Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи
УДК 519.642

Третьякова Руфина Максимовна

Моделирование фильтрации вязкой жидкости методом граничных интегральных уравнений

Специальность 05.13.18 – “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”

Диссертация
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук
Сетуха А.В.,
доктор физико-математических наук
Бочаров Г.А.

Москва, 2021

Оглавление

Введение

Цель работы

Целью работы является построение модели фильтрации вязкой жидкости в кусочно-однородной области с учетом абсорбции, ориентированной на моделирование процессов фильтрации лимфы в лимфатическом узле.

Актуальность

Модели лимфоузла являются важной составляющей многомасштабных моделей лимфатической системы. Существует немало работ посвященных построению модели лимфатической системы, первой из которых была модель Редди и соавторов [1,2], состоящая из 28 лимфатических сосудов и протоков, и учитывающая пульсацию стенок сосудов. В работе Макдональд и соавторов [3] была развита модель пульсации сосудов. В работах С.И. Мухина и А.С. Мозохиной [4–6] была построена модель лимфатической системы, состоящая из более чем 300 лимфатических сосудов и более чем 150 лимфоузлов. Для уравнений в частных производных, описывающих течение лимфы в сосудах было найдено аналитическое решение.

В настоящей работе ставится задача разработки математической модели для описания течения лимфы в лимфоузле, ориентированной на дальнейшее использование в моделях лимфатической системы. Первые шаги в построении таких моделей сделаны в работах [7,8], где движение лимфы рассматривается как фильтрационное течение в пористой среде. Как отмечено в работе [9], «в лимфатических узлах имеет место сопряжение лимфатической и кровеносной систем циркуляции жидкости в организме. При этом общий баланс жидкости в лимфатическом узле определяется полем давления, проницаемостью и расположением кровеносных сосудов, в частности, венул высокого эндотелия [10, 11]. В рамках упрощенного рассмотрения структуры лимфатического узла, его можно рассматривать как однородную область с включениями подобластей, отличающихся гидравлической проводимостью и содержащих источники-стоки, которые аппроксимируют венулы высокого эндотелия [12]. Согласно оценкам работы [8], характерная скорость течения лимфы во внутренних областях лимфатического узла не превышают 6 микрометров в минуту, т.е. 10^{-4} мм/сек. При этом значения числа Рейнольдса оценены как $Re < 1$, что указывает на возможность существенного влияния вязкости лимфы на особенности течения».

При моделировании фильтрационных течений идеальной жидкости классической является модель линейной пористой среды, подчиняющейся закону Дарси. Исторически развитие методов моделирования фильтрационных течений, подчиняющихся закону Дарси, связано в первую очередь с задачами движения грунтовых вод и нефтедобычи. В нашей стране большой вклад в развитие методов моделирования внесла Голубева О.В., создавшая вместе с учениками гидродинамическую школу по теории двумерных фильтрационных течений на основе теории аналитических функций и конформных отображений. Развитие современных численных методов решения задач естественной конвекции в пористых средах восходит к работам Chan BKC и др. [13] 1970 г., где использован метод конечных разностей (finite difference method – FDM), Hickox CE, Gartling DK. [14, 15], с использованием метода конечных элементов (finite element method – FEM), Prasad V, Kulacki FA. [16] с применением метода конечных объемов (finite volume method – FVM). В настоящее время методы конечных элементов и конечных объемов получили широкое развитие при решении различных прикладных задач, в том числе в сложных неоднородных областях (см., например работы [17–20]).

Однако в случае, когда область состоит из нескольких однородных подобластей возможно применить метод граничных интегральных уравнений. Данный метод эффективен в задачах математической физики если возможно построить интегральное представление для решения краевой задачи через интегралы по границе области, в которой решается задача, и границам раздела областей с различными свойствами. Такой подход имеет ряд достоинств по сравнению с другими методами, в которых задача решается непосредственно в пространственной области. Во-первых, в методе граничных интегральных уравнений фактически снижается размерность решаемой задачи – так для трехмерных краевых задач возникают поверхностные (т.е. двумерные) интегральные уравнения. При дискретизации задачи достаточно построить расчетную сетку только на этих поверхностях, нет необходимости строить пространственную сетку. Сами дифференциальные уравнения вне граничных поверхностей обычно выполняются точно, за счет этого удается добиться строгого выполнения законов сохранения на численном решении. Возникающие приближенные интегральные представления неизвестных функций часто позволяют вычислять производные и различные функционалы от искомых функций, причем без существенной потери точности, по сравнению с точностью нахождения самих функций.

Приложения метода граничных интегральных уравнений к задачам фильтрации развиты в работах В.Ф.Пивня и его учеников, где сначала рассматривались двумерные течения (систематическое изложение результатов этих исследований можно найти в [21]). Трехмерная модель фильтрации жидкости была развита в статье Лифанова И.К., Пивня В.Ф., Ставцева С.Л. [22] (см. также, [21]). Отметим, что в этих работах рассмотрены течения в кусочно-однородных областях с разными типами внешних и внутренних границ, отличающихся различными типами граничных условий. В частности, рассматриваются условия сопряжения на границах раздела сред с различными свойствами. Однако, в этих работах не рассматривались течения с вязкостью и абсорбцией, что важно для моделирования течений лимфы в лимфоузле.

Решение задач фильтрации вязкой жидкости, подчиняющейся закону Дарси-Бринкмана, с применением метода граничных элементов (boundary elements method – BEM) рассмотрено в работах [23, 24]. Однако в этих работах рассматривались только двумерные задачи, причем, в однородной области, где граничное условие ставится только на внешней границе. В работах [25–27], опять таки, для двумерных задач применен метод фундаментальных решений (method of fundamental solutions – MFS). Этот метод близок к методу граничных элементов, отличаясь от него тем, что решение ищется в виде суперпозиции частных решений - функций влияния источников, которые размещены вне области течения. Это позволяет избежать сингулярности при записи граничного условия.

Отметим, что при моделировании фильтрационных течений как в рамках модели Дарси, так и в рамках модели Дарси-Бринкмана, нашли применение комбинированные методы, использующие идеи метода граничных элементов. К таким методам можно отнести метод граничных интегралов по областям (Boundary-Domain Integral Method – BDIM) [28, 29] и метод граничных элементов с двойной взаимностью (Dual Reciprocity Boundary Element Method – DRBEM) [30, 31]. В первом случае область решения задачи разбивается на ячейки, на границах которых записываются интегральные уравнения для получения дискретной схемы. В работах [28, 29] такой метод граничных интегралов по областям (BDIM) был применен для решения задач фильтрации в прямоугольной полости с использованием модели пористой среды Дарси–Бринкмана и в формулировке скорость – завихренность. В методе граничных элементов с двойной взаимностью (DRBEM) используется аппроксимация неизвестного поля в области течения набором глобальных базисных функций. Далее для нахождения коэффициентов разложения неизвестного поля по базисным функциям используются граничное интегральное уравнение, а также дополнительные интегральные и функциональные соотношения, получаемые аппроксимацией искомого поля на сетке в области решения задачи. При этом граничное интегральное уравнение записывается с применением фундаментальных решений, соответствующих более простому уравнению, чем решаемое. Так в работе [30] такой подход применен к решению двумерной задачи фильтрации на основе закона Дарси-Бринкмана.

В перечисленных работах, в которых рассматривалось моделирование течений вязкой жидкости методом граничных элементов и комбинированными методами, развиты главным образом подходы к решению двумерных задач. К тому же обычно рассматриваются течения в одной области, с постановкой граничных условий на внешней границе. Специфика задач, рассматриваемых в настоящей диссертации, состоит в том, что рассматривается течение в кусочно-однородной области, имеющей следующую структуру: одна основная область может содержать одну или несколько подобластей (включений). При этом ставятся как граничные условия на границе внешней области, так условия сопряжения на границах включений. Соответственно граничные интегральные уравнения записываются как на внешней границе основной области, так и на границах включений. Конечно, здесь могут возникать очень разнообразные краевые задачи. В диссертации рассмотрены как некоторые типовые модельные задачи, так и специфические задачи, имеющие приложение к моделированию течения лимфы в лимфоузле.

В существующих моделях лимфоузла [7, 8] для вычисления скорости и давления лимфы используется метод конечных элементов. В модели Т. Роуз и соавторов [7] фильтрационное течение жидкости является потенциальным и описывается законом Дарси, а гидравлическая проводимость не является постоянной, т.е. задача решается в неоднородной области. В работе Дж. Мура и соавторов [8] построена кусочно-однородная модель фильтрации жидкости, причем фильтрационное течение является вязким и описывается законом Дарси-Бринкмана. Кроме того важную роль в при моделировании течения лимфы в лимфоузле играет абсорбция (всасывание), вызванная обменом между кровеносной и лимфатической системой. Для учета всасывания лимфы в кровь в [7, 8] используется формула Старглинга, связывающая дивергенцию поля скоростей с давлением жидкости. Данные работы можно рассматривать как первый шаг в моделировании течений такого типа.

В настоящей работе для моделирования течения лимфы в лимфоузле предлагается использовать метод граничных интегральных уравнений. Рассматривается задача о стационарном трехмерном фильтрационном течении вязкой жидкости в кусочно-однородной среде, в том числе, с учетом абсорбции. Такое течение подчиняется закону Дарси-Бринкмана и уравнению Старлинга. Характерной особенностью такого течения является то, что поле скоростей фильтрации может иметь ненулевые ротор и дивергенцию.

Краткое описание результатов

Получено интегральное представление для полей скорости и давления при фильтрационном течении вязкой жидкости, подчиняющейся закону Дарси-Бринкмана. Построены интегральные уравнения для следующих типов задач фильтрации: вязкое течение в однородной области, течение с всасыванием жидкости (ненулевой дивергенцией), задача сопряжения на границе разделов сред, потенциальное течение в двух областях со всасыванием, вязкое течение в системе областей со всасыванием. Построены численные схемы решения данных задач и разработан программный комплекс на языке Fortran95, реализующий данные схемы. Проведено тестирование численных схем на модельных примерах. Проведено сравнение результатов с известными экспериментальными данными по фильтрации лимфы в лимфоузле.

Научная новизна

Построенное интегральное представление для фильтрационного течения вязкой жидкости в кусочно-однородной области, подчиняющееся закону Дарси-Бринкмана, в том числе с учетом всасывания жидкости, является новым. На основе интегральных представлений впервые вписаны системы интегральных уравлений, моделирующие новые классы фильтрационных течений с учетом вязкости и с учетом всасывания. При этом исследованы новые постановки задач с нестандартными типами граничных условий.

Достоверность

Достоверность подтверждается внутренней проверкой получаемых численных решений путем контроля выполнения законов сохранения и граничных условий. Для некоторых частных постовок задачи корректность модели подтверждена строгими математическими результатами, оформленными в виде сформулированных и доказанных теорем. Для задачи фильтрации лимфы в лимфоузле со всасыванием проведено сравнение с экспериментальными данными.

Теоретическая значимость

Получены системы интегральных уравнений для новых классов фильтрационных течений, построены численные методы решения возникающих интегральных уравнений. Для ряда частных случаев получены такие результаты, как доказательство существования интегрального представления, доказательство разрешимости задачи, доказательство эквивалентности задачи и соответствующей системы интегральных уравнений.

Практическая значимость

Построенные математические модели могут быть использованы для моделирования течений вязкой жидкости в пористых средах в частности при моделировании фильтрации лимфы в лимфоузлах в рамках модели лимфатической системы.

Методология и методы исследования

В основе исследования лежит методология вычислительной математики. В работе применяется метод граничных интегральных уравнений для решения краевой задачи фильтрации вязкой жидкости. Для решения системы граничных интегральных уравнений используется численный метод кусочно-постоянных аппроксимаций и метод коллокаций.

Положения выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. Математическая модель стационарной фильтрации вязкой жидкости на основе интегральных уравнений, подчиняющаяся закону Дарси-Бринкмана, учитывающая так же абсорбцию жидкости с помощью уравнения Старлинга.

2. Теоремы о разрешимости задачи и связи решений краевой задачи и системы интегральных уравнений для некоторых постановок рассмотренных краевых задач.

3. Численная схема для решения системы интегральных уравнений, описывающих трехмерные фильтрационные течения вязкой жидкости, в том числе, с учетом абсорбции. а также варианты данной схемы для целого ряда комбинаций граничных условий на скорость и давление, в том числе, для задачи фильтрации лимфы в лимфоузле.

4. Комплекс программ на языке Fortran, реализующий разработанную

численную схему, и протестированный на модельных примерах и в задаче воспроизведения известного физического эксперимента.

Апробация

Были сделаны доклады на 6 конференциях.

- Доклад «Моделирование фильтрации вязкой жидкости в однородной среде» на конференции «Методы вычислений и математическая физика», Сочи, НТУ Сириус, 10 - 15 августа 2020 г.

- Доклад «Математическая модель фильтрации лимфы в лимфоузле» на VI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук», г. Орел, ОГУ им. И.С. Тургенева, 4 – 5 декабря 2020 г.

- Доклад «Численное моделирование фильтрационных течений вязкой жидкости в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений» на конференции «Ломоносовские чтения-2020» Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 20 - 24 октября 2020 г.

- Доклад «Моделирование дренажной функции лимфатического узла методом граничных интегральных уравнений» на конференции «Тихоновские чтения», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 25 октября 2021 г.

