

Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана-Лиувилля и проблема замыкания моментной системы

Боровских А.В., Платонова К.С.

Воронежская весенняя математическая школа
"Понтрягинские чтения – 2021"

6 мая 2021 года

Группа симметрий

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lu = 0, \quad u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Замена переменных переводит это уравнение в, вообще говоря, другое уравнение.

Симметрия – замена переменных, переводящая уравнение в себя. Уравнение *инвариантно* относительно этой замены.

Симметрии уравнения образуют группу. Чем шире *группа симметрий*, тем более уравнение доступно для анализа, в частности, решения.

Задача групповой классификации: для каждого уравнения из некоторого семейства найти соответствующую группу симметрий, и для уравнений с максимальной группой симметрий произвести более детальный анализ, решение, исследование каких-то феноменов и т.п.

Группа эквивалентности

Пусть дано семейство дифференциальных уравнений

$$L(u, F) = 0, \quad u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Преобразования эквивалентности – замена переменных, переводящая семейство уравнений в себя. Уравнение может переходить в другое уравнение, но из этого же семейства.

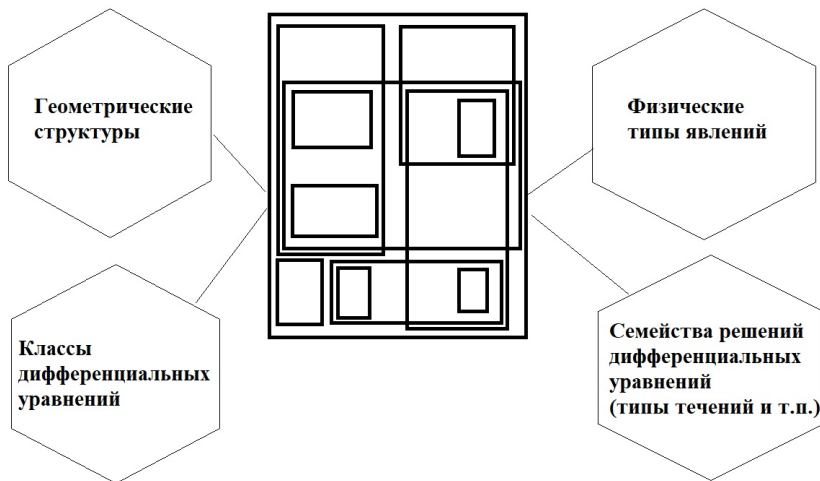
Преобразования эквивалентности образуют группу, которая называется *группой эквивалентности*.

Эквивалентные уравнения имеют одинаковые (изоморфные) группы симметрий.

Задача групповой классификации: группа симметрий (с точностью до изоморфизма) $\rightarrow$ семейства уравнений (представители классов эквивалентности).

Групповые структуры и классификации

Структура групповых вложений



Общие принципы группового анализа

- Если что-то в дифференциальном уравнении может меняться – его нужно сделать «произвольным».
- «Произвольность» нужно делать максимальной (если функция, то зависящая от всех переменных, какие есть).
- Преобразования – максимально широкие (все зависимые и независимые переменные).
- Переменных максимальное количество (в идеале – чтобы получилась система уравнений первого порядка).

Проблемы:

- Для алгебр большой размерности структура вложений подалгебр неизвестна.
- Трудность решения соответствующих систем дифференциальных уравнений. Искусство.
- Не всегда понятно направление обобщения, когда «произвольность» максимизируется.
- Потеря физического смысла!!!

