

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, Проекционные операторы для простых групп Ли, *ТМФ*, 1971, том 8, номер 2, 255–271

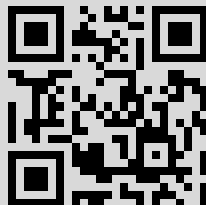
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 79.164.126.197

29 января 2022 г., 19:04:27



ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой

Решение многих задач теории ядра и теории элементарных частиц сводится к разложению приводимых представлений групп симметрии квантовомеханических систем на неприводимые составляющие. Для выполнения этого разложения необходимы проекционные операторы. В данной работе для всех простых компактных групп Ли $G(l)$ ранга l (как классических, так и особых) построены операторы, которые проектируют произвольный вектор веса $f = (f_1, f_2, \dots, f_l)$ на старший вектор неприводимого представления $D^{[f]}$ группы $G(l)$. Проекционные операторы представлены в виде рядов, составленных из степеней инфинитезимальных операторов, что делает их удобными для решения конкретных задач по разложению приводимых представлений на неприводимые составляющие. Структура проекционных операторов задается едиными для всех простых компактных групп Ли формулами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1949 г. Г. Рака [1] предложил использовать для построения волновых функций и расчета спектров сложных атомов аппарат теории представлений простых групп Ли: $O(2l+1)$, $Sp(4l+2)$ и G_2 . В дальнейшем этот подход получил широкое распространение в оболочечной модели ядра, где применялись различные группы $SU(n)$, $O(n)$, $Sp(2n)$, [2, 3, 4] и в формализме квазиспина [5, 6, 7], в котором на основе групп $O(5)$, $O(8)$ анализировались эффекты спаривания нуклонов в ядрах. Группы $O(n)$ используются в методе K -гармоник [8], различные группы Ли применяются в теории симметрии элементарных частиц [9]. Этот краткий перечень показывает, что теория представлений простых групп Ли заняла прочное место в математическом аппарате теории ядра и теории элементарных частиц. Отсюда ясно также, насколько важным для анализа различных квантовомеханических систем является вопрос о построении волновых функций с определенными свойствами симметрии по отношению к простым группам Ли.

Задача построения таких функций наиболее естественно решается с помощью проекционных операторов $P_m^{[f]}$. Здесь $[f] = [f_1, f_2, \dots, f_l]$ — старший вес неприводимого представления (НП) $D^{[f]}$ простой компактной группы Ли $G(l)$ ранга l , $m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$ — некоторый вес, принадлежащий данному представлению.

Проекционный оператор (ПО) обладает следующим основным свойством:

$$P_m^{[f]} \psi_m^{[f']} = \delta_{[f][f']} \delta_{mm'} \psi_m^{[f]} \quad (1.1)$$

или

$$P_m^{[l]} P_{m'}^{[l']} = \delta_{[l][l']} \delta_{mm'} P_m^{[l]}, \quad (1.2)$$

где $\psi_m^{[l]}$ — базисный вектор веса m , принадлежащий НП $D^{[l]}$, кроме того ПО эрмитов

$$(P_m^{[l]})^+ = P_m^{[l]}. \quad (1.3)$$

Если такой оператор действует на функцию ψ , не обладающую определенной симметрией по отношению к группе $G(l)$, т. е. не принадлежащую к определенному НП этой группы,

$$\psi = \sum_{[l'], m} C_{[l']m} \psi_m^{[l']},$$

то в результате получается функция, преобразующаяся по НП $D^{[l]}$ группы $G(l)$,

$$P_m^{[l]} \psi = \tilde{C}_{[l]m} \psi_m^{[l]}. \quad (1.4)$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что

$$\tilde{C}_{[l]m} = (\psi | P_m^{[l]} | \psi). \quad (1.5)$$

Таким образом, построение нормированных функций $\psi_m^{[l]}$ выполняется с помощью ПО следующим образом:

$$\psi_m^{[l]} = (\psi | P_m^{[l]} | \psi)^{-1/2} P_m^{[l]} \psi. \quad (1.6)$$

Для компактных групп существует интегральная форма ПО

$$P_m^{[l]} = \int D_{mm}^{[l]}(g) \hat{T}(g) dg, \quad (1.7)$$

где $D_{mm}^{[l]}(g)$ — элементы матрицы НП $D^{[l]}$ для элемента группы $g \in G(l)$, $\hat{T}(g)$ — оператор представления. Однако эта форма не очень удобна для конкретных вычислений, поскольку требует знания матриц конечных преобразований g , которые в настоящее время известны не для всех простых групп Ли. Поэтому на наш взгляд представляет большой интерес отыскание другой, инфинитезимальной формы ПО, в которой он записывается в виде ряда, составленного из степеней инфинитезимальных операторов (генераторов) группы $G(l)$. Такая форма ПО была найдена в работах [10, 11, 12] для групп $SU(2)$ и $O(3)$. В дальнейшем эта задача была решена нами для группы $SU(3)$ [13, 14] и ее результаты были обобщены на все классические группы $U(n)$, $O(n)$, $Sp(2n)$ [15, 16]. В данной работе получена инфинитезимальная форма ПО для всех простых компактных групп Ли (как классических, так и особых), и показано, что структура ПО описывается едиными для всех этих групп формулами.

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Необходимые сведения о простых группах Ли и их представлениях можно найти в литературе, как с математической, так и в физической [17—20].

Пусть $G(l)$ — простая компактная группа Ли ранга l , Σ — система корней α группы $G(l)$, $\Sigma^+ \subset \Sigma$ — система положительных корней; D — конечномерное представление группы $G(l)$, реализованное в пространстве R .

Инфинитезимальные операторы представления $E_{-\alpha}, E_{\alpha}, H_i (\alpha \in \Sigma^+)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям Картана — Вейля:

$$\begin{aligned} [H_i, H_k] &= 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, l, \\ [H_i, E_{\alpha}] &= \alpha_i E_{\alpha}, \\ [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] &= \sum_i \alpha_i H_i, \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &= N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Структурные константы $N_{\alpha\beta}$ отличны от нуля лишь при условии $(\alpha + \beta) \in \Sigma$. Они обладают следующими свойствами симметрии:

$$N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} = N_{\beta, -\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta, \alpha}. \quad (2.2)$$

В силу полной приводимости представления D пространство R этого представления разлагается в прямую ортогональную сумму $R = \Sigma \oplus R^{[1]}$ максимальных инвариантных подпространств, в каждом из которых действует представление, кратное НП $D^{[1]}$, $[f] = [f_1, f_2, \dots, f_l]$. Обозначим далее через R_m пространство, натянутое на все векторы $\psi_m \in R$, весовые относительно операторов H_i ,

$$H_i \psi_m = m_i \psi_m, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.3)$$

Тогда R — прямая ортогональная сумма подпространств R_m : $R = \Sigma \oplus R_m$.

В пространстве R_m существует оператор $P_{mm}^{[f]} \equiv P_m^{[f]}$, $m < f$, ортогонального проектирования $R_m \rightarrow R_m^{[f]}$. Нас прежде всего будет интересоваться вопрос о построении ПО $P_f^{[f]} \equiv P^{[f]}$, где $f = (f_1, f_2, \dots, f_l)$ — старший вес. Этот оператор определяется равенством

$$P^{[f]} \psi_f = C \psi_f^{[f]}, \quad C = \text{const}, \quad \psi_f \in R_f, \quad \psi_f^{[f]} \in R_f^{[f]}. \quad (2.4)$$

Здесь в отличие от (1.4) задан только закон действия оператора $P^{[f]}$ на векторы веса $f = (f_1, f_2, \dots, f_l)$, действие же этого оператора на векторы, не отвечающие определенному весу, не определено. Однако это ограничение несущественно, поскольку, как правило, в конкретных расчетах имеют дело с весовыми векторами и легко можно отобрать векторы с необходимым весом.