- Доклад «Моделирование фильтрации и абсорбции жидкости в лимфоузле методом граничных интегральных уравнений» на конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», Белгород, БелГУ, 25 - 29 октября 2021 г.

- Доклад «Математическое моделирование дренажной функции лимфатического узла с помощью нейронных сетей» на XIII конференции «Математические модели и численные методы в биологии и медицине», Москва, ИВМ РАН им. Г.И. Марчука, 2 - 3 ноября 2021 г.

Публикации

По данной теме были опубликованы 5 статей в журналах, индексируемых WoS, Scopus, RSCI [9, 32–35]. Статьи [9, 32, 33] посвящены моделированию фильтрации вязкой жидкости методом граничных интегральных уравнений. Статьи [34, 35] посвящены многомасштабному моделированию лимфатической системы, что включает в себя моделирование лимфатических узлов. В статье [9] личный вклад диссертанта состоит в непосредственном осуществлении доказательств всех утверждений. Физическая и математическая постановки задач принадлежит Г.А.Бочарову, идеи доказательств выдвинуты А.В.Сетухой В статье [32] автором проделана работа по построению и тестированию численной схемы решения системы интегральных уравнений. Работа [33] была полностью выполнена автором. В работе [34] автор провела исследование проводимости сети кондуитов в лимфоузле при поражении части кондуитов, алгоритм построения сети кондуитов разработан Р.С. Савинковым, прочие части работы принадлежат соавторам. В статье [35] автор проделала работу по построению графа лимфатической системы и выделению анатомических единиц, алгоритм воксельной аппроксимации принадлежит Р.С. Савинкову.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 98 страниц, включая 23 рисунка, 6 таблиц и список литературы из 52 наименований.

Содержание диссертации

В первой главе приведена общая постановка задачи фильтрации вязкой жидкости с учетом абсорбции, а также 5 частных случаев общей задачи.

1. Задача фильтрации вязкой жидкости в однородной области. Для данной задачи подробно описано построение интегрального представления решения, а также доказана теорема единственности интегрального

представления для решения краевой задачи, и теорема эквивалентности решения системы интегральных уравнений и краевой задачи.

2. Задача фильтрации вязкой жидкости в однородной области со смешанным граничным условием. Для данной задачи построено интегральное представление, отличающееся от решения предыдущей задачи наличием дополнительных уравнений на границе и неизвесной константы.

3. Задача сопряжения течения на границе разделов сред. Для данной задачи подробно описано построение интегрального предлставления и доказана эквивалентность интегрального представления решению краевой задачи. Также доказано существование и единственность решения системы интеральных уравений при определенном условии на гидравлические проводимости сред.

4. Задача сопряжения течения с учетом всасывания жидкости во внутренней области. Для данной задачи построено решение, позволяющее описывать абсорбцию жидкости в области фильтрации.

5. Задача потенциального течения жидкости в системе из двух областей с учетом абсорбции жидкости во внутренней области. Данная задача используется для описания фильтрации лимфы в лимофузле.

Для каждой краевой задачи строится интегральное представление скорости и давления фильтрующейся жидкости. Далее производится сведение краевой задачи к системе граничных интегральных уравнений.

Вторая глава посвящена численному методу решения интегральных уравнений. Сначала описывается построение расчетной сетки на поверхности и аппроксимация ядер интегральных операторов, далее строятся численные схемы для решения систем интегральных уравнений для общей и пяти упрощенных постановок задачи, после чего строится численная аппроксимация для полей скорости и давления.

Третья глава посвящена верификации моделей. Для задачи фильтрации вязкой жидкости в однородной области и задачи сопряжения течения на границе разделов сред проводится проверка выполнения граничного условия на поверхности путем экстраполяции значения из области на поверхность. Для задачи фильтрации жидкости в однородной области со смешанным граничным условием и для общей задачи проверка корректности решения проводится путем анализа выполнения законов сохранения. Для задачи потенциального течения с всасыванием проводится сравнение с экспериментальными данными по фильтрации и всасыванию лимфы в лимфоузле.

Благодарность

Автор выражает благодарность за научное руководство и постоянную поддержку в исследованиях Сетухе Алексею Викторовичу и Бочарову Геннадию Алексеевичу. Автор также благодарит академика РАН Тыртышникова Евгения Евгениевича. Автор благодарен сотрудникам Института Вычислительной Математики им. Г.И. Марчука Ставцеву С.Л. и Желткову Д.А. за помощь и советы при написании пакета программ, Савинкову Р.С. и Гребенникову Д.С. за совместную работу по построению многомасштабных моделей лимфоузла, а также Матвееву С.А., Будзинскому С.С., Петрову С.В. и Смирнову М.С. за моральную поддержку при работе над диссертацией. Работа была выполнена при поддержке гранта РНФ (проект №18-11-00171), а также Московского центра фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с МОиН №075-15-2019-1624).

Глава 1

Сведение краевой задачи фильтрации вязкой жидкости к системе граничных интегральных уравнений

При подготовке данной главы диссертации использованы публикации автора [9, 32], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

1.1 Основные определения

Сначала сформулируем определения и обозначения, связанные с используемыми далее функциональными пространствами на основе книг [21, 36].

Определение 1. Обозначим $C(\Omega)$, где Ω – некоторое компактное подмножество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, нормированное пространство функций, непрерывных на множестве Ω, с нормой

$$\|f(x)\|_C = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Определение 2. Функция f, определенная на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, называется непрерывной по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1]$, если существует положительная константа M, такая что

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha \text{ для всех } x, y \in \Omega.$$

Определение 3. Будем обозначать $C^{0,\alpha}(\Omega)$ – нормированное пространство всех функций, определенных на множестве Ω и непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1]$, в котором норма определяется формулой:

$$\|f\|_{0,\alpha} = \|f\|_C + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{j}(x)$ – векторное поле, заданное на множестве $\Omega \in \mathbb{R}^3$, т.е. $\boldsymbol{j}(x)$ есть функция, которая каждой точке $x \in \Omega$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{j} \in R^3$.

Определение 4. В случае, когда Ω – компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, будем обозначать $C_V(\Omega)$ – пространство непрерывных векторных полей $\boldsymbol{j}(x)$ на множестве Ω с нормой:

$$\|\boldsymbol{j}\|_C = \sup_{x\in\Omega} |\boldsymbol{j}(x)|.$$

Определение 5. Будем обозначать $C_V^{0,\alpha}(\Omega)$ – нормированное пространство векторных полей $\boldsymbol{j}(x)$ на множестве Ω, для которых определено следующее выраженние, опрделяющее норму:

$$\|\boldsymbol{j}\|_{0,\alpha} = \|\boldsymbol{j}\|_C + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\boldsymbol{j}(x) - \boldsymbol{j}(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Векторное поле $\boldsymbol{j} \in C_V^{0,\alpha}(\Omega)$, назовем непрерывным по Гельдеру на множестве Ω.

Определение 6. Пусть Σ – гладкая поверхность. Обозначим $C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$, $\alpha \in (0,1]$, – подпространство пространства $C_V^{0,\alpha}(\Sigma)$, состоящее из касательных векторных полей (т.е. элементами пространства $C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ являются касательные векторные поля $\boldsymbol{j} \in C_V^{0,\alpha}(\Sigma)$, для которых в каждой точке $x \in \Sigma$ выполнено условие $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, а норма определяется так же, как и в пространстве $C_V^{0,\alpha}(\Sigma)$).

Легко показать, что $C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ является полным пространством.

Определение 7. Пусть функция $g(x)$ задана на поверхности Σ. Будем называть поверхностным градиентом функции g в точке $x \in \Sigma$ вектор $\mathrm{Grad}\ g(x)$ такой, что

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}(x) \cdot \mathrm{Grad}\ g(x) = 0 \quad x \in \Sigma \\ g(x) - g(y) = (x - y) \cdot \mathrm{Grad}\ g(x) + o_x(y) \text{ при } y \in \Sigma, \end{cases}$$

$o_x(y) = \bar{o}(|x - y|)$, здесь и далее $\bar{o}(r)$ – бесконечно малая функция, более высокого порядка малости, чем r, при $r \to 0$.

Такое определение поверхностного градиента равносильно определению из книги [37] (стр. 45).

Определение 8. Пусть функция g задана в области Ω (или на поверхности Σ): $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ g$ (или $\boldsymbol{f} = \mathrm{Grad}\ g$ в случае поверхности) и $\boldsymbol{f} \in C^{0,\alpha}$ $\alpha \in (0, 1]$. Будем обозначать $C^{1,\alpha}(\Omega)$ – нормированное пространство всех таких функций с нормой:

$$\|g\|_{1,\alpha} = \|g\|_C + \|\boldsymbol{f}\|_C + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

В случае если функция $f(x)$ задана в области Ω и непрерывна по Гельдеру, ее можно однозначно продолжить по непрерывности на границу этой области, причем, нормы исходной функции и ее продолжения в пространствах $C_{0,\alpha}(\Omega)$ и $C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ совпадают. Поэтому определим нормрованное пространство $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ как совпадающее с пространством $C^{1,\alpha}(\Omega)$.

1.2 Общая постановка задачи

Пусть Ω – область фильтрации, ограниченная снаружи замкнутой гладкой поверхностью Σ_1. Предположим, что в области Ω имеется основная область Ω_1, для которой внешняя часть границы есть поверхность Σ_1, и включения $\Omega_2, ..., \Omega_{N_d}$. Пусть границами областей Ω_m являются гладкие замкнутые поверхности Σ^m, $m = 2, ..., N_d$. При этом $\Omega = \Omega_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup ...\bar{\Omega}_{Nd}$ и все области Ω_m, $m = 1, ..., N_d$, попарно не пересекаются (здесь использовано обозначение $\bar{\Omega}$ – замыкание множества Ω). Обозначим также $\Sigma_2 = \bigcup_{m=2}^{N_d} \Sigma^m$ – суммарная граница всех включений. Внешняя граничная поверхность Σ_1 разделена на три непересекающиеся части $\Sigma_1 = \Sigma_1^0 \bigcup \Sigma_1^q \bigcup \Sigma_1^p$, на Σ_1^0 задано условие отсутствия потока жидкости, на Σ_1^q задан поток жидкости, на Σ_1^p задано давление. На Σ_2 заданы условие непрерывности скорости и давления жидкости. Пример области фильтрации показан на Рисунке 1.1 (слева).

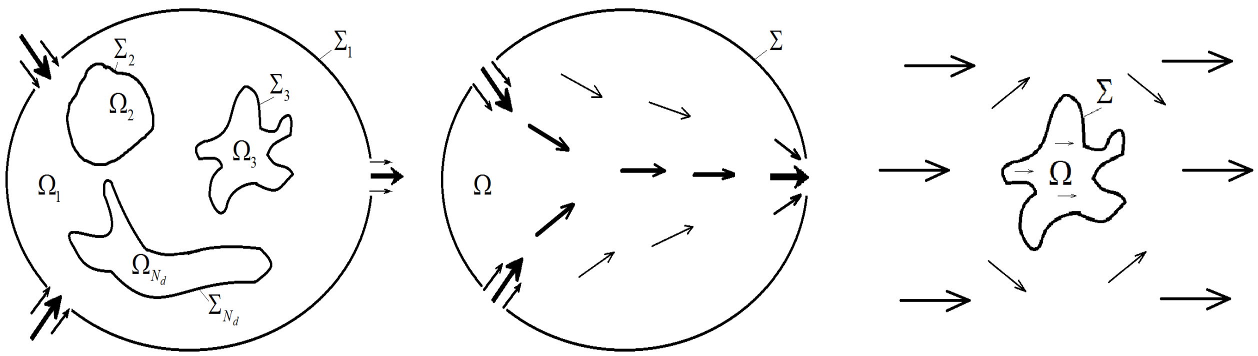

Рис. 1.1: Область фильтрации для общей постановки задачи (слева), задачи в области без включений (центр), и задачи сопряжения (справа)

Фильтрационное течение описывается Дарси-Бринкмана для скорости $\boldsymbol{v}$ и давления p жидкости, который приведен в статье [38]:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{\kappa}\boldsymbol{v} + \mu' \Delta \boldsymbol{v}$$

где κ – гидравлическая проводимость, μ – динамическая вязкость жидкости, μ' – эффективная вязкость жидкости. В работе [24] предложено считать $\mu' = \mu$. Такое же предположение делается в работе [8], где рассматривается модель лимфоузла. Всюду ниже мы полагаем $\mu' = \mu$.

Построение решения данной задачи будет идти от простого к сложному. Сначала будет рассмотрена задача фильтрации в области без включений (Рисунок 1.1, по центру), в двух вариантах: с граничным условием на поток вектора скорости жидкости через поверхность и задача со смешанным граничным на поток и давление жидкости. Далее рассматривется задача сопряжения течения на границе раздела сред (Рисунок 1.1, справа), всасывание жидкости описывается системой точечных источников или законом Старлинга. После этого будет построено решение общей задачи на основе решений упрощенных задач.

1.3 Вязкое течение в однородной области

Для начала рассмотрим следующую краевую задачу, описывающую фильтрацию жидкости в области $\Omega = \Omega_1$ без включений и источников, которая имеет границу $\Sigma = \Sigma^1$. Будем предполагать, что поверхность Σ ориентирована так, что положительной считается внешняя сторона. Обозначим $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$, $x \in \Sigma$ – орт внешней (положительной) нормали к поверхности Σ в точке x.

