Комплексная геометрия момент-угол-многообразий

на основе совместных работ с
H. Ishida, Р. Крутовским, Ю. Устиновским и М. Вербицким

Т. Е. Панов

механико-математический факультет МГУ

Алгебраические группы: сезон белых ночей
Санкт-Петербург, 12–16 июля 2021 г.

Симплектическая редукция и момент-угол-многообразия

Покоординатное действие m-тора T^m на $\mathbb{C}^m$ гамильтоново по отношению к $\omega = i\sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\bar{z}_k$ с отображением моментов

$$\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m = \mathrm{Lie}(T^m)^*, \qquad (z_1,\ldots,z_m) \mapsto (|z_1|^2,\ldots,|z_m|^2).$$

Гамильтоново торическое многообразие M^{2n} есть симплектический фактор $\mathbb{C}^m/\!/K$ по действию $(m-n)$-мерного подтора $K\subset T^m$. На нём имеется гамильтоново действие тора $T^m/K \cong T^n$.

Отображение моментов для действия K на $\mathbb{C}^m$ задаётся композицией

$$\mu_K\colon \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^m \to \mathfrak{k}^*.$$

Выберем регулярное значение $\delta\in\mathfrak{k}^*\cong\mathbb{R}^{m-n}$. Тогда $M^{2n} = \mu_K^{-1}(\delta)/K$. На M есть симплектическая форма ω', удовлетворяющая условию $p^*\omega' = i^*\omega$, где $p\colon \mu_K^{-1}(\delta)\to M^{2n}$ и $i\colon \mu_K^{-1}(\delta)\hookrightarrow \mathbb{C}^m$.

$\mathcal{Z} := \mu_K^{-1}(\delta)$ — момент-угол-многообразие (moment-angle manifold).

Его можно задать как пересечение $(m-n)$ эрмитовых квадрик в $\mathbb{C}^m$:

$$\mathcal{Z} = \Big\{(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m \colon \sum_{k=1}^m \gamma_{jk}|z_k|^2 = \delta_j, \qquad j = 1,\ldots,m-n\Big\}.$$

Факторпространство $\mathcal{Z}/T^m = M^{2n}/T^n$ — выпуклый многогранник в $\mathrm{Lie}(T^n)^* \subset \mathbb{R}^m$ (многогранник моментов), заданный как

$$P = \Big\{(y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m_{\geqslant} \colon \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} y_k = \delta_j, \qquad j = 1,\ldots,m-n\Big\}.$$

Его нормали к гиперграням $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ — набор векторов, двойственный по Гейлу к $\gamma_1,\ldots,\gamma_m \in \mathfrak{k}^*$. Нормали удовлетворяют условию Дельзана: если гиперграни $F_{i_1},\ldots,F_{i_n}$ пересекаются в вершине, то $\{\boldsymbol{a}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{i_n}\}$ — базис решётки.

Момент-угол-комплекс (полиэдральное произведение)

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$
$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}$ – симплекс; всегда $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим m-единичный полидиск:

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leqslant 1 \text{ при } i = 1, \ldots, m\}.$$

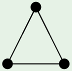
Момент-угол-комплекс

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} \mathbb{D} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{S} \Bigr) \subset \mathbb{D}^m,$$

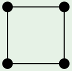
где $\mathbb{S}$ — граница единичного диска $\mathbb{D}$.

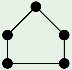
На $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ действует тор T^m.
Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение сферы (например, граница симплициального многогранника), то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — топологическое многообразие, момент-угол-многообразие.

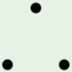
Пример

1. $\mathcal{K} =$  (граница треугольника). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\mathbb{S})\cup(\mathbb{D}\times\mathbb{S}\times\mathbb{D})\cup(\mathbb{S}\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D}^3)\cong S^5.$$

2. $\mathcal{K} =$  (граница квадрата). Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3\times S^3$.

3. $\mathcal{K} =$  Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong (S^3\times S^4)\,\#\cdots\#(S^3\times S^4)$ (5 экземпляров).