Уравнение Больцмана: постановка проблемы

$$f_t + c^i f_{x^i} + (F^i f)_{c^i} = J_{col} \quad (1)$$

- t - время, x - координаты, c - скорость,
 $f = f(t, x, c)$ – фазовая плотность частиц среды,
 $F^i = F^i(t, x, c)$ – компоненты внешнего силового поля.
- Моментные величины

$$j^{[\alpha]}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} c^\alpha f(t, x, c) dc. \quad (2)$$

Группа симметрий (1) $\rightarrow$ действие на моментные величины (2) $\rightarrow$ инварианты $\rightarrow$ замыкание (уравнения сплошной среды ?).

$$f_t + cf_x + (Ff)_c = 0 \quad (1')$$

- все уравнения эквивалентны $f_t = 0$
- при переходе к уравнению $f_t = 0$ теряется физический смысл отношения t, x и c
- выразить в математической форме все связанные с уравнением "физические смыслы"

- Инвариантность соотношений

$$dx = cdt, \quad dc = Fdt \quad (3)$$

- Инвариантность семейства прямых

$$dt = dx = 0 \quad (4)$$

- Сохранение числа частиц $dN = f dxdc$. В бесконечно малом элементе фазового объема на поверхности $t = \theta(x, c)$

$$(1 - c\theta_x - F\theta_c) f dxdc \quad (5)$$

Групповой анализ имеет дело с группами Ли – группами, которые параметризованы.

Однопараметрическая группа преобразований T_a ($\bar{x} = T_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $T_a(T_b) = T_{a+b}$) есть всегда группа сдвигов

$$\frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = x \quad \left(\xi(x) = \left. \frac{dT_a(x)}{da} \right|_{a=0} \right).$$

Совокупность векторных полей линейное пространство, являющееся алгеброй. Восстановление группы по этой алгебре – это классические результаты Софуса Ли.

Поскольку

$$\frac{d(F(\bar{x}))}{da} = \sum_i F_{x^i} \frac{d\bar{x}^i}{da} = \sum_i F_{x^i} \xi^i = \left[\sum_i \xi^i \partial_{x^i} \right] F,$$

$\Xi = \sum_i \xi^i \partial_{x^i}$ – порождающий оператор

Алгебры симметрий и алгебры эквивалентности

В нашем случае ГС – преобразования пространства переменных (t, x, c, f) , переводящие решения уравнения (1) в решения того же уравнения.

Соответствующее векторное поле:

$$\begin{array}{ll} \tau(t, x, c, f) & \text{порождающий оператор} \\ \xi(t, x, c, f) & \Rightarrow \Xi = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f \\ \gamma(t, x, c, f) & \\ \eta(t, x, c, f) & \end{array}$$

Условие Ли: $\Xi L|_{L=0} = 0$.

ГЭ – преобразования пространства переменных (t, x, c, f, F) , сохраняющие семейство уравнений (1).

Порождающий оператор: $\tilde{\Xi} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f + \phi\partial_F$.

Группа симметрий и группа эквивалентности уравнения Больцмана $F = F(t, x, c)$

- **Теорема 3**

*Алгебра Ли группы эквивалентности уравнения (1'), сохраняющей соотношения (3), (4) и форму (5), имеет вид $\Xi = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \gamma \partial_c + \eta \partial_f + \phi \partial_F$, где $\tau = \tau(t, x)$ и $\xi = \xi(t, x)$ – произвольные функции,
 $\gamma = \xi_t + c(\xi_x - \tau_t) - c^2 \tau_x$, $\eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t)$,
 $\phi = \gamma_t + c\gamma_x + F(\xi_x - 2\tau_t - 3c\tau_x)$.*

- **Теорема 3**

Алгебра Ли группы симметрий уравнения (1'), сохраняющей соотношения (3), (4) и форму (5), имеет вид $\Xi = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \gamma \partial_c + \eta \partial_f$, где функции $\tau = \tau(t, x)$, $\xi = \xi(t, x)$, $\gamma = \xi_t + c(\xi_x - \tau_t) - c^2 \tau_x$ и $\eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t)$ удовлетворяют соотношению

$$\gamma_t + c\gamma_x + F\gamma_c - F(\tau_t + c\tau_x) = \tau F_t + \xi F_x + \gamma F_c. \quad (6)$$