Для заданной функции $f_0 \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, $\alpha \in (0, 1]$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\Sigma} f_0 d\sigma = 0, \tag{1.1}$$

найти скалярную функцию давления $p \in C^2(\Omega) \bigcap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ и векторную функцию скорости фильтрации жидкости $\boldsymbol{v} \in C^2(\Omega) \bigcap C_V^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, такие, что фильтрационное течение удовлетворяет закону Дарси-Бринкмана [38]

$$\boldsymbol{v}(x) = -\frac{\kappa}{\mu}\nabla p(x) + \kappa\Delta\boldsymbol{v}(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

и уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

а также граничным условиям

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{v}^-(x) = f_0(\boldsymbol{x}) & x \in \Sigma \\ \boldsymbol{n}(x) \times \boldsymbol{v}^-(x) = 0 & x \in \Sigma \end{cases} \tag{1.4}$$

Заметим, что $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, следовательно $\Delta\boldsymbol{v} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. Значит поле скоростей раскладывается в сумму потенциального и соленоидального полей:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_s = \mathrm{grad}\,\left(-\frac{\kappa}{\mu}p\right) + \mathrm{rot}\,(-\kappa_i \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})$$

Предположим, что система (1.4) имеет решение $(\boldsymbol{v}\,, p)$ в указанном классе функций. Построим интегральное представление решения. Для этого исследуем потенциальную и соленоидальную составляющие поля $\boldsymbol{v}$.

Потенциальная составляющая. Потенциальная составляющая поля скоростей имеет вид

$$\boldsymbol{v}_p = \nabla\varphi, \quad \varphi(x) = -\frac{\kappa}{\mu}p(x).$$

При этом $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}_p = \Delta\varphi = 0$. Градиент функции φ имеет краевые значения на поверхности Σ. Поэтому мы можем построить на поверхности Σ функцию $f(x) = \partial\varphi/\partial n$, $x \in \Sigma$, причем, функция f удовлетворяет условию (1.1), т.к.

$$\int_{\Sigma} f\, d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = \int_{\Omega} \Delta\varphi d\sigma = 0.$$

Тогда функция φ явялется решением краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = f, & x \in \Sigma \end{cases} \tag{1.5}$$

Докажем что решение данной задачи можно представить в виде потенциала простого слоя.

Определение 9. Потенциалом простого слоя для уравнения Лапласа, размещенного на поверхности Σ, называется функция

$$W[\Sigma, h](x) = \int_{\Sigma} h(y)F(x-y)d\sigma_y, \quad F(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \tag{1.6}$$

где $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$, h – плотность потенциала простого слоя, которая есть функция, заданная на поверхности Σ.

Свойство 1. *(см. [37] §2.4, Теорема 2.12, стр. 58, §2.5, Теорема 2.17, стр. 62) Если $h \in C(\Sigma)$, то потенциал простого слоя $W[\Sigma, h](x)$ определен выражением (1.6) в том числе и при $x \in \Sigma$. При этом есть $W[\Sigma, h](x)$ есть функция, непрерывная по Гельдеру во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ с любым пока-*

зателем $\alpha \in (0, 1)$

$$W[\Sigma, h]^{\pm}(x) = W[\Sigma, h](x), \quad x \in \Sigma. \tag{1.7}$$

Если $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, *где* $\alpha \in (0, 1)$, *то градиент* $\nabla W[\Sigma, h]$ *функции* $W[\Sigma, h]$ *можно продолжить с сохранением непрерывности по Гельдеру на поверхность* Σ *как со стороны внутренней области* Ω, *так и со стороны внешней области* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. *При этом выполнены условия* $\nabla W[\Sigma, h] \in C_V^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\nabla W[\Sigma, h] \in C_V^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, *а для краевых значений градиента потенциала простого слоя справдедлива формула:*

$$\nabla W[\Sigma, h]^{\pm}(x) = \nabla W[\Sigma, h](x) \mp \frac{1}{2} h(x) \boldsymbol{n}(x) \qquad x \in \Sigma, \tag{1.8}$$

где $\nabla W[\Sigma, h](x)$ – *так называемое прямое значение градиента потенциала простого слоя, определяемое формулой*

$$\nabla W[\Sigma, h](x) = \int_{\Sigma} h(y) \nabla_x F(x - y) d\sigma_y, \quad x \in \Sigma,$$

интеграл понимается в смысле главного значения.

Заметим, что в силу свойства 1 для краевых значений нормальной производной потенцила простого слоя на поверхности Σ справедливо выражение:

$$\left(\frac{\partial W[\Sigma, h](x)}{\partial n} \right)^{\pm} = \int_{\Sigma} h(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} d\sigma_y \mp \frac{1}{2} h(x) +, \quad x \in \Sigma. \tag{1.9}$$

Из формулы (1.9) следует, что функция $\varphi = W[\Sigma, h]$, где $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, тогда и только тогда является решением краевой задачи (1.5), когда функция h является решением уравнения:

$$\frac{1}{2} h(x) + \int_{\Sigma} h(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma. \tag{1.10}$$

Свойство 2. *Рассмотрим оператор* $K[\Sigma, h]$, *ставящий в соответствие функции* h, *определенной на поверхности* Σ, *функцию*

$$K[\Sigma, h](x) = \int_{\Sigma} h(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} d\sigma_y, \quad x \in \Sigma. \tag{1.11}$$

Тогда для любого $\alpha \in (0,1)$ оператор $K[\Sigma, h] : C(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma)$ ограничен (см. [37] , стр.73).

Лемма 1. *Пусть функция f – удовлетворяет условиям $f \in C^{0,\alpha}$ и (1.1). Тогда уравнение (1.10) имеет и при том единственное решение, удовлетворяющее дополнительному условию*

$$\int_\Sigma h d\sigma = 0. \tag{1.12}$$

Для такой же правой части общее решение краевой задачи (1.5) имеет вид: $\varphi = W[\Sigma, h] + C$, где C – произвольная константа, $h \in C^{0,\alpha}$ – решение уравнений (1.10),(1.12).

Доказательство Утверждение этой леммы вытекает из классических результатов по приложению теории потенциала к краевым задачам для уравнения Лапласа. Известно (см., например, [39], стр. 420), что решение краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа (1.5) представляется в виде потенциала простого слоя и определено с точностью до постоянного слагаемого.

Уравнение (1.10) разрешимо в пространстве $C(\Sigma)$, если правая часть удовлетворяет условию (1.1), причем, общее решение имеет вид $h = h' + Ah_0$, где h' – некоторое частное решение, A – произвольная константа, h_0 – решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.10), причем это однородное уравнение имеет ровно 1 независимое решение [39](стр. 419). Из свойства 2 и равенства $h_0 = -2K[\Sigma, h_0]$ заключаем, что $h_0 \in C^{0,\alpha}$ для любого $\alpha \in (0,1)$.

Докажем, что условие (1.12) позволяет выделить единственное решение уравнения (1.10). Для этого достаточно доказать, что

$$\int_\Sigma h_0 d\sigma \neq 0. \tag{1.13}$$

Действительно, функция $\varphi_0(x) = W[\Sigma, h_0]$ равна ненулевой константе в области Ω (см., например, [39], стр. 419). Обозначим эту константу C_0 и пусть для определенности $C_0 > 0$. Покажем, что в этом случае $h_0(x) \geq 0$ при всех $x \in \Sigma$. Если предположить противное, то, учитывая равенство $(\partial\varphi_0/\partial n)^- = 0$, из формулы (1.9) заключаем, что $(\partial\varphi_0/\partial n)^+(x) = -h_0(x) > 0$. Но тогда в области вне поверхности Σ в окрестности точки x найдется точка y, такая, что $\varphi_0(y) > \varphi_0(x)$. Поскольку $\varphi_0 = C_0$ на поверхности Σ и $\varphi_0 \to 0$ на бесконености, заключаем, что y – внутренняя точка локального экстремума, что противоречит принципу максимума [39] (стр. 365). Тогда формула (1.13) верна.

Таким образом, уравнения (1.10),(1.12) имеют единственное решение $h \in C(\Sigma)$. Опираясь на свойство 2 снова заключаем, что при условии $f \in C^{0,\alpha}$ выполнено условие $h \in C^{0,\alpha}$. Лемма доказана.

Соленоидальная составляющая Исследуем соленоидальную составляющую $\boldsymbol{v}_s$ поля скоростей. Используя первое и второе уравнения системы (1.4), можем записать:

$$\boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_p - \kappa \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_s) \Rightarrow \boldsymbol{v}_s = -\kappa \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_s \Rightarrow \boldsymbol{v}_s + \kappa\Delta\boldsymbol{v}_s = 0$$

Тогда векторное поле $\boldsymbol{v}_s$ является решением в области Ω_1 следующей системы уравнений:

$$\Delta\boldsymbol{v}_s - \beta^2\boldsymbol{v}_s = 0, \tag{1.14}$$

$$\nabla\boldsymbol{v}_s = 0, \tag{1.15}$$

где $\beta = 1/\sqrt{\kappa}$.

Для анализа уравнений (1.14)-(1.15) воспользуемся известными результатами из теории граничных интегральных уравнений электродинамики. Это можно сделать, если заметить следующую аналогию. Обозначим $k = i\beta$, и введем, вообще говоря, комплексные функции $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}_s$, $\boldsymbol{H} = i\beta \operatorname{rot}\boldsymbol{v}_s$. Тогда уравнения (1.14)-(1.15) можно записать в виде :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} - ik\boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + ik\boldsymbol{E} = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

Последние уравнения есть уравнения Максвелла для пространственных составляющих монохроматического электрического ($\boldsymbol{E}$) и магнитного ($\boldsymbol{H}$) полей [37] (стр. 123).

Поэтому для построения интегрального представления решения уравнений (1.14)-(1.15) применим известное выражение электрического и магнитного полей через поверхностные токи (см. [37] Глава 4).

Возьмем фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца:

$$F_\beta(x-y) = \frac{\exp\{-\beta|x-y|\}}{4\pi|x-y|} = \frac{\exp\{ik|x-y|\}}{4\pi|x-y|}$$

Пусть $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ – касательное векторное поле на поверхности Σ (т.е. $\boldsymbol{j}(x)\boldsymbol{n}(x) = 0$). Рассмотрим векторный потенциал:

$$\boldsymbol{A}(x) = \int_\Sigma \boldsymbol{j}(y)\, F_\beta(x-y) d\sigma_y \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$$

Векторное поле $\boldsymbol{A}$ является решением векторного уравнения Гельмгольца (1.14), но, вообще говоря, не обязано удовлетворять уравнению (1.15). Будем искать поле $\boldsymbol{v}_s$ в виде $\boldsymbol{v}_s = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Определение 10. Векторным потенциалом R векторного поля $\boldsymbol{j}$, заданного на поверхности Σ, и касательного к данной поверхности, будем называть оператор, определенный следующим выражением

$$R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}](x) = \int_\Sigma \operatorname{rot}_x (\boldsymbol{j}(y)\, F_\beta(x-y))\, d\sigma_y, \quad F_\beta(x-y) = \frac{\exp\{-\beta|x-y|\}}{4\pi|x-y|}, \tag{1.17}$$

гда $\beta \in \mathbb{R}$ – некоторая константа.

Положим $\boldsymbol{v}_s = R[\Sigma, \boldsymbol{j}]$, тогда этом уравнение (1.15) выполнено автоматически. Уравнение (1.14) также выполнено, в силу следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{u}_s = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_s = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \\ = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) = \operatorname{rot}(\Delta \boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

Т.к. поле $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет уравнению (1.14), заключаем:

$$\Delta \boldsymbol{v}_s = \beta^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \beta^2 \boldsymbol{v}_s.$$

Поле $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}](x)$ определено и удовлетворяет уравнениям (1.14) и (1.15) на множестве $\mathbb{R} \setminus \Sigma$ для любого касательного поля $\boldsymbol{j} \in C_T(\Sigma)$. При этом справделиво

Свойство 3. *(см. [37] §2.6, Теорема 2.24, стр. 69) Если $\boldsymbol{j} \in C^{0,\alpha}_T(\Sigma)$ есть касательное векторное поле на поверхности Σ, то на поверхности Σ существуют краевые значения векторного поля $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$, для которых справедливо выражение:*

$$R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]^{\pm}(x) = R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}](x) \mp \frac{1}{2}\boldsymbol{n}(x) \times \boldsymbol{j}(x) \quad x \in \Sigma, \tag{1.18}$$

где $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}](x)$ – прямое значение функции R, под которым понимается значение, получаемое непосредственно из формулы (1.17) для рассматриваемой точки x, причем, интеграл в этом выражении понимается в смысле главного значения. При этом для каждой из областей Ω и $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ функцию $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$ можно продолжить по непрерывности на поверхность Σ так, что $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}] \in C^{0,\alpha}_V(\bar{\Sigma})$ и $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}] \in C^{0,\alpha}_V(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$, соответственно.