4. $\mathcal{K} =$  (три точки). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}\times\mathbb{S}\times\mathbb{S})\cup(\mathbb{S}\times\mathbb{D}\times\mathbb{S})\cup(\mathbb{S}\times\mathbb{S}\times\mathbb{D}) \simeq S^3\vee S^3\vee S^3\vee S^4\vee S^4$$

(не многообразие).

Аналогично определим открытое подмногообразие $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$:

$$U(\mathcal{K}) := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} \mathbb{C} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{C}^\times \Big), \qquad \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда $U(\mathcal{K})$ — торическое многообразие, соответствующее вееру

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \{\mathbb{R}_{\geqslant}\langle \boldsymbol{e}_i \colon i \in I\rangle \colon I \in \mathcal{K}\},$$

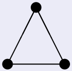
где $\boldsymbol{e}_i$ обозначает i-й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^m$.

Теорема

а) $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup\limits_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$

(дополнение набора координатных подпространств);

б) *Существует деформационная ретракция* $U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Например, $\mathcal{K} =$  $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} \xrightarrow{\simeq} S^5 = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Комплексные структуры на момент-угол-многообразиях

Общий подход: реализовать деформационную ретракцию $U(\mathcal{K}) \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ как проекцию на пространство орбит голоморфного, свободного и собственного действия комплексно-аналитической подгруппы $H \subset (\mathbb{C}^{\times})^m$, т. е. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/H$. Тем самым $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ наделяется структурой комплексного многообразия.

Пусть $\mathcal{K}$ — триангуляция сферы, т. е. $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$.
$|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^n$ называется звёздчатой триангуляцией сферы, если существует такая точка $\boldsymbol{x} \notin |\mathcal{K}|$, что любой луч из $\boldsymbol{x}$ пересекает $|\mathcal{K}|$ в единственной точке.

Выпуклая триангуляция $\mathcal{K}_P$ является звёздчатой, но не наоборот!

$\mathcal{K}$ является звёздчатой триангуляцией сферы тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ происходит из полного симплициального веера Σ.

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ — образующие 1-мерных конусов веера Σ.

$$q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i.$$

Положим $\mathbb{R}^m_> = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i > 0\}$ и определим

$$R := \exp(\operatorname{Ker} q) = \Bigl\{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m_> \colon \prod_{i=1}^m y_i^{\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u}\rangle} = 1 \text{ для всех } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\Bigr\},$$

$R \subset \mathbb{R}^m_>$ действует на $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ покоординатно.

Теорема

Пусть Σ — полный симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ с m одномерными конусами, и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ соответствующий симплициальный комплекс. Тогда

а) *$R \cong \mathbb{R}^{m-n}$ действует на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно, так что $U(\mathcal{K})/R$ является гладким $(m+n)$-мерным многообразием;*

б) *$U(\mathcal{K})/R$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (T^m-эквивариантно).*

Предположим, что $m - n$ чётно. Положим $\ell = \frac{m-n}{2}$.

Выберем линейное $\psi\colon \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{C}^m$, удовлетворяющее двум условиям:

а) $\mathrm{Re} \circ \psi\colon \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{R}^m$ инъективно;

б) $q \circ \mathrm{Re} \circ \psi = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^\ell \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{C}^m \arrow[r, "\mathrm{Re}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\exp"] \\
 & (\mathbb{C}^\times)^m \arrow[r, "|\cdot|"] & \mathbb{R}^m_> \arrow[r, "\exp q"] & \mathbb{R}^n_>
\end{tikzcd}$$

Теперь положим

$$H = \exp \psi(\mathbb{C}^\ell) = \bigl\{ \bigl(e^{\langle \psi_1, \boldsymbol{w} \rangle}, \ldots, e^{\langle \psi_m, \boldsymbol{w} \rangle}\bigr) \in (\mathbb{C}^\times)^m \bigr\},$$

где $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$.

Тогда $H \cong \mathbb{C}^\ell$ — комплексно-аналитическая (но не алгебраическая) подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m$. Она действует на $U(\mathcal{K})$ голоморфно.