Замены переменных

$$\bar{t} = \varphi(t, x), \quad \bar{x} = \psi(t, x), \quad \bar{c} = \frac{\psi_t + c\psi_x}{\varphi_t + c\varphi_x},$$

$$\bar{f} = f \frac{(\varphi_t + c\varphi_x)^3}{(\psi_x\varphi_t - \varphi_x\psi_t)^2},$$

$$\bar{F} = F \frac{\psi_x\varphi_t - \varphi_x\psi_t}{(\varphi_t + c\varphi_x)^3} + \frac{1}{\varphi_t + c\varphi_x} \left[\left(\frac{\psi_t + c\psi_x}{\varphi_t + c\varphi_x} \right)_t + c \left(\frac{\psi_t + c\psi_x}{\varphi_t + c\varphi_x} \right)_x \right]$$

Решение классифицирующего уравнения

Теорема 5. *Нетривиальные алгебры симметрий имеют уравнения $(1')$ с функциями $F(t, x, c)$ классов, представители которых перечислены ниже. Каждый класс получается как орбита группы диффеоморфизмов в пространстве переменных (t, x) . В каждом случае предполагается, что функция F не лежит в предыдущем классе*

$F = 0$	$\partial_t, \partial_x, t\partial_t, x\partial_x, x\partial_t, t\partial_x, t^2\partial_t + tx\partial_x, tx\partial_t + x^2\partial_x$
---------	--

$F = A \exp \int \frac{(3c+a)dc}{c^2+bc+d}$	$\partial_t, \partial_x, (x + (a - b)t)\partial_t + ((a - 2b)x - dt)\partial_x$
$F = Ax^{-3}$	$\partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + tx\partial_x$
$F = A \left(1 - \frac{(t-ac)^2}{t^2-2ax}\right)^{\frac{3}{2}}$	$a\partial_t + t\partial_x, t\partial_t + 2x\partial_x, (t^2 - ax)\partial_t + tx\partial_x$
$F = A \left(\frac{(x-ct)^2+c^2+1}{x^2+t^2+1}\right)^{\frac{3}{2}}$	$(t^2 + 1)\partial_t + tx\partial_x, tx\partial_t + (x^2 + 1)\partial_x, x\partial_t - t\partial_x$

$F = F(c)$	∂_t, ∂_x
$F = T(c)/t$	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x$
$F = F(t, c)$	∂_x

Группа симметрий и группа эквивалентности уравнения Больцмана $F = F(t, x, c, f)$

$$f_t + cf_x + (F(t, x, c, f)f)_c = 0 \quad (1'')$$

- **Теорема 3_f**

Алгебра Ли группы эквивалентности уравнения (1''), сохраняющей соотношения (3), (4) и форму (5), имеет вид $\Xi = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \gamma \partial_c + \eta \partial_f + \phi \partial_F$, где $\tau = \tau(t, x)$ и $\xi = \xi(t, x)$ – произвольные функции, $\gamma = \xi_t + c\xi_x - c\tau_t - c^2\tau_x$, $\eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t)$, $\phi = \gamma_t + c\gamma_x + F(\xi_x - 2\tau_t - 3c\tau_x)$.

- **Теорема 4_f**

Алгебра Ли группы симметрий уравнения (1''), сохраняющей соотношения (3), (4) и форму (5), имеет вид $\Xi = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \gamma \partial_c + \eta \partial_f$, где функции $\tau = \tau(t, x)$, $\xi = \xi(t, x)$, $\gamma = \xi_t + c\xi_x - c\tau_t - c^2\tau_x$ и $\eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t)$ удовлетворяют соотношению

$$\gamma_t + c\gamma_x + F(\gamma_c - \tau_t - c\tau_x) = \tau F_t + \xi F_x + \gamma F_c + \eta F_f. \quad (6_f)$$

Группа симметрий $\rightarrow$ действие на моментные величины.