Теперь преположим, что функция $\boldsymbol{v}_s \in C^{0,\alpha}_V(\bar{\Omega})$ – решение уравнений (1.14)-(1.15). Тогда на поверхности Σ определено касательное поле $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_s$, причем $\boldsymbol{c} \in C^{0,\alpha}_T(\Sigma)$. Значит мы можем рассматривать поле $\boldsymbol{v}_s$ как решение краевой задачи для системы (1.14)-(1.15) с условием

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{c}, \quad x \in \Sigma. \tag{1.19}$$

В силу свойства 3 заключаем, что функция $\boldsymbol{v}_s = R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$, где $\boldsymbol{j} \in C^{0,\alpha}_T(\Sigma)$ является решением краевой задачи (1.14),(1.15),(1.19) тогда и только тогда, когда функция $\boldsymbol{j}$ является решением уравнения:

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}(x) + \int_\Sigma \boldsymbol{n}(x) \times rot_x\left(\boldsymbol{j}(y)\, F_\beta(x-y)\right) d\sigma_y. = c(x)\,, \quad x \in \Sigma. \tag{1.20}$$

Справедливо и более сильное утверждение:

Лемма 2. *Для любой функции $\boldsymbol{c} \in C^{0,\alpha}_T(\Sigma)$ уравнение (1.20) имеет и при этом единственное решение $\boldsymbol{j} \in C^{0,\alpha}_T(\Sigma)$. При этом краевая задача (1.14),(1.15),(1.19) так же имеет единственное решение в классе функций $\boldsymbol{v}_s \in C^2(\Omega) \cup C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, причем, это решение представляется в виде $\boldsymbol{v}_s = R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$.*

Доказательство. Рассматриваемая задача (1.14),(1.15),(1.19) равносильна краевой задаче для уравнений (1.16) в области Ω с граничным условием

$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{c}$ на поверхности Σ. Известно, что, во-первых, каждому решению такой задачи с однородным граничным условием (т.е. с $\boldsymbol{c} = 0$) соответствует единственное решение интегрального уравнения (1.20) с нулевой правой частью (см [37] Теорема 4.23, стр. 144). Во-вторых, такая задача однозначно разрешима при $Im(k) > 0$ (см [37] (Теорема 4.16, стр. 139)). Тогда решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.20), единственно. Заметим, что при $\boldsymbol{j} \in C(\Sigma)$ интеграл в уравнении (1.20) сходится как несобственный. При этом оператор, ставящий в соответствие функции $j \in C(\Sigma)$ функцию $\boldsymbol{n} \times R_\beta[\Sigma, h]$ на поверхности Σ, расссматриваемый как оператор, действующий из пространства $C(\Sigma)$ в себя, компактен (см. [37], теорема 2.26, стр.70 и теорема 2.32, стр.74). По альтернативе Фредгольма уравнение (1.20) разрешимо для любой правой части $\boldsymbol{c} \in C(\Sigma)$. При выполнении условия $\boldsymbol{c} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ функция $\boldsymbol{j}$ – решение уравнения (1.20), автоматически удовлетворяет условию $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ (см. [37], следствие 4.20, стр.142). Тогда задача (1.14),(1.15),(1.19) однозначано разрешима, а ее решение представляется в виде $\boldsymbol{v}_s = R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$. Лемма доказана.

Формулировка граничных интегральных уравнений. Теперь мы можем сформулировать теорему об эквивалентности интегрального представления решению краевой задачи.

Теорема 3. *Если существуют функции $\boldsymbol{v}$ и p – решение краевой задачи (1.4) в сформулированном классе функций, то существуют единственные функции h и $\boldsymbol{j}$, такие, что $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, h удовлетворяет условию (1.12), $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$, $\boldsymbol{j}$ – касательное векторное поле на поверхности Σ, и*

$$\boldsymbol{v}(x) = \nabla W[\Sigma, h](x) + R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}](x), \quad x \in \Omega \tag{1.21}$$

$$p(x) = -\frac{\mu}{\kappa} W[\Sigma, h](x) + C_0, \quad x \in \Omega, \tag{1.22}$$

где C_0 – некоторая константа.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{v}$ и функцию p, являющиеся решением системы (1.4). Разделим поле $\boldsymbol{v}$ на потенциальное и соленоидальное поля $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_s$. Данное разделение определяется однозначно: $\boldsymbol{v}_s = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_s$.

Сначала рассмотрим соленоидальную составляющую $\boldsymbol{v}_s$. Как было показано ранее, первые два уравнения системы (1.4) приводят к системе (1.14). Добавим к данной системе условие $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_s^- = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_p^-$, и заметим что $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}_p^- \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$. По лемме 2 поле $\boldsymbol{v}_s$ представляется в виде $\boldsymbol{v}_s = R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$, $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$, касательное векторное поле.

Перейдем к потенциальной составляющей. Поле $\boldsymbol{v}_p$ имеет вид $\boldsymbol{v}_p = \nabla\varphi$, $\varphi = -\kappa\, p/\mu$, причем, из предположений о решении рассматриваемой краевой задачи следует условие $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. Тогда потенциал φ является решением краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа (1.5) с правой частью $f = f_0 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}_s$, причем, $f \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, функция f удовлетворяет условию (1.1). По лемме 1 рассматриваемый потенциал φ, как одно из решений такой задачи, представляется в виде $\varphi = W[\Sigma, h] + C$, где C – некоторая константа, $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$ – решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условию (1.12). При этом функция h определяется однозначно.
Теорема доказана.

Итак, будем искать решение системы (1.2)–(1.4) в виде (1.21)-(1.22). Уравнения (1.2), (1.3) выполняются автоматически. Из формул (1.8) и (1.18) для краевых значений операторов $R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}]$ и $W[\Sigma, h]$ следует, что для выполнения граничных условий (1.4) должны выполняться следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}h + \boldsymbol{n} \cdot \nabla W[\Sigma^1, h] + \boldsymbol{n} \cdot R_\beta[\Sigma^1, \boldsymbol{j}] = f_0, \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{n} \times \nabla W[\Sigma^1, h] + \boldsymbol{n} \times R_\beta[\Sigma^1, \boldsymbol{j}] = 0, \qquad x \in \Sigma. \\ \int_\Sigma h(y) d\sigma_y = 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

Из свойств 1 и 3 следует

Теорема 4. *Если $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ – решение системы (1.23), то функции $\boldsymbol{v}$ и p, определяемые формулами (1.21)-(1.22) с произвольной константой C_0 образуют решение задачи (1.2)–(1.4) в сформулированном классе функций.*

Заметим, что функция p в задаче (1.2)–(1.4) не однозначна – добавление произвольной константы к функции p не нарушает уравнения системы (1.2)–(1.4).

1.4 Течение в однородной области со смешанным граничным условием

Пусть Ω – область фильтрации, ограниченная снаружи замкнутой гладкой поверхностью Σ. Граничная поверхность разделена на три непересекающиеся части $\Sigma = \Sigma^0 \bigcup \Sigma^q \bigcup \Sigma^p$, на Σ^0 задано условие непротекания, на Σ^q задан поток жидкости, на Σ^p задано давление. Полагаем $\Sigma^p \neq \emptyset$, так как в противном случае задача совпадает с предыдущей.

Фильтрация жидкости в Ω описывается законом Дарси-Бринкмана [38] для неизвестных полей $\boldsymbol{v}$ – скорости фильтрации жидкости и p – давления жидкости (1.2). Также требуется выполнение уравнения неразрывности (1.3). На границе области фильтрации Σ ставятся условия на поток или давление жидкости и условие непроскальзывания, обусловленное наличием вязкости.

$$\boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{v}^-(x) = f_0(x), \quad x \in \Sigma, \tag{1.24}$$

$$\boldsymbol{n}(x) \times \boldsymbol{v}^-(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \tag{1.25}$$

$$p^-(x) = \psi(x), \quad x \in \Sigma_1^p. \tag{1.26}$$

Поток вектора скорости $f_0(x)$ в точке $x \in \Sigma$ задан на компонентах Σ^0 и Σ^q, и является неизвестным на компоненте Σ^p поверхности Σ_1. Давление $\psi(x)$ задано на компоненте Σ^p, для определенности полагаем $\psi = 0$ на компонентах Σ^0 и Σ^q. Для упрощения вводится дополнительная переменная $\xi(x)$ – скорость течения жидкости на компоненте поверхности Σ^p, $\xi = 0$ на компонентах Σ^0 и Σ^q. Полагается что $f_0(x) = 0$ при $x \in \Sigma^p$. Тогда уравнение (1.24) переписывается следующим образом:

$$\boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{v}^-(x) - \xi(x) = f_0(x), \quad x \in \Sigma. \tag{1.27}$$

Аналогично предыдущей задаче, для полей скоростей и давлений в области Ω справедливы интегральные представления (1.21), (1.22).

Для нахождения неизвестной константы C_0 в выражении для давления (1.22) используется следующий подход: вместо давления p рассматривается смещенное давление $\tilde{p}$ и константа p_{add}.

$$p = \tilde{p} + p_{add}, \tag{1.28}$$

$$\tilde{p} = -\frac{\mu}{\kappa} W[\Sigma, h]. \tag{1.29}$$

где плотность потенциала удовлетворяет условию (1.12). Данная замена не влияет на поле скоростей, поскольку $\nabla p = \nabla \tilde{p}$. Однако дополнительное условие на плотность потенциала в выражении для $\tilde{p}$ позволяет уменьшить численную ошибку. Вместо условия $p = \psi$ на Σ^p будет записываться условие (1.12) на плотность потенциала h, а также следующее уравнение

$$\tilde{p}(x_1) - \tilde{p}(x_0) = \psi(x_1) - \psi(x_0), \quad x_1, \in \Sigma^p, x_1 \neq x_0$$

где x_0 некоторая фиксированная точка на поверхности Σ^p. Как было показано ранее, интегральные операторы W, ∇W, R имеют граничные значения на поверхности S, определяемые формулами (1.7), (1.8) и (1.18). Система граничных интегральных уравнений, соответствующая системе (1.25)–(1.27):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}h + \boldsymbol{n} \cdot \nabla W[\Sigma, h] + \boldsymbol{n} \cdot R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}] - \xi = f_0, \quad x \in \Sigma \\ -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{n} \times \nabla W[\Sigma, h] + \boldsymbol{n} \times R_\beta[\Sigma, \boldsymbol{j}] = 0, \quad x \in \Sigma \\ \displaystyle\int_\Sigma h(x)dx = 0 \\ W[\Sigma, h](x) - W[\Sigma, h](x_0) = -\dfrac{\kappa}{\mu}(\psi(x) - \psi(x_0)), \quad x \in \Sigma^p, x \neq x_0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Решив данную систему относительно неизвестных плотностей потенциалов h, $\boldsymbol{j}$, можно получить поле скоростей $\boldsymbol{v}$ и смещенное давление $\tilde{p}$ по формулам (1.21), (1.29). После того, как найдено $\tilde{p}$ можно найти константу p_{add} по формуле

$$p_{add} = \psi(x_0) + \frac{\mu}{\kappa} W[\Sigma, h](x_0), \quad x_0 \in \Sigma^p. \tag{1.31}$$

Далее исходное давление p находится по формуле (1.28).

1.5 Сопряжение течения на границе разделов сред

Рассмотрим следующую задачу сопряжения течений во внешней и внутренней областях. Пусть задана замкнутая поверхность Σ. Обозначим в этом разделе внешнюю (неограниченную) область Ω_1, а внутреннюю область Ω_2. Будем предполагать, что поверхность Σ ориентирована так, что положительной считается внешняя сторона. Обозначим $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$, $x \in \Sigma$ – орт внешней (положительной) нормали к поверхности Σ в точке x.

В обеих областях для поля скоростей фильтрации выполняется закон Дарси-Бринкмана и уравнение неразрывности, а на границе раздела областей – поверхности Σ, скорость и давление непрерывны. Во внешней и внутренней области присутствуют точечные источники, инициирующие течение жидкости.

Неизвестное поле скоростей ищется в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}, \tag{1.32}$$

где $\boldsymbol{v}_0$ – первичное поле, создаваемое системой точечных источников:

$$\boldsymbol{v}_0(x) = \sum_{l=1}^{N_s} \frac{Q_l}{4\pi} \frac{x - q_l}{|x - q_l|}. \tag{1.33}$$

Это поле представляется в виде:

$$\boldsymbol{v}_0(x) = \nabla\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \sum_{l=1}^{N_s} \frac{1}{4\pi} \frac{Q_l}{|x - q_l|}. \tag{1.34}$$

Вместе с полем давления

$$p_0(x) = -\frac{\mu}{\kappa_i}\varphi_0(x), \tag{1.35}$$

Неизвестное распределение давления будем искать в виде:

$$p = p_0 + \tilde{p}. \tag{1.36}$$

Таким образом, ищутся полные поля скорости $\boldsymbol{v}$ и давления p вида (1.32) и (1.36), соответственно, где $\boldsymbol{v}_0$ и p_0 – заданные функции, определяемые формулами (1.33), (1.34),(1.35), $\boldsymbol{u}$ и $\tilde{p}$ – неизвестные функции, которые в обеих областях должны удовлетворять закону Дарси-Бринкмана

$$\boldsymbol{u}(x) = -\frac{\kappa_m}{\mu}\nabla\tilde{p}(x) + \kappa_m\Delta\boldsymbol{u}(x), \quad x \in \Omega_m\,,\ m = 1, 2, \tag{1.37}$$

и уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad x \in \Omega_m\,,\ m = 1, 2, \tag{1.38}$$

а также граничным условиям:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}^+(x) = \boldsymbol{v}^-(x), & x \in \Sigma, \\ p^+(x) = p^-(x), & x \in \Sigma. \end{cases} \tag{1.39}$$

Здесь κ_m – коэффициент гидравлической проводимости пористой среды Ω_m, $m = 1, 2$, μ – динамическая вязкость жидкости. Поля $\boldsymbol{u}$ и $\tilde{p}$ определены в областях Ω_1 и Ω_2 и для каждой из этих областей должны иметь продолжение по непрерывности на поверхность Σ так, что $\boldsymbol{u} \in C^2(\Omega) \cap C_V^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$,
$p \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $m = 1, 2$.