Для того чтобы получить ПО общего вида $P_m^{[f]}$, достаточно домножить $P^{[f]}$ на повышающий и понижающий операторы $F_m^{(-)}$ и $F_m^{(+)}$, соответственно,

$$P_m^{[f]} = F_m^{(-)} P^{[f]} F_m^{(+)} \quad (2.5)$$

Понижающий оператор $F_m^{(-)}$ преобразует старший вектор $\psi_f^{[f]}$ в базисный вектор общего вида ψ

$$F_m^{(-)} \psi_f^{[f]} = \psi_m^{[f]}. \quad (2.6)$$

Повышающий оператор наоборот преобразует вектор веса m в вектор более высокого веса f

$$F_m^{(+)} \psi_m^{[f]} = \psi_f^{[f]}. \quad (2.7)$$

Структура операторов $F_m^{(+)}$ и $F_m^{(-)}$ для групп $U(n)$ исследована в работах [21, 22], аналогичные операторы для групп $O(n)$ были построены в работах [23, 24]. Поэтому мы в данной работе не будем рассматривать вопрос о построении понижающих и повышающих операторов, а сосредоточим все внимание на главной части любого ПО — операторе $P^{[f]}$.

Мы будем искать оператор $P^{[f]}$ в виде ряда, составленного из степеней генераторов группы. Поскольку он будет действовать на весовые векторы ψ_f , то в силу (2.4) диагональные генераторы H_i можно заменить их собственными значениями f_i . Мы будем считать, что эти собственные значения включены в коэффициенты степенного ряда. Итак, примем для ПО $P^{[f]}$ следующую форму:

$$P^{[f]} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} P_\alpha, \quad (2.8)$$

где

$$P_\alpha = \sum_r C_r E_{-\alpha}^r E_\alpha^r. \quad (2.9)$$

Порядок сомножителей в произведении (2.8), в которое включены все операторы P_α , отвечающие корням $\alpha \in \Sigma^+$, будет зафиксирован ниже.

Напишем уравнения, из которых можно найти значения коэффициентов C_r . Прежде всего исходя из свойств старшего вектора

$$E_\alpha \psi_f^{[f]} = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Sigma^+ \quad (2.10)$$

мы можем записать, что должно выполняться равенство

$$E_\alpha P^{[f]} \psi_f = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in \Sigma^+. \quad (2.11)$$

Поскольку оператор $P^{[f]}$ не изменяет веса вектора ψ_f , он коммутирует с генераторами H_i

$$[H_i, P^{[f]}] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.12)$$

Наконец, из (1.4) следует, что

$$P^{[f]} \psi_f^{[f]} = \psi_f^{[f]} \quad (2.13)$$

или

$$P^{[f]} P^{[f]} \psi_f = P^{[f]} \psi_f.$$

Выражение (2.9) удовлетворяет требованию (2.12). Кроме того, можно ограничиться рассмотрением лишь тех уравнений (2.11), которые соответствуют простым корням $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l$

$$E_{\pi_i} P^{[f]} \psi_f = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.14)$$

Дело в том, что любой корень $\alpha \in \Sigma^+$ можно разложить на простые корни

$\alpha = \sum_{i=1}^l k_i \pi_i$ с неотрицательными целыми коэффициентами k_i , а соот-

ветствующий генератор E_α можно представить в виде некоторого h -кратного коммутатора генераторов E_{π_i} , где величина $h = \sum k_i$ называется высотой составного корня α . Поэтому уравнения (2.11) для составных корней α выполняются автоматически, если справедливы соотношения (2.14). При подстановке ПО (2.8), (2.9) в (2.13) при учете (2.10) получаем, что все члены оператора $P^{[1]}$ дают нулевой вклад в левую часть (2.13), кроме одного члена, соответствующего нулевым степеням всех генераторов. Отсюда находим, что следует положить

$$C_0 = 1 \quad \text{для всех } P_\alpha \quad (\alpha \in \Sigma^+). \quad (2.15)$$

Нужно заметить, что выражения (2.8), (2.9) не представляют собой самую общую форму ПО: оператор $P^{[1]}$ не обязательно должен факторизоваться, степени сопряженных генераторов $E_{-\alpha}$ и E_α также не обязательно одинаковы. Однако мы так выберем порядок сомножителей в операторе $P^{[1]}$, чтобы существовало решение уравнений (2.14) в форме (2.8), (2.9).

Зафиксируем порядок сомножителей P_α следующим образом. Прежде всего выделим в системе положительных корней Σ^+ группы $G(l)$ все корни β , которые содержат простой корень π_1 (один из концевых корней диаграммы Дынкина (рис. 1)). Нумерация корней на диаграммах Дынкина

проведена нами таким образом, что любой составной корень $\beta = \sum_{i=1}^l k_i \pi_i$

содержит простой корень π_1 с коэффициентом $k_1 \leq 2$. Оказывается, что во всех случаях, где встречается составной корень с $k_1 = 2$, он является единственным и не разлагается на сумму двух корней одинаковой высоты, имеющих $k_1 = 1$. Нетрудно убедиться, что при таких условиях два множителя P_{β_m} и P_{β_n} , отвечающие корням β_m и β_n одинаковой высоты, у каждого из которых $k_1 = 1$, коммутируют друг с другом. Действительно, генераторы E_{β_m} и E_{β_n} (а также $E_{-\beta_m}, E_{-\beta_n}$) коммутируют, поскольку в Σ^+ нет корня с $k_1 = 2$, совпадающего с суммой корней $\beta_m + \beta_n$. Генераторы E_{β_m} и $E_{-\beta}$ (а также $E_{-\beta_m}, E_{\beta_n}$) коммутируют, потому что корень, отвечающий их коммутатору $[E_{\beta_m}, E_{-\beta_n}]$, должен иметь нулевую высоту, т. е. коммутатор должен выражаться через диагональные генераторы H_i , но согласно (2.1) это возможно лишь при условии $\beta_m = \beta_n$. Итак, порядок взаимного расположения множителей P_{β_m} и P_{β_n} безразличен. Что касается остальных множителей P_β , то все такие операторы с $\beta = \pi_1 + k_2 \pi_2 + \dots$ мы расположим слева направо в порядке возрастания высоты корней, а единственный множитель, отвечающий корню $\beta = 2\pi_1 + A + B$, где A и B не содержат простого корня π_1 , располагаем между множителями P_{π_1+A} и P_{π_1+B} . Далее выделяются все операторы P_β , у которых $\beta = k_2 \pi_2 + \dots$ содержит корень π_2 (но не содержит π_1), и располагаются аналогичным образом. Снова выбор корня π_2 на диаграмме Дынкина производится так, чтобы только у одного из корней (с $k_1 = 0$) k_2 не превышало 2. Этим корнем оказывается один из концевых корней остатка диаграммы Дынкина, полученного вычеркиванием из нее корня π_1 . Затем по такой же схеме производится упорядочение множителей P_β с $\beta = k_3 \pi_3 + \dots$ ($k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 \neq 0$) и т. д.

