{A}$ называются *внутренностью* и *замыканием* множества A .

Если $\mathring{A} = A$, то множество A называется *открытым*.

Если $\bar{A} = A$, то множество A называется *замкнутым*.

Если $\bar{A} = X$, то множество A называется *всюду плотным*.

Если $\mathring{A} = \emptyset$, то множество A называется *нигде не плотным*.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепарабельным*, если существует счётное и всюду плотное подмножество $A \subset X$.

Рассмотрим свойства операции замыкания в метрическом пространстве (X, ρ) .

1. $\bar{A} = \{x \in X \mid \exists x_n \in A, \text{ т.ч. } x_n \rightarrow x\}$.
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
3. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

Точка $x \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \in A \cap U_{1/n}(x)$, что равносильно неравенству $\rho(x, x_n) < 1/n$. Отсюда следует, что $x_n \rightarrow x$.

Если $x \in \overline{A \cup B}$, то существуют точки $x_n \in A \cup B$, т.ч. $x_n \rightarrow x$. Тогда существует подпоследовательность точек x_{n_k} , принадлежащая A либо B , т.ч. $x_{n_k} \rightarrow x$. Поэтому справедливо включение $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Обратное включение очевидно.

Ясно, что $\bar{A} \subset \overline{\bar{A}}$. Пусть $x \in \overline{\bar{A}}$, тогда найдётся последовательность точек $x_n \in \bar{A}$, т.ч. $x_n \rightarrow x$. Кроме того, для каждого n найдётся последовательность точек $x_{nm} \in A$, т.ч. $x_{nm} \rightarrow x_n$. Выберем подпоследовательность m_n , т.ч. $\rho(x_{nm_n}, x_n) < 1/n$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_{nm_n}, x) \leq \rho(x_{nm_n}, x_n) + \rho(x_n, x) \rightarrow 0$, т.е. $x_{nm_n} \rightarrow x \in \bar{A}$.

Определение. Отображение $F : X \rightarrow Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *непрерывным*, если для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(F(x), F(y)) < \varepsilon$ для всех $y \in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x, y) < \delta$.

Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *изометричным*, если для всех $x, y \in X$ имеет место $\rho_Y(F(x), F(y)) = \rho_X(x, y)$. Если, кроме того, образ $F(X) = Y$, то отображение называется *изометрией*, а пространства X и Y называются *изометричными*.

Изометричное отображение метрических пространств является инъективным и непрерывным. Если отображение $F : X \rightarrow Y$ является изометрией, то оно биективно и обратное отображение $F^{-1} : Y \rightarrow X$ также является изометрией.

Теорема (о пополнении). Для каждого метрического пространства (X, ρ_X) существует такое полное метрическое пространство (Y, ρ_Y) и изометричное отображение $F : X \rightarrow Y$, что образ $F(X) \subset Y$ является всюду плотным в Y . При этом любые два таких пополнения (Y, ρ_Y) являются изометричными.

Доказательство. Пусть $f_x(y) \doteq \rho_X(x, y) - \rho_X(x_0, y)$, где точка $x_0 \in X$ фиксирована. Тогда $|f_x(y)| \leq \rho_X(x, x_0)$ для всех $y \in X$, т.е. $f_x \in \mathbf{B}(X)$ при всех $x \in X$. Определим отображение $F : X \rightarrow \mathbf{B}(X)$ по формуле $F(x) \doteq f_x$ и положим $Y \doteq \overline{F(X)}$. Так как

$$\rho_Y(F(x_1), F(x_2)) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = \sup_{y \in X} |\rho_X(x_1, y) - \rho_X(x_2, y)| = \rho_X(x_1, x_2),$$

то отображение F является изометричным. Пусть существуют два отображения $F : X \rightarrow Y$ и $F_1 : X \rightarrow Y_1$, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда для каждого $y \in Y$ найдётся последовательность $x_n \in X$, т.ч. $F(x_n) \rightarrow y$. Отсюда $F_1(x_n) \rightarrow y_1 \in Y_1$. Определим отображение $J : Y \rightarrow Y_1$ по формуле $J(y) \doteq y_1$. Тогда при всех $y, y' \in Y$

$$\rho_Y(y, y') = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_Y(F(x_n), F(x'_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{Y_1}(F_1(x_n), F_1(x'_n)) = \rho_{Y_1}(y_1, y'_1).$$

Таким образом, отображение J является изометрией пространств Y и Y_1 . $\square$

Определение. Отображение $F : X \rightarrow X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если для некоторого $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство $\rho(F(x), F(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Каждое сжимающее отображение, очевидно, является непрерывным.

Теорема (принцип сжимающих отображений). Пусть $F : X \rightarrow X$ — сжимающее отображение полного метрического пространства (X, ρ) . Тогда существует и единственная неподвижная точка $x \in X$, т.ч. $F(x) = x$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $x_1 \doteq F(x_0)$, $x_2 \doteq F(x_1)$, ..., т.е. $x_n = F^n(x_0)$. Тогда, применяя неравенство треугольника, получим при всех $n < m$ и $0 < \lambda < 1$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(F^k(x_0), F^k(x_1)) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \rho(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(x_0, x_1).$$

Поэтому $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Так как $F(x_{n-1}) = x_n$, то, переходя к пределу и используя непрерывность F , получим $F(x) = x$. Если существует еще одна точка $y \in X$, т.ч. $F(y) = y$, то из неравенства $\rho(x, y) = \rho(F(x), F(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ следует, что $\rho(x, y) = 0$, т.е. имеет место равенство $x = y$. $\square$

Лемма (о вложенных шарах). Если в полном метрическом пространстве (X, ρ) задана последовательность вложенных шаров $S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \dots$ и предел радиусов $\lim r_n = 0$, то их пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ не пусто.

Доказательство. Поскольку по условию $\rho(x_n, x_m) \leq r_n$ при $n < m$ и $\lim r_n = 0$, то $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, существует предел $\lim x_n = x \in X$. Переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n, x_m) \leq r_n$ при $m \rightarrow \infty$, получим $\rho(x_n, x) \leq r_n$. Следовательно, эта точка принадлежит $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n)$. $\square$

Определение. Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется множеством *первой категории*, если является счётным объединением $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ нигде не плотных множеств $A_n \subset X$. Множество $A \subset X$ называется множеством *второй категории*, если оно не является множеством первой категории.

Теорема (Бэра). Каждое полное метрическое пространство (X, ρ) является множеством второй категории.

Доказательство. Предположим обратное $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n нигде не плотны. Тогда существуют $x_1 \in X \setminus \bar{A}_1$ и $S_{r_1}(x_1) \subset X \setminus \bar{A}_1$. Аналогично, существуют $x_2 \in S_{r_1}(x_1) \setminus \bar{A}_2$ и $S_{r_2}(x_2) \subset S_{r_1}(x_1) \setminus \bar{A}_2$ и т.д. Поэтому имеем последовательность вложенных шаров $S_{r_1}(x_1) \supset S_{r_2}(x_2) \supset \dots$. Выберем радиусы $r_n > 0$, т.ч. $\lim r_n = 0$. Тогда по лемме существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{r_n}(x_n)$. Отсюда $x \notin A_n$ при всех n , что невозможно. Таким образом, X не является множеством первой категории. $\square$

Пример 4. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ является множеством первой категории, т.к. $\mathbb{Q}$ есть счётное объединение точек. По теореме Бэра множество действительных чисел $\mathbb{R}$ будет множеством второй категории. Отсюда множество иррациональных чисел $\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является множеством второй категории.

Пример 5. Построим пример последовательности вложенных шаров в полном метрическом пространстве с пустым пересечением. Рассмотрим метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ с метрикой $\rho(n, m) \doteq 1 + 1/(n+m)$, если $n \neq m$, и $\rho(n, n) = 0$.

Замкнутые шары $S_{r_n}(n) = \{n, n+1, \dots\}$, где $r_n = 1 + 1/2n$, являются вложенными и их пересечение пусто. Заметим, что это метрическое пространство $(\mathbb{N}, \rho)$ полно, поскольку всякая последовательность Коши стационарна. По теореме Бэра пространство $\mathbb{N}$ является множеством второй категории. В этом пространстве все множества открыты и замкнуты, т.е. $(\mathbb{N}, \rho)$ имеет дискретную топологию. Поэтому в нем не существует нигде не плотных множеств, кроме пустого множества $\emptyset$.

2 МЕТРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть 2^X обозначает множество всех подмножеств X , включая пустое множество. Непустое подмножество $\tau \subset 2^X$ называется *системой множеств* в X .

Определение. Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*, если в X задана система множеств $\tau \subset 2^X$, называемая *топологией*, т.ч.

- а) пустое множество $\emptyset \in \tau$ и все множество $X \in \tau$;
- б) объединение $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ для всякой системы множеств $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$.
- с) пересечение $\bigcap_{k=1}^n B_k \in \tau$ для всякой конечной системы множеств $\{B_k\}_{k=1}^n \subset \tau$.

Система множеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии τ* , если любое множество $A \in \tau$ является объединением $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ некоторых множеств $B_i \in \beta$.

В топологическом пространстве (X, τ) множества $A \in \tau$ называются *открытыми*, а их дополнения $A' \doteq X \setminus A$ *замкнутыми*. Множество $O_x \subset X$ называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует $A \in \tau$, т.ч. $x \in A \subset O_x$.

С помощью окрестностей, также как в метрическом пространстве, можно ввести понятия внутренних, предельных, изолированных точек, точек прикосновения, понятие замыкания, всюду плотного и нигде не плотного множества.

1. В метрическом пространстве (X, ρ) система множеств $\tau_X \doteq \{A \subset X \mid \overset{\circ}{A} = A\}$ является топологией. Открытые шары $U_r(x)$ образуют базу топологии τ_X .

В самом деле, если $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, то $x \in A_i$ при некотором $i \in I$. Тогда существует шар $U_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Если $x \in \bigcap_{k=1}^n B_k$, то $x \in B_k$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда существуют шары $U_{r_k}(x) \subset B_k$ при $k = 1, \dots, n$. Пусть $r \doteq \min_{1 \leq k \leq n} r_k$, тогда $U_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^n B_k$. Кроме того, по определению система всех открытых шаров $U_r(x) \subset X$ образует базу топологии метрического пространства.

2. Топология в произведении $X = X_1 \times X_2$ метрических пространств (X_1, ρ_{X_1}) и (X_2, ρ_{X_2}) определяется следующей метрикой:

$$\rho_X(x, y) \doteq \sqrt{\rho_{X_1}^2(x_1, y_1) + \rho_{X_2}^2(x_2, y_2)}, \text{ где } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2.$$

Метрику в произведении $X = X_1 \times X_2$ можно определить другим эквивалентным способом, например, по формуле $\rho'_X(x, y) \doteq \rho_X(x_1, y_1) + \rho_X(x_2, y_2)$. Применяя элементарные неравенства $\rho_X(x, y)/2 \leq \rho'_X(x, y) \leq 2\rho_X(x, y)$, легко показать, что топология в метрике ρ_X совпадает с топологией в метрике ρ'_X .

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если для любого $A \in \tau_Y$ прообраз $f^{-1}(A) \in \tau_X$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *открытым*, если для любого $A \in \tau_X$ образ $f(A) \in \tau_Y$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно одновременно является биективным, непрерывным и открытым отображением.

Теорема. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) являются метрическими пространствами. Тогда следующие условия непрерывности отображения эквивалентны:

- а) отображение $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным;
- б) для каждого $x \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. для всех $y \in X$, $\rho_X(x, y) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$;
- с) для любой сходящейся последовательности $x_n \rightarrow x$ в X ее образ является сходящейся последовательностью $f(x_n) \rightarrow f(x)$ в Y .

Доказательство. Пусть выполнено условие (а) и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $x \in X$ существует шар $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, что равносильно (б). Пусть выполнено (б) и последовательность сходится $x_n \rightarrow x$ в X , т.е. для заданного $\delta > 0$ существует N , т.ч. $\rho_X(x, x_n) < \delta$ для всех $n \geq N$. В силу (б) выполняется $\rho_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Отсюда $f(x_n) \rightarrow f(x)$, т.е. выполнено (с). Пусть $A \subset Y$ замкнутое множество. Если $x_n \in f^{-1}(A)$ и $x_n \rightarrow x$, то по условию (с) получим $f(x_n) \rightarrow f(x)$ и из замкнутости $f(x) \in A$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$. Поэтому прообраз замкнутого множества замкнут. Это равносильно тому, что прообраз открытого множества открыт. $\square$

Определение. Пара (E, ρ) называется метрическим линейным пространством, если E линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, в котором определена метрика $\rho(x, y)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- а) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ при всех $x, y, z \in E$, т.е. метрика инвариантна;
- б) отображение $f: \mathbb{F} \times E \rightarrow E$, т.ч. $f(\lambda, x) \doteq \lambda x$, является непрерывным.

Полное метрическое линейное пространство называется *пространством Фреше*.

Функция $\|x\| \doteq \rho(x, 0)$ в метрическом линейном пространстве (E, ρ) называется *квазинормой*. Она удовлетворяет неравенству треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, симметрична $\|-x\| = \|x\|$ и не вырождена, т.е. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Однако свойство однородности $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ может не выполняться.

Лемма. В метрическом линейном пространстве (E, ρ) операция сложения является непрерывной. Каждое нормированное пространство (E, ρ) является метрическим линейным пространством.

Доказательство. Непрерывность операции сложения доказывается при помощи следующего неравенства треугольника:

$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varepsilon, \text{ если } \|x - x_0\| < \varepsilon/2 \text{ и } \|y - y_0\| < \varepsilon/2.$$

Для доказательства непрерывности операции умножения λx в нормированном пространстве (E, ρ) достаточно применить следующее неравенство:

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda - \lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\| + |\lambda_0| \|x - x_0\| < \varepsilon,$$

если $|\lambda_0| < a$, $\|x_0\| < b$, $\|x - x_0\| < \varepsilon/3a$ и $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon/3b < a$. $\square$

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x, y) < \delta$.

Система $\{f_i\}_{i \in I}$ отображений $f_i: X \rightarrow Y$ называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$ выполняется для всех индексов $i \in I$ и для всех $x, y \in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x, y) < \delta$.

Пример 1. Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию Липшица, если существует $c > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) \leq c \rho_X(x, y)$ при всех $x, y \in X$. Ясно, что такое отображение является равномерно непрерывным.

Метрика $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ является равномерно непрерывной функцией в (X, ρ) . Для доказательства нужно применить неравенство треугольника:

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq |\rho(x, y) - \rho(x_0, y)| + |\rho(x_0, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0).$$

Определение. Множество $A \subset E$ в метрическом линейном пространстве (E, ρ) называется *ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ для всех $x \in A$, что равносильно выполнению включения $\lambda A \subset U_\varepsilon(0)$.

1. Всякое ограниченное множество $A \subset E$ содержится в некотором шаре. В нормированном пространстве это условие необходимо и достаточно.

В самом деле, по определению существует $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \delta$ при всех $x \in A$. Тогда в силу непрерывности операции умножения в нуле $\|x\| \leq n \|\lambda x / n\lambda\| < n\delta \div r$ при всех $x \in A$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Обратно, если $\|x\| < r$ при всех $x \in A$, то по свойству однородности нормы $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$ и $0 < \lambda < \varepsilon/r$.

2. Всякая сходящаяся последовательность $x_n \rightarrow x$ является ограниченной.

Из непрерывности операции умножения в нуле существуют $\delta > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon/2$ при всех $n > N$ и $0 < \lambda < \delta$. А из непрерывности этой операции в нуле по переменной λ получим $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ и $\|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon/2$ при $n = 1, \dots, N$ и при некотором $0 < \lambda < \delta$. Поэтому $\|\lambda x_n\| \leq \|\lambda x\| + \|\lambda(x_n - x)\| < \varepsilon$ при всех n .

Определение. Отображение $f: E \rightarrow F$ линейных пространств над $\mathbb{F}$ называется *линейным*, если $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Отображение $f: E \rightarrow F$ называется *ограниченным*, если образ $f(A) \subset F$ любого ограниченного множества $A \subset E$ является ограниченным множеством.

Теорема. Для линейного отображения $f: E \rightarrow F$ метрических линейных пространств следующие условия эквивалентны: отображение непрерывно; отображение равномерно непрерывно; отображение ограничено.

Доказательство. Заметим, что непрерывность линейного отображения равносильна непрерывности в одной точке, например, в точке нуль. Если f непрерывно в нуле, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, т.ч. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| < \varepsilon$ при $\|x - y\| < \delta$, т.е. f равномерно непрерывно.

Пусть $A \subset \mathbf{E}$ является ограниченным множеством. Тогда для $\delta > 0$ существует $\lambda > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \delta$ при всех $x \in A$. Тогда в силу непрерывности f в нуле получим $\|\lambda f(x)\| = \|f(\lambda x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in A$. Следовательно, образ $f(A)$ ограничен.

Пусть $x_n \rightarrow 0$. Выберем последовательность n_k , т.ч. $\|x_{n_k}\| < 1/k^2$ при всех $n \geq n_k$. Положим $\lambda_n \doteq k$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$. Отсюда следует $\lambda_n \rightarrow \infty$ и $\lambda_n x_n \rightarrow 0$, поскольку $\|\lambda_n x_n\| \leq \lambda_n \|x_n\| < 1/k$ при всех $n_k \leq n < n_{k+1}$. Поэтому $\{\lambda_n x_n\}$ ограничена, а в силу условия (с) $\{f(\lambda_n x_n)\}$ ограничена. Тогда по определению ограниченного множества $f(x_n) = f(\lambda_n x_n)/\lambda_n \rightarrow 0$. Таким образом, отображение f непрерывно в нуле. $\square$

Теорема (принцип равностепенной непрерывности). *Предположим, что задана система $\{f_i\}_{i \in I}$ непрерывных линейных отображений $f_i: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ пространства Фреше $(\mathbf{E}, \rho_E)$ в метрическое линейное пространство $(\mathbf{F}, \rho_F)$ и для любого $x \in \mathbf{E}$ множества $M_x \doteq \{y = f_i(x) \mid i \in I\}$ являются ограниченными в пространстве $\mathbf{F}$. Тогда эта система отображений $\{f_i\}_{i \in I}$ равностепенно непрерывна.*

Доказательство. При заданном $\varepsilon > 0$ рассмотрим замкнутые множества

$$E_n \doteq \bigcap_{i \in I} \left\{ x \in \mathbf{E} \mid \left\| \frac{f_i(x)}{n} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

По условию ограниченности множеств M_x и непрерывности операции умножения в нуле для каждого $x \in \mathbf{E}$ существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|f_i(x)/n\| \leq \varepsilon/2$ при всех $i \in I$. Следовательно, имеет место равенство $\mathbf{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

В силу теоремы Бэра некоторое множество E_n содержит некоторый шар $U_r(x_0)$, что равносильно неравенству $\|f_i(x_0 + y)/n\| \leq \varepsilon/2$ при всех $y \in U_r$ и $i \in I$. Применяя неравенство треугольника и линейность отображений, получим

$$\left\| \frac{f_i(y)}{n} \right\| \leq \left\| \frac{f_i(x_0 + y)}{n} \right\| + \left\| \frac{f_i(x_0)}{n} \right\| \leq \varepsilon \quad \text{при всех } y \in U_r \text{ и } i \in I.$$

Если $\|y\| < r/n$, то по неравенству треугольника $\|ny\| \leq n\|y\| < r$, т.е. $nU_{r/n} \subset U_r$. Таким образом, выполняются неравенства $\|f_i(x + y) - f_i(x)\| = \|f_i(ny)/n\| \leq \varepsilon$ при всех $x \in \mathbf{E}$, $y \in U_\delta$, $i \in I$, где $\delta \doteq r/n$. $\square$

Следствие. *Если в линейном пространстве $\mathbf{E}$ задана инвариантная метрика $\rho(x, y)$, относительно которой $(\mathbf{E}, \rho)$ полно, и операция умножения $f(\lambda, x) = \lambda x$ непрерывна по каждой переменной $\lambda \in \mathbb{F}$ и $x \in \mathbf{E}$ в отдельности, то операция умножения является непрерывной по совокупности переменных $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times \mathbf{E}$.*

Проверим непрерывность операции умножения $f(\lambda, x) = \lambda x$ в точке (λ_0, x_0) . В силу неравенства $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)\| + \|(\lambda - \lambda_0)x_0\| + \|\lambda_0(x - x_0)\|$ нам достаточно доказать непрерывность в точке $(0, 0)$. Для этого следует рассмотреть систему линейных отображений $f_\lambda: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, где $f_\lambda(x) \doteq \lambda x$ при $|\lambda| < 1$. Тогда по теореме для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon$ при всех $|\lambda| < 1$ и $\|x\| < \delta$. Отсюда следует непрерывность операции $f(\lambda, x) = \lambda x$ в точке $(0, 0)$.

3 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и задано число $\varepsilon > 0$.

Множество $A \subset X$ называется ε -сетью множества $M \subset X$, если имеет место включение $M \subset \bigcup_{x \in A} S_\varepsilon(x)$, т.е. для любого $y \in M$ найдется $x \in A$, т.ч. $\rho(x, y) \leq \varepsilon$.

Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным* (или *предкомпактным*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ множества M .

1. Всякое вполне ограниченное множество $M \subset X$ содержится в некотором шаре $S_r(x)$ пространства (X, ρ) .

Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует 1-сеть множества M и $r_1 \doteq \max_{2 \leq k \leq n} \rho(x_1, x_k) + 1$. Тогда для каждого $y \in M$ существует k , т.ч. $\rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_k) + \rho(x_k, y) \leq r_1$. Отсюда вытекает включение $M \subset S_{r_1}(x_1)$.

2. Если множество $M \subset X$ является вполне ограниченным, то его замыкание $\overline{M}$ будет также вполне ограниченным.

Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ образует ε -сеть множества M . Так как $M \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x_k)$, то из замкнутости объединения шаров следует $\overline{M} \subset \bigcup_{k=1}^n S_\varepsilon(x_k)$, т.е. A есть ε -сеть $\overline{M}$.

3. Всякое вполне ограниченное множество $M \subset E$ в метрическом линейном пространстве (E, ρ) является ограниченным.

Пусть $\varepsilon > 0$. По непрерывности операции умножения λx существуют $\delta > 0$, т.ч. $\|\lambda x\| < \varepsilon/2$ при всех $0 < \lambda < \delta$ и $\|x\| \leq \delta$. Пусть $A = \{x_k\}_{k=1}^n$ является δ -сетью множества M . Выберем величину $0 < \lambda < \delta$, т.ч. $\|\lambda x_k\| < \varepsilon/2$ при всех $k = 1, \dots, n$. Тогда для каждого $x \in M$ существует k , т.ч. $\|\lambda x\| \leq \|\lambda x_k\| + \|\lambda(x - x_k)\| < \varepsilon$.

Пример 1. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено. Необходимость этого утверждения следует из свойства 1. Докажем достаточность. Рассмотрим куб с ребром $a > 0$, содержащий M . Разобьем этот куб на кубики с ребром $\delta \doteq a/k$. Тогда вершины кубиков $\{x_j\}_{j=1}^m$ образуют ε -сеть M , где $m = (k+1)^n$ и $\varepsilon = \sqrt{n}\delta/2 = \sqrt{n}a/2k$ есть половина диагонали кубика.

Определение. Рассмотрим несколько определений для свойства компактности множества $K \subset X$ в метрическом пространстве (X, ρ) :

а) множество $K \subset X$ называется *компактным*, если всякое открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i \in I} B_i$, где $\mathring{B}_i = B_i$, имеет конечное подпокрытие $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{i_k}$, где $i_k \in I$;

б) множество $K \subset X$ называется *счетно компактным*, если всякое бесконечное подмножество $A \subset K$ имеет предельную точку $x \in \mathring{A}$, т.ч. $x \in K$;

с) множество $K \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если для всякой последовательности $\{x_n\} \subset K$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \rightarrow x$ и $x \in K$.

Теорема (Хáусдорфа). *Множество $K \subset X$ компактно в том и только в том случае, когда оно d) вполне ограничено и полно.*

Докажем, что в произвольном метрическом пространстве условия компактности (a), (b), (c), (d) равносильны друг другу и справедлива теорема Хáусдорфа.

(a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $A \subset K$ бесконечно. Если $\dot{A} \cap K = \emptyset$ пусто, то для всякой точки $x \in K$ существует $r > 0$, т.ч. $U_r(x) \cap A$ конечно. Так как шары $U_r(x)$ покрывают K , то выбирая конечное подпокрытие, получим, что A конечно. Противоречие.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть $A = \{x_n\}$ последовательность различных точек множества K . По условию существует точка $x \in \dot{A} \cap K$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$. Отсюда следует сходимость $x_{n_k} \rightarrow x \in K$.

(c) $\Leftrightarrow$ (d). Полнота K очевидно вытекает из (c). Докажем вполне ограниченность. Пусть $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in K$. Тогда существует точка $x_1 \in K$, т.ч. $\rho(x_1, x_0) > \varepsilon$, иначе точка $\{x_0\}$ образует ε -сеть в K . Аналогично, существует точка $x_2 \in K$, т.ч. $\rho(x_2, x_0) > \varepsilon$ и $\rho(x_2, x_1) > \varepsilon$, иначе $\{x_0, x_1\}$ образуют ε -сеть в K , и т.д. По индукции существует $x_n \in K$, т.ч. $\rho(x_n, x_k) > \varepsilon$ при $k = 1, \dots, n-1$. Если процесс выбора точек x_n оборвется на некотором шаге n , то $\{x_k\}_{k=1}^n$ образует конечную ε -сеть K . Иначе последовательность $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности.

Обратно, пусть $\{x_n\} \subset K$. В силу условия вполне ограниченности существует конечное покрытие K шарами радиуса $r_1 = 1$. Следовательно, найдется шар $S_{r_1}(y_1)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\} \subset \{x_n\}$. Аналогично существует конечное покрытие K шарами радиуса $r_2 = 1/2$ и найдется шар $S_{r_2}(y_2)$, который содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\} \subset \{x_n^{(1)}\}$, и т.д.

По индукции при $r_k = 1/k$ существует подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\} \subset \{x_n^{(k-1)}\}$, содержащаяся в некотором шаре $S_{r_k}(y_k)$. Обозначим через $z_n \doteq x_n^{(n)}$ диагональную подпоследовательность. Так как $\rho(z_n, z_m) \leq \rho(z_n, y_n) + \rho(y_n, z_m) \leq 2/n$ при $m > n$, то $\{z_n\}$ есть последовательность Коши. В силу полноты она имеет предел в K .

(d) $\Rightarrow$ (a). Пусть задано открытое покрытие $K \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. Докажем вначале, что существует $\varepsilon > 0$, т.ч. для любого $x \in K$ найдется такой индекс $i \in I$, что $S_\varepsilon(x) \subset B_i$. Предположим обратное. Тогда существуют $x_n \in K$, т.ч. $S_{1/n}(x_n) \not\subset B_i$ при всех $i \in I$. По условию (c) найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x \in K$. Так как открытые множества B_i покрывают K , то существуют $i \in I$ и $r > 0$, т.ч. $S_r(x) \subset B_i$.