Вторичное поле скоростей $\boldsymbol{u}$ представим в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{u}_s$, где $\boldsymbol{u}_p = \nabla\varphi$ – потенциальная составляющая, $\boldsymbol{u}_s$ – соленоидальная составляющая, причем, $\varphi = \kappa_m p/\mu$, $\boldsymbol{u}_s = -\kappa_m \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ в области Ω_m, $m = 1, 2$.

Определение 11. Потенциалом двойного слоя для уравнения Лапласа $U[\Sigma, g]$ с плотностью g, заданной на поверхности Σ называется следующий интегральный оператор

$$U[\Sigma, g](x) = \int_\Sigma g(y)\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y}d\sigma_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma. \tag{1.40}$$

Потенциал φ будем искать в виде:

$$\varphi = W[\Sigma, h] + U[\Sigma, g] \quad x \in x \in \Omega_m\,,\ m = 1, 2, \tag{1.41}$$

где $W[\Sigma, h]$ потенциал простого слоя, заданный формулой (1.6), а $U[\Sigma, g]$

потенциал двойного слоя.

Соленоидальную составляющую поля скоростей будем искать в виде $\boldsymbol{u}_s(x) = R_{\beta_m}[\Sigma, \boldsymbol{j}](x)$, где оператор R определяется формулой (1.17), и $\beta_m = 1/\kappa_m$, $m = 1, 2$.

Сформулируем основные известные и используемые далее свойства потенциала двойного слоя.

Свойство 4. *(см. [37], теоремы 2.13, 2.21-2.23 стр. 59, 66-69) Потенциал двойного слоя с плотностью $g \in C(\Sigma)$, определеный выражением (1.40) в точках пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$, является на этом можестве гармонической функцией. Для каждой из областей Ω_1 – внешней и Ω_2 – внутренней по отношению к поверхности Σ, потенциал двойного слоя $U[\Sigma, g]$ может быть продолжен по непрерывности на поверхность Σ со стороны этой области. При этом для любого $\alpha \in (0, 1)$ выполнены условия $U[\Sigma, g] \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $U[\Sigma, g] \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ и для краевых значений функции $U[\Sigma, g]$ на поверхности Σ справедливо выражение:*

$$U[\Sigma, g](x)^{\pm} = U[\Sigma, g](x) \pm \frac{g(x)}{2} \qquad x \in \Sigma, \tag{1.42}$$

где $U[\Sigma, g](x)$ – прямое значение потенциала двойного слоя, получаемое при $x \in \Sigma$ непосредственно из выражения (1.40).

Если плотность потенциала двойного слоя удовлетворяет условию $g \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$, то для каждой из областей Ω_1 и Ω_2 векторное поле $\nabla U[\Sigma, h]$ можно продолжить по непрерывности на поверхность Σ со стороны этой области. При этом выполнены условия $U[\Sigma, g] \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_m)$, $m = 1, 2$ и для краевых значений градиента функции $U[\Sigma, h]$ справедлива формула:

$$\nabla U[\Sigma, g]^{\pm}(x) = \nabla U[\Sigma, g](x) \pm \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\, g(x) \quad x \in \Sigma. \tag{1.43}$$

Под прямым значением градиента потенциала двойного слоя на границе понимается выражение

$$\nabla U[\Sigma, g](x) = -\int_{\Sigma} \nabla_x F(x-y) \times [\mathrm{Grad}\, g(y) \times n(y)] d\sigma_y \quad x \in \Sigma. \tag{1.44}$$

Из свойства 4, в частности, следует равенство:

$$\left(\frac{\partial U[\Sigma, g]}{\partial n_x}\right)^+ = \left(\frac{\partial U[\Sigma, g]}{\partial n_x}\right)^-, \qquad x \in \Sigma.$$

Таким образом, вторичное поле скоростей ищем в виде:

$$\boldsymbol{u} = \nabla W[\Sigma, h] + \nabla U[\Sigma, g] + R_{\beta_m}[\Sigma, \boldsymbol{j}] \quad x \in \Omega_m\,,\ m = 1, 2 \tag{1.45}$$

При этом давление $\tilde{p}$ ищется в виде

$$\tilde{p}(x) = -\frac{\mu}{\kappa_m}\left(W[\Sigma, h] + U[\Sigma, g]\right) \text{ при } \quad x \in \Omega_m\,,\ m = 1, 2. \tag{1.46}$$

Теперь, если $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, $g \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ и $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ ($\boldsymbol{j}$ – касательное векторное поле), и вторичные поля $\boldsymbol{u}$ и $\tilde{p}$ имеют вид (1.45), (1.46), то в силу свойств 1, 3, 4 полные поле скоростей и поле давлений имеют на поверхности Σ краевые значения, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^\pm = \nabla\varphi_0 + \nabla W[\Sigma, h] \mp \frac{1}{2}h\boldsymbol{n} + \\ + \nabla U[\Sigma, h] \pm \frac{1}{2}\operatorname{Grad} g + R_{\beta_m}[\Sigma, \boldsymbol{j}] \mp \frac{1}{2}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$p^\pm = -\frac{\mu}{\kappa_m}\left(W[\Sigma, h] + U[\Sigma, g] \pm \frac{1}{2}g + \varphi_0\right) \qquad x \in \Sigma, \tag{1.48}$$

где $m(+) = 1$, $m(-) = 2$.

Тогда из граничных условий задачи (1.39) получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} g + \delta\left(W[\Sigma, h] + U[\Sigma, g]\right) = -\delta\varphi_0, \\ -h + \boldsymbol{n} \cdot \left(R_1[\Sigma, \boldsymbol{j}] - R_2[\Sigma, \boldsymbol{j}]\right) = 0, \\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{n} \times \left(\operatorname{Grad} g + R_1[\Sigma, \boldsymbol{j}] - R_2[\Sigma, \boldsymbol{j}]\right) = 0, \end{cases} \qquad x \in \Sigma, \tag{1.49}$$

где $\delta = 2\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1}$.

При этом из свойств 1, 3, 4 следует

Теорема 5. *Если функции $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, $g \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ и касательное вектор-*

ное поле $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$ являются решением системы интегральных уравнений (1.49), $\alpha \in (0,1)$, то поле скоростей $\boldsymbol{u}$ и поле давлений $\tilde{p}$, определяемые формулами (1.45)-(1.46) являются решением задачи (1.37)–(1.39).

Теперь рассмотрим вопрос о разрешимости уравнений (1.49). Ниже доказывается, что эти уравнения являются однозначно разрешимыми, по крайней мере, при достаточно малом различии коэффициентов проводимости κ_1 и κ_2, по сравнению со значениями самих этих коэффициентов. Это удается сделать применением теоремы о сжимающем отображении.

При выводе оценок будем предполагать, что рассматриваются положительные коэффициенты κ_1 и κ_2, удовлетворяющие неравенствам:

$$\kappa_1 \leq M_0, \quad \kappa_2 \leq M_0, \quad \frac{1}{\kappa_1} \leq M_0, \quad \frac{1}{\kappa_1} \leq M_0, \tag{1.50}$$

где M_0 – некоторая положительная константа.

Сформулируем некоторые дополнительные свойства операторов W, U, R_m, $m = 1, 2$.

Свойство 5. *Пусть h и g есть функции, заданные на поверхности Σ. Рассмотрим операторы W и U, ставящие в соответствие функциям h и g новые функции $W[\Sigma, h]$ и $U[\Sigma, g]$ на поверхности Σ, определяемые выражениями (1.6) и (1.40), соответственно, при $x \in \Sigma$. Тогда для любой константы $\alpha \in (0,1)$:*

1. *$W : C(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma)$ ограничен, $W : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C^{1,\alpha}(\Sigma)$ ограничен.*
2. *$U : C(\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\Sigma)$ ограничен, $U : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C^{1,\alpha}(\Sigma)$ ограничен.*

Это свойство основано на результатах, приведенных в [37] § 2.7, стр. 72-74.

Рассмотрим оператор DR, который касательному полю $\boldsymbol{j}$ на поверхности Σ ставит в соответствие векторную функцию $DR[\Sigma, \boldsymbol{j}]$, определенную на поверхности Σ, по формуле

$$DR[\Sigma, \boldsymbol{j}](x) = R_1[\Sigma, \boldsymbol{j}](x) - R_2[\Sigma, \boldsymbol{j}](x), \quad x \in \Sigma. \tag{1.51}$$

Лемма 6. *При $\alpha \in (0,1]$ оператор $DR : C_T^{0,\alpha}(\Sigma) \longrightarrow C_V^{0,\alpha}(\Sigma)$ ограничен. При этом найдется константа C, зависящая от поверхности Σ, параметра α*

и контанты M_0 в оценках (1.50) такая, что

$$\|DR\| \le C|\kappa_1 - \kappa_2|.$$

Доказательство. Будем обозначать через C константы, зависящие от поверхности Σ, параметра α и контанты M_0 в оценках (1.50), причем, в различных оценках значение константы C может быть различным.

Для разности операторов R_1 и R_2 в формуле (1.51) справедливо выражение:

$$R_1[\Sigma, \boldsymbol{j}] - R_2[\Sigma, \boldsymbol{j}] = \int_\Sigma \boldsymbol{j}(y) \times \boldsymbol{Q}(x,y) d\sigma_y, \quad \boldsymbol{Q}(x,y) = \nabla_x \frac{e^{-\beta_1|x-y|} - e^{-\beta_2|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

где $\beta_m = 1/\sqrt{\kappa_m}$, $m = 1, 2$.

Рассмотрим функцию $\Phi(r) = (1 - e^{-r})/r$, $r \in [0, \infty)$. Эта функция имеет ограниченные производные всех порядков на промежутке $[0, \infty)$. Функция $\boldsymbol{Q}(x,y)$ представляется виде:

$$\boldsymbol{Q}(x,y) = \frac{1}{4\pi} \nabla_x \left(\beta_1 \Phi(\beta_1 r) - \beta_2 \Phi(\beta_2 r) \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\beta_1^2 \Phi'(\beta_1 r) - \beta_2^2 \Phi'(\beta_2 r) \right) \boldsymbol{\tau},$$

где $r = |x-y|$, $\boldsymbol{\tau} = \frac{x-y}{r}$. Тогда

$$|\boldsymbol{Q}(x,y)| \le C \left| \beta_1 - \beta_2 \right|.$$

Рассмотрим разность $\boldsymbol{Q}(x,y) - \boldsymbol{Q}(z,y)$, $x, z, y \in \Sigma$. Обозначим $r_x = |x-y|$, $r_z = |z-y|$, $\boldsymbol{\tau}_x = (x-y)/r_x$, $\boldsymbol{\tau}_z = (z-y)/r_z$. Тогда

$$\boldsymbol{\tau}_x - \boldsymbol{\tau}_z = \frac{(x-y)}{r_x} - \frac{(z-y)}{r_z} = \frac{(x-z)}{r_x} + (z-y)\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_z}\right) = \frac{(x-z)}{r_x} + \boldsymbol{\tau}_z \frac{r_z - r_x}{r_x}.$$

Отсюда следует оценка:

$$|\boldsymbol{\tau}_x - \tau_z| \le C \frac{|x-z|}{|x-y|}.$$

Используя формулу

$$\Phi'(\beta r_x) - \Phi'(\beta r_z) = \beta\,(r_x - r_z)\int_0^1 \Phi''(\beta(r_z + \xi(r_x - r_z)))d\xi,$$

получаем оценку:

$$|\boldsymbol{Q}(x,y) - \boldsymbol{Q}(z,y)| \le C\frac{|x-z|\,|\beta_1-\beta_2|}{|x-y|},\quad x,y,z\in\Sigma,\ x\ne y,\ z\ne y.$$

Тогда для оператора DR справедливы оценки:

$$|DR[\Sigma,\boldsymbol{j}](x)| \le C\,|\beta_1-\beta_2|\,\|\boldsymbol{j}\|_C\,,\quad x\in\Sigma,$$

$$|DR[\Sigma,\boldsymbol{j}](x) - DR[\Sigma,\boldsymbol{j}](z)| \le C\,|x-z|\,|\beta_1-\beta_2|\,\|\boldsymbol{j}\|_C\,,\quad x,z\in\Sigma.$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Теорема 7. *Для рассматриваемой поверхности Σ, константы M_0 из условий (1.50) и константы $\alpha\in(0,1)$ найдется $\delta_0>0$ такое, что при*

$$|\kappa_1-\kappa_2|<\delta_0 \tag{1.52}$$

существует единственное решение системы (1.49) в классе функций $h\in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, $g\in C^{1,\alpha}(\Sigma)$, $\boldsymbol{j}\in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$.