Сформулированные выше правила вместе с диаграммами рис. 1 однозначно фиксируют порядок расположения генераторов в ПО с точностью до перестановки коммутирующих сомножителей P_β . Поясним смысл выбранной нами расстановки генераторов.

После того как из числа генераторов простой группы Ли мы выделили все генераторы E_β с β , содержащими π_1 , оставшиеся генераторы можно рассматривать как генераторы некоторой простой подгруппы $G(l-1)$ группы $G(l)$. Эта подгруппа $G(l-1)$ имеет ранг $l-1$ и характеризуется диаграммой Дынкина, полученной из соответствующей диаграммы для $G(l)$ вы-

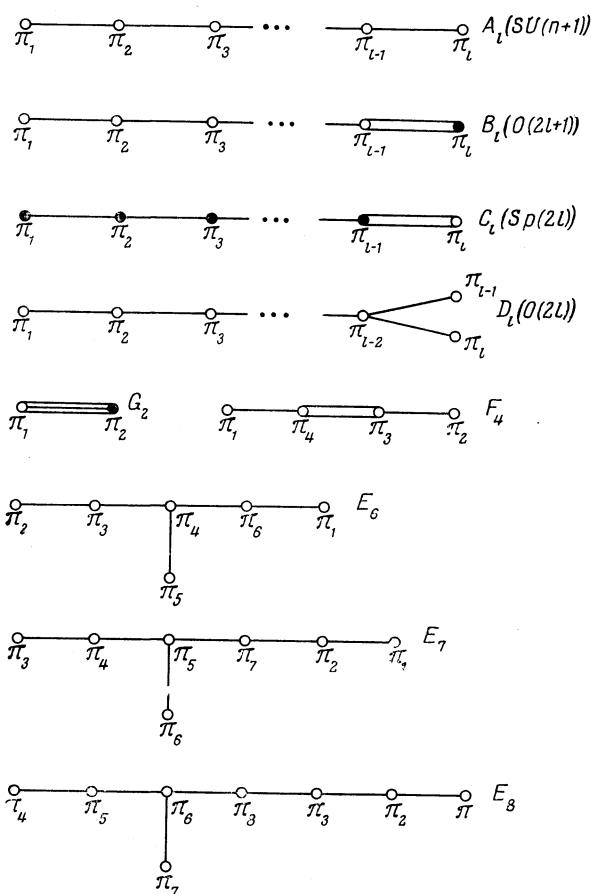


Рис. 1

черкиванием концевго корня π_l . Старший вектор НП $D^{[1]}$ группы $G(l)$ одновременно является старшим вектором некоторого НП $D^{[1]}$ подгруппы $G(l-1)$. Исходя из свойств ПО (1.2) можно записать, что

$$P^{[1]}P^{[1]}\psi_f = P^{[1]}\psi_f, \quad (2.16)$$

где $P^{[1]}$ — ПО для подгруппы $G(l-1)$. Подставим в левую часть этого равенства явное выражение (2.8), (2.9) для ПО $P^{[1]}$, в котором генераторы расставлены указанным выше способом, т. е. в начале расположены все генераторы $E_{-\beta}E_\beta$ с β , содержащим π_1 , а затем — все генераторы подгруппы $G(l-1)$. Мы условились искать ПО в такой форме, когда степени генераторов $E_{-\beta}$ и E_β в каждом множителе P_β одинаковы. Поэтому в силу условия (2.11), если его

применить к ПО $P^{[1]}$, в левую часть (2.16) ненулевой вклад дадут только те члены оператора $P^{[1]}$, которые не содержат генераторов подгруппы $G(l-1)$. Следовательно, можно записать, что

$$P^{[1]} = V_l^{[1]}P^{[1]}, \quad (2.17)$$

где оператор

$$V_l^{[1]} = \prod_{\beta} P_{\beta} \quad (2.18)$$

включает в себя только те множители P_β , у которых корень $\beta = k_1\pi_1 + k_2\pi_2 + \dots$ содержит π_1 с коэффициентом $k_1 \neq 0$. Предполагая,

что ПО $P^{[l]}$ для подгруппы $G(l-1)$ известен, мы сводим с помощью равенства (2.17) задачу построения ПО $P^{[l]}$ к построению более простого оператора $V^{[l]}$. Очевидно, что, чем больше порядок подгруппы $G(l-1)$, тем меньше сомножителей содержит оператор $V^{[l]}$. Поэтому мы выбрали в качестве π_1 такой концевой корень диаграммы Дынкина, после вычеркивания которого получается диаграмма для подгруппы $G(l-1)$, имеющей максимальный порядок.

Рассмотрим для примера группу B_l . Диаграмма Дынкина для нее имеет два концевых корня, отличающихся друг от друга длиной и характером связи с остальными корнями. Если выбросить из нее короткий корень, соединенный двойной связью с соседним корнем диаграммы, то мы переходим к подгруппе A_{l-1} , имеющей порядок $(l-1)(l+1)$. Вычеркивание другого концевого корня приводит к подгруппе B_{l-1} порядка $(l-1)(2l+1)$. Очевидно, что более выгодно брать в качестве π_1 длинный концевой корень. На основе такого рода соображений нами и проведена нумерация простых корней на диаграммах Дынкина для групп $A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8$. В случае групп G_2 и F_4 вычеркивание длинного и короткого концевых корней приводит к подгруппам одинакового порядка. Однако та нумерация корней этих групп, которая показана на рис. 1, является более предпочтительной, так как она приводит к более простой системе уравнений для коэффициентов C_r в ПО.

На втором этапе мы выделили из числа генераторов группы $G(l-1)$ те, у которых корни содержат простой корень π_2 , при этом мы перешли к подгруппе $G(l-2)$, затем аналогичным путем переходим к подгруппе $G(l-3)$ и т. д. В результате мы получили целую цепочку регулярно вложенных подгрупп

$$G(l) \supset G(l-1) \supset G(l-2) \supset \dots \supset G(1). \quad (2.19)$$

Итерируя выражение (2.18), запишем ПО в виде

$$P^{[l]} = \prod_{i=0}^{l-1} V_{l-i}^{[f_i]}, \quad (2.20)$$

где каждый множитель $V_{l-i}^{[f]}$ содержит генераторы $E_{-\beta}, E_{\beta}$, которые являются генераторами группы $G(l-i)$, но не принадлежат группе $G(l-i-1)$. $D^{[f_i]}$ — это НП группы $G(l-i)$, по которому преобразуется старший вектор НП $D^{[f]}$ группы $G(l)$. В соответствии с (2.20) вопрос о структуре ПО $P^{[f]}$ сводится к исследованию операторов $V_{l-i}^{[f_i]}$.