Выберем индекс $n_k > 2/r$, т.ч. $\rho(x_{n_k}, x) < r/2$. Тогда имеют место включения $S_{1/n_k}(x_{n_k}) \subset S_{r/2}(x_{n_k}) \subset S_r(x) \subset B_i$, что противоречит предположению. Пусть теперь $A = \{y_k\}_{k=1}^m$ является ε -сетью в множестве K . По доказанному свойству найдется индекс $i_k \in I$, т.ч. $S_\varepsilon(y_k) \subset B_{i_k}$. Поэтому $K \subset \bigcup_{k=1}^m S_\varepsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^m B_{i_k}$.

Следствие. *Замыкание $\overline{M}$ вполне ограниченного множества $M \subset X$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) является компактным.*

Поскольку в полном метрическом пространстве замыкание множества является полным, то утверждение следует из теоремы Хáусдорфа и свойства 2. Рассмотрим свойства непрерывных отображений, определенных на компактном множестве.

1. Всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, определенное на компакте X , является равномерно непрерывным.

Предположим обратное. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ при всех n . В силу компактности X найдутся сходящиеся подпоследовательности $x_{n_k} \rightarrow x$ и $y_{n_k} \rightarrow y$. Так как по условию $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$, то $x = y$. В силу непрерывности отображения f существует n_k , т.ч. $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \rho_Y(f(x_{n_k}), f(x)) + \rho_Y(f(y), f(y_{n_k})) < \varepsilon$. Противоречие.

2. Образ $f(K) \subset Y$ любого компактного множества $K \subset X$ при непрерывном отображении $f: X \rightarrow Y$ является компактным множеством.

Пусть $\{y_n\} \subset f(K)$. Тогда $y_n = f(x_n)$, где $x_n \in K$. В силу компактности K найдется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x \in K$. Тогда из непрерывности f получим $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(K)$. Поэтому образ $f(K)$ является компактным.

3. Теорема Алексáндрова. Предположим, что X компактно, а отображение $f: X \rightarrow Y$ является биективным и непрерывным. Тогда обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ будет непрерывным.

В самом деле, всякое замкнутое множество $A \subset X$ является компактным. Тогда в силу свойства 2 его образ $f(A) \subset Y$ является компактным и значит замкнутым. Поэтому образ любого открытого множества является открытым.

Теорема (принцип продолжения по непрерывности). Пусть $f: A \rightarrow Y$ является равномерно непрерывным отображением, определенным на всюду плотном множестве $A \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X) , со значениями в полном метрическом пространстве (Y, ρ_Y) . Тогда существует только одно равномерно непрерывное отображение $g: X \rightarrow Y$, т.ч. $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$.

Доказательство. В силу равномерной непрерывности отображения f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ для всех $x, y \in A$: $\rho_X(x, y) < \delta$. Так как A всюду плотно в X , то для каждого $x \in X$ существуют $x_n \in A$, т.ч. $x_n \rightarrow x$.

Выберем число N , т.ч. $\rho_X(x_n, x_m) < \delta$ при всех $n, m \geq N$. Тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$. Поэтому $\{f(x_n)\}$ есть последовательность Коши и существует предел $g(x) \doteq \lim f(x_n)$. Если взять другую сходящуюся последовательность $y_n \rightarrow x$, то, полагая $z_n \doteq x_k$ при $n = 2k - 1$ и $z_n \doteq y_k$ при $n = 2k$, мы получим, что $z_n \rightarrow x$. Тогда $g(x) = \lim f(z_n) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$. Значит $g(x)$ не зависит от выбора сходящейся последовательности и определение отображения g единственно.

Пусть $x, y \in X$ и $\rho_X(x, y) < \delta$. Выберем последовательности точек $x_n, y_n \in A$, т.ч. $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$. Тогда существует N , т.ч. $\rho_X(x_n, y_n) < \delta$ при всех $n \geq N$. В силу равномерной непрерывности отображения f имеем неравенство $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим $\rho_Y(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Таким образом, отображение $g: X \rightarrow Y$ равномерно непрерывно. $\square$

Пример 2. Рассмотрим пространство ℓ_p последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{F}$, имеющих конечную величину (квазинормы при $0 < p < 1$ и нормы при $1 \leq p < \infty$)

$$\|x\| \doteq \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1; \\ (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

В случае $0 < p < 1$ неравенство треугольника для квазинормы вытекает из элементарного неравенства $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ при $a, b > 0$, а в случае $1 \leq p < \infty$ неравенство треугольника для нормы вытекает из неравенства Минковского.

Пространство ℓ_p при $0 < p < 1$ является метрическим линейным пространством, а при $1 \leq p < \infty$ нормированным пространством. Для каждого $x \in \ell_p$ обозначим через $s_m(x) = y$ финитную последовательность $y = \{y_n\}$, т.ч. $y_n = x_n$ при $n \leq m$ и $y_n = 0$ при $n > m$. Тогда $s_m(x) \rightarrow x$ сходится в метрике ℓ_p при $m \rightarrow \infty$, т.к.

$$\|x - s_m(x)\| \doteq \begin{cases} \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p, & \text{если } 0 < p < 1; \\ (\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Имеют место непрерывные вложения $\ell_p \subset \ell_q$ этих пространств при $0 < p < q$. Для доказательства заметим, что справедливо следующее неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \text{ при всех } 0 < p < q \text{ и } x = \{x_n\} \in \ell_p.$$

В самом деле, если разделить левую часть на правую, то для доказательства этого неравенства достаточно рассмотреть случай, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$. В этом случае $|x_n| \leq 1$ и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$ при всех $0 < p < q$.

Теорема. Пространства ℓ_p , $0 < p < \infty$, являются полными и сепарабельными.

Доказательство. Пусть $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется N , т.ч. $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon$ при всех $k, l \geq N$. Отсюда $|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| < \varepsilon$ при всех $k, l \geq N$ и $n \geq 1$. Поэтому $\{x_n^{(k)}\}$ является последовательностью Коши для каждого $n \geq 1$ и значит существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_n$. Тогда, полагая $x = \{x_n\}$ и переходя к пределу в неравенстве, получим, что $\|x^{(k)} - x\| \leq \varepsilon$ при всех $k \geq N$. Из неравенства треугольника вытекает, что $\|x\| \leq \|x^{(k)}\| + \varepsilon$ при $k \geq N$. Таким образом, элемент $x \in \ell_p$ и последовательность $x^{(k)}$ сходится к x в метрике ℓ_p .

Для доказательства сепарабельности пространства ℓ_p заметим, что существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = x$ в метрике ℓ_p для всех $x \in \ell_p$. Поэтому множество финитных последовательностей всюду плотно в ℓ_p . Следовательно, в пространстве ℓ_p всюду плотно подпространство, состоящее из всех финитных последовательностей рациональных или комплексно-рациональных чисел поля $\mathbb{F}$. Поскольку это подпространство является счетным, то пространство ℓ_p является сепарабельным. $\square$

4 КРИТЕРИИ ПРЕДКОМПАКТНОСТИ

Теорема (Рисса). Множество $M \subset \ell_p$ предкомпактно в ℓ_p , $0 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- а) множество M ограничено в пространстве ℓ_p ;
- б) для любого $\varepsilon > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x - s_m(x)\| < \varepsilon$ при всех $x \in M$.

Доказательство. Необходимость. Ограниченность $M \subset \ell_p$ вытекает из его вполне ограниченности. Докажем второе условие. Пусть $A = \{x^{(k)}\}_{k=1}^l$ является $\varepsilon/3$ -сетью множества M . Для каждого k выберем $m_k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\|x^{(k)} - s_{m_k}(x^{(k)})\| < \varepsilon/3$, а затем возьмем среди них наибольшее $m = \max_{1 \leq k \leq l} m_k$. Так как A является $\varepsilon/3$ -сетью, то для любого $x \in M$ найдется k , т.ч. $\|x - x^{(k)}\| \leq \varepsilon/3$ и по неравенству треугольника

$$\|x - s_m(x)\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - s_m(x^{(k)})\| + \|s_m(x^{(k)}) - s_m(x)\| < \varepsilon$$

при всех $x \in M$, т.е. выполнено второе условие (б).

Достаточность. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $M_m \doteq \{s_m(x) \mid x \in M\}$ в подпространстве ℓ_p , где m определяется из второго условия для $\varepsilon/3$. Так как M_m содержится в конечномерном подпространстве ℓ_p и является ограниченным в метрике ℓ_p , то оно будет вполне ограничено в метрике ℓ_p . В самом деле, для этого достаточно заметить, что имеют место элементарные неравенства

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |x_n|^p\right)^{1/p} \leq \max_{1 \leq n \leq m} |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p\right)^{1/p} \text{ при } 0 < p < \infty,$$

и применить аналогичные рассуждения, как в примере 1 из предыдущей лекции.

Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $\{y^{(k)}\}_{k=1}^l$ $\varepsilon/3$ -сеть множества M_m , а через $\{x^{(k)}\}_{k=1}^l$ элементы прообраза $y^{(k)} = s_m(x^{(k)})$. Тогда для любого $x \in M$ найдется k , т.ч. $\|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\| \leq \varepsilon/3$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|x - s_m(x)\| + \|s_m(x) - s_m(x^{(k)})\| + \|s_m(x^{(k)}) - x^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{x^{(k)}\}_{k=1}^l$ образует ε -сеть M , т.е. M вполне ограничено в ℓ_p . $\square$

Определение. Величина верхней грани $O(f, A) \doteq \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)|$ называется *колебанием функции f на множестве A* . Колебание функции $O(f, A)$ совпадает с диаметром образа множества A в пространстве $\mathbb{F}$, т.е. $O(f, A) = \text{diam } f(A)$.

Теорема (Вёрьш). Множество $M \subset B(X)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда M ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $X = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, т.ч. $O(f, A_k) < \varepsilon$ для всех $f \in M$ и $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $X = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$ указанное разбиение для числа $\varepsilon/2$. Выберем точки $x_k \in A_k$ и для каждой функции $f \in M$ определим функции $h_f(x) \doteq y_k$ при $x \in A_k$, где $y_k \doteq f(x_k)$. Тогда по условию $\|f - h_f\| < \varepsilon/2$.

Заметим, что каждая функции $h_f(x)$ взаимно однозначно определяется набором чисел $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$. Соответствующее множество $y \in Y \subset \mathbb{F}^n$ является ограниченным и значит будет вполне ограниченным. Обозначим через $\{h_j\}_{j=1}^m$ элементы прообраза $\varepsilon/2$ -сети множества Y . Тогда для каждой функции $f \in M$ существует такой индекс j , что $\|f - h_j\| \leq \|f - h_f\| + \|h_f - h_j\| < \varepsilon$. Таким образом, система функций $\{h_j\}_{j=1}^m$ образует ε -сеть множества M . $\square$

Теорема (Арцёла–Асколи). *Множество $M \subset C(K)$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Ограниченность M в $C(K)$ вытекает из вполне ограниченности. Докажем равностепенную непрерывность. По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/3$ -сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$ множества M . Следовательно, для любого $f \in M$ существует k , т.ч. $|f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon/3$ при всех $x \in K$. Поскольку функция f_k равномерно непрерывна, то существует $\delta_k > 0$, т.ч. $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$ при всех $x, y \in K$, $\rho(x, y) < \delta_k$. Обозначим через $\delta \doteq \min_{1 \leq k \leq n} \delta_k$, тогда

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

при всех $x, y \in K$, $\rho(x, y) < \delta$. Таким образом, M равностепенно непрерывно.

Достаточность. Из условия равностепенной непрерывности M для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ для всех $f \in M$ и $x, y \in K$, $\rho(x, y) \leq \delta$. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ является δ -сетью компакта K и $F: M \rightarrow \mathbb{F}^m$ обозначает отображение, заданное по формуле $F(f) \doteq \{f(x_j)\}_{j=1}^m$. Поскольку $F(M) \subset \mathbb{F}^m$ ограничено, то оно вполне ограничено. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n \subset M$ обозначает элементы прообраза $\varepsilon/3$ -сети $\{F(f_k)\}_{k=1}^n$ множества $F(M)$. Для любого $x \in K$ выберем j , т.ч. $\rho(x, x_j) \leq \delta$ и для любого $f \in M$ выберем k , т.ч. $\|F(f) - F(f_k)\|_{\mathbb{F}^m} \leq \varepsilon/3$. Тогда получим

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_k(x_j)| + |f_k(x_j) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{f_k\}_{k=1}^n$ является ε -сетью множества M . $\square$

Определение. Два нормированных пространства (E, p_E) и (F, p_F) называются *изоморфными* или *эквивалентными* $(E, p_E) \sim (F, p_F)$, если найдется биективное линейное отображение $f: E \rightarrow F$, для которого f и f^{-1} непрерывны.

Два нормированные пространства (E, p_E) и (F, p_F) называются *изометрически изоморфными* и обозначаются через $(E, p_E) \simeq (F, p_F)$, если найдется биективное, линейное и изометрическое отображение $f: E \rightarrow F$, т.е. для которого выполняется равенство $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ при всех $x \in E$.

Если нормированные пространства изоморфны и одно из них является полным или сепарабельным, то другое также будет соответственно полным или сепарабельным. Изометрически изоморфные пространства являются изоморфными.

Из следующей теоремы вытекает, что нормированные пространства одной и той же конечной размерности являются изоморфными.

Теорема. *Всякое нормированное пространство E конечной размерности над полем $\mathbb{F}$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, где $n = \dim E$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ обозначает базис E . Поэтому для каждого $x \in E$ найдется единственный элемент $\lambda \doteq \{\lambda_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$, т.ч. $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Определим отображение $f: E \rightarrow \mathbb{F}^n$ по формуле $f(x) \doteq \lambda$ при всех $x \in E$. Тогда отображение f является линейным и биективным. Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) \doteq \|x\|$. Применяя неравенство треугольника и неравенство Коши, получим

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda')| \leq \|x - x'\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda'_k| \|e_k\| \leq \|\lambda - \lambda'\|_{\mathbb{F}^n} \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Поэтому функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{F}^n$ величина нижней грани $\inf_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda) = a$ положительна, а величина верхней грани $\sup_{\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}=1} \varphi(\lambda) = b$ конечна. Следовательно, в силу свойства однородности функции $\varphi(\lambda)$ получаем $a\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leq \|x\| \leq b\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n}$ при всех $x \in E$ и $\lambda \in \mathbb{F}^n$. Из этих неравенств вытекает ограниченность и непрерывность отображений f и f^{-1} . $\square$

Следствие 1. *Всякое нормированное пространство E конечной размерности является банаховым, а всякое его ограниченное и замкнутое подмножество $M \subset E$ является компактным.*

Это утверждение вытекает из полноты пространства $\mathbb{F}^n$ и теоремы Хаусдорфа.

Следствие 2. *В линейном пространстве E конечной размерности $n = \dim E$ любые две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентны $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, т.е. существует такое число $c > 0$, что $c^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1$ при всех $x \in E$.*

Пусть $f(x) = \lambda$ обозначает изоморфизм $f: E \rightarrow \mathbb{F}^n$. Используя обозначения теоремы, имеем $\|x\|_1 \leq b_1\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leq b_1a_1^{-1}\|x\|_1$ и $\|x\|_2 \leq b_2\|\lambda\|_{\mathbb{F}^n} \leq b_2a_2^{-1}\|x\|_2$. Поэтому, полагая $c \doteq \max\{b_1a_1^{-1}, b_2a_2^{-1}\}$, получим неравенство $c^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1$.

Определение. Пусть $L \subset E$ — подпространство нормированного пространства. Величина $\rho(x, L) \doteq \inf_{y \in L} \|x - y\|$ называется *наилучшим приближением* элемента $x \in E$ подпространством L . Всякий элемент $y_0 \in L$, для которого $\rho(x, L) = \|x - y_0\|$, называется *элементом наилучшего приближения*.

Теорема (существования наилучшего приближения). *Если подпространство $L \subset E$ имеет конечную размерность, то для всякого $x \in E$ существует хотя бы один элемент $y_0 \in L$ наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $x \in E$, тогда имеем $\rho(x, L) \leq \|x\|$. Рассмотрим множество $K_x \doteq \{y \in L \mid \|x - y\| \leq \|x\|\}$. Поскольку K_x является замкнутым, ограниченным и содержится в конечномерном пространстве, то в силу следствия 1 оно компактно. Поэтому непрерывная функция $\varphi_x(y) \doteq \|x - y\|$ будет достигать своей нижней грани на компакте K_x . Следовательно, существует $y_0 \in K_x$, т.ч. $\varphi_x(y_0) = \inf_{y \in K_x} \varphi_x(y)$. $\square$

Определение. Нормированное пространство называется *строго нормированным*, если равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ выполняется в том и только в том случае, когда $x = \lambda y$ при некотором $\lambda \geq 0$.

Пример 1. В дальнейшем будет доказано, что евклидово пространство $\mathbb{F}^n$ строго нормировано. Пространство непрерывных функций $C[0, 1]$ не является строго нормированным, т.к. если $f(x) = 1$ и $g(x) = x$, то $\|f + g\| = \|f\| + \|g\| = 2$.

Теорема (единственности наилучшего приближения). *Если $L \subset E$ является подпространством строго нормированного пространства, то для каждого $x \in E$ может существовать не более одного элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $\rho(x, L) = \|x - y_0\| = \|x - y_1\|$, где $y_0, y_1 \in L$. Тогда имеем

$$\rho(x, L) \leq \left\| x - \frac{y_0 + y_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - y_0}{2} + \frac{x - y_1}{2} \right\| \leq \left\| \frac{x - y_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - y_1}{2} \right\| = \rho(x, L).$$

Следовательно, вместо неравенств имеют место равенства. В силу условия строгой нормированности $x - y_1 = \lambda(x - y_0)$ при некотором $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 1$, то $y_0 = y_1$. Если $\lambda \neq 1$, то $x = (y_1 - \lambda y_0)/(1 - \lambda) \in L$ и значит $x = y_0 = y_1$. $\square$

Лемма (Ф. Рёсса о почти перпендикуляре). *Пусть $L \subset E$ является замкнутым подпространством нормированного пространства. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $x \in E \setminus L$, т.ч. $\|x\| = 1$ и $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ при всех $y \in L$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in E \setminus L$, тогда $d \doteq \rho(x_0, L) > 0$. Выберем элемент $y_0 \in L$, т.ч. $\|x_0 - y_0\| < d/(1 - \varepsilon)$. Тогда если $x \doteq (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$, то при всех $y \in L$ имеем

$$\|x - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{\|x_0 - y_1\|}{\|x_0 - y_0\|} \geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon,$$

где элемент $y_1 \doteq y_0 + \|x_0 - y_0\|y \in L$. $\square$

Теорема. *Замкнутый единичный шар $S \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ в нормированном пространстве E является компактным в том и только в том случае, когда пространство имеет конечную размерность $\dim E < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\dim E = \infty$. Если точка $x_1 \in S$ и $L_1 \doteq \text{sp}\{x_1\}$ есть линейная оболочка x_1 , то по лемме существует $x_2 \in S \setminus L_1$, т.ч. $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Аналогично, если $L_2 \doteq \text{sp}\{x_1, x_2\}$ есть линейная оболочка x_1 и x_2 , то существует $x_3 \in S \setminus L_2$, т.ч. $\|x_3 - x_1\| > 1/2$, $\|x_3 - x_2\| > 1/2$ и т.д. По индукции имеем $L_n \doteq \text{sp}\{x_1, \dots, x_n\}$ и существует $x_{n+1} \in S \setminus L_n$, т.ч. $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда $\{x_n\}$ не имеет сходящейся подпоследовательности. т.е. шар некомпактный.

Достаточность. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{F}^n$ — изоморфизм, где $n = \dim E$. Тогда образ шара $f(S) \subset \mathbb{F}^n$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{F}^n$. Поэтому $f(S)$ компактно в $\mathbb{F}^n$ и, следовательно, S компактно в силу непрерывности f^{-1} . $\square$

5 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть далее $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ обозначают нормированные линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ чисел.

Определение. Отображение $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ называется *линейным оператором*, если

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \text{ и } A(\lambda x) = \lambda A(x) \text{ при всех } x, y \in \mathbf{E} \text{ и } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Норма линейного оператора $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ вычисляется по формулам:

$$\|A\| \doteq \sup_{x \in S} \|A(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}, \text{ где } S \doteq \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Линейный оператор $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ называется *ограниченным*, если он отображает ограниченные множества в ограниченные. Это равносильно тому, что $\|A\| < \infty$. Через $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ обозначим пространство ограниченных операторов из $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$.

Пример. Пусть $Af(x) \doteq \varphi(x)f(x)$ оператор умножения на функцию $\varphi \in L_\infty[a, b]$ в пространстве $L_p[a, b]$. Докажем, что $\|A\| = \|\varphi\|_{L_\infty} \doteq \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$. В случае $p = \infty$ это следует из определения нормы в $L_\infty[a, b]$. Пусть $1 \leq p < \infty$. Поскольку

$$\|A(f)\|^p = \int_a^b |\varphi(x)f(x)|^p dx \leq \|\varphi\|_{L_\infty}^p \int_a^b |f(x)|^p dx = \|\varphi\|_{L_\infty}^p \|f\|^p,$$

то $\|A\| \leq \|\varphi\|_{L_\infty}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $M \subset [a, b]$ положительной меры, т.ч. $|\varphi(x)| > \|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon$ для всех $x \in M$. Тогда, полагая $f(x) = \chi_M(x)$, имеем

$$\|A(f)\|^p = \int_a^b |\varphi(x)\chi_M(x)|^p dx > (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)^p \int_a^b |\chi_M(x)|^p dx = (\|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon)^p \|f\|^p.$$

Поэтому $\|A\| > \|\varphi\|_{L_\infty} - \varepsilon$ и, следовательно, $\|A\| = \|\varphi\|_{L_\infty}$.

Теорема. Если $\mathbf{F}$ — банахово пространство, то пространство ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ также является банаховым пространством.

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Сумма операторов $A + B$ и умножение на число λA определяются по формулам $(A + B)(x) \doteq A(x) + B(x)$ и $(\lambda A)(x) \doteq \lambda A(x)$. Очевидно, что $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ и выполняется неравенство треугольника

$$\|A + B\| = \sup_{x \in S} \|A(x) + B(x)\| \leq \sup_{x \in S} \|A(x)\| + \sup_{x \in S} \|B(x)\| = \|A\| + \|B\|.$$

Следовательно, $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ — нормированное пространство. Докажем его полноту.

Пусть $\{A_n\}$ есть последовательность Коши в $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N , т.ч. $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$. Из определения операторной нормы вытекает неравенство $\|A_n(x) - A_m(x)\| < \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$ и $n, m \geq N$. Следовательно, $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши в $\mathbf{F}$ при всех $x \in \mathbf{E}$. В силу полноты $\mathbf{F}$ существует предел $A(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$. Ясно, что A является линейным оператором. Переходя к пределу в неравенстве, указанном выше, получим, что $\|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$ и $n \geq N$, т.е. $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$ при $n \geq N$. Поэтому $A_n \rightarrow A$ сходится по норме. Так как $\|A\| \leq \|A_n\| + \|A_n - A\|$, то $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. $\square$

Теорема (Банаха–Штейнгауза). Если E — банахово пространство и система операторов $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{L}(E, F)$ по точечно ограничена в F , то система $\{A_i\}_{i \in I}$ равномерно ограничена в пространстве $\mathcal{L}(E, F)$.

Доказательство. По условию множества $M_x \doteq \{y = A_i(x) \mid i \in I\}$ ограничены в F при всех $x \in E$. Применяя принцип равностепенной непрерывности получаем, что система операторов $\{A_i\}_{i \in I}$ является равностепенно непрерывной. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, т.ч. $\|A_i(x)\| < \varepsilon$ при всех $\|x\| < \delta$ и $i \in I$. Отсюда следует, что $\|A_i\| = \sup_{\|x/\delta\| \leq 1} \|A_i(x/\delta)\| \leq \varepsilon/\delta$ при всех $i \in I$. $\square$

Следствие. Если последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ сходится по точечно на банаховом пространстве E , т.е. $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in E$, то нормы операторов равномерно ограничены, т.е. $\sup \|A_n\| < \infty$.

Так как последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится в F , то она ограничена в F .

Определение. Множество X называется *упорядоченным*, если в этом множестве X определено отношение порядка $x \leq y$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $x \leq x$; 2) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$; 3) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

Множество $A \subset X$ называется *цепью*, если $x \leq y$ или $y \leq x$ для всех пар $x, y \in A$. Элемент $y \in X$ называется *мажорантой* множества A , если $x \leq y$ при всех $x \in A$. Элемент $x \in X$ называется *максимальным* в X , если из $x \leq y$ следует $x = y$.

Например, отношением порядка является отношение включения множеств, т.е. $A \leq B$, если $A \subset B$. Следующая лемма принимается за аксиому теории множеств.

Лемма (Цорна). Если любая цепь $A \subset X$ упорядоченного множества X имеет мажоранту, то в множестве X существует максимальный элемент.

Определение. Пусть E является нормированным пространством над полем $\mathbb{F}$. Отображение $f : E \rightarrow \mathbb{F}$ называется *линейным функционалом* на пространстве E , если $f(x+y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ при всех $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Линейный функционал называется *ограниченным*, если его норма $\|f\| \doteq \sup_{x \in S} |f(x)|$ конечна.

Нормированное пространство $E^* \doteq \mathcal{L}(E, \mathbb{F})$ всех ограниченных функционалов называется *сопряженным пространством* к пространству E . По теореме о полноте пространства ограниченных операторов $\mathcal{L}(E, F)$, сопряженное пространство E^* является банаховым пространством.

Пусть $L \subset M \subset E$ подпространства линейного подпространства E . Линейный функционал $g : M \rightarrow \mathbb{F}$ называется *продолжением* линейного функционала $f : L \rightarrow \mathbb{F}$, если $g(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. В каждом множестве линейных функционалов, заданных на некоторых подпространствах E , отношение продолжения является отношением порядка и обозначается через $\{f, L\} \leq \{g, M\}$.

Напомним, что *полунормой* на линейном пространстве E называется функция $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, т.ч. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ при всех $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. При этом пара (E, p) называется *полунормированным пространством*.

Теорема (Хана–Банаха). Если линейный функционал $f : L \rightarrow \mathbb{F}$ определён на линейном подпространстве $L \subset \mathbf{E}$ полунормированного пространства $(\mathbf{E}, p)$ и $|f(x)| \leq p(x)$ при всех $x \in L$, то существует такое его продолжение $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{F}$ на все пространство $\mathbf{E}$, что $|g(x)| \leq p(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$.

Доказательство. Вначале рассмотрим действительный случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Пусть $e_1 \notin L$ и $M_1 \doteq \text{sp}\{L, e_1\}$ обозначает линейную оболочку L и e_1 . Так как при всех $x, y \in L$

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-e_1) + p(y+e_1),$$

то $f(x) - p(x-e_1) \leq p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Поэтому существует $c_1 \in \mathbb{R}$, т.ч. $f(x) - p(x-e_1) \leq c_1 \leq p(y+e_1) - f(y)$ при всех $x, y \in L$. Заменяя x и y на x/λ , а затем умножая на λ , получим $f(x) \pm \lambda c_1 \leq p(x \pm \lambda e_1)$ при всех $\lambda > 0$ и $x \in L$.