Пример (голоморфные торы)

Пусть $\mathcal{K}$ — пустой комплекс на 2 элементах (две призрачные вершины). Имеем $n = 0$, $m = 2$, $\ell = 1$, и $q\colon \mathbb{R}^2 \to 0$ — нулевое отображение.

Пусть $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ задано как $z \mapsto (z, \alpha z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

$$H = \{(e^z, e^{\alpha z})\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Условие б) выше пустое, а условие а) эквивалентно $\alpha \notin \mathbb{R}$. Тогда $\exp\psi\colon H \to (\mathbb{C}^\times)^2$ — вложение и $(\mathbb{C}^\times)^2/H$ есть комплексный тор $T^1_{\mathbb{C}}$ с параметром $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(\mathbb{C}^\times)^2/H \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z}) = T^1_{\mathbb{C}}(\alpha).$$

Аналогично, если $\mathcal{K}$ — пустой комплекс на 2ℓ элементах (т. е. $n = 0$, $m = 2\ell$), то любой комплексный тор $T^\ell_{\mathbb{C}}$ представляется как фактормногообразие $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}/H$.

Теорема (П.–Устиновский)

Пусть Σ — полный симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ с m одномерными конусами, и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ соответствующий симплициальный комплекс. Предположим, что $m - n = 2\ell$. Тогда

а) *голоморфное действие группы $H \cong \mathbb{C}^\ell$ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно, тем самым на факторпространстве $U(\mathcal{K})/H$ задаётся структура компактного комплексного многообразия размерности $(m - \ell)$;*

б) *имеется T^m-эквивариантный диффеоморфизм $U(\mathcal{K})/H \cong \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, задающий комплексную структуру на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, в которой тор T^m действует голоморфными преобразованиями.*

Обратно, пусть $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускает T^m-инвариантную комплексную структуру. Тогда действие T^m продолжается до голоморфного действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Подгруппа глобальных стабилизаторов

$$H = \{g \in (\mathbb{C}^\times)^m \colon g \cdot x = x \text{ для всех } x \in \mathcal{Z}_\mathcal{K}\}.$$

$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ — комплексное подпространство в $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}^\times)^m = \mathbb{C}^m$, причём

а) $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mathrm{Re}} \mathbb{R}^m$ инъективно;

б) $q \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m / \mathrm{Re}(\mathfrak{h})$ переводит координатный веер $\Sigma_\mathcal{K}$ в полный веер $q(\Sigma_\mathcal{K})$ в $\mathbb{R}^m / \mathrm{Re}(\mathfrak{h})$.

Теорема (Исида)

Любое комплексное момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ биголоморфно фактормногообразию $U(\mathcal{K})/H$.

Итак, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускает комплексную структуру $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ происходит из полного симплициального веера (т. е. является звёздчатой сферой).

Пример (многообразия Хопфа)

Σ — полный веер в $\mathbb{R}^n$, конусы которого порождены собственными подмножествами векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_1 - \ldots - \boldsymbol{e}_n$.

Добавим 'пустой' 1-конус, чтобы $m-n$ стало чётным: $m = n+2$, $\ell = 1$. Тогда $q\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ задаётся матрицей $(\mathbf{0}\ E\ -\mathbf{1})$, где E — единичная $n \times n$-матрица, а $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ — столбцы из нулей и единиц.

Тогда $\mathcal{K} = \partial\Delta^n$ с $n+1$ вершинами и 1 призрачной вершиной, $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong S^1 \times S^{2n+1}$ и $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Положим $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+2}$, $z \mapsto (z, \alpha z, \ldots, \alpha z)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда

$$H = \bigl\{(e^z, e^{\alpha z}, \ldots, e^{\alpha z})\colon z \in \mathbb{C}\bigr\} \subset (\mathbb{C}^\times)^{n+2},$$

и $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ приобретает комплексную структуру как фактор $U(\mathcal{K})/H$:

$$\mathbb{C}^\times \times \bigl(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\bigr) / \ \{(t, \boldsymbol{w}) \sim (e^z t, e^{\alpha z} \boldsymbol{w})\} \cong \bigl(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\bigr) / \ \{\boldsymbol{w} \sim e^{2\pi i \alpha} \boldsymbol{w}\},$$

где $t \in \mathbb{C}^\times$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Это — многообразие Хопфа.