Рассмотрим конкретно структуру первого блока $V^{[f]}$ для каждого типа простых компактных групп Ли. Для наглядности введем графическое изображение этого оператора. Каждому множителю P_{β} , входящему в $V^{[f]}$, сопоставим на графике узел, обозначаемый индексом β . Оператор $V^{[f]}$ в целом изобразится совокупностью точек, выстроенных слева направо в порядке следования сомножителей P_{β} в ПО $P^{[f]}$. Узлы, соответствующие коммутирующим сомножителям P_{β} , расположим друг под другом на одной вертикали. Установим связь между узлами следующим способом:

а) два узла β и $\beta + \pi_i$ ($i > 1$) соединим одинарной линией, если

в системе положительных корней нет корня $2\beta + \pi_i$. На графике такая связь изобразится диаграммой

$$\begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ \beta \qquad \qquad \beta + \pi_i \end{array} \quad (2.21a)$$

Назовем такой тип связи A -связью, поскольку, как мы увидим ниже, она впервые встречается в группах A_i ;

б) если $V_l^{[j]}$ содержит тройку операторов P_β , $P_{2\beta + \pi_i}$ и $P_{\beta + \pi_i}$, то мы соединим три соответствующие узла двойной линией

$$\begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ \beta \qquad \qquad 2\beta + \pi_i \qquad \qquad \beta + \pi_i \end{array} \quad (2.21b)$$

и назовем этот тип связи, охватывающей сразу три множителя $P_\beta P_{2\beta + \pi_i} P_{\beta + \pi_i}$, C -связью, ибо впервые он появляется у групп C_l .

в) В пункте «а» нужно сделать исключение для того случая, когда среди корней β , задающих оператор $V_l^{[j]}$, имеется пятерка корней A , B , $A + B + \pi_i$, $A + \pi_i$, $B + \pi_i$, где A и B — составные корни одинаковой высоты, содержащие π_i с коэффициентом $k_i = 1$, $i \neq 1$, каждый. При этом связи между A и $A + \pi_i$, B и $B + \pi_i$ уже нельзя считать простыми A -связями; мы изобразим этот новый тип связи, охватывающий пять вышеуказанных узлов, диаграммой вида

$$\begin{array}{ccc} A & \text{-----} & A + \pi_i \\ | & & | \\ A + B + \pi_i & & B + \pi_i \\ | & & | \\ B & \text{-----} & B + \pi_i \end{array} \quad (2.21b)$$

и назовем его F -связью, так как он впервые встречается у особой группы F_4 . Все диаграммы операторов $V_l^{[j]}$ для классических групп строятся только из элементов (2.21a), (2.21b).

Поскольку узел β может оказаться связанным посредством разных простых корней π_i , π_k — с двумя или большим числом узлов $\beta + \pi_i$, $\beta + \pi_k, \dots$, то диаграммы ПО в некоторых узлах могут разветвляться, в других будет иметь место слияние разных ветвей. Диаграммы операторов $V_l^{[j]}$ для всех простых групп Ли приведены на рис. 2 и 3. Часть диаграммы, которая состоит из узлов, соединенных только A -связями мы назовем A -цепочкой. Из рис. 2 и 3 видно, что диаграмма $V_l^{[j]}$ для всех данных групп Ли представляют собой или просто A -цепочку (группы $U(l+1)$, $O(2l+1)$, $O(2l)$, G_2 , E_6 , E_7), или совокупность двух A -цепочек, соединяются друг с другом тремя F -связями. Эти F -связи объединяют (группы F_4 , E_8). В частности, в группе E_8 две разветвленные A -цепочки соединяются друг с другом тремя F -связями. Эти F -связи объединяют следующие пятерки операторов:

$$\begin{array}{l} P_{11212322} P_{12212312} P_{23424635} P_{11212323} P_{12212313}, \\ P_{11212313} P_{12212312} P_{23424635} P_{11212323} P_{12212322} \\ P_{11212322} P_{11212313} P_{23424635} P_{12212322} P_{12212313}. \end{array}$$

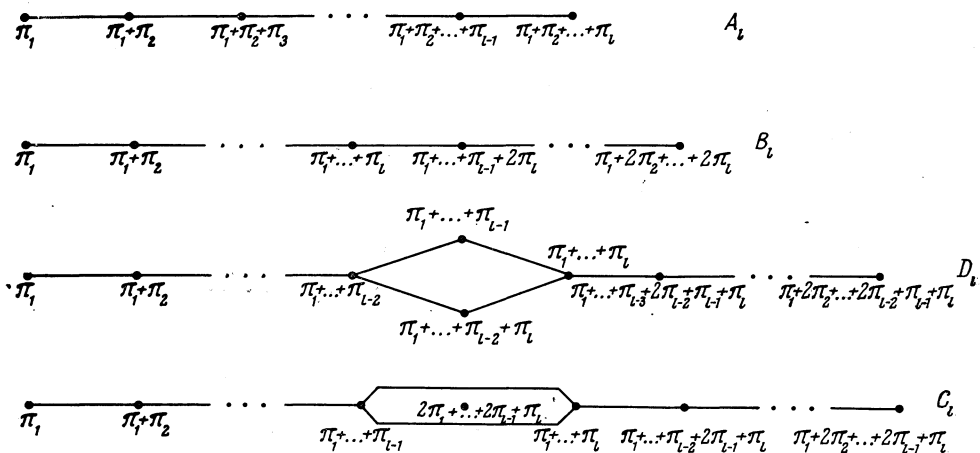


Рис. 2

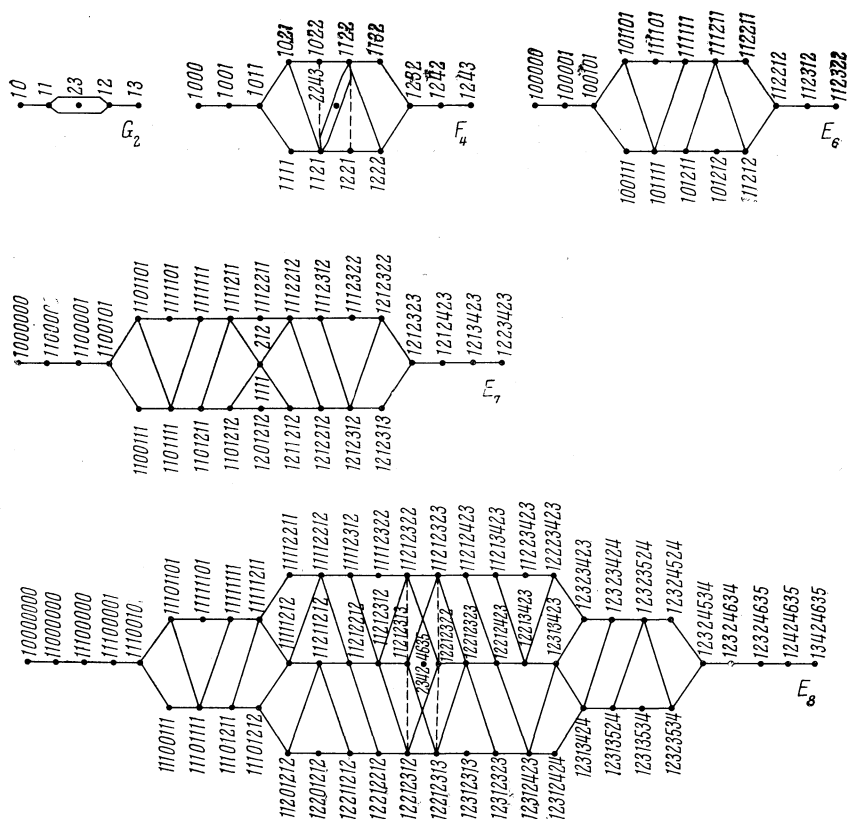


Рис. 3

Здесь, а также на рис. 3, мы обозначали узел, соответствующий корню $\beta = \sum k_i \pi_i$ набором цифр $k_1, k_2, k_3, \dots, k_l$.