Определим на подпространстве M_1 функционал по формуле $g_1(z) \doteq f(x) + \lambda c_1$, где $z = x + \lambda e_1$, $x \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $g_1(x) = f(x)$ при всех $x \in L$ и по доказанному $g_1(z) \leq p(z)$ при всех $z \in M_1$. Так как $p(-z) = p(z)$, то $|g_1(z)| \leq p(z)$ при всех $z \in M_1$. Таким образом, построили продолжение функционала f на подпространство M_1 . Если существует элемент $e_2 \notin M_1$, то аналогично можно доказать существование продолжения функционала g_1 на подпространство $M_2 \doteq \text{sp}\{M_1, e_2\}$ и т.д.

Рассмотрим множество всех продолжений $\{g, M\}$ функционала f на некоторые подпространства $M \subset \mathbf{E}$, удовлетворяющих условию теоремы. Определяем в этом множестве отношение порядка, как отношение продолжения. Тогда для каждой цепи таких продолжений $\{g_i, M_i\}_{i \in I}$ существует мажоранта $\{g, M\}$, где $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ и $g|_{M_i} = g_i$. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальное продолжение функционала f . Поскольку по доказанному выше каждый функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то максимальное продолжение определено на всем $\mathbf{E}$ и удовлетворяет утверждению теоремы.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x) = \Re f(x)$ и $v(x) = \Im f(x)$. Так как в силу линейности $f(ix) = if(x)$, то $u(ix) + iv(ix) = iu(x) - v(x)$ и значит $v(x) = -u(ix)$, т.е. $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Пусть функционал h определяет продолжение функционала u , удовлетворяющее условию теоремы. Тогда для функционала $g(x) \doteq h(x) - ih(ix)$ выполняется свойство линейности $g(ix) = h(ix) - ih(-x) = i(h(x) - ih(ix)) = ig(x)$.

Следовательно, функционал g является линейным над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и задает продолжение функционала f . Докажем неравенство $|g(x)| \leq p(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$. Если $g(x) = e^{i\theta}|g(x)|$, то $|g(x)| = e^{-i\theta}g(x) = g(e^{-i\theta}x) = h(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$. Таким образом, функционал g удовлетворяет всем условиям теоремы. $\square$

Следствие. Если $L \subset \mathbf{E}$ — подпространство нормированного пространства $\mathbf{E}$, то для каждого $f \in L^*$ существует $g \in \mathbf{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|_L$.

Для доказательства определим $p(x) \doteq \|f\|_L \|x\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$. Тогда по теореме существует функционал g , т.ч. $g|_L = f$ и $|g(x)| \leq \|f\|_L \|x\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$. Поэтому имеем $\|g\| \leq \|f\|_L$, а в силу условия $g|_L = f$ получим равенство $\|g\| = \|f\|_L$.

Теорема. Для каждого ограниченного функционала $\alpha \in C^*[a, b]$ существует единственная функция $F \in BV[a, b]$, т.ч. $F(a) = 0$ и непрерывна слева на (a, b) , ее вариация $V_a^b(F) = \|\alpha\|$ и $\alpha(f) = \int_a^b f(x) dF(x)$ для всех $f \in C[a, b]$.

Доказательство. По следствию из теоремы Хана–Банаха функционал $\alpha \in C^*[a, b]$ имеет продолжение на $B[a, b]$ с сохранением его нормы. Обозначим его также через α . Пусть $F(t) \doteq \alpha(u_t)$, где $u_t(x) \doteq \chi_{[a, t]}(x)$ при $a \leq t < b$ и $u_b(x) = 1$. Тогда $F(a) = 0$. Докажем, что $F \in BV[a, b]$. Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ разбиение отрезка $[a, b]$ и $\theta_k \doteq \arg(F(x_k) - F(x_{k-1}))$. Представим вариационную сумму в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (\alpha(u_{x_k}) - \alpha(u_{x_{k-1}})) = \alpha \left(\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (u_{x_k} - u_{x_{k-1}}) \right).$$

Поскольку $\|\sum_{k=1}^n e^{-i\theta_k} (u_{x_k} - u_{x_{k-1}})\| = 1$, то $V_a^b(F) \leq \|\alpha\|$ и значит $F \in BV[a, b]$.

Для каждой функции $f \in C[a, b]$ введём ступенчатые функции следующего вида: $f_\tau(x) \doteq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (u_{x_k}(x) - u_{x_{k-1}}(x))$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Из равномерной непрерывности f следует, что они сходятся $f_\tau \rightrightarrows f$ равномерно на $[a, b]$, когда диаметр разбиения $d_\tau \rightarrow 0$. Отсюда в силу непрерывности функционала $\alpha \in B^*[a, b]$ получим

$$\alpha(f) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \alpha(f_\tau) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \int_a^b f dF.$$

Поскольку $F \in BV[a, b]$, то она имеет точки разрыва первого рода и их не более, чем счётно. Интеграл Рымана–Стилтьеса не зависит от изменения $F(t)$ на счётном множестве точек из (a, b) . Поэтому $F(t)$ можно считать непрерывной слева в (a, b) . При таком изменении $F(t)$ вариация не увеличится. Так как при $\|f\| \leq 1$

$$|\alpha(f)| = \left| \int_a^b f dF \right| \leq \sup_{\tau} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq V_a^b(F), \text{ то } \|\alpha\| = V_a^b(F).$$

Докажем единственность. Пусть $t_n \nearrow t$ и функция $g_n \in C[a, b]$, т.ч. $g_n(x) = 1$ при $x \in [a, t_n]$, $g_n(x) = 0$ при $x \in [t, b]$, а в интервале (t_n, t) является линейной. Тогда в силу непрерывности функции слева $F(t) = F(t-0)$ мы получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$|\alpha(g_n) - F(t_n)| = \left| \int_a^t g_n dF - \int_a^{t_n} dF \right| = \left| \int_{t_n}^t g_n dF \right| \leq V_{t_n}^t(F) \rightarrow 0.$$

Следовательно, имеет место равенство $\lim \alpha(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(t)$. $\square$

Теорема. Для каждого ограниченного функционала $\alpha \in L_p^*[a, b]$ существует единственный элемент $g \in L_q[a, b]$, т.ч. $\alpha(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ при всех $f \in L_p[a, b]$ и $\|\alpha\| = \|g\|_{L_q}$, где $1 \leq p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

Эту теорему мы оставим без доказательства. Из предыдущей теоремы вытекает, что сопряжённое пространство $C^*[a, b]$ изометрически изоморфно подпространству $BV_0[a, b]$ функций $F \in BV[a, b]$, $F(a) = 0$ и непрерывных слева в интервале (a, b) , а в силу последней теоремы сопряжённое пространство $L_p^*[a, b]$ будет изометрически изоморфным пространству $L_q[a, b]$, где $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ и $1/p + 1/q = 1$.

6 СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим нормированное пространство $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ограниченных операторов.

Определение. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ — последовательность операторов. Если $\{A_n\}$ сходится по норме, то $\{A_n\}$ называется *равномерно сходящейся*. Если $\{A_n\}$ сходится по точечно, т.е. существует предел $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$, то $\{A_n\}$ называется *сильно сходящейся* к A . Если существует предел $\lim \alpha(A_n(x)) = \alpha(A(x))$ при всех $x \in \mathbf{E}$ и $\alpha \in \mathbf{F}^*$, то $\{A_n\}$ называется *слабо сходящейся* к A .

Пусть $M \subset \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ — множество операторов. Если M ограничено по норме, то M называется *равномерно ограниченным*. Если M ограничено по точечно, т.е. множества $M_x \doteq \{y = A(x) \mid A \in M\}$ ограничены в $\mathbf{F}$ при всех $x \in \mathbf{E}$, то M называется *сильно ограниченным*. Если множества $M_{x,\alpha} \doteq \{y = \alpha(A(x)) \mid A \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$ при всех $x \in \mathbf{E}$ и $\alpha \in \mathbf{F}^*$, то M называется *слабо ограниченным*.

1. Из равномерной сходимости (ограниченности) следует сильная сходимость (ограниченность). Из сильной сходимости (ограниченности) следует слабая.

2. Если $\{A_n\}$ сходится сильно к A , то $\{A_n\}$ сильно ограничена и $\|A\| \leq \liminf \|A_n\|$.

3. Если $\mathbf{E}$ является банаховым пространством, то множество $M \subset \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ сильно ограничено тогда и только тогда, когда M равномерно ограничено.

Доказательство 1 легко вытекает из определений сходимости и ограниченности. Поскольку по условию 2 последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится, то она ограничена и значит $\{A_n\}$ сильно ограничена. Выберем индексы n_k , т.ч. $\liminf \|A_n\| = \lim \|A_{n_k}\|$. Тогда $\|A(x)\| = \lim \|A_{n_k}(x)\| \leq \lim \|A_{n_k}\| = \liminf \|A_n\|$ при всех $x \in \mathbf{S}$, т.е. $\|A\| \leq \liminf \|A_n\|$. Необходимость 3 получается из теоремы Банаха–Штейнгауза, а достаточность 3 следует из неравенства $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $L_p[a, b]$ при $1 \leq p < \infty$ последовательность операторов $A_n f(x) \doteq \varphi_n(x) f(x)$, где $\varphi_n = \chi_{[a_n, b]}$ характеристическая функция отрезка $[a_n, b]$ и $a_n \searrow a$. Так как $\|A_n(f) - f\|^p = \int_{a_n}^b |f(x)|^p dx \rightarrow 0$, то $A_n \rightarrow I$ сходится сильно к тождественному оператору $I(f) = f$. Однако последовательность $\{A_n\}$ не сходится равномерно к оператору I , т.к. нормы $\|A_n - I\| = \|\chi_{[a, a_n]}\|_{L_\infty} = 1$ при $a_n \neq a$.

Лемма. Если $\mathbf{E}$ является банаховым пространством и последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ сходится сильно $A_n \rightarrow A$, то $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Доказательство. В силу существования предела $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$ оператор $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ линейный, а в силу следствия теоремы Банаха–Штейнгауза $\sup \|A_n\| < \infty$. Так как $\|A\| \leq \liminf \|A_n\| \leq \sup \|A_n\|$, то $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. $\square$

Для каждого множества $X \subset \mathbf{E}$ в нормированном пространстве $\mathbf{E}$ существует наименьшее линейное подпространство $L \subset \mathbf{E}$, содержащее X , которое называется *линейной оболочкой* $L \doteq \text{sp} X$. При этом говорят, что X порождает L . Множество $X \subset \mathbf{E}$ называется *полным* в $\mathbf{E}$, если замкнутая линейная оболочка $\overline{\text{sp}} X = \mathbf{E}$.

Теорема (критерий сильной сходимости). *Последовательность ограниченных операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, действующих в банаховых пространствах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, тогда и только тогда сходится сильно к $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, когда $\sup \|A_n\| < \infty$ и найдется полная система элементов $X \subset \mathbf{E}$, т.ч. $\lim A_n(x) = A(x)$ при всех $x \in X$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Докажем достаточность. Каждый элемент $y \in L$ из линейной оболочки $L \doteq \text{sp } X$ может быть представлен линейной комбинацией $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{F}$ и $x_k \in X$. В силу линейности операторов существует предел $\lim A_n(y) = A(y)$ при всех $y \in L$. Поскольку линейная оболочка L всюду плотна в пространстве $\mathbf{E}$, то для любого $x \in \mathbf{E}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in L$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon/4c$, где $c \doteq \sup \|A_n\| > 0$. Для этого элемента $y \in L$ выберем N , т.ч. $\|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/2$ при всех $n, m \geq N$. Так как $\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n\| \|x - y\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < \varepsilon$, то при всех $n, m \geq N$

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n(x) - A_n(y)\| + \|A_n(y) - A_m(y)\| + \|A_m(y) - A_m(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда $\{A_n(x)\}$ является последовательностью Коши при всех $x \in \mathbf{E}$ и в силу полноты $\mathbf{F}$ существует предел $\lim A_n(x) \doteq A(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$. Таким образом, по лемме оператор A является линейным и ограниченным, т.е. $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$. $\square$

Определение. Сходимость по норме $\mathbf{E}^*$ обычно называют *сильной сходимостью*. Если существует предел $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$, то последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \mathbf{E}^*$ называется *слабо* сходящейся* к f в $\mathbf{E}^*$. Если же для каждого $x \in \mathbf{E}$ множества $M_x \doteq \{y = f(x) \mid f \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$, то множество функционалов $M \subset \mathbf{E}^*$ называется *слабо* ограниченным* в $\mathbf{E}^*$.

Из свойств сильной сходимости операторов следуют свойства слабой* сходимости.

1. Если $f_n \rightarrow f$ сходится сильно, то $f_n \rightarrow f$ сходится слабо*.
2. Если $f_n \rightarrow f$ сходится слабо*, то $\{f_n\}$ слабо* ограничена и $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
3. Если $\mathbf{E}$ является банаховым пространством, то множество $M \subset \mathbf{E}^*$ слабо* ограничено тогда и только тогда, когда M сильно ограничено.

Теорема (критерий слабой* сходимости). *Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \mathbf{E}^*$, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{E}$, тогда и только тогда сходится слабо* к $f \in \mathbf{E}^*$, когда $\sup \|f_n\| < \infty$ и существует полная система элементов $X \subset \mathbf{E}$, т.ч. $\lim f_n(x) = f(x)$ при всех $x \in X$.*

Пример 2. Рассмотрим последовательность $\delta_{x_n} \subset C^*[a, b]$ функционалов Дирака, т.е. $\delta_{x_n}(f) \doteq f(x_n)$ при всех $f \in C[a, b]$. Если $x_n \rightarrow x$, то $\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \rightarrow f(x) = \delta_x(f)$ в силу непрерывности функций $f \in C[a, b]$. Поэтому $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_x$ сходится слабо* в $C^*[a, b]$. Однако $\{\delta_{x_n}\}$ не сходится по норме, т.к. $\|\delta_{x_n} - \delta_x\| = 2$ при $x_n \neq x$.

Теорема. *Каноническое вложение $J: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^{**}$ нормированного пространства $\mathbf{E}$ во второе сопряженное пространство $\mathbf{E}^{**}$, заданное по формуле $J(x) \doteq \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteq f(x)$ есть функционал Дирака, является изометричным.*

Доказательство. Пусть $S^* \subset E^*$ обозначает единичный шар. Тогда $|f(x)| \leq \|x\|$ для всех $f \in S^*$, т.е. $\|J(x)\| = \|\delta_x\| \leq \|x\|$. Докажем, что это неравенство является равенством. Для каждого $x \in E$ определим функционал $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{F}$, на линейной оболочке $L \doteq \text{sp}\{x\}$ элемента x . Так как норма $\|f\|_L = 1$, то в силу следствия из теоремы Хана–Банаха существует функционал $g \in E^*$, т.ч. $g(x) = \|x\|$ и $\|g\| = 1$. Отсюда $\delta_x(g) = \|x\|$ и, следовательно, $\|\delta_x\| = \|x\|$. $\square$

Замечание. Если каноническое вложение $J: E \rightarrow E^{**}$ является сюръективным, то пространство E называется *рефлексивным*. В силу *теоремы Джемса* банахово пространство E рефлексивно в том и в том случае, когда всякий функционал $f \in E^*$ достигает своей нормы, т.е. существует $x \in S$, т.ч. $f(x) = \|f\|$.

Например, нетрудно доказать, что конечномерные нормированные пространства являются рефлексивными. По теореме, сформулированной в конце предыдущей лекции, пространства $L_p[a, b]$ при всех $1 < p < \infty$ являются рефлексивными.

Определение. Сходимость по норме E обычно называют *сильной сходимостью*. Если существует предел $\lim f(x_n) = f(x)$ для всех $f \in E^*$, то последовательность элементов $\{x_n\} \subset E$ называется *слабо сходящейся* к x в E . Если же для каждого $f \in E^*$ множества $M_f \doteq \{y = f(x) \mid x \in M\}$ ограничены в $\mathbb{F}$, то множество элементов $M \subset E$ называется *слабо ограниченным* в E .

Используя каноническое вложение $J: E \rightarrow E^{**}$, каждый элемент $x \in E$ можно отождествить с функционалом Дирака $\delta_x \in E^{**}$ на пространстве E^* . Поэтому из свойств слабой* сходимости следуют свойства слабой сходимости:

1. Если $x_n \rightarrow x$ сходится сильно, то $x_n \rightarrow x$ сходится слабо.
2. Если $x_n \rightarrow x$ сходится слабо, то $\{x_n\}$ сильно ограничена и $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
3. Множество $M \subset E$ является слабо ограниченным тогда и только тогда, когда множество M сильно ограничено в E .

Теорема (критерий слабой сходимости). Последовательность $\{x_n\} \subset E$ тогда и только тогда сходится слабо к x , когда $\sup \|x_n\| < \infty$ и существует полная система функционалов $X \subset E^*$, т.ч. $\lim f(x_n) = f(x)$ при всех $f \in X$.

Для доказательства нужно рассмотреть каноническое вложение $J: E \rightarrow E^{**}$ и применить критерий слабой* сходимости в пространстве E^{**} .

Пример 3. Последовательность функций $\{f_n\} \subset C[a, b]$ сходится слабо в $C[a, b]$ в том и только в том случае когда равномерно ограничена и сходится $f_n(x) \rightarrow f(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$. В самом деле, для доказательства необходимости нужно рассмотреть функционалы Дирака $\delta_x \in C^*[a, b]$. Для доказательства достаточности всякий функционал $\alpha \in C^*[a, b]$ представим по теореме Рисса интегралом Римана–Стieltjesа $\alpha(f) = \int_a^b f dF$. Так как интеграл Римана–Стieltjesа от непрерывной функции совпадает с интегралом Лебёга–Стieltjesа, то можно применить теорему Лебёга о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $\mathbf{E}$ является *сепарабельным банаховым* пространством. Тогда существует счетная и полная система элементов $X = \{x_k\}$ пространства $\mathbf{E}$. Определим метрику в сопряженном пространстве $\mathbf{E}^*$ следующей формулой:

$$\rho(f, g) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{1 + |f(x_k) - g(x_k)|} \text{ при всех } f, g \in \mathbf{E}^*.$$

Проверим аксиомы метрики. Симметричность $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ очевидна. Так как функция $\varphi(t) = t/(t+1)$ возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+$ и является полуаддитивной $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}_+$, то выполняется неравенство треугольника $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$. Пусть $\rho(f, g) = 0$, тогда $f(x_k) = g(x_k)$ при всех k . Поэтому $f(y) = g(y)$ для всех $y \in L \doteq \text{sp} X$ линейной оболочки X . Так как подпространство L всюду плотно в $\mathbf{E}$, то для любого $x \in \mathbf{E}$ существуют $y_n \in L$, т.ч. $y_n \rightarrow x$. Отсюда в силу непрерывности функционалов $f(x) = \lim f(y_n) = \lim g(y_n) = g(x)$.

Лемма. *Последовательность функционалов $\{f_n\} \subset \mathbf{S}^*$ тогда и только тогда сходится слабо*, когда она сходится в метрическом пространстве $(\mathbf{S}^*, \rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем m , т.ч. $1/2^m < \varepsilon/2$. Поскольку последовательность сходится $f_n(x) \rightarrow f(x)$ в каждой точке $x \in \mathbf{E}$, то найдется N , т.ч. $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ при всех $n \geq N$ и $k = 1, \dots, m$. Отсюда

$$\rho(f_n, f) \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon/2}{1 + \varepsilon/2} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon \text{ при всех } n \geq N.$$

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем N , т.ч. $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ при всех $n \geq N$. Тогда для любого k получим $|f_n(x_k) - f(x_k)| < 2^k \varepsilon (1 + |f_n(x_k) - f(x_k)|)$ при всех $n \geq N$. Отсюда вытекает неравенство $|f_n(x_k) - f(x_k)| \leq 2^k \varepsilon / (1 - 2^k \varepsilon)$ при всех $0 < \varepsilon < 1/2^k$ и $n \geq N$. Следовательно, существует предел $\lim f_n(x_k) = f(x_k)$ в каждой точке $x_k \in X$. Поэтому, применяя критерий слабой* сходимости функционалов, мы получим, что последовательность сходится $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$. $\square$

Теорема. *Если $\mathbf{E}$ есть сепарабельное банахово пространство, то замкнутый единичный шар $\mathbf{S}^* \subset \mathbf{E}^*$ является слабо* компактным.*

Доказательство. В силу леммы сходимость в метрическом пространстве $(\mathbf{S}^*, \rho)$ совпадает со слабой* сходимостью. Для доказательства слабой* компактности $\mathbf{S}^*$ требуется показать, что у любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathbf{S}^*$ существует слабо* сходящаяся подпоследовательность. Поскольку последовательность чисел $\{f_n(x_1)\}$ является ограниченной, то у ней существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Поскольку последовательность чисел $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$ является ограниченной, то у ней существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$, и т.д.

Таким образом, диагональная последовательность $f_{n_k} = f_k^{(k)}$ сходится в каждой точке множества X . Поэтому выполнены условия критерия слабой* сходимости последовательности функционалов $\{f_{n_k}\}$. Значит эта последовательность сходится $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ при всех $x \in \mathbf{E}$ и ее предел принадлежит $f \in \mathbf{S}^*$. $\square$

7 ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Скалярным произведением $\langle x, y \rangle \doteq q(x, y)$ в линейном пространстве E над полем $\mathbb{F}$ называется функция $q : E \times E \rightarrow \mathbb{F}$ двух переменных $x, y \in E$, обладающий следующими свойствами:

- а) $q(x, y) = \overline{q(y, x)}$ при всех $x, y \in E$;
- б) $q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 q(x_1, y) + \lambda_2 q(x_2, y)$ при всех $x_1, x_2, y \in E$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$;
- в) $q(x, x) \geq 0$ при всех $x \in E$ и $q(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство (E, q) , в котором задано скалярное произведение $\langle x, y \rangle \doteq q(x, y)$, называется *евклидовым пространством*. Функция $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ называется *евклидовой нормой*, а $\rho(x, y) \doteq \|x - y\|$ называется *евклидовой метрикой*.

1. Неравенство Коши–Буняковского: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ при всех $x, y \in E$.

Пусть $z = tx + \lambda y$, где $\lambda \doteq \langle x, y \rangle / |\langle x, y \rangle|$ и $\langle x, y \rangle \neq 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\langle z, z \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + t(\overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle = t^2 \|x\|^2 + 2t |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \geq 0.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то $|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$. При этом равенство в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $z = tx + \lambda y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы.

2. Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ при всех $x, y \in E$.

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим неравенство треугольника

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\Re \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$, т.е. когда элементы x и y линейно зависимы $x = \lambda y$, где $\Re \lambda = |\lambda| \geq 0$, и значит $\lambda \geq 0$. Поэтому евклидово пространство E является строго нормированным.

3. Равенство параллелограмма: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ при $x, y \in E$.

Складывая два равенства $\langle x \pm y, x \pm y \rangle = \langle x, x \rangle \pm 2\Re \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$, получим равенство параллелограмма $\langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle$.

Теорема (фон Неймана). Нормированное пространство E в том и только в том случае является евклидовым пространством, когда в нем выполняется равенство параллелограмма.

Доказательство достаточности приведено в учебнике Колмогорова и Фомина. Например, пространство $B(X)$ ограниченных функций не является евклидовым пространством. В самом деле, если $f(x) = \chi_A(x)$ и $g(x) = \chi_B(x)$, где $A \cap B = \emptyset$, то $\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1$. Таким образом, равенство параллелограмма не выполняется в пространстве $B(X)$.

4. Непрерывность скалярного произведения (как функции двух переменных).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и $c > 0$, т.ч. $\delta < \min\{c, \varepsilon/3c\}$, $\max(\|x_0\|, \|y_0\|) < c$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - y_0\| < \delta$, то по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} |q(x, y) - q(x_0, y_0)| &\leq |q(x - x_0, y_0)| + |q(x_0, y - y_0)| + |q(x - x_0, y - y_0)| \leq \\ &\leq \|x - x_0\| \|y_0\| + \|x_0\| \|y - y_0\| + \|x - x_0\| \|y - y_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

5. Неравенство Бёппо Лёви. Если $L \subset E$ — подпространство евклидова пространства E , то для всех $x \in E$ и $y, z \in L$ выполняется неравенство

$$\|y - z\| \leq \sqrt{\|x - y\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - z\|^2 - d^2}, \text{ где } d = \rho(x, L).$$

Пусть $u \doteq (ty + z)/(t + 1) \in L$, тогда $\|x - u\| \geq d$ и выполняется неравенство

$$\|t(x - y) + (x - z)\|^2 = \|(t + 1)(x - u)\|^2 \geq (t + 1)^2 d^2 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Раскрывая левую норму и перенося правую часть этого неравенства влево, получим

$$t^2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle x - y, x - z \rangle - d^2) + (\|x - z\|^2 - d^2) \geq 0 \text{ при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Так как дискриминант этого трехчлена не положительный, то имеем неравенство $\Re\langle x - y, x - z \rangle - d^2 \leq \sqrt{(\|x - y\|^2 - d^2)(\|x - z\|^2 - d^2)}$, из которого следует, что

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \|(x - y) - (x - z)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\langle x - y, x - z \rangle + \|x - z\|^2 = \\ &= (\|x - y\|^2 - d^2) - 2(\Re\langle x - y, x - z \rangle - d^2) + (\|x - z\|^2 - d^2) \leq \\ &\leq (\|x - y\|^2 - d^2) + 2\sqrt{(\|x - y\|^2 - d^2)(\|x - z\|^2 - d^2)} + (\|x - z\|^2 - d^2). \end{aligned}$$

Замечая, что это полный квадрат, получим неравенство Бёппо Лёви.

Определение. Элементы $x, y \in E$ называются *ортгоналными* и обозначаются через $x \perp y$, если их скалярное произведение $\langle x, y \rangle = 0$. Элемент $x \in E$ называется *ортгоналным подпространству* $L \subset E$ и обозначается $x \perp L$, если $\langle x, y \rangle = 0$ при всех $y \in L$. Два подпространства $L, M \subset E$ называются *ортгоналными* и обозначаются через $L \perp M$, если $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $x \in L$ и $y \in M$.

Лемма. Элемент $y \in L$ является наилучшим приближением элемента $x \in E$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $x - y \perp L$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x - y, z \rangle \neq 0$ при некотором $z \in L \setminus 0$. Тогда, полагая $u \doteq y + \lambda z \in L$, где $\lambda \doteq \langle x - y, z \rangle / \langle z, z \rangle$, мы получим равенство

$$\|x - u\|^2 = \|(x - y) - \lambda z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\Re\bar{\lambda}\langle x - y, z \rangle + |\lambda|^2 \langle z, z \rangle = \|x - y\|^2 - |\lambda|^2 \|z\|^2.$$

Отсюда следует, что $\|x - u\| < \|x - y\| = \rho(x, L)$. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $\langle x - y, z \rangle = 0$ при всех $z \in L$. Тогда при всех $z \in L$ имеем

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x - y, x - z \rangle \leq \|x - y\| \|x - z\|.$$

Поэтому $\|x - y\| \leq \|x - z\|$ при всех $z \in L$, т.е. $\rho(x, L) = \|x - y\|$. □

$$\rho(x, L) = \sqrt{\frac{D(x_1, \dots, x_n, x)}{D(x_1, \dots, x_n)}}, \quad \partial e \ D(x_1, \dots, x_n) \doteq \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

Доказательство. Поскольку евклидово пространство $\mathbf{E}$ строго нормировано, то по доказанному ранее элемент наилучшего приближения существует и единственный. Пусть $d^2 \doteq \rho(x, L)^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle$, где $y \in L$. Поскольку $\langle x - y, y \rangle = 0$, то $\langle y, x \rangle = \langle x, x \rangle - d^2$. Кроме того, из равенств $\langle x - y, x_k \rangle = 0$ следует, что $\langle y, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle$ при $k = 1, \dots, n$. Подставляя в эти равенства выражение $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, мы получим систему уравнений относительно неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, x_1 \rangle &= \langle x, x_1 \rangle \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots \\ \lambda_1 \langle x_1, x_n \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, x_n \rangle &= \langle x, x_n \rangle \\ \lambda_1 \langle x_1, x \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x_n, x \rangle &= \langle x, x \rangle - d^2. \end{cases}$$

Определение. Гильбертовым пространством H называется полное евклидово пространство относительно евклидовой метрики.