Голоморфное слоение на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Определим подалгебру Ли и соответствующую подгруппу Ли

$$\mathfrak{k} = \mathrm{Re}(\mathfrak{h}) \subset \mathbb{R}^m = \mathrm{Lie}(T^m), \qquad K = \exp(\mathfrak{k}) \subset T^m.$$

Действие $K \subset T^m$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = U(\mathcal{K})/H$ почти свободно. Получаем *голоморфное* слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ орбитами действия $K \cong K_\mathbb{C}/H$.

Если подпространство $\mathfrak{k} \subset \mathbb{R}^m$ рационально, то K является подтором в T^m, и полный симплициальный веер $\Sigma := q(\Sigma_\mathcal{K})$ является рациональным. Рациональный веер Σ определяет торическое многообразие

$$V_\Sigma = \mathcal{Z}_\mathcal{K}/K = U(\mathcal{K})/K_\mathbb{C}.$$

Голоморфное слоение на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ орбитами действия K превращатеся в голоморфное расслоение Зейферта над торическим орбиобразием V_Σ со слоем компактный комплексный тор $K_\mathbb{C}/H \cong T^{m-n}$.

Рациональный случай:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m \supset & U(\mathcal{K}) \arrow[dd, "K_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}"'] \arrow[dr, "H \cong \mathbb{C}^\ell"] & & \\
& & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[dl, "K_{\mathbb{C}}/H \cong T^{m-n}"] & \text{м-у-многообразие} \\
\text{торическое многообразие} & V_\Sigma & &
\end{tikzcd}
$$

Иррациональный случай:

Имеем $U(\mathcal{K}) \xrightarrow{H} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$,

и голоморфное слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ орбитами действия $K \subset T^m$.

Голоморфное слоение $(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}, \mathcal{F})$ моделирует иррациональные («некоммутативные») торические многообразия в смысле [Katzarkov, Lupercio, Meersseman, Verjovsky] (arXiv:1308.2774) and [Ratiu, Zung] (arXiv:1705.11110).

Когомологии де Рама и Дольбо

Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера)

$$\mathbb{C}[\mathcal{K}] := \mathbb{C}[v_1, ..., v_m]/I_{\mathcal{K}} = \mathbb{C}[v_1, ..., v_m]/(v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}),$$

где $\mathbb{C}[v_1, ..., v_m]$ — алгебра многочленов, $\deg v_i = 2$, а $I_{\mathcal{K}}$ — идеал Стенли–Райснера.

Предложение

Кольцо T^m-эквивариантных когомологий

$$H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H^*_{T^m}(U(\mathcal{K})) \cong \mathbb{C}[\mathcal{K}].$$

Торическое многообразие V_Σ является кэлеровым (эквивалентно, проективным или симплектическим) $\Leftrightarrow$ веер Σ является нормальным веером неособого простого многогранника с вершинами в решётке.

Теорема (Данилов)

Кольцо когомологий Дольбо многообразия V_Σ есть

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(V_\Sigma) \cong \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]/(I_\mathcal{K} + J_\Sigma),$$

где $v_i \in H^{1,1}_{\bar\partial}(V_\Sigma)$, $\quad I_\mathcal{K}$ — идеал Стенли–Райснера,
J_Σ — идеал, порождённый линейными формами $\sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{u}\rangle v_k$,
$\boldsymbol{a}_k = q(\boldsymbol{e}_k)$ — образующие 1-мерных конусов Σ, $\quad \boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^m/\mathfrak{k})^*$.

Ненулевые числа Ходжа суть $h^{p,p}(V_\Sigma) = h_p$,
где $h(\Sigma) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ — h-вектор веера Σ.

Теорема (Бухштабер–П.)