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (1.49). Перепишем его в виде:

$$(I+\delta U)g = f,\quad f = -\delta(Wh+\varphi_0), \tag{1.53}$$

U и W– операторы, рассмотренные с свойстве 5. Если $h\in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, то $f\in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ в силу свойства 5. Из свойства 5 следует, что оператор U можно рассматривать как ограниченный опрератор, действующий из пространства $C^{1,\alpha}(\Sigma)$ в себя. Тогда найдется такое $\delta_0>0$, что при условии (1.52) выполнена оценка $\|\delta U\|\ <1/2$, где норма взята как для оператора: $C^{1,\alpha}(\Sigma)\to C^{1,\alpha}(\Sigma)$.

При этом существует обратный оператор $(I+\delta U)^{-1} : C^{1,\alpha}(\Sigma) \to C^{1,\alpha}(\Sigma)$,

$$(I+\delta U)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty}(-\delta U)^n, \quad \|(I+\delta U)^{-1}\| \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\|\delta U\|^n \le 2.$$

Теперь исключим неизвестную функцию g из уравнений (1.49).

Введем оператор $B = Grad(I+\delta U)^{-1}W$. С учетом свойства 5, оператор $W : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C^{1,\alpha}(\Sigma)$, оператор $(I+\delta U)^{-1} : C^{1,\alpha}(\Sigma) \to C^{1,\alpha}(\Sigma)$. Кроме того, операцию $Grad$ можно рассматривать как оператор $Grad : C^{1,\alpha}(\Sigma) \to C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$. Тогда оператор $B : C^{0,\alpha}(\Sigma) \to C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$, причем, оператор B при этом ограничен. Выражая неизвестную функцию g через неизвестную функцию h из уравнения (1.53), систему (1.49) можем переписать в виде:

$$\begin{cases} -h + \boldsymbol{n} \cdot DR\boldsymbol{j} = 0 \\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{n} \times DR\boldsymbol{j} - \delta\boldsymbol{n} \times Bh = \delta\boldsymbol{a}, \end{cases} \tag{1.54}$$

где $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \times Grad(I+\delta U)^{-1}\varphi_0$, причем, $\boldsymbol{a} \in C_T^{0,\alpha}(\Sigma)$.

Пусть L линейное пространство элементов $\psi = (h, \boldsymbol{j})^T$: $h \in C^{0,\alpha}$, $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}$ с нормой
$\|\psi\| = \|h\|_{0,\alpha} + \|\boldsymbol{j}\|_{0,\alpha}$. Запишем систему (1.54) в матричном виде:

$$\psi + A\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta\boldsymbol{a} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{n} \cdot DR \\ -\delta\boldsymbol{n} \times B & \boldsymbol{n} \times DR \end{pmatrix}$$

Опять обозначаем через C константы, зависящие от поверхности Σ, параметра α и контанты M_0 в оценках (1.50), причем, в различных оценках значение константы C может быть различным. В силу леммы 6 выполнены свойства: оператор $n \cdot DR : C^{0,\alpha} \to C^{0,\alpha}$, $n \times DR : C^{0,\alpha} \to C_T^{0,\alpha}$ и при этом $\|n \cdot DR\| \le C|\kappa_1 - \kappa_2|$, $\|n \times DR\| \le C|\kappa_1 - \kappa_2|$. Тогда оператор $A : L \to L$ и $\|A\| \le C|\kappa_1 - \kappa_2|$. Значит найдется константа δ_0 такая, что при условии (1.52) выполнено условие $\|A\| < 1$. Но в этом случае уравнения (1.54) однозначно разрешимы относительно функций $h \in C^{0,\alpha}$, $\boldsymbol{j} \in C_T^{0,\alpha}$. Функция $g \in C^{1,\alpha}$ однозначно находится из уравнения (1.53).

Теорема доказана.

1.6 Задача сопряжения с всасыванием

Рассмотрим задачу сопряжения течения на границе разделов сред с учетом всасыания жидоксти во внутренней области. Пусть задана замкнутая поверхность Σ. Обозначим в этом разделе внешнюю (неограниченную) область Ω_1, а внутреннюю область Ω_2.

Скорость и давления заданы как сумма известного первичного поля и неизвестного вторичного поля (1.32), (1.36). Пусть первичные поля $\boldsymbol{v_0}$ и p_0 заданы таким образом, что для них выполнены закона Дарси и уравнение неразрывности:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v_0}(x) = -\frac{\kappa_i}{\mu}\nabla p_0(x), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v_0}(x) = 0, \end{cases} \qquad x \in \Omega_i,\ i = 1, 2. \tag{1.55}$$

В частности, $\boldsymbol{v_0}$ и p_0 могут быть полями индуцируемыми точечными источниками, заданными выражениями (1.33), (1.35) Заметим, что первичное поле давлений p_0 непрерывно во всей области Ω, а поле скоростей $\boldsymbol{v_0}$ претерпевает разрыв на границе Σ.

Фильтрация жидкости описывается законом Дарси-Бринкмана для неизвестных полей $\boldsymbol{v}$ – скорости фильтрации жидкости и p – давления жидкости (1.37). Во внешней области выполнено уравнение неразрывности, во внутренней происходит сток жидкости

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad x \in \Omega_1, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = -L(\tilde{p} - p_v), \quad x \in \Omega_2. \end{cases} \tag{1.56}$$

где L – коэффициент всасывания жидкости, p_v – известное давление в системе с которой происходит обмен жидкостью.

На границе области фильтрации Σ ставятся условия непрерывности суммарной скорости жидкости и суммарного давления (1.39), что равносильно следующим условиям для вторичных полей

$$\tilde{p}^+ = \tilde{p}^-, \qquad x \in \Sigma; \tag{1.57}$$

$$\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^- = -(\boldsymbol{v_0}^+ - \boldsymbol{v_0}^-), \qquad x \in \Sigma. \tag{1.58}$$

Поле скоростей $\boldsymbol{u}$ раскладывается в сумму потенциального $\boldsymbol{v}_p$ и соленоидального $\boldsymbol{v}_s$ полей.

$$\boldsymbol{v}_p = \operatorname{grad}\left(\kappa_i \operatorname{div}\boldsymbol{v} - \frac{\kappa_i}{\mu}p\right) \tag{1.59}$$

$$\boldsymbol{v}_s = -\kappa_i \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \tag{1.60}$$

Соленоидальная составляющая в области Ω_m, $m = 1, 2$, так же как и в предыдущих задачах, выражается через оператор R: $\boldsymbol{v}_s = R_{\beta_m}[\Sigma, \boldsymbol{j}]$, где $\beta_m = 1/\sqrt{\kappa_m}$. Далее будет описано построение интегрального представлния для потенциальной составляющей.

В области Ω_1 $\operatorname{div} v = 0$ (из уравнения (1.56)), следовательно

$$\boldsymbol{v}_p = -\operatorname{grad}\frac{\kappa_1}{\mu}p = \operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi = -\frac{\kappa_1}{\mu}p$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_p = \Delta\varphi = 0, \qquad x \in \Omega_1$$

Во внешней области потенциал φ является решением уравнения Лапласа, поэтому мы будем строить для него интегральные представление, используя поверхностные потенциалы простого (1.6) и двойного слоя (1.40).

Во внутренней области для построения решения проводятся следующие преобразования:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_p = \nabla\left(\kappa_i \nabla\cdot\boldsymbol{v}_p - \dfrac{\kappa_i}{\mu}p\right) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}_p = -L(p - p_v) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi = -\left(\kappa_i L + \dfrac{\kappa_i}{\mu}\right)p \\ \Delta\varphi - \lambda^2\varphi = Lp_v \end{cases}, \quad \lambda^2 = \frac{L\mu}{\kappa_2(1 + L\mu)}.$$

Потенциал φ является решением неоднородного уравнения Гельмгольца. Решение строится как сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частным решением является константа

$$\varphi_v = -\frac{L}{\lambda^2}p_v$$

Общим решением однородного уравнения являются потенциалы простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца.

Определение 12. Потенциалом простого слоя для уравнения Гельмгольца, размещенного на поверхности Σ, называется функция

$$W_\lambda[\Sigma, h](x) = \int_\Sigma h(y) F_\lambda(x-y) d\sigma_y, \quad F(x-y) = \frac{\exp\{-\lambda|x-y|\}}{4\pi|x-y|}, \qquad (1.61)$$

где $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$, h – плотность потенциала простого слоя, которая есть функция, заданная на поверхности Σ.

Свойство 6. *(см. [37] §2.4, Теорема 2.12, стр. 58, §2.5, Теорема 2.17, стр. 62) Если $h \in C(\Sigma)$, то потенциал простого слоя $W[\Sigma, h](x)$ определен выражением (1.61) в том числе и при $x \in \Sigma$. При этом есть $W[\Sigma, h](x)$ есть функция, непрерывная по Гельдеру во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ с любым показателем $\alpha \in (0, 1)$*

$$W_\lambda[\Sigma, h]^\pm(x) = W_\lambda[\Sigma, h](x), \quad x \in \Sigma. \qquad (1.62)$$

Если $h \in C^{0,\alpha}(\Sigma)$, где $\alpha \in (0, 1)$, то градиент $\nabla W[\Sigma, h]$ функции $W[\Sigma, h]$ можно продолжить с сохранением непрерывности по Гельдеру на поверхность Σ как со стороны внутренней области Ω, так и со стороны внешней области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. При этом выполнены условия $\nabla W[\Sigma, h] \in C_V^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\nabla W[\Sigma, h] \in C_V^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, а для краевых значений градиента потенциала простого слоя справедлива формула:

$$\nabla W_\lambda[\Sigma, h]^\pm(x) = \nabla W_\lambda[\Sigma, h](x) \mp \frac{1}{2} h(x) \boldsymbol{n}(x) \qquad x \in \Sigma, \qquad (1.63)$$

где $\nabla W_\lambda[\Sigma, h](x)$ – так называемое прямое значение градиента потенциала простого слоя, определяемое формулой

$$\nabla W_\lambda[\Sigma, h](x) = \int_\Sigma h(y) \nabla_x F_\lambda(x-y) d\sigma_y, \quad x \in \Sigma,$$

интеграл понимается в смысле главного значения.

Определение 13. Потенциалом двойного слоя для уравнения Гельмгольца $U_\lambda[\Sigma, g]$ с плотностью g, заданной на поверхности Σ называется следующий интегральный оператор

$$U_\lambda[\Sigma, g](x) = \int_\Sigma g(y) \frac{\partial F_\lambda(x-y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma. \qquad (1.64)$$

Свойство 7. *(см. [37], теоремы 2.13, 2.21-2.23 стр. 59, 66-69) Потенциал двойного слоя с плотностью $g \in C(\Sigma)$, определеный выражением (1.64) в точках пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$, является на этом можестве гармонической функцией. Для каждой из областей Ω_1 – внешней и Ω_2 – внутренней по отношению к поверхности Σ, потенциал двойного слоя $U_\lambda[\Sigma, g]$ может быть продолжен по непрерывности на поверхность Σ со стороны этой области. При этом для любого $\alpha \in (0,1)$ выполнены условия $U_\lambda[\Sigma, g] \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $U_\lambda[\Sigma, g] \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ и для краевых значений функции $U_\lambda[\Sigma, g]$ на поверхности Σ справедливо выражение:*

$$U_\lambda[\Sigma, g](x)^{\pm} = U_\lambda[\Sigma, g](x) \pm \frac{g(x)}{2} \qquad x \in \Sigma, \tag{1.65}$$

где $U_\lambda[\Sigma, g](x)$ – прямое значение потенциала двойного слоя, получаемое при $x \in \Sigma$ непосредственно из выражения (1.64).

Если плотность потенциала двойного слоя удовлетворяет условию $g \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$, то для каждой из областей Ω_1 и Ω_2 векторное поле $\nabla U_\lambda[\Sigma, h]$ можно продолжить по непрерывности на поверхность Σ со стороны этой области. При этом выполнены условия $U_\lambda[\Sigma, g] \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_m)$, $m = 1, 2$ и для краевых значений градиента функции $U_\lambda[\Sigma, h]$ справедлива формула:

$$\nabla U_\lambda[\Sigma, g]^{\pm}(x) = \nabla U_\lambda[\Sigma, g](x) \pm \frac{1}{2}\mathrm{Grad}\, g(x), \quad x \in \Sigma. \tag{1.66}$$

Под прямым значением градиента потенциала двойного слоя на границе понимается выражение

$$\begin{aligned} \nabla U_\lambda[\Sigma, g](x) = \int_\Sigma [\mathrm{Grad}\, g(y) \times n(y)] \times \nabla_x F(x-y) d\sigma_y - \\ - \lambda^2 \int_{\partial\Sigma} F(x-y) n(y) g(y), \quad x \in \Sigma. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Здесь $\partial\Sigma$ – край поверхности Σ (если Σ есть замкнутая поверхность, второй интеграл в выражении (1.67) равен нулю).

Интегральные представления скорости и давления. Вторичные поля скоростей и давлений в областях Ω_1, Ω_2 определяются следующими уравнениями:

$$\varphi = U_{\lambda_m}[\Sigma, g] + W_{\lambda_m}[\Sigma, h] - \chi_{\Omega_2}\frac{p_v}{\alpha_m}, \tag{1.68}$$

$$\boldsymbol{v} = \nabla U_{\lambda_m}[\Sigma, g] + \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma, h] + R_{\beta_m}[\Sigma, \boldsymbol{j}], \tag{1.69}$$

$$p = -\alpha_m\left(U_{\lambda_m}[\Sigma, g] + W_{\lambda_m}[\Sigma, h]\right) + \chi_{\Omega_2} p_v. \tag{1.70}$$

Здесь χ_{Ω_2} – индикатор области Ω_2, вспомогательные праметры α_m, β_m, λ_m приведены в Таблице 1.1.