Пример 2. Рассмотрим пространство ℓ_2 последовательностей $x = \{x_n\}$, где $x_n \in \mathbb{F}$, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ сходится. Скалярное произведение в ℓ_2 и евклидова норма определяются по формулам $\langle x, y \rangle \doteq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ и $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$. Так как ℓ_2 является полным, то оно образует гильбертово пространство.

27

Теорема (о наилучшем приближении). Если $L \subset H$ замкнутое подпространство в гильбертова пространства H , то для каждого $x \in H$ существует единственный элемент $y \in L$ наилучшего приближения подпространством L .

Доказательство. Пусть $d = \rho(x, L) \doteq \inf_{y \in L} \|x - y\|$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $d^2 \leq \|x - y_n\|^2 < 1/n^2 + d^2$. По неравенству Бёппо Лёви $\|y_n - y_m\| < 1/n + 1/m$, т.е. $\{y_n\}$ является последовательностью Коши в L . В силу полноты пространства H и замкнутости подпространства L получим, что $\lim y_n = y \in L$. Переходя к пределу в неравенстве $d \leq \|x - y_n\| < \sqrt{d^2 + 1/n^2}$, имеем $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d$.

Таким образом, мы доказали существование элемента наилучшего приближения. Единственность элемента наилучшего приближения вытекает из ранее доказанной теоремы, т.к. гильбертово пространство H является строго нормированным. $\square$

Теорема (об ортогональном разложении). Пусть $L \subset H$ является замкнутым подпространством в гильбертовом пространстве H . Тогда пространство H представляется в виде прямой суммы $H = L \oplus L^\perp$ подпространства L и его ортогонального дополнения $L^\perp \doteq \{x \in H \mid x \perp L\}$.

Доказательство. В силу теоремы о наилучшем приближении для каждого $x \in H$ существует такой единственный элемент $y \in L$, что $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Он называется ортогональной проекцией элемента x на подпространство L . Положим $P(x) \doteq y$. Нетрудно проверить, что оператор P является линейным и норма $\|P\| = 1$.

Пусть $z \doteq x - y$. Тогда по лемме $z \in L^\perp$. Таким образом, имеем $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^\perp$. Докажем единственность этого разложения. Пусть $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in L$ и $z_1, z_2 \in L^\perp$. Из этого равенства следует, что $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in L \cap L^\perp$. Поэтому $\|y_1 - y_2\| = \|z_1 - z_2\| = 0$, т.е. $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$. $\square$

Следствие. Линейное подпространство $L \subset H$ всюду плотно в гильбертовом пространстве в том и только в том случае, когда $L^\perp = 0$.

Необходимость. Пусть $L \subset H$ всюду плотно, т.е. $\bar{L} = H$. Тогда для любого $x \in H$ существуют $x_n \in L$, т.ч. $x_n \rightarrow x$. Если элемент $y \in L^\perp$, то $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$ при всех $x \in H$ и, следовательно, $y \in H^\perp$. Поэтому $L^\perp = H^\perp = 0$.

Достаточность. Пусть $L^\perp = 0$. Тогда, как показано выше, $\bar{L}^\perp = L^\perp = 0$. Поэтому по теореме об ортогональном разложении имеет место равенство $H = \bar{L} \oplus \bar{L}^\perp = \bar{L}$, т.е. подпространство L является всюду плотным в H .

Пример 3. Покажем, что в неполном евклидовом пространстве E утверждение этого следствия, вообще говоря, неверно. Рассмотрим пространство непрерывных функций $E = C[a, b]$ как подпространство в $L_2[a, b]$ с соответствующим скалярным произведением. Пусть M обозначает подпространство в $L_2[a, b]$, состоящее из всех многочленов, ортогональных функции $\chi_{[a, c]}$, где $a < c < b$. Тогда $M \subset E$ и его ортогональное дополнение в E равно $M^\perp = 0$ нулю. Однако M не является всюду плотным в E , т.к. иначе M будет всюду плотным в $L_2[a, b]$, что невозможно.

8 ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\mathbf{H}$ обозначает гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел, а $\mathbf{H}^*$ его сопряженное пространство.

Теорема (о представлении). *Для каждого $\alpha \in \mathbf{H}^*$ существует единственный элемент $y \in \mathbf{H}$, т.ч. $\alpha(x) = \langle x, y \rangle$ при всех $x \in \mathbf{H}$ и $\|\alpha\| = \|y\|$.*

Доказательство. Обозначим через $L = \ker(\alpha) \doteq \{x \in \mathbf{H} \mid \alpha(x) = 0\}$ ядро функционала α . Поскольку $\alpha \in \mathbf{H}^*$ непрерывный функционал, то L является замкнутым подпространством в $\mathbf{H}$. Если $L^\perp = 0$, то из следствия теоремы об ортогональном разложении имеем $L = \mathbf{H}$, т.е. в этом случае $\alpha = 0$ и элемент $y = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0$, т.е. $L \neq \mathbf{H}$. Тогда существует элемент $z \in L^\perp$, т.ч. $\|z\| = 1$. Для каждого $x \in \mathbf{H}$ имеем $u = \alpha(x)z - \alpha(z)x \in L$, т.к. $\alpha(u) = 0$. Отсюда выполняется равенство $\langle u, z \rangle = \alpha(x)\langle z, z \rangle - \alpha(z)\langle x, z \rangle = \alpha(x) - \langle x, y \rangle = 0$, где $y \doteq \overline{\alpha(z)}z$. Таким образом, получаем представление $\alpha(x) = \langle x, y \rangle$ для всех $x \in \mathbf{H}$.

Для доказательства единственности представления допустим, что $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ при всех $x \in \mathbf{H}$. Тогда имеем $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ при всех $x \in \mathbf{H}$ и значит $y_1 - y_2 = 0$.

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что $|\alpha(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. При этом, если $x = y/\|y\|$, то $|\alpha(x)| = \|y\|$. Поэтому норма $\|\alpha\| = \|y\|$. $\square$

Следствие. *Пространства $\mathbf{H} \simeq \mathbf{H}^*$ изометрически изоморфны.*

Пример 1. В пространстве ℓ_2 всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ при всех $x = \{x_n\} \in \ell_2$, где $y = \{y_n\} \in \ell_2$ — некоторый фиксированный элемент и норма этого функционала равна $\|\alpha\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2)^{1/2}$.

Пример 2. В пространстве $L_2[a, b]$ всякий ограниченный функционал представляется в виде $\alpha(f) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ при всех $f \in L_2[a, b]$, где $g \in L_2[a, b]$ — некоторая фиксированная функция и норма этого функционала равна $\|\alpha\| = (\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{1/2}$.

Определение. Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$ называется *ортогональной*, если $e_n \perp e_m$ при всех $n \neq m$.

Система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$ называется *ортонормированной* в $\mathbf{E}$, если она является ортогональной и $\|e_n\| = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Полная ортонормированная система называется *ортонормированным базисом* пространства $\mathbf{E}$.

Множество элементов $M \subset \mathbf{E}$ называется *тотальным* в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$, если всякий элемент $x \in \mathbf{E}$, т.ч. $x \perp y$ при всех $y \in M$, равен нулю $x = 0$.

Если задана ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$, то для каждого элемента $x \in \mathbf{E}$ определяются *коэффициенты Фурье* $c_n \doteq \langle x, e_n \rangle$, а соответствующий ряд $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ называется *рядом Фурье* элемента x . Говорят, что ряд Фурье сходится в пространстве $\mathbf{E}$, если последовательность его частичных сумм $s_n \doteq \sum_{k=1}^n c_k e_k$ имеет предел $x = \lim s_n$ по норме пространства $\mathbf{E}$.

1. Неравенство Бесселя: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2$ при всех $x \in \mathbf{E}$.

Поскольку система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной, то для частичных сумм ряда Фурье $s_n \doteq \sum_{k=1}^n c_k e_k$ выполняется следующее равенство:

$$\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n \rangle = \langle x, x \rangle - 2\Re \langle x, s_n \rangle + \langle s_n, s_n \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \geq 0.$$

Отсюда вытекает неравенство Бесселя.

2. Равенство Парсевáля: равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда ряд Фурье элемента $x \in E$ сходится в E .

В самом деле, по доказанному выше $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$. Следовательно, $\|x - s_n\| \searrow 0$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

3. Обобщенное равенство Парсевáля: равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ выполняется в E тогда и только тогда, когда в E справедливо обобщенное равенство Парсевáля $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ и $d_n = \langle y, e_n \rangle$.

Так как $\langle x + \lambda y, e_n \rangle = c_n + \lambda d_n$, то применяя равенство Парсевáля, получим

$$\|x + \lambda y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n + \lambda d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n}) + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2.$$

Поскольку $\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\overline{\lambda} \langle x, y \rangle) + |\lambda|^2 \|y\|^2$, то $\Re(\overline{\lambda} \langle x, y \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(c_n \overline{\lambda d_n})$. Полагая здесь $\lambda = 1$, а затем $\lambda = i$, получим обобщенное равенство Парсевáля.

Теорема (Стеклóва). Ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в евклидовом пространстве E тогда и только тогда, когда в E выполняется равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, где $c_n \doteq \langle x, e_n \rangle$.

Доказательство. Необходимость. Если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то для всех $x \in E$ и $\varepsilon > 0$ существует $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, т.ч. $\|x - y\| < \varepsilon$. Пусть $L_n \doteq \text{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ обозначает линейную оболочку системы $\{e_k\}_{k=1}^n$. Так как $x - s_n \perp L_n$, то суммы s_n является наилучшим приближением элемента x подпространством L_n . Поэтому имеет место неравенство $\|x - s_m\| \leq \|x - s_n\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$ при всех $m \geq n$. Отсюда ряд Фурье сходится в E и, следовательно, выполняется равенство Парсевáля.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсевáля $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$. Так как $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n , т.ч. $\|x - s_n\| < \varepsilon$. Поэтому система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в евклидовом пространстве E . $\square$

Следствие. Ортонормированная система полна в гильбертовом пространстве тогда и только тогда, когда она тотальна.

В самом деле, если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то выполняется равенство Парсевáля. Так как из условия $c_n \doteq \langle x, e_n \rangle = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 0$, то эта система тотальна. Обратно, если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является тотальной, то ортогональное дополнение ее линейной оболочки равно нулю. Поэтому в силу следствия теоремы об ортогональном разложении система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет полной.

В бесконечномерном евклидовом пространстве из тотальности ортонормированной системы не следует полнота, т.е. существуют тотальные ортонормированные системы, которые не являются ортонормированным базисом.

Пример 3. Пусть M есть подпространство евклидова пространства $E \doteq C[a, b]$, построенное в примере 3 на предыдущей лекции. Оно состоит из многочленов и его ортогональное дополнение в E равно нулю. Поскольку многочлены, имеющие рациональные коэффициенты, всюду плотны в M и их счетное число, то, выбирая линейно независимую систему и применяя метод ортогонализации Грама–Шмидта, можно построить ортонормированную систему многочленов из M , которая будет тотальной в E , но не является полной в евклидовом пространстве E .

Теорема (метод ортогонализации Грама–Шмидта). *Для всякой полной линейно независимой системы элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ в евклидовом пространстве E существует полная ортонормированная система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в E , т.ч. ее элементы e_n являются линейными комбинациями элементов $\{x_k\}_{k=1}^n$.*

Доказательство. Пусть $y_1 = x_1$ и $e_1 \doteq y_1 / \|y_1\|$. Затем полагаем $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$ и определим $e_2 \doteq y_2 / \|y_2\|$, и т.д. На n -ом шаге полагаем $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$ и определим $e_n \doteq y_n / \|y_n\|$. Поскольку система $\{x_k\}_{k=1}^n$ линейно независима, то $y_n \neq 0$ при всех n . Таким образом, матрица A_n преобразования системы $\{x_k\}_{k=1}^n$ в систему $\{e_k\}_{k=1}^n$ является треугольной

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}x_1 \\ e_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \dots \dots \dots \\ e_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{kk} = 1/\|y_k\| \neq 0$ при $k = 1, \dots, n$. Обратная матрица также будет треугольной. Поэтому система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда полна система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нетрудно проверить, что явное выражение элементов e_n имеет следующий вид:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_1, x_{n-1} \rangle & \dots & \langle x_n, x_{n-1} \rangle \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

где $D_n \doteq D(x_1, \dots, x_n) = \det\{\langle x_k, x_l \rangle\}_{k,l=1}^n$ обозначают определители Грама. $\square$

Теорема (Рисса–Фийшера). *Каждое сепарабельное гильбертово пространство H изометрически изоморфно, либо конечномерному евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, либо бесконечномерному пространству ℓ_2 .*

Доказательство. Пусть задана счетная и полная в H система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, отбрасывая из этой системы все элементы, которые выражаются линейно через предыдущие, мы получим счетную, полную и линейно независимую систему элементов в гильбертовом пространстве H .

Рассмотрим случай, когда эта система является бесконечной, т.е. $\dim H = \infty$. В случае, когда эта система конечна, т.е. $\dim H < \infty$, доказательство полностью аналогично. Применяя метод ортогонализации Грама–Шмидта, построим счетную

и полную в $\mathbf{H}$ ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме Стекло́ва всякий элемент $x \in \mathbf{H}$ представляется в виде ряда Фурье $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, сходящегося к x по норме пространства $\mathbf{H}$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$ коэффициенты Фурье́ элемента x .

Определим линейное отображение $F : \mathbf{H} \rightarrow \ell_2$ по формуле $F(x) = c$, где $c = \{c_n\}$ обозначает последовательность коэффициентов Фурье́ элемента $x \in \mathbf{H}$. Так как в силу теоремы Стекло́ва выполняется равенство Парсевáля $\|F(x)\| = \|x\|$ при всех $x \in \mathbf{H}$, то отображение F является изометричным. Осталось доказать, что образ этого отображения $F(\mathbf{H})$ совпадает с пространством ℓ_2 .

Для каждого элемента $c = \{c_n\} \in \ell_2$ рассмотрим последовательность частичных сумм $s_n \doteq \sum_{k=1}^n c_k e_k$ ряда Фурье. Так как в силу свойства ортогональности

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m c_k \bar{c}_j \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2 \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty,$$

то $\{s_n\}$ является последовательностью Коши́ и в силу полноты пространства $\mathbf{H}$ существует предел $\lim s_n = x$ по норме $\mathbf{H}$. Применяя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle x, e_n \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle s_m, e_n \rangle = c_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $F(x) = c$. Таким образом, $F : \mathbf{H} \rightarrow \ell_2$ является изометричным и биективным отображением гильбертова пространства $\mathbf{H}$ на пространство ℓ_2 . $\square$

Пример 4. Докажем, что тригонометрическая система $e_n(x) \doteq e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, где $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированной и полной в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{2\pi i(n-m)} = 0 \quad (n \neq m), \quad \langle e_n, e_n \rangle = 1,$$

т.е. система $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является ортонормированной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

Докажем полноту. Так как множество непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$ всюду плотно в $L_2[-\pi, \pi]$, то для любой $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $g \in C[-\pi, \pi]$, т.ч. $\|f - g\|_{L_2} < \varepsilon/3$. Изменяя функцию g на достаточно малом отрезке $[\pi - \delta, \pi]$ и полагая там ее линейной, мы построим функцию $h \in C[-\pi, \pi]$, т.ч. $h(-\pi) = h(\pi)$ и $\|g - h\|_{L_2} < \varepsilon/3$. Тогда по теореме Вейерштрасса об аппроксимации найдется тригонометрический полином $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$, т.ч. $\|h - T\|_C < \varepsilon/3\sqrt{2\pi}$. Так как $\|h - T\|_{L_2} \leq \sqrt{2\pi} \|h - T\|_C < \varepsilon/3$, то выполняется неравенство

$$\|f - T\|_{L_2} \leq \|f - g\|_{L_2} + \|g - h\|_{L_2} + \|h - T\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Таким образом, тригонометрическая система $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ полна в $L_2[-\pi, \pi]$.

При помощи теоремы Рйсса-Фйшера определяется изометрический изоморфизм пространства $L_2[-\pi, \pi]$ на пространство ℓ_2 по формуле $F(f) = c$, где $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ обозначает совокупность всех коэффициентов Фурье́ функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$, т.е. $c_n \doteq \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx / \sqrt{2\pi}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. В силу теоремы Стекло́ва выполняется равенство Парсевáля $\|F(f)\| = \|f\|$ при всех $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Поэтому указанное отображение $F : L_2[-\pi, \pi] \rightarrow \ell_2$ является изометричным и, как показано в теореме, его образ совпадает с ℓ_2 .

9 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Определение. *Прямое и обратное преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называются операторы $\mathcal{F}(f) \doteq \widehat{f}$ и $\mathcal{F}^{-1}(f) \doteq \widetilde{f}$, определенные по формулам*

$$\widehat{f}(x) \doteq \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy \quad \text{и} \quad \widetilde{f}(x) \doteq \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{ixy} dy, \quad \text{где } \varkappa \doteq 1/\sqrt{2\pi}.$$

Лемма (Римана-Лебега). *Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ обладает следующими свойствами: $\widehat{f} \in C(\mathbb{R})$, $\|\widehat{f}\|_C \leq \varkappa \|f\|_{L_1}$ и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \widehat{f}(x) = 0$.*

Доказательство. Ясно, что $\|\widehat{f}\|_C \leq \varkappa \|f\|_{L_1}$. Пусть $\tau_t f(x) \doteq f(x-t)$, тогда

$$|\tau_t \widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)| \leq \varkappa \int_{\mathbb{R}} |f(y)| (e^{i(x+t)y} - e^{ixy}) dy = 2\varkappa \int_{\mathbb{R}} |f(y)| |\sin \frac{ty}{2}| dy.$$

По теореме Лебега последний интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Поэтому функция $\widehat{f}$ равномерно непрерывна. Так как при $t \doteq \pi/x$ имеем $\tau_t \widehat{f} = -\widehat{f}$, то

$$|\widehat{f}(x)| \leq \frac{1}{2} \|\widehat{f} - \tau_t \widehat{f}\|_C \leq \frac{\varkappa}{2} \|f - \tau_t f\|_{L_1} \leq \frac{\varkappa}{2} (\|f - g\|_{L_1} + \|g - \tau_t g\|_{L_1} + \|\tau_t g - \tau_t f\|_{L_1}).$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ и непрерывную финитную функцию $g \in C_0(\mathbb{R})$, т.ч.

$$\|f - g\|_{L_1} = \|\tau_t(f - g)\|_{L_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa}, \quad \|g - \tau_t g\|_{L_1} < \frac{2\varepsilon}{3\varkappa}$$

при всех $|t| = |\pi/x| < \delta$. Тогда получим $|\widehat{f}(x)| < \varepsilon$ при всех $|x| > \pi/\delta$. $\square$

Теорема (условие Дини). *Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ и в точке $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие Дини $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty$, где $\delta > 0$, то существует предел, равный*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa \int_{-n}^n \widehat{f}(y) e^{ixy} dy = f(x).$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования по теореме Фубини, имеем

$$\varkappa \int_{-n}^n \widehat{f}(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{-n}^n e^{i(x-z)y} dy \right) dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\sin n(x-z)}{x-z} dz.$$

Полагая в интеграле $t = x - z$ и используя равенство $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$, мы получим

$$\begin{aligned} \varkappa \int_{-n}^n \widehat{f}(y) e^{ixy} dy - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{\sin nt}{t} dt - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq \delta} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin nt dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \delta} \frac{f(x-t)}{t} \sin nt dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|t| > n\delta} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Первые два интеграла стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ по лемме Римана-Лебега, а последний интеграл стремится к нулю в силу его сходимости в бесконечности. $\square$

Рассмотрим свойства преобразования Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^m)$.

1. Формулы умножения. *Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то выполняются равенства*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widetilde{g}(x) dx.$$

В самом деле, применяя теорему Фубини, получаем равенство

$$\varkappa \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy \right) g(x) dx = \varkappa \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ixy} dx \right) dy.$$

2. Формулы дифференцирования. Если функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x^n f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{f^{(k)}}(x) = (-iy)^k \widehat{f}(y)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $k \leq n$. Если функция имеет производные $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ при $k \leq n$, то $\widehat{f^{(k)}}(x) = (ix)^k \widehat{f}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $k \leq n$.

Первая формула доказывается дифференцированием преобразования Фурье под знаком интеграла Лебёга. Доказательство второй формулы получается при помощи интегрирования по частям, т.к. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$.

3. Формула свертки. Свертка $f * g(x) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$ функций $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Линейное преобразование $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное по формуле $A(x, y) = (y, x-y)$, отображает измеримые множества в измеримые. Поэтому из измеримости функции $f(x)g(y)$ вытекает измеримость функции $f(y)g(x-y)$. Применяя теорему Фубини, получим $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}$. Таким образом, свертка $f * g \in L_1(\mathbb{R})$. Переставляя порядок интегрирования при помощи теоремы Фубини, имеем

$$\kappa^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) g(y-z) dz \right) e^{-ixy} dy = \kappa^2 \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y-z) e^{-ix(y-z)} dy \right) dz.$$

Производя здесь замену переменных, получаем указанное равенство.

Определение. Бесконечно дифференцируемая функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ называется *быстро убывающей*, если $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi^{(k)}(x)| < \infty$ при всех $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Пространство $\mathcal{S}$ всех быстро убывающих функций называется *пространством Швάρца*.

Лемма. Пространство $\mathcal{S}$ образует всюду плотное подпространство в $L_2(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье отображает его в себя биективно и изометрично.

Доказательство. Как известно, что множество ступенчатых финитных функций всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$. Так как каждая ступенчатая функция является линейной комбинацией функций $\chi_{(a,b)}$, а каждая такая функция является пределом в $L_2(\mathbb{R})$ последовательности финитных функций $\varphi_n(x) = \int_{a+1/n}^{b-1/n} \omega_n(x-y) dy$ пространства $\mathcal{S}$, где $\omega_n(t) = c_n e^{\frac{1}{n^2 t^2 - 1}}$ при $|t| < 1/n$, $\omega_n(t) = 0$ при $|t| \geq 1/n$ и $\int_{\mathbb{R}} \omega_n(t) dt = 1$, то даже множество финитных функций из $\mathcal{S}$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$.

Если $\varphi \in \mathcal{S}$, то, применяя формулы дифференцирования, получим $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Так как по условию Дини $\widetilde{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(x)$, то из формулы умножения вытекает, что

$$\|\varphi\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x) \overline{\widehat{\varphi}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\varphi}(x)} dx = \|\widehat{\varphi}\|_{L_2}^2.$$

Аналогичное равенство в $\mathcal{S}$ имеет место для обратного преобразования Фурье. $\square$

Определение. Преобразованием Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ называется предел преобразований Фурье функций $f_n \doteq f \chi_{(-n,n)}$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\widehat{f}(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa \int_{-n}^n f(y) e^{-ixy} dy, \quad \widetilde{f}(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa \int_{-n}^n f(y) e^{ixy} dy.$$

Теорема (Планшереля). Преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ является унитарным оператором, т.е. биективным и изометричным.

Доказательство. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $f(x) = 0$ при всех $x \notin (-r, r)$. Тогда $f \in L_1(\mathbb{R})$ и существуют финитные функции $\varphi_n \in \mathcal{S}$, т.ч. $\text{supp } \varphi_n \subset [-r, r]$ и $\|f - \varphi_n\|_{L_2} \rightarrow 0$. Так как выполняются неравенства $\|\widehat{f} - \widehat{\varphi}_n\|_C \leq \kappa \|f - \varphi_n\|_{L_1} \leq \kappa \sqrt{2r} \|f - \varphi_n\|_{L_2} \rightarrow 0$, то последовательность $\widehat{\varphi}_n \Rightarrow \widehat{f}$ сходится равномерно к непрерывной функции $\widehat{f}$. Поскольку $\{\varphi_n\}$ есть последовательность Коши в $L_2(\mathbb{R})$ и имеет место равенство $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2} = \|\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi}_m\|_{L_2}$, то $\{\widehat{\varphi}_n\}$ является последовательностью Коши в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому $\widehat{\varphi}_n \rightarrow \widehat{f}$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ и $\|f\|_{L_2} = \lim \|\varphi_n\|_{L_2} = \lim \|\widehat{\varphi}_n\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2}$.

Предположим теперь, что $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $f_n(x) \doteq f(x)\chi_{(-n,n)}(x)$. Тогда $\|f - f_n\|_{L_2} \rightarrow 0$. Поэтому $\{f_n\}$ является последовательностью Коши. Так как по доказанному выше $\|f_n - f_m\|_{L_2} = \|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_{L_2}$, то $\{\widehat{f}_n\}$ также будет последовательностью Коши и значит существует предел $\lim \widehat{f}_n \doteq \widehat{f}$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$. При этом выполняется равенство Парсевáля $\|f\|_{L_2} = \lim \|f_n\|_{L_2} = \lim \|\widehat{f}_n\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{L_2}$. Аналогичным образом существует предел $\lim \widehat{f}_n \doteq \widetilde{f}$ в $L_2(\mathbb{R})$ и выполняется равенство $\|f\|_{L_2} = \|\widetilde{f}\|_{L_2}$.

В силу леммы найдутся функции $\varphi_n \in \mathcal{S}$, т.ч. $\varphi_n \rightarrow f$ в $L_2(\mathbb{R})$. По доказанному выше $\varphi_n = \widehat{\widehat{\varphi}_n} \rightarrow \widehat{\widehat{f}}$. Поэтому образ оператора Фурье совпадает с $L_2(\mathbb{R})$. $\square$

Рассмотрим свойства преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

1. Формулы умножения. Если $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, то выполняются равенства

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widetilde{g}(x) dx.$$

Пусть $f_n(x) \doteq f(x)\chi_{(-n,n)}(x)$ и $g_n(x) \doteq g(x)\chi_{(-n,n)}(x)$, тогда достаточно применить непрерывность скалярного произведения и аналогичные равенства в $L_1(\mathbb{R})$.

2. Формулы обращения. Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то $\widehat{\widetilde{f}}(x) = \widetilde{\widehat{f}}(x) = f(x)$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$, т.е. $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f$ для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Первое равенство $\widehat{\widetilde{f}} = f$ доказано в конце доказательства теоремы Планшерéля. Аналогично доказывается второе равенство $\widetilde{\widehat{f}} = f$.