Лемма 1. Действие алгебры $\Xi = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f$,
где $\tau = \tau(t, x)$, $\xi = \xi(t, x)$, $\gamma = \xi_t + c\xi_x - c\tau_t - c^2\tau_x$ и
 $\eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t)$ на моментные величины

$$j^{[i]} = \int_{\mathbb{R}} c^i f(t, x, c) dc$$

определяется следующей формулой

$$\Xi j^{[i]} = (1 - i)\tau_x j^{[i+1]} + ((i - 1)\xi_x - i\tau_t)j^{[i]} + i\xi_t j^{[i-1]}.$$

Действие на моментные величины $\rightarrow$ инварианты.

В случае $F = 0$, моментные величины удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$j_t^{[n]} + j_x^{[n+1]} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Восьмимерная алгебра симметрий уравнения (1') при $F = 0$ является алгеброй симметрий системы уравнений (7).

Задача состоит в нахождении инвариантов $I = I(t, x, j^{[n]})$ тех групп симметрий, которые были найдены в теореме 5.

Инварианты алгебры симметрий в случае $F = 0$

Алгебра симметрий уравнения $(1')$ с $F = 0$

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t, \quad x\partial_x, \quad x\partial_t, \quad t\partial_x, \quad t^2\partial_t + tx\partial_x, \quad tx\partial_t + x^2\partial_x.$$

Инвариант $I = I(t, x, \{j^{[n]}\}_0^\infty)$ удовлетворяет уравнениям:

$$I_t = 0, \quad I_x = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} j^{[n]} I_{j^{[n]}} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n j^{[n]} I_{j^{[n]}} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n j^{[n-1]} I_{j^{[n]}} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1-n) j^{[n+1]} I_{j^{[n]}} = 0.$$

Для замыкания нужен инвариант $I(t, x, j^{[1]}, \dots, j^{[N]})$.

Но $j_{[n+1]}$ явно присутствует в коэффициенте при $I_{j^{[n]}}$!

Теорема. *Для группы симметрий уравнения $(1')$ с $F = 0$ нетривиальных конечных инвариантов от моментных величин нет.*

Инварианты для остальных групп

Теорема 6. Для всех трехмерных алгебр симметрий II.1–II.4 уравнения (1') конечные инварианты существуют. Базисы инвариантов приведены в таблице.

$F(t, x, c)$	Базис алгебры	Базис инвариантов
Ac^λ	$\Xi_1 = \partial_t, \quad \Xi_2 = \partial_x,$ $\Xi_3 = (\lambda - 1)t\partial_t +$ $\quad + (\lambda - 2)x\partial_x$	$j^{[n]}(j^{[0]})^{-\frac{n+\lambda-2}{\lambda-2}}, \quad n \geq 1$
Ae^c	$\Xi_1 = \partial_t, \quad \Xi_2 = \partial_x,$ $\Xi_3 = t\partial_t + (x - t)\partial_x,$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{j^{[n-k]}}{j^{[0]}} (\ln j^{[0]})^k,$ $n \geq 1$
$A(c^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \times$ $\quad \times e^{\lambda \operatorname{arctg} c}$	$\Xi_1 = \partial_t, \quad \Xi_2 = \partial_x,$ $\Xi_3 = (x + \lambda t)\partial_t +$ $\quad + (\lambda x - t)\partial_x$	$\sqrt{(j^{[0]})^2 + (j^{[1]})^2} e^{-\lambda \operatorname{arctg} \frac{j^{[1]}}{j^{[0]}}}$

Инварианты для трехмерных групп симметрий

$F(t, x, c)$	Базис алгебры	Базис инвариантов
A/x^3	$\Xi_1 = \partial_t,$ $\Xi_2 = 2t\partial_t + x\partial_x,$ $\Xi_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x$	$xj^{[0]},$ $x^{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left(\frac{j^{[1]}}{j^{[0]}} \right)^k j^{[n-k]}$ $n \geq 2$
$\frac{A\lambda(c^2+\lambda)^{3/2}+c(c^2+\lambda)}{\lambda t}$	$\Xi_1 = \partial_x,$ $\Xi_2 = t\partial_t + x\partial_x,$ $\Xi_3 = 2tx\partial_t + (x^2 - \lambda t^2)\partial_x$	$t^2[(j^{[1]})^2 + \lambda(j^{[0]})^2]$
$A \left(\frac{(x-ct)^2+c^2+1}{t^2+x^2+1} \right)^{\frac{3}{2}}$	$\Xi_1 = (t^2 + 1)\partial_t + tx\partial_x,$ $\Xi_2 = tx\partial_t + (x^2 + 1)\partial_x,$ $\Xi_3 = -x\partial_t + t\partial_x.$	$(t^2+x^2+1)[(j^{[0]})^2(x^2+1) -$ $-2j^{[0]}j^{[1]}tx + (j^{[1]})^2(t^2+1)]$