Структура остальных множителей $V_{l-i}^{[i]}$ ПО изображается аналогичными диаграммами, но для групп меньшего ранга. Поэтому, если мы найдем явный вид операторов $V_l^{[j]}$, то нам будет известен ПО целиком. Отме-

тим важное свойство ПО. Если какой-то узел β на диаграмме оператора $V^{[f]}$ соединен A -связями с двумя или тремя узлами $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, то данные корни имеют одинаковую высоту и соответствующие множители $P_{\beta_1}, P_{\beta_2}, P_{\beta_3}$ коммутируют друг с другом. Поэтому всегда можно, не изменяя ПО, поставить рядом с P_β любой из множителей P_{β_i} . Аналогичным образом, используя коммутативность множителей P_β , отвечающих узлам, находящимся на одной вертикали, всегда можно часть ПО, соответствующую C -связи, привести к виду $P_\beta P_{2\beta+\pi_i} P_{\beta+\pi_i}$, а множители, объединенные F -связью, расположить в порядке $P_A P_B P_{A+B+\pi_i} P_{A+\pi_i} P_{B+\pi_i}$. Теперь перейдем к отысканию коэффициентов C_r в ПО.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ C_r В ПО И ИХ РЕШЕНИЕ

Уравнения для коэффициентов C_r мы получим из условия (2.14). Рассмотрим сначала это условие для первого простого корня π_1 . Преобразуем данное соотношение следующим образом. Используя формулы, приведенные в приложении, п. 4, прокоммутируем генератор E_{π_1} с оператором $E_{-\pi_1}^{-1}$, входящим в первый множитель P_{π_1} ПО, и объединим его с оператором $E_{\pi_1}^{r_1}$. В результате получим

$$E_{\pi_1} P^{[f]} \psi_f = \sum_{r_1} C_{r_1} \left\{ \frac{r_1}{2} [2(\pi_1, f) + (\pi_1, \pi_1)(r_1 + 1)] E_{-\pi_1}^{r_1-1} E_{\pi_1}^{r_1} + \right. \\ \left. + E_{-\pi_1}^{r_1} E_{\pi_1}^{r_1+1} \right\} \dots \psi_f = 0. \quad (3.1)$$

Многоточием здесь заменены остальные множители ПО, которые не изменяются при этом преобразовании. Далее заменим во второй сумме r_1 на $r_1 - 1$, приведем подобные члены и приравняем к нулю коэффициент при операторе $E_{-\pi_1}^{r_1-1} E_{\pi_1}^{r_1}$ в отдельности для каждого значения r_1 . В результате получим рекуррентное соотношение для C_{r_1}

$$C_{r_1-1} + \frac{r_1}{2} [2(\pi_1, f) + (\pi_1, \pi_1)(r_1 + 1)] C_{r_1} = 0. \quad (3.2)$$

Вообще говоря, прежде чем приравнять к нулю это выражение, следовало бы доказать, что при некотором выборе вектора ψ_f члены в левой части (3.1), содержащие оператора $E_{-\pi_1}^{r_1-1} E_{\pi_1}^{r_1}$ в разных степенях r_1 , являются линейно-независимыми. Однако мы пойдем другим путем, мы просто приравняем коэффициенты при различных комбинациях степеней генераторов в левой части (3.1) (и аналогичных выражений рассматриваемых ниже) к нулю и запишем уравнения типа (3.2). Если получившаяся система уравнений для коэффициентов C_r окажется совместной и будет иметь решение (а мы убедимся ниже, что решение действительно существует), то таким путем будет найдена некоторая разновидность ПО для рассматриваемой группы $G(l)$. Вопрос о единственности решения уравнений (2.14) для ПО здесь не стоит, поскольку ПО, вообще говоря, не определяется однозначно условиями (1.1), (1.2). Единственной является лишь

проекция вектора на заданное подпространство. Знание какой-либо одной формы ПО, в общем, достаточно для наших целей — построения волновых функций с определенными свойствами симметрии по отношению к группе $G(l)$.

Воспользовавшись известным тождеством [19]

$$2(\pi_i, \rho) = (\pi_i, \pi_i), \quad (3.3)$$

где $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$, можно переписать (3.2) в виде

$$C_{r_1-1} + \frac{1}{2} r_1 (\pi_1, \pi_1) \left[\frac{2(\pi_1, f + \rho)}{(\pi_1, \pi_1)} + r_1 \right] C_{r_1} = 0. \quad (3.4)$$

Итерируя это выражение, получаем, что

$$C_{r_1} = \frac{(-1)^{r_1} \left(\frac{2(\pi_1, f + \rho)}{(\pi_1, \pi_1)} \right)!}{r_1! \left(\frac{(\pi_1, \pi_1)}{2} \right)^{r_1} \left(\frac{2(\pi_1, f + \rho)}{(\pi_1, \pi_1)} + r_1 \right)!}. \quad (3.5)$$

Мы имеем право употребить здесь знак факториала, поскольку для $\alpha \in \Sigma^+$ выражение $\frac{2(\alpha, f)}{(\alpha, \alpha)}$ является целым неотрицательным числом, если $[f]$ — старший вес НП. Для группы $SU(2)$ (3.5) переходит в результат работ [10, 11, 12].

Теперь обратимся к соотношениям (2.14), включающим простые корни π_i с $i \geq 2$. Будем преобразовывать эти соотношения следующим образом. Прокоммутируем оператор E_{π_i} со всеми множителями P_β , входящими в $|V^{[f]}|$ и перенесем оператор E_{π_i} направо к ПО $P^{[f]}$ для подгруппы $G(l-1)$, где он аннулируется согласно (2.11).

Рассмотрим для начала множитель P_β , для которого связь узла β с узлом $\beta + \pi_i$ на диаграмме является A -связью. При коммутации E_{π_i} с оператором $E_\beta^{r_1}$ появляется оператор $E_{\beta+\pi_i}$. Прокоммутируем его с оператором $E_{-\beta-\pi_i}^{r_2}$, входящим в соседний множитель $P_{\beta+\pi_i}$ (его всегда можно поставить рядом с P_β), и объединим со второй половиной этого множителя с оператором $E_{\beta+\pi_i}^{r_2}$. В результате этих коммутаций у нас получится сумма

следующих комбинаций операторов: $E_{-\beta}^{r_1} E_\beta^{r_1-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_2}$ (структура

остальных множителей не изменяется). Члены такого же вида получаются в результате коммутации E_{π_i} и $P_{\beta+\pi_i}$. Действительно, при коммутации E_{π_i} с $E_{-\beta-\pi_i}^{r_2}$ появится понижающий оператор $E_{-\beta}$, который мы прокоммутируем с $E_\beta^{r_1}$ и объединим с $E_{-\beta}^{r_1}$. Полученная в результате этих операций комбинация степеней операторов $E_{-\beta}$, E_β , $E_{-\beta-\pi_i}$ и $E_{\beta+\pi_i}$ совпадает с вышеуказанной. Никакие коммутаторы E_{π_i} с множителями, стоящими левее P_β

и правее $P_{\beta+\pi_i}$, не дают больше членов вида $E_{-\beta}^{r_1} E_\beta^{r_1-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_2}$.