3. Формула свертки. Свертка $f * g(x) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$ функций $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $g \in L_2(\mathbb{R})$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и $\kappa f * g(x) = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

Как было показано выше из измеримости функции $f(x)g(y)$ следует измеримость функции $f(y)g(x-y)$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$|f * g(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |f(y)| |g(x-y)|^2 dy.$$

Интегрируя это неравенство по теореме Фубини, а затем делая замену переменных, получим $\|f * g\|_{L_2}^2 \leq \|f\|_{L_1}^2 \|g\|_{L_2}^2$. Поэтому $f * g \in L_2(\mathbb{R})$ и свертка непрерывна по второму аргументу в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $g_n(x) \doteq g(x)\chi_{(-n,n)}(x)$, тогда $g_n \in L_1(\mathbb{R})$ и $g_n \rightarrow g$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$. Применяя формулу свертки в $L_1(\mathbb{R})$, получим

$$\kappa \widehat{f * g}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa \widehat{f * g_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(x) \widehat{g_n}(x) = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x),$$

где предел берется в $L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, $\kappa \widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

Определение. Функциями Эрмита называются следующие функции:

$$h_n(x) \doteq c_n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где функции $H_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ называются *многочленами Эрмита*.

Система функций Эрмита обладает свойством ортогональности в $L_2(\mathbb{R})$. В самом деле, интегрируя по частям n раз, получим при всех $n > k$

$$\int_{\mathbb{R}} h_k(x) h_n(x) dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_k(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = c_n (-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} H_k(x) dx = 0.$$

При $k = n$ получим $\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x) dx = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}$. Поэтому при $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$ система функций Эрмита $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной.

Лемма. Если функция $\rho(t)$ измерима и $0 < |\rho(x)| \leq a e^{-b|x|}$ п.в. на $\mathbb{R}$, где $a, b > 0$, то система функций $\varphi_n(x) \doteq x^n \rho(x)$ при $n \geq 0$ полна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Докажем, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$ и ортогональна $\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dt = 0$ всем функциям $\varphi_n(x)$, то $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что функция

$$F(z) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\rho(x)} e^{-ixz} dx, \quad z = u + iv \in \mathbb{C},$$

голоморфна в полосе $|\Im z| < b$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ее производные в нуле

$$F^{(n)}(z)|_{z=0} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\rho(x)} (-ix)^n e^{-ixz} dt|_{z=0} = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dt = 0.$$

Поэтому $F(z) = 0$ при всех $|\Im z| < b$. В частности, функция $F(u) = 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. Отсюда по формуле обращения преобразования Фурье получим, что произведение $f(x) \overline{\rho(x)} = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция $f(x) = 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема. Система функций Эрмита $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ полную ортонормированную систему собственных функций оператора Фурье, т.е. $\widehat{h}_n(x) = \lambda_n h_n(x)$ при всех $n \geq 0$, где $\lambda_n = (-i)^n$ собственные значения.

Доказательство. Поскольку функции Эрмита $h_n(x)$ получаются ортогонализацией системы функций $\varphi_n(x) = x^n \rho(x)$, где $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$, то полнота следует из леммы. Докажем, что $h_n(x)$ является собственной функцией оператора Фурье.

$$\begin{aligned} \widehat{h}_n(x) &= \kappa \int_{\mathbb{R}} h_n(y) e^{-ixy} dy = \kappa c_n \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2 - 2ixy}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy = \\ &= \kappa c_n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} dy = \kappa c_n (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} dy = \\ &= \kappa c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{\frac{(y-ix)^2}{2}} dy = \kappa c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-ixy + \frac{x^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Используя в последнем выражении преобразование Фурье функции $\rho(x)$, равное $\widehat{\rho}(x) = \rho(x)$ (см. примеры преобразований Фурье в книге Колмогорова и Фомина), мы получим $\widehat{h}_n(x) = c_n (-i)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-i)^n h_n(x)$. $\square$

10 СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathbf{E}$ обозначает нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathbf{E}^*$ его сопряженное пространство, состоящее из всех линейных ограниченных функционалов $f: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{F}$ с нормой $\|f\| \doteq \sup_{x \in S} |f(x)|$, где $S \doteq \{x \in \mathbf{E} \mid \|x\| \leq 1\}$ есть единичный шар в $\mathbf{E}$. Значения линейного функционала $f \in \mathbf{E}^*$ на элементе $x \in \mathbf{E}$ далее обозначаются через $f(x) \doteq \langle f, x \rangle$.

Определение. Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{E}$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ следует, что $\lambda_i = 0$ при $i = 1, \dots, n$.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{E}^*$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$ при всех $x \in \mathbf{E}$ следует, что $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \dots, n$.

Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{E}$ и система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{E}^*$ называется *биортогональными*, если $\langle f_j, e_i \rangle = 0$ при всех $i \neq j$ и $\langle f_i, e_i \rangle = 1$.

Бесконечная система элементов называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система элементов в $\mathbf{E}$ называется *базисом Гамеля*. Его существование вытекает из леммы Цорна. Размерностью $\dim \mathbf{E}$ называется мощность базиса Гамеля.

Последовательность элементов $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbf{E}$ называется *базисом* нормированного пространства $\mathbf{E}$, если каждый элемент $x \in \mathbf{E}$ имеет единственное представление в виде сходящегося по норме ряда $x = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i$. Если, кроме того, функционалы $f_j(x) \doteq \lambda_j$, определенные при помощи этого представления, принадлежат $f_j \in \mathbf{E}^*$, то система $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ называется *базисом Шáудера* в пространстве $\mathbf{E}$. В банаховом пространстве $\mathbf{E}$ любой базис является базисом Шáудера и система $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbf{E}^*$ образует биортогональную систему функционалов к системе $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbf{E}$.

Теорема. Система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{E}$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{E}^*$, когда линейно независима.

Система функционалов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{E}^*$ тогда и только тогда имеет биортогональную систему элементов $\{e_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{E}$, когда линейно независима.

Доказательство. Вначале докажем второе утверждение теоремы. Необходимость. Предположим, что имеет место равенство $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$ при всех $x \in \mathbf{E}$. Тогда, полагая $x = e_j$, в силу биортогональности получим $\lambda_j = 0$ при $j = 1, \dots, n$.

Достаточность. При $n = 1$ имеем $f_1 \neq 0$. Поэтому найдется $e_1 \in \mathbf{E}$, т.ч. $f_1(e_1) = 1$. По индукции предположим, что для $n - 1$ утверждение верно. Тогда существуют $x_i \in \mathbf{E}$, т.ч. $f_j(x_i) = 0$ при $i \neq j$ и $f_i(x_i) = 1$, где $i, j = 1, \dots, n - 1$. Для каждого $x \in \mathbf{E}$ положим $y \doteq x - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) x_i$. Тогда элемент $y \in \mathbf{E}$ удовлетворяет условию $f_j(y) = 0$ при всех $j = 1, \dots, n - 1$ и при всех $x \in \mathbf{E}$. Если выполняется равенство $f_n(y) = 0$ при всех $x \in \mathbf{E}$, то $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_n(x_i)$ при всех $x \in \mathbf{E}$, что противоречит условию линейной независимости функционалов. Поэтому найдется элемент $x \in \mathbf{E}$, для которого $f_n(y) \neq 0$. Полагая $e_n \doteq y / f_n(y)$ и $e_i \doteq x_i - f_n(x_i) e_n$ при $i = 1, \dots, n - 1$, мы получим биортогональную систему элементов в пространстве $\mathbf{E}$.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим вложение $J: E \rightarrow E^{**}$ во второе сопряженное пространство, заданное по формуле $J(x) \doteq \delta_x$, где $\delta_x(f) \doteq f(x)$ есть функционал Дирака $\delta_x \in E^{**}$. Так как система функционалов $\{\delta_{e_i}\}_{i=1}^n \subset E^{**}$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\{e_i\}_{i=1}^n$ линейно независима, то по доказанному выше существует биортогональная система $\{f_j\}_{j=1}^n \subset E^*$. $\square$

Пусть E, F — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел и $\mathcal{L}(E, F)$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов $A: E \rightarrow F$ с нормой $\|A\| \doteq \sup_{x \in S} \|A(x)\|$. Следующие множества:

$$\ker A \doteq \{x \in E \mid A(x) = 0\} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} A \doteq \{y \in F \mid y = A(x), x \in E\}$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного оператора A .

1. Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то ядро $\ker A$ является замкнутым линейным подпространством E , а образ $\operatorname{Im} A$ образует линейное подпространство F .

Пусть элементы $x, y \in \ker A$. Тогда $A(x+y) = A(x) + A(y) = 0$ и $A(\lambda x) = \lambda A(x) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $x+y \in \ker A$ и $\lambda x \in \ker A$. Пусть $x = \lim x_n$ и $x_n \in \ker A$, тогда в силу непрерывности оператора $A(x) = \lim A(x_n) = 0$, т.е. $x \in \ker A$.

Пусть элементы $u, v \in \operatorname{Im} A$. Тогда получаем $u+v = A(x) + A(y) = A(x+y) \in \operatorname{Im}(A)$ и $\lambda u = \lambda A(x) = A(\lambda x) \in \operatorname{Im} A$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$, т.е. $u+v \in \operatorname{Im} A$ и $\lambda u \in \operatorname{Im} A$.

2. Для того чтобы линейный оператор $A: E \rightarrow F$ являлся биективным, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = F$.

Если A является биективным, то $\ker A = A^{-1}(0) = 0$ и $\operatorname{Im} A = F$. Обратно, если $\ker A = 0$, то из равенства $A(x) = A(y)$ следует, что $A(x-y) = 0$ и, значит, $x-y = 0$. Отсюда оператор A является биективным отображением на свой образ $\operatorname{Im} A = F$.

Определение. Произведением операторов $A: E \rightarrow F$ и $B: F \rightarrow G$ называется оператор $BA: E \rightarrow G$, определенный по формуле $BA(x) \doteq B(A(x))$ при всех $x \in E$.

Оператор $B: F \rightarrow E$ называется *обратным к оператору* $A: E \rightarrow F$, если имеют место равенства $BA = I_E$ и $AB = I_F$, где I_E и I_F — тождественные операторы, т.е. $I_E(x) = x$ при всех $x \in E$. Обратный оператор обозначается через $A^{-1} \doteq B$.

1. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B \in \mathcal{L}(F, G)$, то $BA \in \mathcal{L}(E, G)$ и $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

В самом деле, имеем $\|BA(x)\| \leq \|B\| \|A(x)\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|$ при всех $x \in E$.

2. Если оператор $A: E \rightarrow F$ является линейным и биективным, то обратный оператор $A^{-1}: F \rightarrow E$ также является линейным и биективным.

В самом деле, если существует обратный оператор, то он является биективным. Докажем линейность оператора A^{-1} . Пусть $A^{-1}(u) = x$, $A^{-1}(v) = y$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, тогда

$$A^{-1}(u+v) = A^{-1}(Ax + Ay) = A^{-1}A(x+y) = x+y = A^{-1}(u) + A^{-1}(v),$$

$$A^{-1}(\lambda u) = A^{-1}(\lambda Ax) = A^{-1}A(\lambda x) = \lambda x = \lambda A^{-1}(u).$$

Определение. Оператор $A^* : F^* \rightarrow E^*$ называется *сопряженным к оператору* $A \in \mathcal{L}(E, F)$, если имеет место равенство $\langle A^*f, x \rangle = \langle f, Ax \rangle$ при всех $x \in E$ и $f \in F^*$, т.е. для каждого $f \in F^*$ его образ $A^*(f) = g$ равен $g(x) \doteq f(Ax)$ при всех $x \in E$.

1. Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

Докажем, что A^* является линейным оператором. Пусть $f, g \in F^*$ и $A^*(f + g) = h$. Тогда имеем $h(x) = (f + g)(Ax) = f(Ax) + g(Ax)$, т.е. $A^*(f + g) = A^*f + A^*g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{F}$ и $A^*(\lambda f) = h$, тогда получим $h(x) = (\lambda f)(Ax) = \lambda f(Ax)$, т.е. $A^*(\lambda f) = \lambda A^*f$.

Докажем равенство норм. Так как $A^*f(x) = f(Ax)$, то по свойству произведения операторов имеем $\|A^*f\| \leq \|f\| \|A\|$, т.е. $\|A^*\| \leq \|A\|$. С другой стороны, для каждого $x \in E$ по теореме Хана–Банаха существует $f \in F^*$, т.ч. $f(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f\| = 1$. Поэтому $\|Ax\| = A^*f(x) \leq \|A^*f\| \|x\| \leq \|A^*\| \|x\|$. Следовательно, имеем $\|A^*\| = \|A\|$.

2. Если операторы $A \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B \in \mathcal{L}(F, G)$, то $(BA)^* = A^*B^*$. В частности, если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является биективным, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

В самом деле, имеем $(BA)^*g(x) = g(BAx) = B^*g(Ax) = A^*B^*g(x)$ при всех $g \in G^*$ и $x \in E$. Второе утверждение следует из определения обратного оператора и теоремы Банаха об обратном операторе, которую мы докажем на следующей лекции.

Определение. Пусть $V \subset E$ и $W \subset E^*$ некоторые подмножества, тогда

$$V^\perp \doteq \{f \in E^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_\perp \doteq \{x \in E \mid f(x) = 0, f \in W\}$$

называются соответственно *аннулятором* V и *аннулятором* W . Заметим, что эти множества $W_\perp = \bigcap_{f \in W} \ker f$ и $V^\perp = \bigcap_{x \in V} \ker \delta_x$ образуются как пересечение ядер ограниченных функционалов. Поэтому будут замкнутыми подпространствами.

Теорема. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то имеют место следующие свойства:

- 1) $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)_\perp$; 3) $\operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)_\perp$;
- 2) $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$; 4) $\operatorname{Im} A^* \subset (\ker A)^\perp$.

Доказательство. Доказательство этих соотношений легко вывести из указанных выше определений сопряженного оператора, ядра, образа и их аннуляторов.

1) Элемент $x \in \ker A$ тогда и только тогда, когда $Ax = 0$. По теореме Хана–Банаха это равносильно тому, что $f(Ax) = 0$ при всех $f \in F^*$, т.е. $x \in (\operatorname{Im} A^*)_\perp$.

2) Функционал $f \in \ker A^*$ тогда и только тогда, когда $A^*f = 0$, т.е. имеет место $f(Ax) = 0$ при всех $x \in E$. Последнее равносильно включению $f \in (\operatorname{Im} A)^\perp$.

3) Если $y \in \operatorname{Im} A$, то существует $x \in E$, т.ч. $y = Ax$. Поэтому $f(y) = A^*f(x) = 0$ при всех $f \in \ker A^*$. Таким образом, выполняется включение $y \in (\ker A^*)_\perp$.

4) Если $g \in \operatorname{Im} A^*$, то существует $f \in F^*$, т.ч. $g(x) = f(Ax)$ при всех $x \in E$. Отсюда $g(x) = 0$ при всех $x \in \ker A$. Поэтому выполняется включение $g \in (\ker A)^\perp$. $\square$

Замечание. В дальнейшем будет показано, что если E и F являются банаховыми пространствами и образ $\operatorname{Im} A$ оператора $A \in \mathcal{L}(E, F)$ замкнут в пространстве F , то включения 3) и 4) этой теоремы также являются равенствами.

Пример 1. Если линейный оператор $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ задан матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, то $Ax = y$, где $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ при $i = 1, \dots, m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{F}^m$. Тогда по определению сопряженного оператора получим

$$\langle u, Ax \rangle = \sum_{i=1}^m u_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i \right) x_j = \langle A^*u, x \rangle,$$

т.е. $A^*u = v$, где $v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i$, $j = 1, \dots, n$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{F}^m$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$. Поэтому оператор $A^* = \{a_{ij}^*\}_{j,i=1}^{n,m}$ имеет транспонированную матрицу $a_{ij}^* = a_{ji}$.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор $A : L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, определенный по следующей формуле:

$$Af(x) \doteq \int_a^b K(x, y) f(y) dy \text{ для всех } f \in L_p[a, b],$$

где функция $K(x, y)$ называется ядром интегрального оператора. Предположим, что функция двух переменных $K(x, y)$ является измеримой на квадрате $[a, b]^2$, при этом одна из смешанных норм является конечной

$$\|K\|_{L_{pq}} \doteq \| \|K(x, y)\|_{L_p} \|_{L_q} \text{ и } \|K\|_{L_{qp}} \doteq \| \|K(x, y)\|_{L_q} \|_{L_p}, \text{ где } 1/p + 1/q = 1.$$

Здесь в случае $L_{pq}[a, b]^2$ внутренняя норма берется по первой переменной x в $L_p[a, b]$, а внешняя норма берется по второй переменной y в $L_q[a, b]$, а в случае $L_{qp}[a, b]^2$ внутренняя норма берется по второй переменной y в $L_q[a, b]$, а внешняя норма берется по первой переменной x в $L_p[a, b]$.

Используя обобщенное неравенство Минковского по переменной x и неравенство Гёльдера по переменной y , в первом случае получим следующее неравенство

$$\|Af\|_{L_p} \leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x, y)|^p dx \right)^{1/p} |f(y)| dy \leq \|K\|_{L_{pq}} \|f\|_{L_p}.$$

Аналогичное неравенство имеет место во втором случае, если использовать только неравенство Гёльдера по переменной y

$$\|Af\|_{L_p} \leq \left(\int_a^b (\|K(x, y)\|_{L_q} \|f\|_{L_p})^p dx \right)^{1/p} = \|K\|_{L_{qp}} \|f\|_{L_p}.$$

Таким образом, интегральный оператор $A : L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ будет ограниченным в пространстве $L_p[a, b]$, если одна из указанных смешанных норм является конечной, при этом его норма не превосходит $\|A\| \leq \min\{\|K\|_{L_{pq}}, \|K\|_{L_{qp}}\}$.

Поскольку функция двух переменных $K(x, y)f(x)g(y) \in L_1[a, b]^2$ для всех функций $f \in L_p[a, b]$ и $g \in L_q[a, b]$, то, меняя порядок интегрирования при помощи теоремы Фубини, мы получим равенство

$$\langle Af, g \rangle = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) f(y) dy \right) g(x) dx = \int_a^b f(y) \left(\int_a^b K(x, y) g(x) dx \right) dy = \langle f, A^*g \rangle.$$

Значит сопряженный оператор к оператору A , действующий $A^* : L_q[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$, является интегральным оператором и справедлива следующая формула:

$$A^*g(y) = \int_a^b K(x, y) g(x) dx \text{ для всех } g \in L_q[a, b],$$

т.е. ядро $K^*(x, y)$ оператора A^* является транспонированным $K^*(x, y) = K(y, x)$ к ядру $K(x, y)$ оператора A . В силу доказанного свойства 1 сопряженный оператор A^* является ограниченным и его норма не превосходит $\|A^*\| \leq \min\{\|K\|_{L_{pq}}, \|K\|_{L_{qp}}\}$.

11 ТЕОРЕМА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ

Пусть $E \times F \doteq \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$ есть прямое произведение нормированных пространств E и F . Введем в $E \times F$ операции сложения, умножения и норму:

- а) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \doteq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ при всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$;
- б) $\lambda(x, y) \doteq (\lambda x, \lambda y)$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $(x, y) \in E \times F$;
- с) $\|(x, y)\| \doteq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ при всех $(x, y) \in E \times F$.

Тогда $E \times F$ превращается в нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Лемма. Если E и F являются банаховыми пространствами, то их прямое произведение $E \times F$ также будет банаховым пространством.

Доказательство. Докажем полноту пространства $E \times F$. Пусть $\{(x_n, y_n)\}$ образует последовательность Коши в $E \times F$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует N , т.ч. $\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \sqrt{\|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2} < \varepsilon$ при всех $n, m \geq N$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются последовательностями Коши и в силу полноты E и F существуют пределы $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Отсюда $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ сходится в $E \times F$. $\square$

В приложениях всякий линейный оператор A имеет некоторую естественную область определения. Предположим далее, что линейный оператор $A : L \rightarrow F$ задан на линейном подпространстве $L \subset E$ банахова пространства E и принимает значения в банаховом пространстве F . Подпространство $L \doteq \text{dom} A$ называется *областью определения* оператора A , а подпространство $\text{gr} A \doteq \{(x, y) \in E \times F \mid x \in L \text{ и } y = Ax\}$ *графиком* оператора A . График оператора образует линейное подпространством прямого произведения $\text{gr} A \subset E \times F$, но, вообще говоря, незамкнутое.

Определение. Линейный оператор $A : L \rightarrow F$, определенный на подпространстве $L \subset E$, называется *замкнутым*, если его график $\text{gr} A \subset E \times F$ замкнут в $E \times F$.

Замкнутость графика $\text{gr} A$ оператора A равносильно следующему условию: если последовательность элементов $(x_n, y_n) \in \text{gr} A$ и $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ сходится в $E \times F$, то $(x, y) \in \text{gr} A$, т.е. если $x_n \in L$, $x_n \rightarrow x$ и $Ax_n \rightarrow y$, то $x \in L$ и $Ax = y$. Например, легко проверить, что сопряженный оператор $A^* : M \rightarrow L^*$ к линейному оператору $A : L \rightarrow F$ с областью определения $M \doteq \{f \in F^* \mid A^* f = g \in L^*\}$ является замкнутым.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $C[0, 1]$ оператор дифференцирования $D : C^{(1)}[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный на подпространстве $C^{(1)}[0, 1] \subset C[0, 1]$ непрерывно дифференцируемых функций по формуле $Df(x) \doteq f'(x)$ при всех $x \in [0, 1]$.

Из курса математического анализа нам известно, что если последовательность функций $f_n \in C^{(1)}[0, 1]$ сходится равномерно $f_n \rightrightarrows f$ вместе со своими производными $f'_n \rightrightarrows g$, то $f \in C^{(1)}[0, 1]$ и $f' = g$. Поэтому график оператора D замкнут. Однако он не является ограниченным, т.к. полагая $f_n(x) = x^n$, мы получим $\|f'_n\| = n$ и, следовательно, его норма равна $\|D\| = \infty$.

Теорема (критерий замкнутости для ограниченного оператора). *Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(L, F)$ является замкнутым тогда и только тогда, когда его область определения $L \subset E$ замкнута в пространстве E .*

Доказательство. Если $x_n \in L$ и $x_n \rightarrow x$ в E , то в силу ограниченности оператора образ $y_n = Ax_n$ образует последовательность Коши и, значит, сходится $\lim y_n = y \in F$. Из замкнутости графика следует, что $x \in L$ и $Ax = y$. Обратно, если $x_n \rightarrow x$ в E и $Ax_n \rightarrow y$, где $x_n \in L$, то из замкнутости L имеем $x \in L$, а в силу непрерывности оператора $Ax_n \rightarrow Ax = y$. Поэтому график $\text{gr}A$ является замкнутым. $\square$

Далее мы докажем обратное утверждение, т.е. замкнутый оператор, заданный на замкнутом подпространстве банахова пространства, является ограниченным. Обозначим через $S_r(x) \doteq \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$ шар радиуса $r > 0$ и $S_r \doteq S_r(0)$.

Лемма. *Если линейный оператор $A : E \rightarrow F$ задан на банаховом пространстве E , то существуют $r > 0$ и $k > 0$, т.ч. $S_r \subset \overline{E_k}$, где $E_k \doteq \{x \in E \mid \|Ax\| \leq k\}$.*

Доказательство. Так как $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, то по теореме Бэра одно из множеств E_k не является нигде не плотным, т.е. существуют $r > 0$ и $x \in E$, т.ч. $S_r(x) \subset \overline{E_k}$. Поскольку множество $E_k = -E_k$ симметрично, то $S_r(-x) \subset \overline{E_k}$.

Покажем, что $S_r \subset \overline{E_k}$. Пусть $y \in S_r$, тогда $y \pm x \in S_r(\pm x)$. Поэтому существуют последовательности $\{x_n^{\pm}\} \subset E_k$, т.ч. $x_n^{\pm} \rightarrow y \pm x$. Отсюда $x_n \doteq (x_n^+ + x_n^-)/2 \rightarrow y$ и в силу включения $x_n \in E_k$ имеем $y \in \overline{E_k}$. Таким образом, доказано, что $S_r \subset \overline{E_k}$. $\square$

Теорема (Банаха о замкнутом графике). *Пусть линейный оператор $A : E \rightarrow F$, заданный в банаховых пространствах E и F , имеет замкнутый график $\text{gr}A$. Тогда оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является ограниченным.*

Доказательство. По лемме найдутся $r > 0$ и $k > 0$, т.ч. $S_r \subset \overline{E_k}$. Пусть $r_n = r/2^n$ и $k_n = k/2^n$, тогда мы получим $S_{r_n} \subset \overline{E_{k_n}}$. Возьмем произвольный элемент $x \in S_r$. Поскольку $S_r \subset \overline{E_k}$, то существует элемент $x_0 \in E_k$, т.ч. $\|x - x_0\| < r_1$. Поскольку $S_{r_1} \subset \overline{E_{k_1}}$, то существует элемент $x_1 \in E_{k_1}$, т.ч. $\|x - x_0 - x_1\| < r_2$ и т.д. Поэтому по индукции существуют элементы $x_n \in E_{k_n}$, т.ч. $\|x - \sum_{j=0}^n x_j\| < r_{n+1}$.

Следовательно, частичные суммы ряда $s_n = \sum_{j=0}^n x_j$ сходятся в пространстве E к элементу x , т.е. $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j$. Полагая далее $y_n \doteq As_n$ и применяя неравенство треугольника, мы получим, что при всех $m > n$ выполняется неравенство

$$\|y_m - y_n\| = \|\sum_{i=n+1}^m Ax_i\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|Ax_i\| \leq \sum_{i=n+1}^m k/2^i < k/2^n.$$

Следовательно, $\{y_n\}$ является последовательностью Коши в F и в силу его полноты существует предел $y = \lim y_n$. Тогда $y = Ax$ по условию замкнутости графика $\text{gr}A$. Применяя неравенство треугольника и непрерывность нормы, мы получим

$$\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{j=0}^n Ax_j\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \|Ax_j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} k/2^j = 2k.$$

Таким образом, доказано, что $\|Ax\| \leq 2k$ при всех $x \in S_r$. Отсюда следует, что норма оператора A оценивается величиной $\|A\| \leq 2k/r$. $\square$

Определение. Замыканием линейного оператора $A : L \rightarrow F$, определенного на подпространстве $L \subset E$, называется линейный оператор $\bar{A} : M \rightarrow F$, определенный на некотором подпространстве $M \subset E$, график которого равен $\text{gr } \bar{A} = \overline{\text{gr } A}$.

Линейный оператор $A : L \rightarrow F$ в том и только в том случае имеет замыкание, если из сходимости $x_n \rightarrow 0$ и $Ax_n \rightarrow y$ следует, что $y = 0$. В самом деле, это условие является необходимым в силу линейности оператора $\bar{A}$. Обратно, при выполнении этого условия можно определить замкнутый оператор $\bar{A} : M \rightarrow F$, полагая $\bar{A}x = y$, если существует последовательность $x_n \in L$, т.ч. $x_n \rightarrow x$ и $Ax_n \rightarrow y$.

Пример 2. Пусть $P \subset C[a, b]$ — подпространство алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ и задана функция $f \in C[a, b]$, не являющаяся многочленом $f \notin P$. Определим линейный оператор $A : L \rightarrow C[a, b]$ на линейной оболочке $L \doteq \text{sp}\{f, P\}$ по формуле $A(\lambda f + p) \doteq \lambda f$, где $\lambda \in \mathbb{F}$. В силу теоремы Вейерштрасса существует последовательность многочленов $p_n \in P$, т.ч. $p_n \rightrightarrows f$. Тогда, полагая $f_n \doteq f - p_n$, получим $f_n \rightrightarrows 0$ и $Af_n = f$. Таким образом, оператор A не имеет замыкания.