Дифференциальные инварианты

Дифференциальный инвариант (первого порядка) – функция $I = I\left(t, x, \{j^{[k]}\}_0^\infty, \{j_t^{[k]}\}_0^\infty, \{j_x^{[k]}\}_0^\infty\right)$.

Действие оператора

$$\Xi j^{[i]} = (1 - i)\tau_x j^{[i+1]} + ((i - 1)\xi_x - i\tau_t)j^{[i]} + i\xi_t j^{[i-1]}$$

продолжается на производные, но при этом всегда оказывается, что

$$\Xi(D^\alpha j^{[i]}) = (1 - i)\tau_x(D^\alpha j^{[i+1]}) + \dots,$$

а это и есть коэффициент при $I_{D^\alpha j^{[i]}}$ в уравнении. Поэтому конечные инварианты, вообще говоря, возможны только относительно $j^{[0]}$ и $j^{[1]}$.

Лемма 2. *Единственный конечный дифференциальный инвариант первого порядка для восьмимерной алгебры имеет вид*

$$I = I \left(\frac{(j^{[1]})^2 j_x^{[0]} - j^{[0]} j^{[1]} j_x^{[1]} + j^{[0]} j^{[1]} j_t^{[0]} - (j^{[0]})^2 j_t^{[1]}}{(j_t^{[0]} + j_x^{[1]})^2} \right).$$

Но $j_t^{[0]} + j_x^{[1]} = 0$ – это первое уравнение моментной системы.

Следствие. Единственным конечным инвариантным соотношением, содержащим производные первого порядка от моментных величин, является соотношение

$$(j^{[1]})^2 j_x^{[0]} - j^{[0]} j^{[1]} j_x^{[1]} + j^{[0]} j^{[1]} j_t^{[0]} - (j^{[0]})^2 j_t^{[1]} = 0.$$

Если обозначить $u = j^{[1]}/j^{[0]}$, $\rho = j^{[0]}$, то это соотношение превращается в уравнение Хопфа, и вместе с 1-м уравнением моментной системы образуют систему

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0, \quad u_t + uu_x = 0. \quad (8)$$

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0, \quad u_t + uu_x = 0. \quad (8)$$

В силу введенных обозначений $j^{[0]} = \rho$, $j^{[1]} = u\rho$.

Оказывается, что все моментные функции можно явно выразить через ρ и u , используя остальные моментные уравнения как рекуррентные формулы: $j_x^{[n+1]} = -j_t^{[n]}$.

Лемма 3. Если (ρ, u) – решение (8), то все моментные величины выражаются явными формулами

$$j^{[n]} = u^n \rho + (-1)^{n-2} \phi_1^{(n-2)}(t) \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots - \phi'_{n-2}(t)x + \phi_{n-1}(t),$$

где $\phi_i(t)$ – произвольные функции, а $\phi_i^{(k)}(t)$ – их k -ые производные.