Поэтому мы соберем члены такой структуры, полученные в результате коммутации E_{π_i} с P_β и $P_{\beta+\pi_i}$, и приравняем коэффициенты при них нулю.

Поскольку

$$\begin{aligned}
 [E_{\pi_i}, P_{\beta} P_{\beta+\pi_i}] \psi_f &= \sum_{r_1, r_2} C_{r_1} C_{r_2} [E_{\pi_i}, E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2} E_{\beta+\pi_i}^{r_2}] \psi_f = \\
 &= \sum_{r_1, r_2} C_{r_1} C_{r_2} \left\{ r_1 N_{\pi_i, \beta} E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2} E_{\beta+\pi_i}^{r_2+1} + \right. \\
 &\quad + N_{\pi_i, \beta} r_1 \frac{r_2}{2} [2(\beta + \pi_i, f) + (\beta + \pi_i, \beta + \pi_i)(r_2 + 1)] \times \\
 &\quad \times E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_2} + r_2 N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} E_{-\beta}^{r_1+1} E_{\beta}^{r_1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_2} + \\
 &\quad \left. + N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} r_2 \frac{r_1}{2} [2(\beta, f + \beta + \pi_i) + (\beta, \beta)(r_1 - 1)] E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_2} \right\} \psi_f \dots
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

то, заменяя в первой и третьей суммах индекс суммирования r_2 на $r_2 - 1$ и r_1 на $r_1 - 1$, соответственно, собирая подобные члены и приравнявая к нулю коэффициенты при операторах $E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_2}$ при каждом значении r_1 и r_2 в отдельности, получаем следующее соотношение для коэффициентов C_r :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} r_1 r_2 [2(\pi_i, f) + (\beta, \beta)(r_2 - r_1) + 2(\beta, \pi_i) r_2 + (\pi_i, \pi_i)(r_2 + 1)] C_{r_1} C_{r_2} + \\
 &\quad + r_1 C_{r_1} C_{r_2-1} - r_2 C_{r_1-1} C_{r_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что $N_{\pi_i, \beta} = -N_{\pi_i, -\beta-\pi_i}$.

Отметим также, что в (3.6) многоточием заменены члены, возникающие в результате коммутации E_{π_i} с $E_{-\beta}^{r_1}$ и $E_{\beta+\pi_i}^{r_2}$ и имеющие другую структуру.

Итак, для каждого множителя $P_{\beta+\pi_i}$, который изображается на диаграмме узлом $\beta + \pi_i$, соединенным с узлом β A -связью, имеет место равенство (3.7).

Рассмотрим неразветвляющуюся A -цепочку, начинающуюся простым корнем π_1 . Коэффициент C_r для множителя P_{π_1} дается формулами (3.4), (3.5). Предположим, что эти формулы справедливы для всех узлов этой цепочки, начиная с π_1 и кончая β , т. е. для C_r из P_{β} справедливо соотношение

$$C_{r_1-1} = -\frac{1}{2} r_1 [2(\beta, f + \rho) + (\beta, \beta) r_1] C_{r_1}. \tag{3.8}$$

Докажем, что для любого узла $\beta + \pi_i$ имеет место та же формула. Подставим (3.8) в последнее слагаемое (3.7). Сократив получившийся результат на $r_1 C_{r_1}$ и заменив (π_i, π_i) на $2(\pi_i, \rho)$, приходим к равенству

$$C_{r_2-1} + \frac{1}{2} r_2 [2(\beta + \pi_i, f + \rho) + (\beta + \pi_i, \beta + \pi_i) r_2] C_{r_2} = 0.$$

Таким образом, методом индукции мы доказали, что если взять какой-то участок A -цепочки, составленный из узлов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, находящихся на одной ветви этой цепочки, то для всех множителей P_{γ_k} ($k > 1$) спра-

ведливо соотношение (3.8), если оно выполняется для начального узла γ_1 . Применяя подобные рассуждения ко всем ветвям A -цепочки в отдельности, мы приходим к выводу, что для всех членов A -цепочки, начинающейся узлом π_i , имеет место равенство (3.8).

Теперь нужно проанализировать коэффициенты C_r для множителей P_β , объединенных C - или F -связью. Коммутаторы операторов E_{π_i} с такими множителями и соответствующие уравнения для коэффициентов C_r в случае C -связи рассмотрены в приложении, п. 2. Проведенные там вычисления показывают, что если для первого узла β на диаграмме (2.21б) имеет место равенство (3.8) (а оно действительно выполняется, поскольку на диаграмме ПО этот узел является одним из концевых звеньев A -цепочки, начинающейся узлом π_i), то данное равенство справедливо и для двух остальных узлов $2\beta + \pi_i$ и $\beta + \pi_i$. Аналогичное утверждение можно доказать и для F -связи. Если для узлов A и B диаграммы (2.21в) выполняется равенство (3.8), то оно сохраняется и для остальных узлов $A + B + \pi_i$, $A + \pi_i$, $B + \pi_i$. Поскольку узлы $\beta + \pi_i$ (в случае C -связи) и $A + \pi_i$, $B + \pi_i$ (в случае F -связи) служат начальными звеньями отдельных ветвей второй A -цепочки, входящей в диаграмму блока $V^{[f]}$ ПО, то на основе приведенного выше рассмотрения свойств A -цепочек мы приходим к выводу, что и для всех узлов второй A -цепочки, а тем самым и для всех множителей блока $V^{[f]}$ выполняется равенство (3.8), т. е.

$$C_{r_\beta} = \frac{(-1)^{r_\beta} 2^{r_\beta} \left(\frac{2(\beta, \tilde{f} + \rho)}{(\beta, \beta)} \right)!}{(\beta, \beta)^{r_\beta} r_\beta! \left(\frac{2(\beta, f + \rho)}{(\beta, \beta)} + r_\beta \right)!} \tag{3.9}$$

Важно отметить следующий факт. Вообще говоря, коэффициенты C_r для некоторого множителя P_β , которому соответствует узел, связанный линиями с несколькими расположенными левее него узлами, могут быть найдены из различных уравнений, отвечающих указанным связям. Однако из вышеизложенного ясно, что все они приведут к одному и тому же результату (3.9). Поэтому полученная нами из условий (2.14) система уравнений для коэффициентов C_r является совместной и ее решение описывается формулой (3.9).

Результат (3.9) позволяет нам записать в явном виде любой оператор $V^{[f]}_{l-i}$, а следовательно, и весь ПО $P^{[f]}$.

В итоге нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Пусть $G(l)$ — простая компактная группа Ли, D — ее пред-

ставление в пространстве $R = \sum_{[f]} \oplus R^{[f]}$, где $R^{[f]}$ — максимальное инва-

риантное подпространство, в котором действует представление, кратное НП $D^{[f]}$ со старшим весом $f = (f_1, f_2, \dots, f_l)$. Пусть R_m — весовое подпространство в R с весом m . Тогда оператор $P_f^{[f]} \equiv P^{[f]}$ ортогонального проектирования $R_f \rightarrow R_f^{[f]}$ можно представить в виде

$$P^{[f]} = \prod_{\beta \in \Sigma^+} P_\beta, \\ P_\beta = \sum_{r_\beta} C_{r_\beta} E_{-\beta}^{r_\beta} E_\beta^{r_\beta}.$$

Порядок расположения сомножителей P_β определяется формулами (2.17), (2.18) и диаграммами на рис. 2 и 3. Коэффициенты $C_{r\beta}$ вычисляются по общей для всех простых компактных групп Ли формуле (3.9).