Пусть линейный оператор $A : L \rightarrow H$ определен на линейном подпространстве $L \subset H$ гильбертова пространства H со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$.

Определение. Оператор $A^* : M \rightarrow H$ будем называть эрмитово-сопряженным к линейному оператору $A : L \rightarrow H$, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ при всех $x \in L$ и $y \in M$, где его область определения $M \doteq \text{dom } A^*$ определяется по формуле

$$M \doteq \{y \in H \mid \exists z \in H : \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in L\}.$$

1. Эрмитово-сопряженный оператор является линейным.

Если уравнения $\langle Ax, y_1 \rangle = \langle x, z_1 \rangle$ и $\langle Ax, y_2 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$ выполняются при всех $x \in L$, то уравнение $\langle Ax, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, z_1 + z_2 \rangle$ имеет место при всех $x \in L$. Отсюда следует, что $A^*(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$. Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и уравнение $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ выполняется при всех $x \in L$, то $\langle Ax, \lambda y \rangle = \langle x, \lambda z \rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому $A^*(\lambda y) = \lambda z$.

2. Эрмитово-сопряженный оператор к оператору $A : L \rightarrow H$ существует тогда и только тогда, когда $L \subset H$ всюду плотно в H .

По определению $A^*y = z$, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in L$. Покажем, что условие $\bar{L} = H$ необходимо и достаточно, для того чтобы оператор A^* был однозначным. Из уравнений $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle$ при всех $x \in L$ следует, что $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ при всех $x \in L$. Поэтому $z_1 = z_2$ в том и только в том случае, если $L^\perp = 0$, т.е. $\bar{L} = H$.

3. Эрмитово-сопряженный оператор является замкнутым.

Пусть $z_n = A^*y_n$, где $y_n \in M$, при этом $y_n \rightarrow y$ и $z_n \rightarrow z$. Тогда по определению элементы z_n удовлетворяют уравнению $\langle Ax, y_n \rangle = \langle x, z_n \rangle$ при всех $x \in L$. Поэтому, переходя к пределу и используя непрерывность скалярного произведения, получим $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in L$. Следовательно, $y \in M$ и $A^*y = z$.

4. Если оператор $A \in \mathcal{L}(L, \mathbf{H})$ ограничен и $\bar{L} = \mathbf{H}$, то эрмитово-сопряженный оператор $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ также ограничен и его норма $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство. По теореме о продолжении по непрерывности оператор A можно считать заданным на всем пространстве $\mathbf{H}$. Тогда определен линейный функционал $f(x) \doteq \langle Ax, y \rangle$ при всех $x \in \mathbf{H}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем $|f(x)| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|$. Отсюда $f \in \mathbf{H}^*$ и $\|f\| \leq \|A\| \|y\|$. Поэтому по теореме Рёсса существует элемент $z \in \mathbf{H}$, т.ч. $f(x) = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in \mathbf{H}$ и $\|f\| = \|z\|$.

Таким образом, выполняется равенство $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ при всех $x \in \mathbf{H}$. Это значит, что $A^*y = z$ и $\|A^*y\| \leq \|A\| \|y\|$. Отсюда имеем $\|A^*\| \leq \|A\|$. Нетрудно проверить, что эрмитово-сопряженный к оператору $A^* : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ совпадает с A , т.е. $A^{**} = A$. Поэтому имеем $\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\|$. Следовательно, $\|A\| = \|A^*\|$. $\square$

Определение. Линейный оператор $A : L \rightarrow \mathbf{H}$, определенный на подпространстве $L \subset \mathbf{H}$ называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т.е. $L = M$ и $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ при всех $x, y \in L$. При этом в силу свойства 2 его область определения L всюду плотна в $\mathbf{H}$. Самосопряженный оператор $A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, определенный на всем гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, называется *эрмитовым* и обозначается через $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$.

Теорема (Хёллингера–Тёплица). *Всякий эрмитовый оператор, определенный в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, является ограниченным, т.е. $\mathcal{H}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$.*

Доказательство. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то имеет место равенство $A = A^*$. По свойству 3 оператор A замкнут. Поэтому по теореме о замкнутом графике $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. $\square$

Пример 3. Рассмотрим в гильбертовом пространстве ℓ_2 диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteq \lambda_n x_n$, где $x = \{x_n\} \in \ell_2$. Оператор $A : L \rightarrow \ell_2$ с областью определения $L \doteq \{x \in \ell_2 \mid Ax \in \ell_2\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) оператор A ограниченный тогда и только тогда, когда $\sup |\lambda_n| < \infty$;
- 2) оператор A самосопряженный тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
- 3) оператор A эрмитовый тогда и только тогда, когда $\sup |\lambda_n| < \infty$ и $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$;
- 4) оператор A замкнутый для любой последовательности чисел $\lambda_n \in \mathbb{F}$.

Заметим, что область определения L оператора A будет всюду плотной $\bar{L} = \ell_2$, т.к. множество всех финитных последовательностей содержится в L . Свойство 1) следует из равенства $\|A\| = \sup |\lambda_n|$; 2) очевидно; 3) вытекает из 1) и того факта, что эрмитовый оператор определен на всем ℓ_2 . Осталось доказать 4).

Введем множества индексов $I_1 \doteq \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| \leq 1\}$ и $I_2 \doteq \{n \in \mathbb{N} \mid |\lambda_n| > 1\}$. Тогда A будет прямой суммой двух диагональных операторов $A = A_1 \oplus A_2$, при этом для оператора A_1 имеем $\sup |\lambda_n^{(1)}| \leq 1$, а для оператора A_2 имеем $\inf |\lambda_n^{(2)}| \geq 1$. Заметим, что оператор A_1 замкнут, так как является ограниченным. Оператор A_2 имеет ограниченный обратный оператор A_2^{-1} . Так как из замкнутости графика оператора A_2^{-1} следует замкнутость графика оператора A_2 , то оператор A_2 также является замкнутым. Отсюда следует замкнутость оператора $A = A_1 \oplus A_2$.

12 ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ

Теорема (Банаха об обратном операторе). *Если оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ является ограниченным и биективным отображением в банаховых пространствах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, то его обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ является ограниченным.*

Доказательство. Поскольку $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ — ограниченный оператор, определенный в банаховом пространстве $\mathbf{E}$, то его график $\text{gr}(A)$ является замкнутым, т.е. если $x_n \rightarrow x$ и $y_n = Ax_n \rightarrow y$, где $x_n \in \mathbf{E}$ и $y_n \in \mathbf{F}$, то $Ax = y$. В силу биективности оператора получаем, что если $y_n \rightarrow y$ и $x_n = A^{-1}y_n \rightarrow x$, где $x_n \in \mathbf{E}$ и $y_n \in \mathbf{F}$, то $A^{-1}y = x$. Таким образом, график $\text{gr}A^{-1}$ обратного оператора A^{-1} замкнут и, следовательно, по теореме о замкнутом графике оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ ограничен. $\square$

Пусть $L \subset \mathbf{E}$ — замкнутое подпространство нормированного пространства $\mathbf{E}$ и $\widehat{\mathbf{E}} \doteq \mathbf{E}/L$ задает факторпространство по подпространству L . Всякий элемент $\widehat{\mathbf{E}}$ записывается в виде $\widehat{x} \doteq x + L$, где $x \in \mathbf{E}$. При этом факторпространство $\widehat{\mathbf{E}}$ является линейным нормированным пространством относительно следующих операций:

- а) сложение элементов $\widehat{x} + \widehat{y} \doteq \widehat{x + y}$, где $x, y \in \mathbf{E}$;
- б) умножение на число $\lambda \widehat{x} \doteq \widehat{\lambda x}$, где $x \in \mathbf{E}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$;
- в) норма элемента $\|\widehat{x}\| \doteq \inf_{y \in L} \|x + y\|$, где $x \in \mathbf{E}$.

Проверим свойства нормы. По определению имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|\lambda \widehat{x}\| &= \|\widehat{\lambda x}\| = \inf_{y \in L} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf_{y \in L} \|x + y\| = |\lambda| \|\widehat{x}\|; \\ \|\widehat{x + y}\| &= \inf_{z \in L} \|x + y + z\| \leq \inf_{u \in L} \|x + u\| + \inf_{v \in L} \|y + v\| = \|\widehat{x}\| + \|\widehat{y}\|. \end{aligned}$$

Пусть $\|\widehat{x}\| = \inf_{y \in L} \|x + y\| = 0$. Тогда существуют $y_n \in L$, т.ч. $x + y_n \rightarrow 0$. Поэтому, т.к. подпространство $L \subset \mathbf{E}$ замкнуто, то $x = -\lim y_n \in L$ и значит $\widehat{x} = \widehat{0}$.

Лемма. *Если $L \subset \mathbf{E}$ есть замкнутое подпространство банахова пространства, то факторпространство $\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}/L$ является банаховым.*

Доказательство. Докажем полноту пространства $\widehat{\mathbf{E}}$. Пусть $\{\widehat{x}_n\}$ является последовательностью Коши. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots$, т.ч. $\|\widehat{x}_n - \widehat{x}_m\| < 1/2^k$ при всех $n, m \geq n_k$. Тогда существуют $y_{n_k} \in L$, т.ч. $z_k \doteq x_{n_k} + y_{n_k} \in \widehat{x}_{n_k}$ и $\|z_{k+1} - z_k\| < 1/2^k$. Отсюда ряд $z = z_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z_{k+1} - z_k) = \lim z_k$ сходится по норме пространства $\mathbf{E}$. Следовательно, при всех $n \geq n_k$ мы получим

$$\|\widehat{z} - \widehat{x}_n\| \leq \|\widehat{z} - \widehat{x}_{n_k}\| + \|\widehat{x}_{n_k} - \widehat{x}_n\| \leq \|z - z_k\| + 1/2^k \leq \sum_{j=k}^{\infty} 1/2^j + 1/2^k < 3/2^k.$$

Таким образом, существует предел $\lim \widehat{x}_n = \widehat{z} \in \widehat{\mathbf{E}}$. $\square$

Заметим, что если образ $A(U_r) \subset \mathbf{F}$ любого открытого шара U_r в пространстве $\mathbf{E}$ является открытым множеством в пространстве $\mathbf{F}$, то линейный оператор $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ определяет *открытое отображение* нормированных пространств.

Пусть $\pi : E \rightarrow \hat{E}$ — факторотображение, определенное по формуле $\pi(x) \doteq \hat{x}$. Непрерывность π вытекает из неравенства $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. Из этого неравенства и определения нормы в факторпространстве $\hat{E}$ следует, что образ $\pi(U_r)$ открытого шара $U_r \doteq \{x \in E \mid \|x\| < r\}$ является открытым шаром $\hat{U}_r \doteq \{\hat{x} \in \hat{E} \mid \|\hat{x}\| < r\}$ того же радиуса $r > 0$. Поэтому образ всякого открытого множества будет открытым и, следовательно, факторотображение π является открытым отображением.

Определение. Линейный оператор $A : E \rightarrow F$ называется *гомоморфизмом*, если он является непрерывным и открытым отображением.

Теорема (о гомоморфизме). *Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ задает сюръективное отображение банаховых пространств E и F , то он является гомоморфизмом.*

Доказательство. Так как ядро $L \doteq \ker A$ является замкнутым подпространством E , то факторпространство $\hat{E} \doteq E/L$ будет банаховым пространством. Определим оператор $\hat{A} : \hat{E} \rightarrow F$, полагая $\hat{A}(\hat{x}) \doteq Ax$ при всех $x \in E$. Заметим, что оператор $\hat{A}$ определен корректно, т.к. если $\hat{x} = \hat{y}$, то $x - y \in L$ и значит $Ax = Ay$.

Легко видеть, что оператор $\hat{A} : \hat{E} \rightarrow F$ является линейным, его ядро равно нулю $\ker \hat{A} = \{\hat{x} \in \hat{E} \mid Ax = 0\} = \hat{0}$, а его образ равен $\text{Im } \hat{A} = \text{Im } A = F$. Поэтому $\hat{A}$ задает биективное отображение. Докажем, что норма $\|\hat{A}\| = \|A\|$. В самом деле,

$$\|\hat{A}(\hat{x})\| = \|Ax\| = \inf_{y \in L} \|A(x+y)\| \leq \|A\| \inf_{y \in L} \|x+y\| = \|A\| \|\hat{x}\|.$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|\hat{A}\| \leq \|A\|$. С другой стороны, в силу неравенства $\|Ax\| = \|\hat{A}(\hat{x})\| \leq \|\hat{A}\| \|\hat{x}\| \leq \|\hat{A}\| \|x\|$ справедливо равенство $\|\hat{A}\| = \|A\|$. Таким образом, по теореме Банаха об обратном операторе $\hat{A}$ будет гомоморфизмом. Поскольку оператор $A = \hat{A} \cdot \pi$ является произведением двух гомоморфизмов, то он также будет гомоморфизмом пространства E на пространство F . $\square$

Теорема (о тройке). *Пусть E, F, G являются банаховыми пространствами, оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ сюръективным и оператор $B \in \mathcal{L}(E, G)$ удовлетворяет условию $\ker A \subset \ker B$. Тогда существует оператор $C \in \mathcal{L}(F, G)$, т.ч. $B = CA$.*

Доказательство. Определим оператор $C : F \rightarrow G$ по формуле $Cy = Bx$ при всех $y = Ax$ и $x \in E$. Если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $x_1 - x_2 \in \ker A \subset \ker B$. Отсюда следует, что $Bx_1 = Bx_2$. Значит оператор C определен корректно. Докажем его линейность.

Если $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y = Ax$, то $C(\lambda y) = C(A(\lambda x)) = B(\lambda x) = \lambda B(x) = \lambda C(y)$. Если $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$, то $C(y_1 + y_2) = C(A(x_1 + x_2)) = B(x_1 + x_2) = B(x_1) + B(x_2) = C(y_1) + C(y_2)$. Поэтому оператор C является линейным отображением.

Пусть $L = \ker A$, тогда оператор $\hat{A} \in \mathcal{L}(\hat{E}, F)$ биективен и при всех $y = Ax = \hat{A}(\hat{x})$

$$\|Cy\| = \|Bx\| = \inf_{z \in L} \|B(x+z)\| \leq \|B\| \|\hat{x}\| = \|B\| \|\hat{A}^{-1}y\| \leq \|B\| \|\hat{A}^{-1}\| \|y\|.$$

Таким образом, $\|C\| \leq \|B\| \|\hat{A}^{-1}\|$. Так как по теореме Банаха об обратном операторе $\|A^{-1}\| < \infty$, то оператор $C \in \mathcal{L}(F, G)$ является ограниченным. $\square$

Напомним, что для множеств $V \subset E$ и $W \subset E^*$ определяются аннуляторы

$$V^\perp \doteq \{f \in \mathbf{E}^* \mid f(x) = 0, x \in V\} \quad \text{и} \quad W_\perp \doteq \{x \in \mathbf{E} \mid f(x) = 0, f \in W\},$$

Они задают замкнутые подпространства в пространствах $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{E}$ соответственно.

Лемма (о бианнуляторе). Если подпространство $L \subset \mathbf{E}$ является замкнутым, то его бианнулятор удовлетворяет равенству $(L^\perp)_\perp = L$.

Доказательство. Включение $L \subset (L^\perp)_\perp$ очевидно. Пусть элемент $x \in (L^\perp)_\perp$. Если $x \notin L$, то $\|\widehat{x}\| \neq 0$. Определим функционал на линейной оболочке $M \doteq \text{sp}\{x, L\}$ по формуле $f(\lambda x + y) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$ и $y \in L$. Он имеет конечную норму, т.к.

$$\|f\| = \sup_{z \in M} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{y \in L} \frac{|\lambda|}{\|\lambda x + y\|} = \sup_{y \in L} \frac{1}{\|x + y\|} = \frac{1}{\|\widehat{x}\|} < \infty.$$

По теореме Хана–Банаха найдется функционал $g \in \mathbf{E}^*$, т.ч. $g|_L = f$ и $\|g\| = \|f\|$. Тогда имеем $g \in L^\perp$ и $g(x) = 1$, т.е. элемент $x \notin (L^\perp)_\perp$. Получили противоречие. $\square$

Теорема. Пусть ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, заданный в банаховых пространствах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, имеет замкнутый образ $\text{Im} A \subset \mathbf{F}$. Тогда

$$\text{Im} A = (\ker A^*)_\perp, \quad \text{Im} A^* = (\ker A)^\perp.$$

Доказательство. В силу доказанного ранее мы имеем равенство $\ker A^* = (\text{Im} A)^\perp$. Следовательно, применяя лемму, получим $(\ker A^*)_\perp = ((\text{Im} A)^\perp)_\perp = \text{Im} A$.

Докажем второе равенство. Ранее было уже доказано включение $\text{Im} A^* \subset (\ker A)^\perp$. Если функционал $f \in (\ker A)^\perp$, то $\ker A \subset \ker f$. Применяя теорему о тройке, а затем теорему Хана–Банаха, получим функционал $g \in \mathbf{F}^*$, т.ч. $f(x) = g(A(x))$ при всех $x \in \mathbf{E}$. Поэтому $f = A^*g \in \text{Im} A^*$ и, следовательно, $\text{Im} A^* = (\ker A)^\perp$. $\square$

Определение. Линейный оператор $P: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ называется *проектором* на подпространство $L \subset \mathbf{E}$, если выполняются равенства $P^2 = P$ и $\text{Im} P = L$.

Рассмотрим свойства проекторов P на подпространство $L \subset \mathbf{E}$.

1. Ограничение проектора $P|_L$ является тождественным оператором в L .

Действительно, если $y = Px$, то $Pu = P^2x = Px = y$ при всех $y \in L$.

2. Справедливы равенства $\ker(I - P) = \text{Im} P$ и $\text{Im}(I - P) = \ker P$.

Если $x \in \ker(I - P)$, то $x - Px = 0$ и значит $x \in \text{Im} P$. Если $y = Px \in \text{Im} P$, то имеем $(I - P)y = (P - P^2)x = 0$, т.е. $y \in \ker(I - P)$. Аналогично, получаем второе равенство.

3. Пространство $\mathbf{E} = L \oplus M$ является прямой суммой $L = \text{Im} P$ и $M = \ker P$.

Поскольку $I = P + (I - P)$, то $\mathbf{E} = L + M$. Если $y \in L \cap M$, то имеет место равенство $y = Px = x - Px$, т.е. $x = 2Px$. Применяя P , получим $Px = 2Px$ и значит $y = Px = 0$.

Определение. Линейное подпространство $L \subset \mathbf{E}$ нормированного пространства $\mathbf{E}$ называется *дополняемым* в $\mathbf{E}$, если является замкнутым и существует замкнутое подпространство $M \subset \mathbf{E}$, т.ч. $\mathbf{E} = L \oplus M$.

Теорема. *Линейное подпространство $L \subset E$ банахова пространства тогда и только тогда является дополняемым в E , когда существует ограниченный проектор $P: E \rightarrow E$ на подпространство L .*

Доказательство. Необходимость. Если $E = L \oplus M$, где L и M задают замкнутые подпространства, то для каждого $x \in E$ существуют единственные элементы $y \in L$ и $z \in M$, т.ч. $x = y + z$. Полагая $Px \doteq y$, заметим, что оператор $P: E \rightarrow E$ имеет замкнутый график. В самом деле, если последовательности $x_n \rightarrow x$ и $Px_n = y_n \rightarrow y$, то $z_n = x_n - y_n \rightarrow z = x - y$. Так как в силу замкнутости L и M имеем $y \in L$ и $z \in M$, то из единственности разложения $x = y + z$ получим $Px = y$. Следовательно, по теореме о замкнутом графике оператор P является ограниченным.

Достаточность. Поскольку проектор $P: E \rightarrow E$ на подпространство L является непрерывным, то $L = \operatorname{Im} P = \ker(I - P)$ и $M = \ker P = \operatorname{Im}(I - P)$ являются замкнутыми подпространствами, у которых пересечение $L \cap M = 0$. Так как $I = P + (I - P)$, то отсюда следует разложение в прямую сумму $E = L \oplus M$. $\square$

Пример. Если замкнутое подпространство $L \subset E$ нормированного пространства имеет конечную размерность $\dim L < \infty$ или конечную коразмерность $\operatorname{codim} L < \infty$, то оно является дополняемым.

Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в подпространстве L , а затем определим подпространство $M \doteq \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$, где $\{f_k\}_{k=1}^n$ обозначает биортогональную систему к базису $\{e_k\}_{k=1}^n$. Для каждого $x \in E$ определим элементы $y \doteq \sum_{k=1}^n f_k(x) e_k$ и $z \doteq x - y$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $E = L \oplus M$.

Рассмотрим базис $\{\hat{e}_k\}_{k=1}^m$ для факторпространства $\hat{E} = E/L$, а затем обозначим через $M \doteq \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку. Тогда для любого $x \in E$ существуют $\lambda_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\hat{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \hat{e}_k$. Определим элементы $z \doteq \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k$ и $y \doteq x - z$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in M$ принадлежат замкнутым подпространствам, т.е. $E = L \oplus M$.

Замечание. Применяя по координатно теорему Хана-Банаха, нетрудно доказать, что всякое замкнутое подпространство банахова пространства, изоморфное ℓ_∞ , а также всякое замкнутое подпространство сепарабельного банахова пространства, изоморфное c_0 , являются дополняемыми. Приведем теперь примеры недополняемых подпространств, где в скобках указаны авторы этих утверждений.

Подпространство $c_0 \subset \ell_\infty$ (Р. С. Филлипс) и подпространство $C[0, 1] \subset L_\infty[0, 1]$ (Г. М. Фихтенгольц и Л. В. Канторович) являются недополняемыми.

Подпространства $H_p \subset L_p[-\pi, \pi]$ функций, у которых все коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю, являются дополняемыми при $1 < p < \infty$ (М. Рисс) и является недополняемым при $p = 1$ (Д. Ньюман).

Подпространство $A(D) \subset C(D)$, состоящее из голоморфных функций в круге $\mathring{D} \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, является недополняемым в пространстве $C(D)$ непрерывных функций в замкнутом круге $D \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (У. Рудин).

13 СПЕКТР ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Далее через $\mathcal{L}(\mathbf{E}) \doteq \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ обозначается банахово пространство ограниченных операторов $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным значением* для оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, если оператор $A_\lambda \doteq \lambda I - A$ имеет ограниченный обратный $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, где I — тождественный оператор в пространстве $\mathbf{E}$. Множество всех регулярных значений обозначается через $\rho(A)$. Его дополнение $\sigma(A) \doteq \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* оператора A . Обратный оператор $R_\lambda \doteq A_\lambda^{-1}$, определенный при $\lambda \in \rho(A)$, называется *резольвентой* оператора A .

Лемма. Если $\|A\| < 1$, то оператор $B \doteq I - A$ обратим и $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Доказательство. Пусть $C_n \doteq \sum_{k=0}^n A^k$ и $\|A\| = r < 1$. Так как $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, то по неравенству треугольника имеем $\|C_m - C_n\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|A\|^k < r^{n+1}/(1-r)$. Поэтому $\{C_n\}$ является последовательностью Коши в банаховом пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{E})$. Тогда существует предел $\lim C_n \doteq C \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$. Отсюда получим

$$BC = \lim BC_n = \lim \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \lim (I - A^{n+1}) = I,$$

т.к. $\lim A^{n+1} = 0$. Аналогично имеем $CB = I$. Таким образом, оператор $C = B^{-1}$. $\square$

Определение. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$, определенная в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости, называется *голоморфной* в Ω , если для каждого $z_0 \in \Omega$ существуют $r > 0$ и такие элементы $c_n \in \mathbf{E}$, что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ при всех $z \in U_r(z_0)$, где $U_r(z_0) \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ обозначает открытый круг в Ω .

Заметим, что сходимость степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n c_n$ определяется здесь по норме пространства $\mathbf{E}$ и его радиус сходимости в точке z_0 вычисляется по формуле Коши–Адамара $1/r = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}$. Если функция $f(z)$ голоморфная в Ω , то радиус r равен расстоянию $d = \inf_{z \in \partial\Omega} |z_0 - z|$ от точки $z_0 \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Теорема (о резольвенте). Если оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ является ограниченным, то множество регулярных значений $\rho(A)$ открыто, функция R_λ голоморфная в каждой связной компоненте $\rho(A)$ и норма $\|R_\lambda\| \geq 1/d_\lambda$, где $d_\lambda \doteq \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda - z|$ обозначает расстояние от точки $\lambda \in \rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A)$, тогда $A_z = A_\lambda - (\lambda - z)I = A_\lambda(I - (\lambda - z)R_\lambda)$. Если $z \in \mathbb{C}$, т.ч. $|z - \lambda| \|R_\lambda\| < 1$, то по лемме мы получим сходящийся по норме ряд

$$R_z = (I - (\lambda - z)R_\lambda)^{-1} R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - z)^n R_\lambda^{n+1}.$$

Поэтому $z \in \rho(A)$ и резольвента $R_z \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ является ограниченным оператором. Кроме того, множество регулярных значений $\rho(A)$ является открытым и функция R_λ голоморфная на каждой связной компоненте $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то в силу доказанного выполняется неравенство $\|R_\lambda\| \geq |\lambda - z|^{-1}$ при всех $z \in \sigma(A)$, т.е. имеет место неравенство $\|R_\lambda\| \geq 1/d_\lambda$. $\square$

Теорема (о спектре). Спектр ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ является непустым, замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Если $|\lambda| > \|A\|$, то $R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \lambda^{-1}(I - A/\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n / \lambda^{n+1}$. Поэтому $R_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ и $\|R_\lambda\| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Следовательно, спектр находится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|\}$ радиуса $\|A\|$. Кроме того, для каждого функционала $f \in \mathcal{L}^*(E)$ функция $F(\lambda) \doteq f(R_\lambda)$ голоморфная в $\rho(A)$ и $|F(\lambda)| \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Если $\rho(A) = \mathbb{C}$, то по теореме Лиувилля $F(\lambda) = f(R_\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Применяя теорему Хана–Банаха, получим $R_\lambda = 0$, что невозможно. Поэтому $\sigma(A) \neq \emptyset$. $\square$

Спектр сопряженного и эрмитово-сопряженного операторов.

1. Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то спектр сопряженного оператора $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.

Так как $A_\lambda \doteq \lambda I - A$, то $A_\lambda^* = \bar{\lambda}I - A^*$. Поскольку для ограниченного обратимого оператора выполняется равенство $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, то $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1} = R_\lambda^*$. Следовательно, множества регулярных значений $\rho(A^*) = \rho(A)$ совпадают.

2. Если $A \in \mathcal{L}(H)$, то спектр эрмитово-сопряженного $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

По определению эрмитово-сопряженного оператора имеют место равенства

$$\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle \lambda x - Ax, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda}y - A^*y \rangle = \langle x, (A^*)_{\bar{\lambda}} y \rangle, \text{ т.е. } (A_\lambda)^* = (A^*)_{\bar{\lambda}}.$$

Отсюда $(R_\lambda)^* = (A_\lambda^{-1})^* = (A_\lambda^*)^{-1} = (A^*)_{\bar{\lambda}}^{-1}$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$.