Ω_1	$\lambda_1 = 0$	$\alpha_1 = \frac{\mu}{\kappa_1}$	$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}}$
Ω_2	$\lambda_2 = \sqrt{\frac{L\mu}{\kappa_2(1+L\mu)}}$	$\alpha_2 = \frac{\mu}{\kappa_2(1+L\mu)}$	$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$

Таблица 1.1: Вспомогательные параметры, выражающиеся через основные праметры модели: κ_m – гидравлическая проводимость области Ω_m, $m = 1, 2$, μ – динамическая вязкость жидкости, L – коэффициент всасывания.

Система интегральных уравнений, соответствующая граничным условиям (1.57)–(1.58):

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} g + \alpha_1 U_0 - \alpha_2 U_\lambda + \alpha_1 W_0 - \alpha_2 W_\lambda = -p_v, \tag{1.71}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla U_0 - \nabla U_\lambda) - h + \boldsymbol{n} \cdot (\nabla W_0 - \nabla W_\lambda) + \boldsymbol{n} \cdot (R_{\beta_1} - R_{\beta_2}) = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\mu} \boldsymbol{n} \cdot \nabla p_0, \tag{1.72}$$

$$\begin{split}\boldsymbol{n} \times \operatorname{Grad} g + \boldsymbol{n} \times (\nabla U_0 - \nabla U_\lambda) + \boldsymbol{n} \times (\nabla W_0 - \nabla W_\lambda) + \\ + j + \boldsymbol{n} \times (R_{\beta_1} - R_{\beta_2}) = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\mu} \boldsymbol{n} \times \nabla p_0.\end{split} \tag{1.73}$$

После того, как система (1.71)–(1.73) решена относительно неизвестных плотностей потенциалов h, g, $\boldsymbol{j}$, вторичные поля скорости и давления в областях Ω_1, Ω_2 находятся по формулам (1.69), (1.70), а суммарные поля скорости и давления по формулам (1.32), (1.36).

1.7 Потенциальное течение в двух областях

Пусть $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ – область фильтрации, ограниченная снаружи замкнутой гладкой поверхностью Σ_1. Σ_2 – граница между внешней, более проницаемой областью Ω_1 и внутренней, менее проницаемой областью Ω_2. Пример расчетной области приведен на Рисунке 3.21 справа.

Фильтрация жидкости в обеих областях описывается законом Дарси для неизвестных полей скорости $\boldsymbol{v}$ и давления p. Во внешней области выполнено уравнение неразрывности, во внутренней области происходит всасывание по закону Старлинга.

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(x) = -\dfrac{\kappa_i}{\mu}\nabla p(x) \quad x \in \Omega_i,\ i = 1,2. \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}(x) = -L_b A(p(x) - p_b + \sigma \cdot \Delta\pi), \quad x \in \Omega_2; \end{cases} \tag{1.74}$$

Даннная краевая задача описывает фильтрацию лимфы в лимфоузле с учетом всасывание в кровеносную систему (КС). Закон Старлинга описывает фильтрацию и абсорбцию жидкости в каппилярах. Данный закон был использован в моделях лимфоузла [7, 8]. Параметры модели: κ_i – коэффициент гидравлической проводимости в области Ω_i, $i = 1, 2$, μ – динамическая вязкость лимфы, L_b – коэффициент всасывания в кровь, A – площадь поверхности кровеносных сосудов, p_b – давление в КС, $\Delta\pi$ средняя разность онкотического давления в крови и лимфе, σ – коэффициент онкотического отражения.

Внешняя граница разделяется на три части: отверстия афферентных (входных) сосудов, в которых задан поток лимфы (Σ^q), отверстия эфферентных (выходных) сосудов, в которых задано давление (Σ^p) и непроницаемая внешняя граница, поток лимфы через которую равен нулю (Σ^0). $\Sigma_1 = \Sigma^0 \bigcup \Sigma^q \bigcup \Sigma^p$. Внутренняя граница Σ_2 однородна, давление и нормальная компонента вектора скорости должны быть непрерывны на данной границе.

Как и предыдущих задачах, будем предполагать, что каждая из поверхностей Σ_m, $m = 1, 2$, ориентирована так, что положительной считается внешняя сторона. Обозначим $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$, $x \in \Sigma_m$, $m = 1, 2$, – орт внешней (положительной) нормали к поверхности Σ_m в точке x.

На границах областей ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{v}^-(x) - \xi(x) = f_0(x), & x \in \Sigma_1; \\ p^-(x) = \psi(x), & x \in \Sigma^p; \\ \boldsymbol{n}(x) \cdot (\boldsymbol{v}^+(x) - \boldsymbol{v}^-(x)) = 0, & x \in \Sigma_2; \\ p^+(x) - p^-(x) = 0, & x \in \Sigma_2. \end{cases} \tag{1.75}$$

Здесь $f_0(x)$ – известная скорость течения лимфы, $f_0(x) \equiv 0, x \notin \Sigma^q$. $\psi(x)$ – известное давление на Σ^p. В систему граничных условий вводится дополнительная переменная $\xi(x)$ – неизвестный поток вектора скорости течения через поверхность Σ^p, $\xi(x) \equiv 0, x \notin \Sigma^p$.

Для упрощения записи введем обозначения:

$$\alpha_i = \frac{\mu}{\kappa_i}, \quad L = L_b A, \quad p_v = p_b - \sigma \cdot \Delta\pi$$

Данная задача является объединением задач, описаных в пунктах 1.4 и 1.6, с учетом того, что поле скоростей потенциально. Поле скоростей и давлений в областях Ω_1, Ω_2 ищются в следующем виде:

$$\boldsymbol{v} = \nabla W_{\lambda_i}[\Sigma_1, h] + \nabla U_{\lambda_i}[\Sigma_2, g] + \nabla W_{\lambda_i}[\Sigma_2, h], \tag{1.76}$$

$$p = -\alpha_i \left(W_{\lambda_i}[\Sigma_1, h] + U_{\lambda_i}[\Sigma_2, g] + W_{\lambda_i}[\Sigma_2, h] \right) + \chi_{\Omega_2} p_v. \tag{1.77}$$

Здесь $\lambda_1 = 0$ в Ω_1 и $\lambda_2 = \sqrt{L\alpha_2}$ в Ω_2, χ_{Ω_2} – индикатор области Ω_2.

При построении решения использованы следующие интегральные операторы: $W_\lambda[S, h]$ – потенциал простого слоя с плотностью h, $U_\lambda[S, g]$ – потенциал двойного слоя с плотностью g, определенные ранее формулами (1.61), (1.64).

Поля скоростей и давлений в виде (1.76)–(1.77) удовлетворяют системе (1.74). Вид решения (1.76)–(1.77) подставляется в граничные условия (1.75). Возникает система интегральных уравнений для неизвестных плотностей потенциалов простого и двойного слоя h, g

$$\frac{h^1}{2} + \boldsymbol{n} \cdot \nabla W_0[\Sigma_1, h] + \boldsymbol{n} \cdot \nabla U_0[\Sigma_2, h] + \boldsymbol{n} \cdot \nabla W_0[\Sigma_2, h] - \xi = f_0 \tag{1.78}$$

$$\alpha_1 W_0[\Sigma_1, h] - \alpha_2 W_\lambda[\Sigma_1, h] + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} g +$$
$$+ \alpha_1 U_0[\Sigma_2, h] - \alpha_2 U_\lambda[\Sigma_2, h] + \alpha_1 W_0[\Sigma_2, h] - \alpha_2 W_\lambda[\Sigma_2, h] = -p_v \quad (1.79)$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla W_0[\Sigma_1, h] - \nabla W_\lambda[\Sigma_1, h]) + \boldsymbol{n} \cdot (\nabla U_0[\Sigma_2, h] - \nabla U_\lambda[\Sigma_2, h]) -$$
$$- h^2 + \boldsymbol{n} \cdot (\nabla W_0[\Sigma_2, h] - \nabla W_\lambda[\Sigma_2, h]) = 0 \quad (1.80)$$

Решение системы h, g подставляется в уравнения (1.76), (1.77), что позволяет получить поля скорости и давления в области фильтрации Ω

1.8 Вязкое течение в системе областей

Пусть Ω – область фильтрации, ограниченная снаружи замкнутой гладкой поверхностью Σ_1. Предположим, что в области Ω имеется основная область Ω_1, для которой внешняя часть границы есть поверхность Σ_1, и области $\Omega_2, ..., \Omega_{N_d}$ – пористые включения. Пусть границами областей Ω_m являются гладкие замкнутые поверхности Σ^m, $m = 2, ..., N_d$. При этом $\Omega = \Omega_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup ...\bar{\Omega}_{Nd}$ и все области Ω_m, $m = 1, ..., N_d$, попарно не пересекаются (здесь использовано обозначение $\bar{\Omega}$ – замыкание множества Ω). Обозначим также $\Sigma_2 = \bigcup_{m=2}^{N_d} \Sigma^m$ – суммарная граница всех включений. Будем предполагать, что каждая из поверхностей Σ^m, $m = 1, ..., N_d$, ориентирована так, что положительной считается внешняя сторона. Обозначим $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$, $x \in \Sigma^m$, $m = 1, ..., N_d$, – орт внешней (положительной) нормали к поверхности Σ^m в точке x.

Внешняя граничная поверхность Σ_1 разделена на три непересекающиеся части $\Sigma_1 = \Sigma_1^0 \bigcup \Sigma_1^q \bigcup \Sigma_1^p$, на Σ_1^0 задано условие отсутствия потока жидкости, на Σ_1^q задан поток жидкости, на Σ_1^p задано давление. На Σ_2 заданы условие непрерывности скорости и давления жидкости.

Предполагается, что фильтрация жидкости в Ω описывается законом Дарси-Бринкмана [38] для неизвестных полей $\boldsymbol{v}$ – скорости фильтрации жидкости и p – давления жидкости

$$\boldsymbol{v}(x) = -\frac{\kappa_m}{\mu} \nabla p(x) + \kappa_m \Delta \boldsymbol{v}(x), \quad x \in \Omega_m, \ m = 1, \ldots, N_d. \quad (1.81)$$

где κ_m – коэффициент гидравлической проводимости пористой среды Ω_m, μ – динамическая вязкость жидкости.

Предполагается, что в областях Ω_m, $m = 2, ..., N_d$ происходит всасывание жидкости в пористую среду, которое описывается законом, устанавливающим связь между дивергенцией скорости фильтрационного течения и давлением. Во внешней области Ω_1 всасывание и приток жидкости отсутствуют. При этом поле скоростей жидкости должно подчиняться уравнениям:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, & x \in \Omega_1, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = -L_m(p - p_v^m), & x \in \Omega_m, \ m = 2, \ldots, N_d. \end{cases} \tag{1.82}$$

где L_m – коэффициент всасывания жидкости, p_m^0 – известное давление, $m = 2, ..., N_d$.

На границе Σ_1 ставятся условия на поток или давление жидкости и условие непроскальзывания, обусловленное наличием вязкости.

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{v}^-(x) - \xi = f_0(x), & x \in \Sigma_1, \\ \boldsymbol{n}(x) \times \boldsymbol{v}^-(x) = 0, & x \in \Sigma_1, \\ p^-(x) = \psi(x), & x \in \Sigma_1^p. \end{cases} \tag{1.83}$$

Поток вектора скорости $f_0(x)$ в точке $x \in \Sigma_1$ таков, что $f_0(x) \equiv 0$ при $x \notin \Sigma^q$. Давление $\psi(x)$ задано на компоненте Σ_1^p, для определенности полагаем $\psi(x) \equiv 0, x \notin \Sigma^p$. Приток или сток жидкости определяется не только потоком через внешнюю границу, но и всасыванием во внутренних областях, причем поток в область всасывания неизвестен. Наличие на внешней поверхности области Σ_1^p, поток через которую также неизвестен позволяет модели удовлетворять закону сохранения масс.

На границе Σ_2 ставятся условия непрерывности давления и нормальной и касательной составляющих скорости жидкости.

$$\begin{cases} p^+ - p^- = 0, & x \in \Sigma_2; \\ \boldsymbol{n}(x) \cdot (\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-) = 0, & x \in \Sigma_2 \\ \boldsymbol{n}(x) \times (\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-) = 0, & x \in \Sigma_2. \end{cases} \tag{1.84}$$

Заметим, что условие непрерывности касательной компоненты скорости обусловлено наличием вязкости.

Для валидации модели в дальнейшем будет использован закон сохранения масс, записывающийся следующим образом:

$$\int_{\Sigma_1^q} f_0(x)dx + \int_{\Sigma_1^p} \xi(x)dx = \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{n}(x) \cdot \boldsymbol{v}^+(x)dx \tag{1.85}$$

Интеграл в правой части равен дивергенции вектора скорости жидкости в области $\Omega_2 \cup ... \cup \Omega_{Nd}$.