Теорема 7. Проблема моментов для $j^{[n]} = \rho u^n$ имеет решение в виде δ – образного распределения

$$f(t, x, c) = \rho_0(x - ct)\delta(c - u_0(x - ct)),$$

где $\rho_0(x)$ и $u_0(x)$ – начальные условия для решений $\rho(t, x)$ и $u(t, x)$ системы (8). При этом $u(t, x)$ определяется из неявного соотношения

$$u(t, x) - u_0(x - tu(t, x)) = 0,$$

что эквивалентно второму уравнению системы (8), а

$$\rho(t, x) = \frac{\rho_0(x - tu(t, x))}{1 + tu'_0(x - tu(t, x))}.$$

- Для одномерного уравнения схема реализуема.
- При этом получается ряд замыканий, одно из них – классическая система Хопфа.
- При этом по решению системы Хопфа восстанавливаются все моментные функции.
- При этом восстанавливается соответствующее распределение – решение кинетического уравнения.
- Замыкания связывают, как правило, только плотность и скорость, то есть задают определенные *течения*.
- При этом силовое поле непосредственного влияния на соответствующее течение не оказывает.
- Его влияние проявляется только при рекуррентном вычислении старших моментов (прежде всего – энергии).

1. Платонова К. С. Групповой анализ уравнения Больцмана. I. Группы симметрий //ДУ, 2017, №4, С. 538-546.
2. Платонова К. С. Групповой анализ уравнения Больцмана. II. Группы эквивалентности и группы симметрий в специальном случае //ДУ, 2017, №6, С. 801-813.
3. Платонова К. С., Боровских А. В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Условия сохранения физического смысла моментных величин //ТМФ. – 2018. – Т. 195. – №. 3. – С. 452-483.
4. Боровских А. В., Платонова К. С., Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. IV. Полная групповая классификация в общем случае //ТМФ. – 2019. – Т. 201. – №. 2. – С. 232-265.
5. Платонова К. С., Боровских А.В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. VI. Инварианты и проблема замыкания моментной системы //ТМФ. – 2021. Принято к печати.

Спасибо за внимание!

Решение уравнения (6_f)

Теорема 5_f. Нетривиальные алгебры, удовлетворяющие (6), имеются для функций $F(t, x, c, f)$ классов (с точностью до преобразований из группы эквивалентности), представители которых приведены ниже. В каждом случае предполагается, что функция F не лежит в предыдущем классе и что $F_f \neq 0$.

I. Алгебра 5-мерна для $F = Af^{-1}$;

II. Алгебра 4-мерна для

$$F = Af^j,$$

$$F = A(c^2 \pm 1)^3 f,$$

$$F = Af^{-2}x^{-3},$$

$$F = A(t^2 \pm 1)^{-3/2} f^{-1/2},$$

$$F = A \ln |f| + B,$$

$A \neq 0$ и B – константы;

Решение уравнения (6_f)

III. Алгебра 3-мерна для

$$F = \left(\frac{(x-ct)^2 + 1 + c^2}{1+x^2+t^2} \right)^{\frac{3}{2}} G \left([(x-ct)^2 + 1 + c^2]^{\frac{3}{2}} f \right),$$

$$F = \left(1 \pm \frac{(c \mp t)^2}{2x \mp t^2} \right)^{\frac{3}{2}} G \left([2x \mp t^2 \pm (c \mp t)^2]^{\frac{3}{2}} f \right),$$

$$F = x^{-3} G(f), \quad F = (c^2 + k)^{\frac{3}{2}} G((c^2 + k)^{\frac{3}{2}} f),$$

$$F = c^m G(c^{3-m} f), \quad F = e^{mc} G(e^{-mc} f),$$

$$F = G(f), \quad F = G(c)f, \quad F = G(t)f^{-\frac{1}{2}},$$

$$F = t^{k-2} G(t^{2k-1} f), \quad F = e^{kt} G(e^{2kt} f),$$

$$F = (t^2 \pm k^2)^{-\frac{3}{2}} e^{\lambda h(t)} G(f e^{2\lambda h(t)}) \quad (h(t) = \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2})$$

IV. Алгебра 2-мерна для

$$F = \Psi(c, f), \quad F = \Psi(t, f), \quad F = t^{-1} \Psi(c, tf), \quad F = c \Psi(t, c^2 f),$$

$$\text{и одномерна для } F = \Phi(t, c, f), \quad F = \Phi(x, c, f).$$