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A , если существует ненулевой элемент $e \in E$, т.ч. $Ae = \lambda e$. Следующие множества

$\sigma_p(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$, состоящее из собственных значений;

$\sigma_c(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = E, \operatorname{Im} A_\lambda \neq E\}$;

$\sigma_r(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq E\}$;

называются соответственно *точечным*, *непрерывным* и *остаточным* спектром A . Если $A \in \mathcal{L}(E)$, то из этих определений и теоремы Банаха об обратном операторе вытекает равенство $\sigma(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A)$.

Заметим, число $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда $\lambda \in \sigma_p(A)$, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *неоднозначно разрешимо*, т.е. однородное уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет ненулевое решение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда $\lambda \in \sigma_c(A)$, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ *плотно разрешимо*, т.е. имеет единственное решение для всюду плотного множества элементов $y \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда $\lambda \in \sigma_r(A)$, когда неоднородное уравнение $A_\lambda x = y$ *не плотно разрешимо*, т.е. имеет единственное решение для не всюду плотного множества элементов $y \in \operatorname{Im} A_\lambda$.

Для того чтобы линейный оператор $A : E \rightarrow E$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = 0$ и $\operatorname{Im} A = E$. При этом условие $\ker A = 0$ равносильно существованию левого обратного $B : \operatorname{Im} A \rightarrow E$, т.ч. $BA = I$, а условие $\operatorname{Im} A = E$ равносильно существованию правого обратного $C : E \rightarrow E$, т.ч. $AC = I$.

Лемма. Если $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, то следующие условия эквивалентны:

- а) оператор A имеет ограниченный левый обратный $B \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, \mathbf{E})$;
- б) оператор A ограничен снизу, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| > 0$;
- в) ядро $\ker A = 0$ и образ $\operatorname{Im} A \subset \mathbf{E}$ является замкнутым.

Доказательство. Если $B \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, \mathbf{E})$ левый обратный, то $\|x\| = \|BAx\| \leq \|B\| \|Ax\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$, т.е. $\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|B\|^{-1} > 0$. Предположим теперь, что $\|Ax\| \geq c\|x\|$ при всех $x \in \mathbf{E}$, где $c > 0$. Если $y_n = Ax_n \rightarrow y$ сходится, то $\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|/c \rightarrow 0$. Отсюда $\{x_n\}$ является последовательностью Коши в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ и существует предел $\lim x_n = x$. В силу непрерывности оператора $Ax = y \in \operatorname{Im} A$. Таким образом, оператор имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} A$ и его ядро $\ker A = 0$. По теореме Банаха об обратном операторе существует $B \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, \mathbf{E})$, т.ч. $BA = I$. $\square$

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *полурегулярным значением* оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, если $A_\lambda \doteq \lambda I - A$ имеет ограниченный левый обратный $B_\lambda \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \mathbf{E})$. Множество полурегулярных значений обозначается через $\rho_l(A)$. Дополнительное множество $\sigma_l(A) = \mathbb{C} \setminus \rho_l(A)$ называется *предельным спектром* оператора A .

По лемме *предельный спектр* оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ определяется множеством

$$\sigma_l(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0\}.$$

Дополнительное множество спектра $\sigma_d(A) \doteq \sigma(A) \setminus \sigma_l(A)$ называется *дефектным спектром* оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$. Дефектный спектр определяется множеством

$$\sigma_d(A) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} \neq \mathbf{E}\}.$$

Число $\lambda \in \rho_l(A)$ тогда и только тогда является полурегулярным значением, когда уравнение $A_\lambda x = y$ *корректно разрешимо*, т.е. существует ограниченный обратный оператор $B_\lambda : \operatorname{Im} A_\lambda \rightarrow \mathbf{E}$ на подпространстве $\operatorname{Im} A_\lambda$. Поэтому число $\lambda \in \sigma_l(A)$ тогда и только тогда, когда уравнение $A_\lambda x = y$ не является корректно разрешимым.

Теорема (о границе спектра). Если $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, то $\partial \sigma(A) \subset \sigma_l(A)$.

Доказательство. Если $\lambda \in \partial \sigma(A)$, то существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, т.ч. $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Поэтому $d_{\lambda_n} \doteq \inf_{z \in \sigma(A)} |\lambda_n - z| \leq |\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0$. Так как $A_{\lambda_n} R_{\lambda_n} = I$ есть тождественный оператор, то $B_n \doteq R_{\lambda_n} / \|R_{\lambda_n}\|$ удовлетворяет соотношению

$$A_\lambda B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + A_{\lambda_n} B_n = (\lambda - \lambda_n) B_n + I / \|R_{\lambda_n}\|.$$

Поскольку $\|B_n\| = 1$, то существует последовательность $\{y_n\} \subset \mathbf{E}$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|B_n y_n\| > 1/2$. Полагая $x_n \doteq B_n y_n / \|B_n y_n\|$ и применяя указанное выше соотношение к элементу $y_n / \|B_n y_n\|$, получим следующее равенство

$$A_\lambda x_n = (A_\lambda B_n y_n) / \|B_n y_n\| = (\lambda - \lambda_n) x_n + y_n / \|R_{\lambda_n}\| \|B_n y_n\|.$$

Так как по построению $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ и по теореме о резольвенте $\|R_{\lambda_n}\| \geq 1/d_{\lambda_n}$, то $\|A_\lambda x_n\| \leq |\lambda - \lambda_n| + 2d_{\lambda_n} \leq 3|\lambda - \lambda_n| \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_l(A)$. $\square$

Теорема (о спектральном радиусе). Если оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ ограничен, то $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, где $r(A) \doteq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ спектральный радиус оператора A .

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Поскольку $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)P_{n-1}(z)$, где $P_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$, то $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)P_{n-1}(A) = P_{n-1}(A)(\lambda I - A)$. Если оператор $\lambda^n I - A^n$ является обратимым, то, умножая указанное равенство справа и слева на его обратный, мы получим, что оператор $\lambda I - A$ обратим. Поскольку это противоречит нашему предположению, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ про всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $|\lambda|^n \leq \|A^n\|$ и, следовательно, имеет место неравенство $r(A) \leq \lim \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

С другой стороны, ранее было получено разложение $R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A^n / \lambda^{n+1}$ при всех $|\lambda| > \|A\|$. Если $f \in \mathcal{L}^*(E)$ ограниченный функционал на $\mathcal{L}(E)$, то $F(\lambda) \doteq f(R_\lambda)$ является голоморфной функцией в каждой связной компоненте $\rho(A)$. Поэтому ряд $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(A^n) / \lambda^{n+1}$ сходится при всех $|\lambda| > r(A)$ и значит $\sup_n |f(A^n / \lambda^n)| < \infty$ при всех $f \in \mathcal{L}^*(E)$ и $|\lambda| > r(A)$. Поскольку из слабой ограниченности вытекает сильная ограниченность, то существует $c_\lambda > 0$, т.ч. $\|A^n / \lambda^n\| \leq c_\lambda$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда имеем $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda|$ при всех $|\lambda| > r(A)$. Следовательно, выполняется неравенство $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A)$. Таким образом, существует предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, который совпадает со спектральным радиусом $r(A)$. $\square$

Пример. Пусть $A : \ell_p \rightarrow \ell_p$ — диагональный оператор, определенный по формуле $(Ax)_n \doteq \lambda_n x_n$ при всех $x = \{x_n\} \in \ell_p$, где $1 \leq p \leq \infty$. Его норма $\|A\| = \sup |\lambda_n| < \infty$.

Пусть элемент $e_n \in \ell_p$ имеет координаты, равные 0, кроме n -й, равной 1. Тогда имеем $Ae_n = \lambda_n e_n$, т.е. числа $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ являются собственными значениями. Если $\lambda \neq \lambda_n$, то оператор $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, $n = 1, 2, \dots$, в том и только в том случае имеет ограниченный обратный $(R_\lambda y)_n = (\lambda - \lambda_n)^{-1}y_n$, $n = 1, 2, \dots$, когда его норма $\|R_\lambda\| = \sup |\lambda - \lambda_n|^{-1} < \infty$ конечна. Следовательно, спектр диагонального оператора совпадает с замыканием $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n\}}$ множества диагональных элементов $\{\lambda_n\}$.

Пусть $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}$, т.е. существует такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, что $\lim \lambda_{n_k} = \lambda$. Поэтому имеем $\|A_\lambda e_{n_k}\| = |\lambda - \lambda_{n_k}| \rightarrow 0$, т.е. число λ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$. Если $1 \leq p < \infty$, то образ $\text{Im} A_\lambda$ содержит множество всех финитных последовательностей и, следовательно, будет всюду плотным в ℓ_p , т.е. $\lambda \in \sigma_c(A)$. Если $p = \infty$, то предел $\lim y_{n_k} = 0$ для всех $y = \{y_n\} \in \text{Im} A_\lambda$. Применяя теорему Хана–Банаха, построим продолжение функционала $f(y) = \lim y_{n_k}$, заданного на подпространстве $\mathcal{C} \subset \ell_\infty$ сходящихся последовательностей, на все пространство ℓ_∞ с сохранением его нормы. Тогда получим, что $\text{Im} A_\lambda \subset \ker f$, т.е. $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Структура спектра диагонального оператора

Спектр оператора A	$\sigma(A)$	$\sigma_p(A)$	$\sigma_c(A)$	$\sigma_r(A)$	$\sigma_l(A)$	$\sigma_d(A)$
$A : \ell_p \rightarrow \ell_p$, $1 \leq p < \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$
$A : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$, $p = \infty$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\{\lambda_n\}$	$\emptyset$	$\overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$	$\overline{\{\lambda_n\}}$	$\emptyset$

14 КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее E и F являются банаховыми пространствами над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Определение. Операторы $A \in \mathcal{L}(E)$ и $B \in \mathcal{L}(F)$ называются *эквивалентными* $A \sim B$, если существует обратимый оператор $T \in \mathcal{L}(E, F)$, т.ч. $BT = TA$.

Если, кроме того, оператор T является изометрическим отображением E на F , то эти операторы называются *изометрически эквивалентными* $A \approx B$.

1. Если $A \sim B$ эквивалентны, то $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$ и $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$.

Поскольку $A_\lambda = \lambda I - A$ и $B_\lambda = \lambda I - B$, то $B_\lambda T = TA_\lambda$. Поэтому операторы $A_\lambda \sim B_\lambda$ эквивалентны. Следовательно, A_λ обратим тогда и только тогда, когда B_λ обратим. При этом имеют место равенства $\ker B_\lambda = T \ker A_\lambda$ и $\operatorname{Im} B_\lambda = T \operatorname{Im} A_\lambda$ при $\lambda \in \rho(A)$. Отсюда легко вытекают указанные равенства спектров.

2. Если $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то $\|A\| = \|B\|$.

Поскольку в силу изометричности $B = TAT^{-1}$ и $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, то имеют место неравенства $\|B\| \leq \|A\|$ и $\|A\| \leq \|B\|$. Откуда следует, что $\|A\| = \|B\|$.

Пример 1. Выясним структуру спектра оператора свертки с функцией $K \in L_1(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, определенного следующей формулой

$$Af(x) = K * f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y) f(y) dy, \text{ где } f \in L_2(\mathbb{R}).$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим $\|Af\|_{L_2} \leq \|K\|_{L_1} \|f\|_{L_2}$. Значит $\operatorname{Im} A \subset L_2(\mathbb{R})$ и в качестве оператора T можно взять преобразование Фурье. Тогда из формулы свертки вытекает $\widehat{Af}(x) = \sqrt{2\pi} \widehat{K}(x) \widehat{f}(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$.

В силу леммы Римана–Лебега функция $\varphi(x) \doteq \sqrt{2\pi} \widehat{K}(x)$ непрерывна и $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Поэтому ее можно считать заданной на множестве $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, т.е. $\varphi(\pm\infty) = 0$. Пусть $Bg(x) \doteq \varphi(x)g(x)$ является оператором умножения на функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Тогда $B_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))g(x)$ и $R_\lambda g(x) = (\lambda - \varphi(x))^{-1}g(x)$. Резольвента R_λ является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\|R_\lambda\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda - \varphi(x)|^{-1} < \infty$. Поэтому $\sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}})$. Поскольку операторы $A \approx B$ изометрически эквивалентны, то выполняются следующие свойства:

- а) норма оператора $\|A\| = \|B\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$;
- б) спектр оператора $\sigma(A) = \sigma(B) = \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \doteq \{\lambda = \varphi(x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$;
- в) точечный спектр $\sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$;
- г) непрерывный спектр $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \varphi(\overline{\mathbb{R}}) \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0\}$;
- е) предельный спектр $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) = \sigma(A)$.

В самом деле, если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$ положительна, то функция $e(x) \doteq \chi_E(x)$, где $E \subset \varphi^{-1}(\lambda)$ есть измеримое множество положительной меры $\mu(E) > 0$, является собственной функцией оператора B , т.е. $Be(x) = \lambda e(x)$. Поэтому $\lambda \in \sigma_p(B)$.

Докажем, что если мера $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) = 0$, то замыкание образа $\overline{\text{Im} B_\lambda} = L_2(\mathbb{R})$. Пусть $g \in L_2(\mathbb{R})$ и $O_\delta \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| < \delta\}$. Определим функцию $g_\delta(x) \doteq 0$, если $\varphi(x) \in O_\delta$; $g_\delta(x) \doteq (\lambda - \varphi(x))^{-1}g(x)$, если $\varphi(x) \notin O_\delta$. Так как $|g_\delta(x)| \leq |g(x)|/\delta$, то $g_\delta \in L_2(\mathbb{R})$ и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебёга

$$\|g - B_\lambda g_\delta\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - B_\lambda g_\delta(x)|^2 dx = \int_{\varphi^{-1}(O_\delta)} |g(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma_c(B)$, и, следовательно, $\sigma_l(B) = \sigma_p(B) \sqcup \sigma_c(B) = \sigma(B)$.

Определение. Линейный оператор $A: E \rightarrow F$ в банаховых пространствах E и F называется *компактным*, если образ $A(M) \subset F$ каждого ограниченного множества $M \subset E$ является предкомпактным в F . Обозначим через $\mathcal{K}(E, F)$ пространство всех компактных операторов, действующих из E в F и $\mathcal{K}(E) \doteq \mathcal{K}(E, E)$.

1. Оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный тогда и только тогда, когда образ $A(S) \subset F$ единичного шара $S \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ является предкомпактным.

В самом деле, по определению множество $M \subset E$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре $S_r \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$, где $r > 0$.

2. Компактный оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ является ограниченным.

Поскольку всякое предкомпактное множество является ограниченным.

3. Если $A, B \in \mathcal{K}(E, F)$ компактны, то их сумма $A + B \in \mathcal{K}(E, F)$ компактна.

Действительно, пусть $\{x_n\} \subset S$. Тогда существует $\{n_k\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \rightarrow y \in F$, и существует $\{n_{k_i}\}$, т.ч. $Bx_{n_{k_i}} \rightarrow z \in F$. Отсюда $(A + B)x_{n_{k_i}} = Ax_{n_{k_i}} + Bx_{n_{k_i}} \rightarrow y + z \in F$. Таким образом, множество $A(S) \subset F$ является предкомпактным.

4. Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$, а $B \in \mathcal{K}(F, G)$, то оператор $BA \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный. Если $A \in \mathcal{K}(E, F)$, а $B \in \mathcal{L}(F, G)$, то оператор $BA \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный.

Это следует из того, что всякий ограниченный оператор переводит ограниченные множества в ограниченные, а предкомпактные множества в предкомпактные.

5. Если оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ограниченный и размерность $\dim E < \infty$ или $\dim F < \infty$, то оператор $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный.

Действительно, всякое ограниченное множество $M \subset E$ в пространстве конечной размерности $\dim E < \infty$ является предкомпактным.

6. Если $A \in \mathcal{K}(E, F)$ компактный и размерность $\dim E = \infty$, то оператор A не имеет ограниченного левого обратного оператора.

Если существует левый обратный $B \in \mathcal{L}(\text{Im} A, E)$, то тождественный оператор, равный $BA = I$, является компактным, что невозможно, т.к. единичный шар $S \subset E$ в бесконечномерном пространстве не является предкомпактным.

7. Пространство компактных операторов $\mathcal{K}(E, F)$ является замкнутым, т.е. если $A_n \in \mathcal{K}(E, F)$ и $A_n \rightarrow A$ сходится по норме, то $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

По условию для любого $\varepsilon > 0$ найдется n , т.ч. $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ при всех $x \in S$. Так как $A_n(S)$ предкомпактно, то существует $\varepsilon/2$ -сеть $\{y_k\}_{k=1}^m$ множества $A_n(S)$. Тогда для каждого $x \in S$ найдется k , т.ч. $\|y_k - Ax\| \leq \|y_k - A_n x\| + \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$. Поэтому $\{y_k\}_{k=1}^m$ является ε -сетью $A(S)$ и значит $A(S)$ предкомпактно.

Выясним свойства спектра компактного оператора. Напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит предельному спектру $\lambda \in \sigma_l(A)$ оператора A , если $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| = 0$.

1. Если $A \in \mathcal{K}(E)$ и размерность $\dim E = \infty$, то $\sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

По свойству 6 имеем $0 \in \sigma_l(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma_l(A)$ и $\lambda \neq 0$, тогда существует $\{x_n\}$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $A_\lambda x_n \rightarrow 0$. В силу компактности A найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $Ax_{n_k} \rightarrow e \in E$. Поскольку $x_{n_k} = (A_\lambda x_{n_k} + Ax_{n_k})/\lambda$, то $x_{n_k} \rightarrow e/\lambda$ и в силу непрерывности оператора $Ax_{n_k} \rightarrow Ae/\lambda$. Поэтому имеем $Ae = \lambda e$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

2. Если $A \in \mathcal{K}(E)$, то вне любого круга $K_\varepsilon \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$ может быть только конечное число собственных значений оператора A .

Предположим, что найдется последовательность $|\lambda_n| > \varepsilon$ различных собственных значений. Рассмотрим последовательность $\{e_n\} \subset E$, т.ч. $\|e_n\| = 1$ и $Ae_n = \lambda_n e_n$, и обозначим через $L_n = \text{sp}\{e_k\}_{k=1}^n$ линейную оболочку. Поскольку $\{e_n\}$ линейно независимы, то $L_{n-1} \neq L_n$. По лемме Рисса о почти перпендикуляре существуют $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Представим эти элементы в виде $y_n \doteq c_n e_n + x_n$, где $x_n \in L_{n-1}$. Тогда $Ay_n = c_n \lambda_n e_n + Ax_n = \lambda_n y_n - \lambda_n x_n + Ax_n$, где $\lambda_n x_n - Ax_n \in L_{n-1}$. Так как $\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то получим

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - (\lambda_n x_n - Ax_n + Ay_m)\| > |\lambda_n|/2 > \varepsilon/2.$$

т.е. последовательность $\{Ay_n\} \subset A(S)$ не имеет сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A .

Теорема (Рисса–Шаудера). Если $A \in \mathcal{K}(E)$ компактный оператор в банаховом пространстве бесконечной размерности $\dim E = \infty$, то спектр $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ состоит из собственных значений и нуля, при этом ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, т.е. $\dim E_\lambda < \infty$ при $\lambda \neq 0$ и $E_\lambda \doteq \ker A_\lambda$.

Доказательство. По свойству 1 спектра компактного оператора и по теореме о границе спектра выполняется включение $\partial\sigma(A) \subset \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$. Поскольку в силу свойства 2 вне любого круга K_ε имеется лишь конечное число собственных значений, то там нет других точек спектра $\sigma(A)$. Действительно, если множество $\mathbb{C} \setminus K_\varepsilon$ имеет точки спектра, которые не являются собственными значениями, то оно должно содержать граничные точки спектра, что невозможно. Таким образом, ненулевые точки спектра совпадают с собственными значениями оператора A и выполняется равенство $\sigma(A) = \sigma_l(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$.

Поскольку сужение оператора $A|_{E_\lambda} = \lambda I|_{E_\lambda}$ на собственное подпространство E_λ , соответствующее собственному значению $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus 0$, является компактным и обратимым оператором, то по свойству 6 размерность $\dim E_\lambda < \infty$. $\square$

Теорема (Шаудера). Если $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ограниченный оператор, определенный в банаховых пространствах $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, то он является компактным $A \in \mathcal{K}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ тогда и только тогда, когда его сопряженный компактный $A^* \in \mathcal{K}(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$.

Доказательство. Необходимость. По условию замкнутый образ единичного шара $K \doteq \overline{A(S)}$ является компактным. Для каждого функционала $f \in S^* \subset \mathbf{F}^*$ рассмотрим непрерывную функцию $g(y) \doteq f(y)$ при всех $y \in K$. Множество всех таких функций $g \in C(K)$ обозначим через M . Поскольку имеют место неравенства

$$\sup_{y \in K} |g(y)| = \sup_{x \in S} |f(Ax)| \leq \|A\|, \quad |g(y_1) - g(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|,$$

то множество $M \subset C(K)$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно. По теореме Арцелá–Аско́ли множество M является предкомпактным. Заметим, что M изометрично множеству $A^*(S^*)$, поскольку выполняется равенство

$$\|A^*f\| = \sup_{x \in S} |A^*f(x)| = \sup_{x \in S} |f(Ax)| = \sup_{y \in K} |g(y)| = \|g\|_C.$$

Поэтому образ единичного шара $A^*(S^*) \subset \mathbf{E}^*$ является предкомпактным.

Достаточность. Так как $A^* \in \mathcal{K}(\mathbf{F}^*, \mathbf{E}^*)$, то по доказанному $A^{**} \in \mathcal{K}(\mathbf{E}^{**}, \mathbf{F}^{**})$. Пусть J обозначает канонические вложения во второе сопряженное пространство. Тогда, полагая $J(x) = \delta_x$, при всех $x \in \mathbf{E}$ и $f \in \mathbf{F}^*$ получим

$$\langle A^{**}J(x), f \rangle = \langle \delta_x, A^*f \rangle = \langle A^*f, x \rangle = \langle f, Ax \rangle = \langle JA(x), f \rangle,$$

т.е. $A^{**}J = JA$. Отсюда вытекает включение $JA(S) = A^{**}J(S) \subset A^{**}(S^{**})$. Так как $A^{**}(S^{**})$ предкомпактно, то $A(S)$ также будет предкомпактным. $\square$

Пример 2. Достаточные условия компактности интегрального оператора

$$Af(x) \doteq \int_a^b K(x, y) f(y) dy \text{ при всех } f \in L_2[a, b],$$

действующего в пространстве $L_2[a, b]$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $K \in C[a, b]^2$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, мы получим неравенство $\|Af\|_C \leq (b-a)^{1/2} \|K\|_C \|f\|_{L_2}$ для всех $f \in L_2[a, b]$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < \varepsilon$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|Af(x_1) - Af(x_2)| < \varepsilon (b-a)^{1/2} \|f\|_{L_2}$ при всех $|x_1 - x_2| < \delta$, т.е. образ единичного шара $A(S) \subset C[a, b]$ является равномерно ограниченным и равномерно непрерывным. По теореме Арцелá–Аско́ли множество $A(S)$ предкомпактно в $C[a, b]$ и значит предкомпактно в $L_2[a, b]$. Поэтому оператор $A \in \mathcal{K}(L_2)$ компактный.

б) Пусть $K \in L_2[a, b]^2$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, мы получим, что $\|Af\|_{L_2} \leq \|K\|_{L_2} \|f\|_{L_2}$ при всех $f \in L_2[a, b]$. Поскольку множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $L_2[a, b]^2$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $K_n \in C[a, b]^2$, т.ч. $\|K - K_n\|_{L_2} < 1/n$. Определим интегральный оператор по формуле $A_n f(x) \doteq \int_a^b K_n(x, y) f(y) dy$ при всех $f \in L_2[a, b]$. Тогда, используя указанное выше неравенство, имеем $\|Af - A_n f\|_{L_2} \leq \|K - K_n\|_{L_2} \|f\|_{L_2}$. Таким образом, выполняется неравенство $\|A - A_n\| < 1/n$ и значит последовательность компактных операторов сходится по норме к оператору A . Поэтому оператор $A \in \mathcal{K}(L_2)$ компактный.

15 ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Пусть далее E и F — банаховы пространства. Напомним, что *коразмерностью* подпространства $L \subset E$ называется размерность факторпространства $\widehat{E} \doteq E/L$.

Определение. Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ называется *фредгольмовым*, если ядро конечной размерности $\dim(\ker A) = n$, а образ конечной коразмерности $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = m$. Величина $\operatorname{ind} A \doteq n - m$ называется *индексом* A . Множество всех фредгольмовых операторов обозначим через $\mathcal{F}(E, F)$ и $\mathcal{F}(E) \doteq \mathcal{F}(E, E)$.

Лемма. Если оператор $A \in \mathcal{F}(E, F)$ фредгольмовый, то его образ замкнут.

Доказательство. Пусть $\{\widehat{e}_k\}_{k=1}^m$ — базис факторпространства $\widehat{F} \doteq F/\operatorname{Im} A$. Так как всякий элемент $z \in F$ допускает представление $z = z_0 + \sum_{k=1}^m c_k e_k$, где $z_0 \in \operatorname{Im} A$, то $F = \operatorname{Im} A \oplus M$, где $M \doteq \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ обозначает линейную оболочку. Рассмотрим оператор $B: E \times M \rightarrow F$, определенный по формуле $B(x, y) \doteq Ax + y$, где $x \in E$ и $y \in M$. Так как оператор B ограниченный и сюръективный, то он является гомоморфизмом. Поэтому образ $B(E \times 0) = \operatorname{Im} A$ будет замкнутым подпространством в F . $\square$

Пример 1. Всякий биективный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ является фредгольмовым. Компактный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ не является фредгольмовым, если $\dim E = \infty$ или $\dim F = \infty$. В самом деле, иначе по теореме о гомоморфизме образ единичного шара $A(S)$ является окрестностью нуля в $\operatorname{Im} A$ и, следовательно, имеет конечную размерность $\dim A(S) < \infty$ в силу предкомпактности. Тогда $\dim(\operatorname{Im} A) < \infty$, а значит $\dim F < \infty$ и $\dim E < \infty$, что невозможно по предположению.

Теорема (о каноническом операторе Фредгольма). Если оператор $K \in \mathcal{K}(E)$ является компактным, то оператор $A \doteq I - K \in \mathcal{F}(E)$ фредгольмовый.

Доказательство. Так как по теореме Рёсса–Шаудера ядро $\ker A$ имеет конечную размерность, то существует замкнутое подпространство $L \subset E$, т.ч. $E = \ker A \oplus L$. Докажем, что оператор $B \doteq A|_L$ имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} A$.

Заметим, что B ограничен снизу. В самом деле, иначе существует $\{x_n\} \subset L$, т.ч. $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \rightarrow 0$. В силу компактности K существует подпоследовательность, т.ч. $Kx_{n_i} \rightarrow x$ сходится по норме. Так как $x_{n_i} = Ax_{n_i} + Kx_{n_i} \rightarrow x$, то $Ax_{n_i} \rightarrow Ax$. Поэтому из замкнутости L следует, что $x \in L$, $\|x\| = 1$ и $Ax = 0$. Таким образом, $\ker B \neq 0$, что противоречит выбору L . В силу леммы, доказанной ранее, из ограниченности снизу оператора B вытекает, что он имеет замкнутый образ $\operatorname{Im} B$.