Кольцо когомологий де Рама момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ есть

$$\begin{aligned}
H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{C}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{C}[\mathcal{K}],\mathbb{C})\\
&\cong H\bigl(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{C}[\mathcal{K}],d\bigr) \qquad du_i=v_i,\ dv_i=0\\
&\cong H\bigl(\Lambda[t_1,\ldots,t_{m-n}]\otimes H^*(V_\Sigma),d\bigr) \qquad \Lambda[t_1,\ldots,t_{m-n}]=H^*(K)\\
&\cong \bigoplus_{I\subset[m]}\widetilde{H}^{*-|I|-1}(\mathcal{K}_I).
\end{aligned}$$

Теорема (П.-Устиновский)

Пусть Σ — рациональный веер, $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \xrightarrow{K} V_\Sigma$ — голоморфное расслоение на торы. Тогда кольцо когомологий Дольбо многообразия $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ есть

$$H_{\bar\partial}^{*,*}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H\bigl(\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] \otimes H_{\bar\partial}^{*,*}(V_\Sigma), d\bigr),$$

где $\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] = H_{\bar\partial}^{*,*}(K)$, $\xi_j \in H_{\bar\partial}^{1,0}(K)$, $\eta_j \in H_{\bar\partial}^{0,1}(K)$,
$dv_j = d\eta_j = 0$, $d\xi_j = c(\xi_j)$,
$c\colon H_{\bar\partial}^{1,0}(K) \to H_{\bar\partial}^{1,1}(V_\Sigma)$ *— отображение первого класса Чженя.*

Следствие

а) *Спектральная последовательность Бореля голоморфного расслоения $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \xrightarrow{K} V_\Sigma$ (сходящаяся к когомологиям Дольбо многообразия $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$) вырождается в члене E_3.*

б) *Спектральная последовательность Фрёлихера (с $E_1 = H_{\bar\partial}^{*,*}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, сходящаяся к $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$) вырождается в члене E_2.*

Трансверсально кэлеровы формы и аналитические подмножества

Комплексная структура на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ задаётся двумя данными:

– полным симплициальным веером Σ с образующими $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$;

– ℓ-мерной голоморфной подгруппой $H \subset (\mathbb{C}^\times)^m$.

Если эти данные *общего положения* (в частности, веер Σ не является рациональным), то нет голоморфного главного расслоения $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to V_\Sigma$ над торическим многообразием V_Σ.

Вместо этого имеется ℓ-мерное *слоение* $\mathcal{F}$, которое может допускать трансверсально кэлерову форму $\omega_\mathcal{F}$. Эту форму можно использовать для описания подмногообразий и аналитических подмножеств в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

$(1,1)$-форма $\omega_{\mathcal{F}}$ на комплексном многообразии $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ трансверсально кэлерова по отношению к слоению $\mathcal{F}$, если

а) $\omega_{\mathcal{F}}$ замкнута, т. е. $d\omega_{\mathcal{F}} = 0$;

б) $\omega_{\mathcal{F}}$ неотрицательна, и её нулевые подпространства совпадают с касательными к слоению $\mathcal{F}$.

Полный симплициальный веер Σ в $\mathbb{R}^n$ слабо нормален, если существует (необязательно простой) n-мерный многогранник P, такой что Σ симплициальным подразбиением его нормального веера Σ_P.

Теорема (Вербицкий–П.–Устиновский)

Пусть Σ — слабо нормальный веер. Тогда на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/H$ существует точная $(1,1)$-форма $\omega_{\mathcal{F}}$, которая трансверсально кэлерова для слоения $\mathcal{F}$ на плотном открытом подмножестве $(\mathbb{C}^{\times})^m/H \subset U(\mathcal{K})/H$.

Если трансверсально кэлерова форма существует *на всём* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, то Σ является нормальным веером простого многогранника [Исида], а $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ задаётся пересечением эрмитовых квадрик.

Для каждого $J \subset [m]$ определено координатное подмногообразие в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J} = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{Z}_\mathcal{K} \colon z_i = 0 \quad \text{при } i \notin J\}.$$

Замыкание любой $(\mathbb{C}^\times)^m$-орбиты в $U(\mathcal{K})$ имеет вид $U(\mathcal{K}_J)$ (в частности, плотная орбита соответствует $J = [m]$). Аналогично, замыкание любой $(\mathbb{C}^\times)^m/H$-орбиты в $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong U(\mathcal{K})/H$ имеет вид $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$.