Сделаем несколько заключительных замечаний. Во-первых, из приведенного выше рассмотрения ясно, что диаграммы рис. 2 и 3 не только иллюстрируют структуру ПО, но в них зашифрована также система уравнений для коэффициентов C_r : каждой A -связи соответствует уравнение типа (3.7), включающее в себя коэффициенты C_r для двух связанных узлов; каждой C -связи отвечает совокупность уравнений (П.2) — (П.4); блок (2.21в) приводит к системе уравнений типа (П.2) — (П.4). Тем самым диаграммы показывают, из каких уравнений и в какой последовательности следует находить коэффициенты $C_{r\beta}$ в операторе P_β .

Во-вторых, путем использования конкретных цепочек подгрупп нами найдена некоторая факторизованная форма ПО для каждой простой группы Ли. Вполне возможно, что она является простейшей в том смысле, что она, по-видимому, приводит к системе уравнений для коэффициентов C_r с минимальным зацеплением. Однако она не является единственной. Такого рода форму можно получить из найденных операторов $P^{[1]}$, например путем эрмитовского сопряжения. Вопрос о других типах факторизованных парных форм представляет большой интерес, однако он требует анализа новых типов связей и мы за недостатком места в данной работе этот вопрос обсуждать не будем.

В-третьих, до сих пор мы рассматривали ПО для компактных групп. Очень интересной и важной представляется также задача построения в инфинитезимальной форме ПО и для некомпактных групп Ли. В частности, ясно, что предложенный метод построения ПО может быть без серьезных изменений обобщен на дискретные серии бесконечномерных представлений этих групп.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Приведем коммутационные соотношения для степеней генераторов простой группы Ли, взятых в канонической форме Картана — Вейля,

$$[H_i, E_\alpha^a] = a\alpha_i E_\alpha^a,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}^b] = \frac{b}{2} E_{-\alpha}^{b-1} \sum_{i=1}^l \alpha^i [2H_i - \alpha_i(b-1)],$$

$$[E_\alpha^a, E_{-\alpha}] = \frac{a}{2} E_\alpha^{a-1} \sum_{i=1}^l \alpha^i [2H_i + \alpha_i(a-1)],$$

$$[E_\alpha, E_\beta^b] = \sum_{i=1}^b \frac{b!}{i!(b-i)!} E_\beta^{b-i} E_{\alpha+i\beta} \prod_{k=0}^{i-1} N_{\alpha+k\beta},$$

$$[E_\alpha^a, E_\beta] = \sum_{i=1}^a \frac{a!}{i!(a-i)!} E_{\beta+i\alpha} E_\alpha^{a-i} \prod_{k=0}^{i-1} N_{\alpha, k\alpha+\beta},$$

где $\alpha + \beta \neq 0$. Все эти равенства легко доказываются методом математической индукции.

2. Коммутатор генератора E_{π_i} с множителями P_β , $P_{2\beta+\pi_i}$, $P_{\beta+\pi_i}$, которым на диаграммах (рис. 2 и 3) соответствуют узлы, соединенные C -связью, имеет вид

$$\begin{aligned}
 [E_{\pi_i}, P_\beta P_{2\beta+\pi_i} P_{\beta+\pi_i}] \psi_f = & \sum_{r_1, r_2, r_3} C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3} \left\{ r_1 N_{\pi_i, \beta} E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} \times \right. \\
 & \times E_{\beta+\pi_i}^{r_3+1} + r_1 N_{\pi_i, \beta} \frac{r_3}{2} [2(\beta + \pi_i, f) + (\beta + \pi_i, \beta + \pi_i)(r_3 + 1)] \times \\
 & \times E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + r_3 N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} \frac{r_1}{2} [2(\beta, f + \beta + \pi_i) + \\
 & + (\beta, \beta)(r_1 - 1)] E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + r_3 N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} E_{-\beta}^{r_1+1} E_{\beta}^{r_1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + r_1 r_2 N_{\pi_i, \beta} N_{\beta+\pi_i, -2\beta-\pi_i} E_{-\beta}^{r_1+1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + N_{\pi_i, \beta} N_{\beta+\pi_i, -2\beta-\pi_i} \frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 - 1) [2(\beta, f + 2\beta + \pi_i) + (\beta, \beta)(r_1 - 2)] \times \\
 & \times E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-2} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} N_{2\beta+\pi_i, -\beta} r_2 r_3 E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_3+1} + \\
 & + N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} N_{2\beta+\pi_i, -\beta} r_2 r_3 \frac{1}{2} (r_3 - 1) [2(\beta + \pi_i, f) + (\beta + \pi_i, \beta + \pi_i)(r_3 + 2)] \times \\
 & \times E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3-2} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + N_{\pi_i, \beta} N_{\pi_i+\beta, \beta} \frac{1}{2} r_3 (r_1 - 1) E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-2} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2+1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + N_{\pi_i, \beta} N_{\pi_i+\beta, \beta} \frac{1}{2} r_1 (r_1 - 1) \frac{1}{2} r_2 [2(2\beta + \pi_i, f) + (2\beta + \pi_i, 2\beta + \pi_i)(r_2 + 1)] \times \\
 & \times E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-2} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} N_{-\beta-\pi_i, -\beta} \frac{1}{2} r_3 (r_3 - 1) E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2+1} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3-2} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \\
 & + N_{\pi_i, -\beta-\pi_i} N_{-\beta-\pi_i, -\beta} \frac{1}{2} r_3 (r_3 - 1) \frac{1}{2} r_2 [(2(2\beta + \pi_i, f + 2\beta + 2\pi_i) + \\
 & + (2\beta + \pi_i, 2\beta + \pi_i)(r_2 - 1)] E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3-2} E_{\beta+\pi_i}^{r_3} + \dots \} \psi_f. \quad (\text{П.1})
 \end{aligned}$$

Многоточием здесь заменены не существенные для дальнейшего члены, возникающие в результате коммутации E_{π_i} с $E_{-\beta}^{r_1}$ и $E_{\beta+\pi_i}^{r_3}$. Сделаем в первой и седьмой сумме в правой части (П.1) замену индекса суммирования r_3 на $r_3 - 1$, в четвертой и пятой сумме заменим r_1 на $r_1 - 1$, в девятой и одиннадцатой — r_2 на $r_2 - 1$. При этом мы убеждаемся, что в правой части (П.1) присутствуют три типа членов:

$$\begin{aligned}
 & E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3-1} E_{\beta+\pi_i}^{r_3}, \\
 & E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1-2} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2-1} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3} E_{\beta+\pi_i}^{r_3}, \\
 & E_{-\beta}^{r_1} E_{\beta}^{r_1} E_{-2\beta-\pi_i}^{r_2} E_{2\beta+\pi_i}^{r_2-1} E_{-\beta-\pi_i}^{r_3-2} E_{\beta+\pi_i}^{r_3}.
 \end{aligned}$$