Поскольку образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по теореме, доказанной ранее, $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)^\perp$. По теореме Рёсса–Шаудера ядро $\ker A^*$ имеет конечную размерность m . Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ образует базис ядра $\ker A^*$ и $\{e_k\}_{k=1}^m$ является соответствующей биортогональной системой. Тогда получим $\operatorname{Im} A = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Отсюда, обозначая $L \doteq \operatorname{Im} A$ и $M \doteq \operatorname{sp}\{e_k\}_{k=1}^m$ линейную оболочку, всякий элемент $x \in E$ допускает разложение $x = y + z$, где $z = \sum_{k=1}^m f_k(x) e_k \in M$ и $y = x - z \in L$. Таким образом, $E = L \oplus M$ и коразмерность образа равна $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} A) = \dim(\ker A^*) = m$. $\square$

Из курса линейной алгебры известна следующая *альтернатива Фредгольма*: либо система n линейных уравнений с n неизвестными однозначно разрешима для любой правой части, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение. Теоремы Фредгольма в бесконечномерном банаховом пространстве устанавливают аналогичные связи между решениями однородного и неоднородного уравнений, определяемых каноническим оператором Фредгольма.

Для доказательств теорем Фредгольма мы предположим, что $A \doteq I - K$ является *каноническим оператором Фредгольма* в банаховом пространстве E , а $A^* \doteq I - K^*$ образует его сопряженный оператор, при этом $K \in \mathcal{K}(E)$ определяет компактный оператор. По теореме Рёсса–Шаудера ядра этих операторов $\ker A$ и $\ker A^*$ имеют конечную размерность $\dim(\ker A) = n$ и $\dim(\ker A^*) = m$.

Теорема (I теорема Фредгольма). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^m$ базис решений однородного сопряженного уравнения $A^*f = 0$. Неоднородное уравнение $Ax = y$ тогда и только тогда имеет решение, когда $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \dots, m$.

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} A = (\ker A^*)^\perp = \bigcap_{k=1}^m \ker f_k$. Поэтому получаем, что $y \in \operatorname{Im} A$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства $f_k(y) = 0$ при $k = 1, \dots, m$. $\square$

Теорема (II теорема Фредгольма). Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ базис решений однородного уравнения $Ax = 0$. Неоднородное сопряженное уравнение $A^*f = g$ тогда и только тогда имеет решение, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Так как образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, то по доказанной ранее формуле $\operatorname{Im} A^* = (\ker A)^\perp = \bigcap_{k=1}^n \ker \delta_{x_k}$, где $\delta_{x_k} \in E^{**}$ и $\delta_{x_k}(f) \doteq f(x_k)$ при $f \in E^*$. Отсюда следует, что $g \in \operatorname{Im} A^*$ тогда и только тогда, когда $g(x_k) = 0$ при $k = 1, \dots, n$. $\square$

Теорема (III теорема, альтернатива Фредгольма). Для того чтобы неоднородное уравнение $Ax = y$ было разрешимо при всех $y \in E$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Ax = 0$ имело только нулевое решение.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует элемент $x_1 \neq 0$, т.ч. $Ax_1 = 0$. Обозначим через $L_n \doteq \ker A^n$ ядро оператора A^n . Тогда включения $L_{n-1} \subset L_n$ являются строгими. Действительно, по условию существуют $x_n \in E$, т.ч. $Ax_n = x_{n-1}$ при $n = 2, 3, \dots$. Отсюда $A^{n-1}x_n = x_1 \neq 0$ и значит $x_n \in L_n \setminus L_{n-1}$.

В силу леммы Ф. Рисса о почти перпендикуляре существуют элементы $y_n \in L_n$, т.ч. $\|y_n\| = 1$ и $\|y_n - x\| > 1/2$ при всех $x \in L_{n-1}$. Поскольку имеют место равенства $Ky_n - Ky_m = y_n - (Ay_n + y_m - Ay_m)$ и элемент $Ay_n + y_m - Ay_m \in L_{n-1}$ при $n > m$, то $\|Ky_n - Ky_m\| > 1/2$ при $n > m$, что противоречит компактности оператора K .

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ допускает только нулевое решение. Тогда по второй теореме неоднородное сопряженное уравнение $A^*f = g$ разрешимо при всех $g \in E^*$ и значит по доказанной необходимости однородное сопряженное уравнение $A^*f = 0$ имеет только нулевое решение. Поэтому в силу первой теоремы неоднородное уравнение $Ax = y$ разрешимо при всех $y \in E$. $\square$

Теорема (об индексе канонического оператора Фредгольма). *Уравнения $Ax = 0$ и $A^*f = 0$ имеют равное число линейно независимых решений, т.е. $\text{ind} A = n - m = 0$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ образует базис в подпространстве $\ker A$ и $\{f_i\}_{i=1}^n$ соответствующая биортогональная система функционалов из E^* . Пусть $\{g_j\}_{j=1}^m$ задает базис в подпространстве $\ker A^*$ и $\{y_j\}_{j=1}^m$ соответствующая биортогональная система элементов из E . Докажем, что следующие два случая невозможны.

а) $n < m$. Определим операторы $K_n x \doteq Kx + \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ при $x \in E$ и $A_n \doteq I - K_n$. Докажем, что ядро $\ker A_n = 0$. Если элемент $x \in \ker A_n$, то получим $Ax = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$. Так как $A^*g_j = 0$ при $j = 1, \dots, m$, то $A^*g_j(x) = g_j(Ax) = f_j(x) = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Поэтому имеем $Ax = 0$ и, следовательно, элемент $x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i = 0$.

Поскольку оператор K_n является компактным, то по третьей теореме существует элемент $z \in E$, т.ч. $A_n z = y_m$. Поэтому $0 = A^*g_m(z) = g_m(Az) = g_m(A_n z) = g_m(y_m) = 1$. Следовательно, мы получили противоречие.

б) $n > m$. Рассмотрим оператор $K_m^* f \doteq K^* f + \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$ при $f \in E^*$, который является сопряженным к оператору $K_m x \doteq Kx + \sum_{j=1}^m f_j(x) y_j$. Положим $A_m^* = I - K_m^*$. Докажем, что ядро $\ker A_m^* = 0$. Если элемент $f \in \ker A_m^*$, то имеем $A^*f = \sum_{j=1}^m f(y_j) f_j$. Поскольку $Ax_i = 0$ при $i = 1, \dots, n$, то $A^*f(x_i) = f(Ax_i) = f(y_i) = 0$ при $i = 1, \dots, m$. Поэтому получаем $A^*f = 0$ и, следовательно, элемент $f = \sum_{j=1}^m f(y_j) g_j = 0$.

Поскольку оператор K_m^* является компактным, то по третьей теореме существует элемент $h \in E^*$, т.ч. $A_m^* h = f_n$. Поэтому $0 = h(Ax_n) = h(A_m x_n) = A_m^* h(x_n) = f_n(x_n) = 1$. Таким образом, мы получили противоречие. $\square$

Определение. Оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ будем называть *почти обратимым*, если существует ограниченный оператор $T \in \mathcal{L}(F, E)$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathcal{K}(E)$ и $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ компактные операторы.

Теорема (Никольского). *Ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ тогда и только тогда является почти обратим, когда он фредгольмовый.*

Доказательство. Необходимость. Так как по условию $K_1 \in \mathcal{K}(E)$ и $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ являются компактными операторами, то по доказанной выше теореме операторы $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$ являются фредгольмовыми. А так как $\ker A \subset \ker TA$ и $\text{Im} AT \subset \text{Im} A$, то оператор $A \in \mathcal{F}(E, F)$ также будет фредгольмовым.

Достаточность. Поскольку размерность ядра $\ker A \subset E$ конечна, то существует замкнутое подпространство $L \subset E$, т.ч. $E = \ker A \oplus L$. Так как коразмерность образа $\text{Im} A$ конечна, то существует замкнутое подпространство $M \subset F$, т.ч. $F = \text{Im} A \oplus M$. Обозначим через $P : E \rightarrow E$ проектор на L , а через $Q : F \rightarrow F$ проектор на $\text{Im} A$, и положим $P_1 \doteq I - P$ и $Q_1 \doteq I - Q$. Тогда проекторы P_1 и Q_1 имеют конечномерные образы $\text{Im} P_1 = \ker A$ и $\text{Im} Q_1 = M$, а значит являются компактными.

Поскольку оператор $B \doteq A|_L : L \rightarrow \text{Im} A$ биективный, то по теореме Банаха его обратный $B^{-1} : \text{Im} A \rightarrow L$ является ограниченным. Пусть $T \doteq PB^{-1}Q$, тогда имеют место равенства $TA = PB^{-1}A = P = I - P_1$ и $AT = AB^{-1}Q = Q = I - Q_1$. Ещё заметим, что оператор $T \in \mathcal{F}(F, E)$ фредгольмовый и его индекс $\text{ind} T = -\text{ind} A$. $\square$

Теорема (об устойчивости при компактных возмущениях). Если $A \in \mathcal{F}(E, F)$ и $K \in \mathcal{K}(E, F)$, то оператор $A + K \in \mathcal{F}(E, F)$ и индекс $\text{ind}(A + K) = \text{ind} A$.

Доказательство. В силу теоремы Никольского существует оператор $T \in \mathcal{L}(F, E)$, т.ч. $TA = I - K_1$ и $AT = I - K_2$, где $K_1 \in \mathcal{K}(E)$ и $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ являются компактными операторами. Тогда имеют место следующие равенства:

$$T(A + K) = I - (K_1 - TK), \quad (A + K)T = I - (K_2 - KT),$$

где $K_1 - TK \in \mathcal{K}(E)$ и $K_2 - KT \in \mathcal{K}(F)$. Поэтому оператор $A + K \in \mathcal{L}(F, E)$ почти обратим и значит является фредгольмовым. В силу замечания при доказательстве теоремы Никольского его индекс равен $\text{ind}(A + K) = -\text{ind} T = \text{ind} A$. $\square$

Определение. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *несущественным значением* оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, если оператор $A_\lambda \doteq \lambda I - A$ является фредгольмовым. Множество всех несущественных значений обозначается через $\rho_e(A)$. Дополнительное множество $\sigma_e(A) \doteq \mathbb{C} \setminus \rho_e(A)$ называется *существенным спектром* оператора A .

Весь спектр оператора $A \in \mathcal{L}(E)$ является объединением двух множеств

$$\sigma_e(A) \doteq \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \notin \mathcal{F}(E)\} \quad \text{и} \quad \sigma_i(A) \doteq \{\lambda \in \sigma(A) \mid A_\lambda \in \mathcal{F}(E)\},$$

где $\sigma_i(A)$ называется *несущественным спектром* A . По теореме об устойчивости существенный спектр не изменяется при компактных возмущениях оператора A .

Пример 2. Пусть $(Ax)_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, диагональным оператор в пространстве ℓ_p , где последовательность $\{\lambda_n\} \in \ell_\infty$ и $1 \leq p \leq \infty$. Его норма $\|A\| = \sup |\lambda_n|$.

Обозначим через $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n = 0\}$ и $M = \mathbb{N} \setminus N$. Тогда $\ell_p = \ell_p(N) \oplus \ell_p(M)$. Если оператор фредгольмовый, то ядро $\ker A = \ell_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\text{Im} A = A(\ell_p(M))$ замкнут. Тогда N конечно и оператор $A : \ell_p(M) \rightarrow \ell_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\inf_{n \in M} |\lambda_n| > 0$. Таким образом, $A \in \mathcal{F}(\ell_p)$ тогда и только тогда, когда нуль не является предельной точкой $\{\lambda_n\}$. Поскольку $(A_\lambda x)_n = (\lambda - \lambda_n)x_n$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает с множеством всех предельных точек $\{\lambda_n\}$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ с множеством тех точек λ_n , которые повторяются в последовательности $\{\lambda_n\}$ конечное число раз.

Пример 3. Пусть $Af(x) = \varphi(x)f(x)$ оператор умножения на функцию в пространстве $L_p[a, b]$, где $\varphi \in L_\infty[a, b]$ и $1 \leq p \leq \infty$. Его норма $\|A\| = \text{ess sup}_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$.

Обозначим через $N = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) = 0\}$ и через $M = [a, b] \setminus N$. Тогда получаем следующее представление $L_p([a, b]) = L_p(N) \oplus L_p(M)$. Если оператор $A \in \mathcal{F}(L_p)$ является фредгольмовым, то ядро $\ker A = L_p(N)$ имеет конечную размерность и образ $\text{Im} A = A(L_p(M))$ замкнут. Поэтому множество N имеет меру нуль и оператор $A : L_p(M) \rightarrow L_p(M)$ имеет ограниченный обратный. Отсюда $\text{ess inf}_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| > 0$.

Таким образом, оператор $A \in \mathcal{F}(L_p)$ фредгольмовый тогда и только тогда, когда он обратим. Поскольку $A_\lambda f(x) = (\lambda - \varphi(x))f(x)$, то существенный спектр $\sigma_e(A)$ совпадает со спектром оператора $\sigma(A) = \sigma_e(A)$, т.е. с множеством существенных значений функции $\varphi(x)$, а несущественный спектр $\sigma_i(A)$ является пустым.

16 ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Напомним, что линейный оператор $A: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ для всех $x, y \in \mathbf{H}$. Множество эрмитовых операторов образует действительное подпространство $\mathcal{H}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ ограниченных операторов.

1. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то собственные значения $\lambda \in \sigma_p(A)$ действительны $\lambda \in \mathbb{R}$, а собственные подпространства $H_\lambda \doteq \ker A_\lambda$ ортогональны $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Пусть $Ae = \lambda e$ и $\|e\| = 1$, тогда $\lambda = \langle Ae, e \rangle = \langle e, Ae \rangle = \bar{\lambda}$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому, если $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, то $\lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle = \langle Ae_1, e_2 \rangle = \langle e_1, Ae_2 \rangle = \lambda_2 \langle e_1, e_2 \rangle$, т.е. $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

Теорема (критерий Вейля). Спектр эрмитова оператора $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$ совпадает с его предельным спектром, т.е. $\sigma(A) = \sigma_l(A)$.

Доказательство. Поскольку дополнительное множество к предельному спектру $\sigma(A) \setminus \sigma_l(A) \subset \sigma_r(A)$ содержится в остаточном спектре, то достаточно показать, что остаточный спектр $\sigma_r(A)$ является пустым. Предположим обратное, т.е. $\ker A_\lambda = 0$ и существует $y \in \mathbf{H}$, т.ч. $y \neq 0$ и $y \perp \text{Im} A_\lambda$. Тогда $\langle A_\lambda x, y \rangle = \langle x, A_{\bar{\lambda}} y \rangle = 0$ при всех $x \in \mathbf{H}$. Отсюда следует, что $A_{\bar{\lambda}} y = 0$, т.е. $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A)$. Так как собственные значения действительны, то $A_\lambda y = 0$, что противоречит нашему предположению. $\square$

2. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ является действительным.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\beta \neq 0$, то $A_\lambda = A_\alpha + i\beta I$ и справедливо следующее равенство:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \langle A_\alpha x, A_\alpha x \rangle - i\beta \langle A_\alpha x, x \rangle + i\beta \langle x, A_\alpha x \rangle + \beta^2 \langle x, x \rangle = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2.$$

Поэтому $\inf_{\|x\|=1} \|A_\lambda x\| \geq |\beta| > 0$ и, следовательно, по критерию Вейля $\lambda \notin \sigma(A)$.

3. Если $A \in \mathcal{H}(\mathbf{H})$, то спектральный радиус равен норме $r(A) = \|A\|$.

Так как $A^2 = AA$, то $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\|A^2\| = \sup_{x \in S} \|A^2 x\| = \sup_{x, y \in S} \langle A^2 x, y \rangle = \sup_{x, y \in S} \langle Ax, Ay \rangle \geq \sup_{x \in S} \langle Ax, Ax \rangle = \|A\|^2,$$

где $S \subset \mathbf{H}$ — единичный шар. Поэтому $\|A^2\| = \|A\|^2$ и, следовательно, $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. По теореме о спектральном радиусе $r(A) = \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim \sqrt[n]{\|A^{2^n}\|} = \|A\|$.

4. Если $A \in \mathcal{K}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{H})$ компактный и эрмитовый, то $\sigma_p(A) \neq \emptyset$.

Пусть $\sigma_p(A) = \emptyset$. Так как $\sigma(A) \neq \emptyset$, то по теореме Рисса–Шаудера $\sigma(A) = \{0\}$. Поэтому по свойству 3 получим $r(A) = \|A\| = 0$, т.е. $A = 0$, что невозможно.

Теорема (Гильберта–Шмидта). Пусть оператор $A \in \mathcal{K}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{H})$ является компактным и эрмитовым в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда существует полная ортонормированная система из собственных векторов A .

Доказательство. В случае $\dim \mathbf{H} < \infty$ эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры. Пусть $\dim \mathbf{H} = \infty$. Так как оператор A является компактным, то множество $\sigma_p(A) = \{\lambda_n\}$ собственных значений не более, чем счетно, и ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ имеют конечную кратность $\dim H_{\lambda_n} < \infty$, где $H_{\lambda_n} \doteq \ker A_{\lambda_n}$. Поскольку оператор A является эрмитовым, то все его собственные значения действительны $\lambda_n \in \mathbb{R}$, а их собственные подпространства ортогональны $H_{\lambda_n} \perp H_{\lambda_m}$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Выберем в каждом подпространстве H_{λ_n} ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов с собственным значением λ_n . Тогда объединение всех этих ортонормированных систем образует ортонормированную систему $\{e_n\}$ в $\mathbf{H}$. Пусть $L \doteq \overline{\text{sp}}\{e_n\}$ замкнутая линейная оболочка системы $\{e_n\}$. Тогда L является инвариантным подпространством для оператора $A : L \rightarrow L$, а в силу его эрмитовости ортогональное дополнение $L^\perp$ также будет инвариантным подпространством для оператора $A : L^\perp \rightarrow L^\perp$. При этом по свойству 4 подпространство $L^\perp$ должно иметь собственный вектор, что невозможно по построению. Следовательно, $L^\perp = 0$ и по теореме об ортогональном разложении получим, что $\mathbf{H} = L \oplus L^\perp = L$. $\square$

Пример 1. Оператором Гильберта–Шмидта называется интегральный оператор, определенный в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$ по формуле

$$Af(x) \doteq \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_2[a, b],$$

у которого ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условиям $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$, $K(x, y) \in L_2[a, b]^2$. Из доказанных ранее утверждений оператор A является эрмитовым и компактным. Предположим далее, что его ненулевые собственные значения $\lambda_n \neq 0$ упорядочены $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ и повторяется столько раз, какова их кратность. Соответствующая им ортонормированная система собственных функций обозначается через $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Выведем формулу резольвенты оператора A . В силу теоремы Гильберта–Шмидта функция $f \in L_2[a, b]$ разлагается в ряд $f = f_0 + \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_n \rangle e_n$, где $f_0 \in \ker A$. Тогда $Af = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$. Если $g = A_\lambda f$, то $\langle g, e_n \rangle = \langle A_\lambda f, e_n \rangle = \langle f, A_\lambda e_n \rangle = (\lambda - \lambda_n) \langle f, e_n \rangle$. Поэтому резольвента $R_\lambda g = f$ имеет при всех $\lambda \in \rho(A)$ представление

$$R_\lambda g = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} Af = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \int_a^b K_\lambda(x, y) g(y) dy,$$

где $K_\lambda(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(x) \overline{e_n(y)}$. Докажем, что ряд $K_\lambda(x, y)$ сходится в $L_2[a, b]^2$.

Функции $\varphi_n(x, y) = e_n(x) \overline{e_n(y)}$ образуют ортонормированную систему в $L_2[a, b]^2$. Так как функция $K(x, y)$ имеет коэффициенты Фурье $\langle K, \varphi_n \rangle = \langle A e_n, e_n \rangle = \lambda_n$, то ее ряд Фурье сходится к функции $F(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \varphi_n(x, y)$ из пространства $L_2[a, b]^2$. Поскольку система функций $h(x, y) = f(x)g(y)$ полна в $L_2[a, b]^2$ и

$$\langle K, h \rangle = \langle Ag, f \rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle g, e_n \rangle \langle e_n, f \rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle \varphi_n, h \rangle = \langle F, h \rangle$$

для всех $f, g \in L_2[a, b]$, то функции $K(x, y) = F(x, y)$ равны п.в. на $[a, b]^2$. Поэтому в силу равенства Парсеваля $\|K\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$. Отсюда $\|K_\lambda\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 < \infty$ при всех $\lambda \in \rho(A)$. Таким образом, ряд Фурье функции $K_\lambda(x, y)$ сходится в $L_2[a, b]^2$.

Пусть $p \in C^1[a, b]$ положительна $p(x) > 0$, а $q \in C[a, b]$ принимает действительные значения. Рассмотрим дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля

$$Lu(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) \text{ при п.в. } x \in [a, b].$$

Его область определения $M \doteq \text{dom} L$ состоит из функций $u \in W_2^2[a, b]$, у которых первая производная абсолютно непрерывна $u' \in AC[a, b]$, а вторая $u'' \in L_2[a, b]$, при этом выполняются граничные условия $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$ и $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$ с действительными коэффициентами и т.ч. $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Подпространство M всюду плотно в $L_2([a, b])$ и оператор L симметричен, т.е. $\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle$ для всех $u, v \in M$. В самом деле, интегрируя по частям, имеем

$$\langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle = \int_a^b (Lu)\bar{v} - u(L\bar{v})dx = - \int_a^b \bar{v}d(pu') + \int_a^b u d(p\bar{v}') = p(u\bar{v}' - u'\bar{v})|_a^b = 0,$$

где последнее равенство вытекает из граничных условий, т.к. определители

$$\det \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \det \begin{vmatrix} u(b) & u'(b) \\ \bar{v}(b) & \bar{v}'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля, которая включает, во-первых, вопрос о существовании решения уравнения $Lu = f$, где $f \in L_2[a, b]$, а во-вторых, вопрос о полноте системы собственных функций оператора L в пространстве $L_2[a, b]$.

Лемма. *Предположим, что ядро оператора $L: M \rightarrow L_2[a, b]$ равно нулю. Тогда существует функция Грина $G(x, y)$ задачи Штурма–Лиувилля, т.ч.*

- а) функция $G(x, y)$ действительная, симметричная и непрерывная в $[a, b]^2$;
- б) функция $G(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y при $y \neq x$;
- в) удовлетворяет уравнению $LG(x, y) = 0$ по y и граничным условиям при $y \neq x$;
- г) производная $G'(x, y)$ по y допускает разрыв первого рода при $y = x \in (a, b)$ с величиной скачка $G'(x, x+0) - G'(x, x-0) = -1/p(x)$.

Доказательство. Так как $\ker L = 0$, то, решая задачу Коши, получим два линейно независимых действительных решения u_1 и u_2 уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму граничным условиям. Поэтому их определитель Вронского $\Delta = u_1 u_2' - u_1' u_2 \neq 0$ не равен нулю, а функция $p\Delta \doteq p(u_1 u_2' - u_1' u_2)$ равна константе $\Delta_0 \neq 0$, т.к. ее производная $(p\Delta)' = u_1(pu_2')' - u_2(pu_1')' = 0$ равна нулю.

Определим функцию $G(x, y) \doteq c_1 u_1(y)$ при $y \leq x$ и $G(x, y) \doteq c_2 u_2(y)$ при $y \geq x$. Выберем $c_1 = c_1(x)$ и $c_2 = c_2(x)$, чтобы функция $G(x, y)$ являлась непрерывной по y на $[a, b]$ и ее производная $G'(x, y)$ по y имела указанный скачок в точке x , т.е. $c_1 u_1(x) - c_2 u_2(x) = 0$ и $c_1 u_1'(x) - c_2 u_2'(x) = 1/p(x)$. Поскольку $\Delta_0 = p(u_1 u_2' - u_1' u_2) \neq 0$ константа, то, полагая $c_1 \doteq -u_2(x)/\Delta_0$ и $c_2 \doteq -u_1(x)/\Delta_0$, мы получим функцию

$$G(x, y) \doteq -\frac{1}{\Delta_0} \begin{cases} u_1(y)u_2(x), & \text{при } a \leq y \leq x \leq b; \\ u_1(x)u_2(y), & \text{при } a \leq x \leq y \leq b; \end{cases}$$

которая будет удовлетворять всем условиям леммы. □

Теорема (о существовании решения). Если $\ker L = 0$ и $f \in L_2[a, b]$, то функция $u \in M$ тогда и только тогда удовлетворяет уравнению $Lu = f$, когда

$$u(x) = Af(x) \doteq \int_a^b G(x, y) f(y) dy \text{ при всех } x \in [a, b],$$

где $G(x, y)$ есть функция Грина задачи Штурма–Лиувилля.

Доказательство. Пусть функция $f = Lu$, где $u \in M$. Тогда, интегрируя по частям и используя свойства функции Грина, сформулированные в доказанной лемме, а также граничные условия, мы получим

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, y) f(y) dy &= \left(\int_a^x G(Lu) dy - \int_a^x (LG) u dy \right) + \left(\int_x^b G(Lu) dy - \int_x^b (LG) u dy \right) = \\ &= p(uG' - u'G)|_a^{x-0} + p(uG' - u'G)|_{x+0}^b = p(uG' - u'G)|_{x+0}^{x-0} = u(x). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство $ALu = u$ при всех $u \in M$.

Теперь докажем равенство $LAf = f$ для всех $f \in L_2[a, b]$. Поскольку $Af \in M$, то в силу симметричности операторов L и A получим $\langle LAf, u \rangle = \langle f, ALu \rangle = \langle f, u \rangle$ для всех $u \in M$. Так как подпространство M всюду плотно в $L_2[a, b]$, то $LAf = f$ п.в. на отрезке $[a, b]$. Таким образом, оператор A , определенный на пространстве $L_2[a, b]$ со значениями в M , является обратным к оператору L . $\square$

Теорема (о полноте собственных функций). Существует такая полная ортонормированная система в $L_2[a, b]$, которая состоит из собственных функций оператора $L: M \rightarrow L_2[a, b]$ Штурма–Лиувилля.

Доказательство. Пусть $\ker L = 0$. Тогда существование полной ортонормированной системы собственных функций L вытекает из теоремы Гильберта–Шмидта, так как собственные функции L являются собственными функциями для интегрального оператора A , ядром которого является функция Грина.

Пусть $\ker L \neq 0$. В силу симметричности оператора L его собственные функции с различными собственными значениями ортогональны. Поэтому множество всех собственных значений не более, чем счетно, и значит существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, которое не является собственным значением. Тогда оператор $L_0 = L - \lambda_0 I$ удовлетворяет условию $\ker L_0 = 0$. Поскольку собственные функции L_0 являются собственными функциями L и наоборот, то оператор L одновременно с оператором L_0 обладает полной системой собственных функций в пространстве $L_2[a, b]$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим оператор $Lu = -u''$ и граничные условия $u(0) = u(\pi) = 0$. По решениям x и $\pi - x$ уравнения $Lu = 0$, построим функцию Грина

$$G(x, y) = \begin{cases} (\pi - x)y, & \text{при } 0 \leq y \leq x \leq \pi; \\ x(\pi - y), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

Затем, решая дифференциальное уравнение $u'' + \lambda u = 0$ с граничными условиями $u(0) = u(\pi) = 0$, находим его собственные значения $\lambda_n = n^2$ и ортонормированную систему собственных функций $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, полную в $L_2[0, \pi]$.