Теорема (Вербицкий–П.–Устиновский)

Предположим, что комплексная структура на $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = U(\mathcal{K})/C$ задаётся данными общего положения. Тогда любой дивизор на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является объединением координатных дивизоров.

Если веер Σ является слабо нормальным, то любое компактное неприводимое аналитическое подмножество $Y \subset \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ положительной размерности является координатным подмногообразием.

Следствие

В общем положении на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ нет непостоянных мероморфных функций (т. е. его алгебраическая размерность равна нулю).

Базисные когомологии

M — многообразие с действием связной группы Ли G, $\quad \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.

$$\Omega(M)_{\mathrm{bas},\, G} = \{\omega \in \Omega(M)\colon \iota_\xi \omega = L_\xi \omega = 0 \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{g}\},$$

$H^*_{\mathrm{bas},\, G}(M) = H(\Omega(M)_{\mathrm{bas},\, G}, d)$ — базисные когомологии M.

$S(\mathfrak{g}^*)$ — симметрическая алгебра на $\mathfrak{g}^*$ с образующими степени 2.
Модель Картана

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)) = ((S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}}, d_{\mathfrak{g}}),$$

где $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}}$ обозначает подалгебру $\mathfrak{g}$-инвариантов.
Элемент $\omega \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ есть «$\mathfrak{g}$-эквиварианиное полиномиальное отображение из $\mathfrak{g}$ в $\Omega(M)$». Дифференциал $d_{\mathfrak{g}}$ задаётся как

$$d_{\mathfrak{g}}(\omega)(\xi) = d(\omega(\xi)) - \iota_\xi(\omega(\xi)).$$

Теорема

$$H^*_{\mathrm{bas},\,G}(M) \cong H\bigl(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)), d_{\mathfrak{g}}\bigr).$$

Если группа G компактна, то

$H^*_{\mathrm{bas},\,G}(M) \cong H^*_G(M) = H^*(EG \times_G M)$ (эквивариантные когомологии).

Рассмотрим $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с действием K (голоморфное слоение $\mathcal{F}$).

Теорема (Исида–Крутовский–П.)

Имеем изоморфизм алгебр:

$$H^*_{\mathrm{bas},\,K}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]/(I_\mathcal{K} + J_\Sigma),$$

где $I_\mathcal{K}$ — идеал Стенли–Райснера, порождённый мономами

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \quad \text{где } \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K},$$

а J_Σ — идеал, порождённый линейными формами

$$\sum_{i=1}^m \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u} \rangle v_i, \quad \text{где } \boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^m/\mathfrak{k})^*.$$

Если K замкнута (тор), т. е. веер Σ рационален, имеем

$$H^*_{\mathrm{bas},\,K}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}/K) = H^*(V_\Sigma)$$

и теорема сводится к известному описанию когомологий полных неособых торических многообразий [Данилов–Юркевич].

Идея доказательства теоремы.

Положим $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T^m) \cong \mathbb{R}^m$ и рассмотрим модель Картана

$$\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K})) = \big((S(\mathfrak{t}^*) \otimes \Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))^{T^m}, d_\mathfrak{t}\big).$$

Тогда

$$H(\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))) = H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/I_\mathcal{K}.$$

Ключевая лемма: д.г. алгебра $\mathcal{C}_\mathfrak{t}(\Omega(\mathcal{Z}_\mathcal{K}))$ формальна (квази-изоморфна своим когомологиям). $\square$

Ссылки

[1] Taras Panov and Yuri Ustinovsky. *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*. Moscow Math. J. 12 (2012), no. 1, 149–172.

[2] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds*. Math. Zeitschrift 284 (2016), no. 1, 309–333.

[3] Hiroaki Ishida, Roman Krutowski and Taras Panov. *Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds.* Internat. Math. Research Notices, to appear, 2021.

[4] Roman Krutowski and Taras Panov. *Dolbeault cohomology of complex manifolds with torus action.* arXiv:1908.06356.