Собирая подобные члены и приравнявая к нулю коэффициенты при каждой комбинации операторов получаем три следующих набора рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 & r_1 C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3-1} - r_3 C_{r_1-1} C_{r_2} C_{r_3} + \\
 & + \frac{r_1 r_3}{2} [2(\pi_i, f) + (\beta, \beta)(r_3 - r_1) + 2(\beta, \pi_i) r_3 + (\pi_i, \pi_i)(r_3 + 1)] C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3} = 0,
 \end{aligned}$$

$$(r_1 - 1)r_2 N_{\pi_i, \beta} N_{\beta + \pi_i, -2\beta - \pi_i} C_{r_1-1} C_{r_2} C_{r_3} +$$

$$+ \frac{r_1(r_1 - 1)r_2}{2} N_{\pi_i, \beta} N_{\beta + \pi_i, -2\beta - \pi_i} [2(\beta, f + 2\beta + \pi_i) +$$

$$+ (\beta, \beta)(r_1 - 2)] C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3} + \frac{r_1(r_1 - 1)}{2} N_{\pi_i, \beta} N_{\pi_i + \beta, \beta} C_{r_1} C_{r_2-1} C_{r_3} +$$

$$+ \frac{r_1(r_1 - 1)r_2}{4} N_{\pi_i, \beta} N_{\pi_i + \beta, \beta} [2(2\beta + \pi_i, f) +$$

$$+ (2\beta + \pi_i, 2\beta + \pi_i)(r_2 + 1)] C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3} = 0, \quad (\text{П.3})$$

$$r_2(r_3 - 1) N_{\pi_i, -\beta - \pi_i} N_{2\beta + \pi_i, -\beta} C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3-1} +$$

$$+ \frac{r_2 r_3(r_3 - 1)}{2} N_{\pi_i, -\beta - \pi_i} N_{2\beta + \pi_i, -\beta} [2(\beta + \pi_i, f) +$$

$$+ (\beta + \pi_i, \beta + \pi_i)(r_3 + 2)] C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3} +$$

$$+ \frac{r_3(r_3 - 1)}{2} N_{\pi_i, -\beta - \pi_i} N_{\beta - \pi_i, -\beta} C_{r_1} C_{r_2-1} C_{r_3} +$$

$$+ \frac{r_2 r_3(r_3 - 1)}{4} N_{\pi_i, -\beta - \pi_i} N_{-\beta - \pi_i, -\beta} [2(2\beta + \pi_i, f + 2\beta + 2\pi_i) +$$

$$+ (2\beta + \pi_i, 2\beta + \pi_i)(r_2 - 1)] C_{r_1} C_{r_2} C_{r_3} = 0. \quad (\text{П.4})$$

Выражение (П.2) после сокращения на C_{r_2} становится тождественным (3.7). Поэтому, если для коэффициентов C_{r_1} справедлива формула (3.7), то она сохраняется и для C_{r_3} . Если учесть соотношения между структурными константами

$$N_{\pi_i + \beta, \beta} = N_{-2\beta - \pi_i, \pi_i + \beta} = -N_{\beta + \pi_i, -2\beta - \pi_i},$$

$$N_{2\beta + \pi_i, -\beta} = N_{-\beta, -\beta - \pi_i} = -N_{-\beta - \pi_i, -\beta},$$

а для C_{r_1} использовать соотношение (3.7), то уравнение (П.3) приводится к виду

$$C_{r_2-1} + \frac{1}{2} r_2 [2(2\beta + \pi_i, f + \rho) + (2\beta + \pi_i, 2\beta + \pi_i) r_2] C_{r_2} = 0, \quad (\text{П.5})$$

т. е. для C_{r_2} также справедлива формула (3.8).

Аналогичным способом с помощью (П.5) уравнение (П.4) преобразуется к следующему виду:

$$C_{r_3-1} + \frac{r_3}{2} [2(\beta + \pi_i, f + \rho) + (\beta + \pi_i, \beta + \pi_i) r_3] C_{r_3} = 0, \quad (\text{П.6})$$

которое совпадает с результатом для C_{r_3} , полученным из (П.2). Таким образом, уравнения (П.2) — (П.4) совместны и дают для коэффициентов C_{r_2} , C_{r_3} выражение (3.8), если эта формула верна для C_{r_1} .

Подобное рассмотрение, хотя и несколько более громоздкое, можно провести также для случая F -связи.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Н. Я. Виленкина и Д. П. Желобенко за обсуждение работы и ценные замечания.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 декабря 1970 г.

Литература

- [1] G. Racah. Phys. Rev., **76**, 1352, 1949; Group Theory and Spectroscopy, Princeton, 1951.
- [2] H. A. Jahn. Proc. Roy. Soc., **A205**, 192, 1952.
- [3] B. H. Flowers. Proc. Roy. Soc., **A210**, 497, 1952.
- [4] B. H. Flowers. Proc. Roy. Soc., **A212**, 248, 1952.
- [5] J. C. Parikh. Nucl. Phys., **63**, 214, 1965.
- [6] K. T. Hecht. Phys. Rev., **139B**, 794, 1965; Nucl. Phys., **A102**, 11, 1967.
- [7] S. G. Pang. Nucl. Phys., **A128**, 497, 1969.
- [8] Ю. А. Симонов. ЯФ, **3**, 630, 1966.
- [9] R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdaal, W. Lee. Rev. Mod. Phys., **34**, 1, 1962.
- [10] P. O. Löwdin. Rev. Mod. Phys., **36**, 966, 1964.
- [11] J. Shapiro. J. Math. Phys., **6**, 1680, 1965.
- [12] J. Fujita, K. Ikeda. Progr. Theor. Phys., **35**, 622, 1966.
- [13] R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov. Nucl. Phys., **B4**, 399, 1968.
- [14] R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov. Proceedings of the Second Conference on Nuclear Reactions with Light Nuclei, Rossendorf, 205, 1967.
- [15] Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов. УМН, **24**, 227, 1969.
- [16] Yu. F. Smirnov. International Conference on Clustering Phenomena in Nuclei, Bochum IAC, Vienna, July, 1969.
- [17] Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
- [18] Н. Джекобсон. Алгебры Ли. «Мир», 1964.
- [19] Е. Б. Дынкин. УМН, **2**, 59, 1947; Тр. Моск. матем. об-ва, **1**, 39, 1952.
- [20] Д. П. Желобенко. Лекции по теории групп Ли, Дубна, 1965.
- [21] J. G. Nagel, M. Moshinsky. J. Math. Phys., **6**, 682, 1965.
- [22] How Pei-Yu. Scientia Sinica, **15**, 6, 1966.
- [23] S. G. Pang, K. T. Hecht. J. Math. Phys., **8**, 1233, 1967.
- [24] M. K. F. Wong. J. Math. Phys., **8**, 1899, 1967.

PROJECTION OPERATORS FOR SIMPLE LIE GROUPS

R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy

The solution of many problems in nuclear theory and elementary particle physics amounts to decomposing the reducible representations of the symmetry groups of quantum mechanical systems into irreducible components. To carry out this decomposition, projection operators are needed. In the present paper we have constructed, for all simple compact Lie groups $G(l)$ of the rank l (both classical and exceptional), operators which project the arbitrary vector with the weight $f = (f_1, f_2, \dots, f_l)$ onto the highest weight vector of the irreducible representation $D^{[f]}$ of the group $G(l)$. The projection operators are represented in the form of series composed of powers of the infinitesimal operators, which makes them convenient for the solution of particular problems concerning the decomposition of reducible representations into irreducible components. The structure of the projection operators is given for all simple compact Lie groups by similar formulas.