Интегральное представление для скорости и давления. Уравнения (1.81)–(1.82) позволяют разложить поле скоростей на потенциальную $\boldsymbol{v}_p$ и соленоидальную $\boldsymbol{v}_s$ составляющие в каждой из областей Ω_m:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_s,\\
&\boldsymbol{v}_p = \operatorname{grad}\left(-\frac{\kappa_m}{\mu}p + \kappa_m \operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)\\
&\boldsymbol{v}_s = \operatorname{rot}\left(-\kappa_m \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\right).
\end{aligned}$$

Уравнение (1.82) позволяет записать систему уравнений для $\boldsymbol{v}_p$. Запишем эту систему единообразно для всех областей Ω_m, положив $L_1 = 0$ и $p_1^0 = 0$.

$$\begin{cases}
\boldsymbol{v}_p = \operatorname{grad}\left(-\dfrac{\kappa_m}{\mu}p + \kappa_m \operatorname{div}\boldsymbol{v_p}\right), \\
\operatorname{div}\boldsymbol{v}_p = -L_m(p - p_v^m),
\end{cases} \quad x \in \Omega_m,\ m = 1, \dots, N_d.$$

Выразив скорость через давление $\boldsymbol{v}_p = -\frac{\nabla p}{\alpha_m}$, можно получить для давления неоднородне уравнение Гельмгольца.

$$\Delta p - (L_m\alpha_m)p = -L_m\alpha_m p_v^m, \quad \alpha_m = \frac{\mu}{\kappa_m(1 + L_m\mu)},\ m = 1, \dots, N_d. \tag{1.86}$$

Мы будем строить решение неоднородного уравнения Гельмгольца как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного. Частным решением уравнения Гельмгольца в Ω_m является $p = p_m^0$, $m = 2, \dots, N_d$.

Обозначим $\lambda_m^2 = L_m\alpha_m$. Общим решениее однородного уравнения Гельмгольца (1.86) в области Ω_m являются $W_{\lambda_m}[S, h]$ – потенциал простого слоя с плотностью h, и $U_{\lambda_m}[S, g]$ – потенциал двойного слоя с плотностью g, размещенные на внешней и внутренней поверхности S, в качестве которой могут быть выбраны поверхность Σ_1, либо одна из поверхностей Σ^m, $m = 2, ..., N_d$. Следует заметить, что во внешней области с $L_1 = 0$ и $p_1^0 = 0$, т.е. уравнение (1.86) является однородным уравнением Лапласа. Потенциалы $W_{\lambda_1}[S, h](x)$, $U_{\lambda_1}[S, g](x)$ с $\lambda_1 = 0$ являются лапласовскими потенциалами в точках $x \in \Omega_1$.

Соленоидальная составляющая поля скоростей является решением векторного однородного уравнения Гельмгольца в каждой из областей Ω_m, решением которого является векторный потенциал $R_{\beta_m}[\Sigma^m, \boldsymbol{j}]$, задаваемый формулой (1.17), где $\boldsymbol{j}$ – касательное векторное поле на поверхности Σ^m, $\beta_m = 1/\sqrt{\kappa_m}$.

Поле скоростей и давление в областях Ω_m, $m = 1, \ldots, N_d$ будем искать в виде:

$$\boldsymbol{v} = \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma_1, h] + R_{\beta_m}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}] + \nabla U_{\lambda_m}[\Sigma_2, g] + \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma_2, h] + R_{\beta_m}[\Sigma_2, \boldsymbol{j}]; \tag{1.87}$$

$$p = -\alpha_m \left(W_{\lambda_m}[\Sigma_1, h] + U_{\lambda_m}[\Sigma_2, g] + W_{\lambda_m}[\Sigma_2, h]\right) + p_v^m. \tag{1.88}$$

Записанные скорость $\boldsymbol{v}$ и давление p удовлетворяют уравнениям (1.81) и (1.82) в областях Ω_m, $m = 1, \ldots, N_d$.

Граничные интегральные уравнения. Подставив краевые значения интегральных операторов в системы граничных условий (1.83)–(1.84) мы получаем следующие интегральные уравнения: уравнение на нормальную компоненту вектора скорости на внешней границе Σ_1

$$\frac{1}{2}h + \boldsymbol{n} \cdot \nabla W_0[\Sigma_1, h] + \boldsymbol{n} \cdot R_{\beta_1}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}] + \\ + \boldsymbol{n} \cdot \nabla U_0[\Sigma_2, g] + \boldsymbol{n} \cdot \nabla W_0[\Sigma_2, h] + \boldsymbol{n} \cdot R_{\beta_1}[\Sigma_2, \boldsymbol{j}] - \xi = f_0, \tag{1.89}$$

уравнение на касательную компоненту вектора скорости на Σ_1

$$\boldsymbol{n} \times \nabla W_0[\Sigma_1, h] - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{n} \times R_{\beta_1}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}] + \\ + \boldsymbol{n} \times \nabla U_0[\Sigma_2, g] + \boldsymbol{n} \times \nabla W_0[\Sigma_2, h] + \boldsymbol{n} \times R_{\beta_1}[\Sigma_2, \boldsymbol{j}] = 0, \quad (1.90)$$

уравнение на давление на части внешней границы Σ_1^p

$$W_0[\Sigma_1, h](x_2) + U_0[\Sigma_2, g] + W_0[\Sigma_2, h] = \frac{\kappa_1}{\mu}\psi, \quad (1.91)$$

уравнение на давление на границе Σ^m, $m = 2, \ldots, N_d$

$$\alpha_1 W_0[\Sigma_1, h] - \alpha_m W_{\lambda_m}[\Sigma_1, h] + \frac{\alpha_1 + \alpha_m}{2} g + \alpha_1 U_0[\Sigma^m, h] - \alpha_m U_{\lambda_m}[\Sigma^m, h] + \\ + \alpha_1 W_0[\Sigma^m, h] - \alpha_m W_{\lambda_m}[\Sigma^m, h] = -p_v^m, \quad (1.92)$$

уравнение на нормальную компоненту вектора скорости на Σ^m, $m = 2, \ldots, N_d$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla W_0[\Sigma_1, h] - \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma_1, h]) + \boldsymbol{n} \cdot (R_{\beta_1}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}] - R_{\beta_m}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}]) + \\ + \boldsymbol{n} \cdot (\nabla U_0[\Sigma^m, g] - \nabla U_{\lambda_m}[\Sigma^m, g]) - h + \boldsymbol{n} \cdot (\nabla W_0[\Sigma^m, h] + \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma^m, h]) + \\ + \boldsymbol{n} \cdot (R_{\beta_1}[\Sigma^m, \boldsymbol{j}] - R_{\beta_m}[\Sigma^m, \boldsymbol{j}]) = 0, \quad (1.93)$$

уравнение на касательную компоненту вектора скорости на Σ^m, $m = 2, \ldots, N_d$

$$\boldsymbol{n} \times (\nabla W_0[\Sigma_1, h] - \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma_1, h]) + \boldsymbol{n} \times (R_{\beta_1}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}] - R_{\beta_m}[\Sigma_1, \boldsymbol{j}]) + \\ + \boldsymbol{n} \times \operatorname{Grad} g + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{n} \times (\nabla U_0[\Sigma^m, g] - \nabla U_{\lambda_m}[\Sigma^m, g]) + \\ + \boldsymbol{n} \times (\nabla W_0[\Sigma^m, h] - \nabla W_{\lambda_m}[\Sigma^m, h]) + \boldsymbol{n} \times (R_{\beta_1}[\Sigma^m, \boldsymbol{j}] - R_{\beta_m}[\Sigma^m, \boldsymbol{j}]) = 0. \quad (1.94)$$

Если функции h, g и $\boldsymbol{j}$ являются решением системы граничных интегральных уравнений (1.89)–(1.94), то скорость и давление, определяемые формулами (1.87), (1.88), являются решением краевой задачи (1.81)–(1.84).

Глава 2

Численные методы решения граничных интегральных уравнений для задач фильтрации вязкой жидкости

При подготовке данной главы диссертации использованы публикации автора [32,33], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования. Для численного решения систем граничных интегральных уравнений будет использован метод кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных функций и метод коллокаций. Сначала будут приведена общая схема дискретизации поверхности, интегральных операторов и прочих функций, после чего будут построены численные схемы для систем уравнений соответствующих различным задачам из Главы 1.

2.1 Дискретизация поверхности

Каждая из поверхностей, ограничивающих область фильтрации и области включений, аппроксимируется системой четырех угольных ячеек, все вершины которых лежат на аппроксимируемой поверхности. Для каждой поверхности Σ_m, $m = 1..N_d$ задана система ячеек σ_k, $k = 1, ..., N^m$, аппроксимирующих данную поверхность. При этом предполагается, что для каждой из поверхностей Σ_m, $m = 1, ..., N_d$, являющейся границей области фильтрации или границей одного из включений, система ячеек σ_k, соответствующих этой поверхности, образует некоторую замкнутую поверхность $\tilde{\Sigma}_m$, на которой указанные ячейки формируют конформную сетку. Предполагается, что все аппроксимированные поверхности $\tilde{\Sigma}_m$ попарно непересекаются, так же как и исходные поверхности.

Краем каждой ячейки разбиения является некоторый, вообще говоря, пространственный четырехугольный контур. При построении разбиения могут возникать также треугольные ячейки, которые рассматриваются как вырожденные четырехугольники с двумя совпадающими вершинами.

Для каждой ячейки с номером k определим вектор внешней нормали $\boldsymbol{n}_k$ как единичный вектор, сонаправленный векторному произведению диагоналей (см. Рисунок 2.1 в центре). Построим также два вектора $\boldsymbol{\tau}_k^1$, $\boldsymbol{\tau}_k^2$, которые будем назвать касательными для ячейки σ_k, таким образом, чтобы тройка векторов $(\boldsymbol{n}_k, \boldsymbol{\tau}_k^1, \boldsymbol{\tau}_k^2) = 1$ являлась правой ортонормированной. Для каждой ячейки вычислим площадь s_k как половину модуля векторного произведения диагоналей. Также для каждой ячейки построим точку коллокации x_k, как точку пересечения средних линий ячейки.

Функция правой части f_0 заменяется набором значений в точках коллокации $f_{0,i} = f_0(x_i)$. В задачах, в которых на внешней границе задано смешанное гранчное условие (1.25)–(1.27), (1.75), (1.83), делается следующее: поверхность $\tilde{\Sigma}_1$ разбивается на части $\tilde{\Sigma}^q$, $\tilde{\Sigma}^p$ и $\tilde{\Sigma}^0$, каждая из которых содержит некоторый набор ячеек разбиения поверхности $\tilde{\Sigma}_1$ так, чтобы эти части аппроксимировали участки Σ^q, Σ^p, Σ^0 поверхности Σ_1. Функция f_0 в таком случае заменяется набором значений в точках коллокации $f_{0,i} = f_0(x_i)$, причем $f_{0,i} = 0$ если $\sigma_i \notin \tilde{\Sigma}^q$. Функция ξ заменяется набором ξ_i в точках коллокации x_i, причем $\xi_i = 0$ еслии $\sigma_i \notin \tilde{\Sigma}^p$. Пусть в набор ячеек $\tilde{\Sigma}^p$ вошло N_p

ячеек с номерами $i_i, i_2, \dots i_{N_p}$. Тогда в систему добавляется N_p переменных ξ_{i_m}, $m = 1, \dots, N_p$. Функция ψ, заданная на поверхности Σ^p аппроксимируется набором значений $\psi_{i_m} = \psi(x_{i_m})$, $m = 1, \dots, N_p$. Количество дополнительных переменных ξ_{i_m} равно количеству дополнительных уравнений (равно N_p).

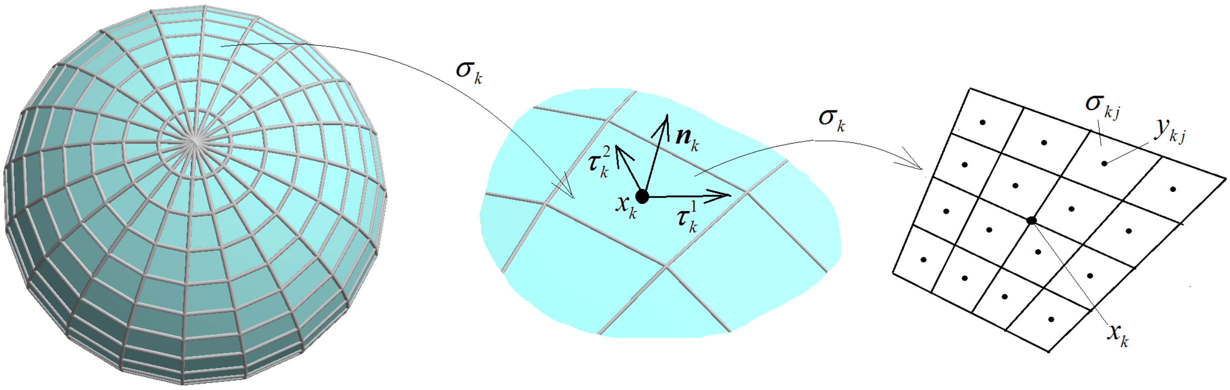

Рис. 2.1: Дискретизация поверхности.

2.2 Дискретизация интегральных операторов

Будем аппроксимировать функции $h, g, \boldsymbol{j}$ функциями $\tilde{h}, \tilde{g}, \tilde{\boldsymbol{j}}$, заданными на приближенных поверхностях $\tilde{\Sigma}_m$, $m = 1, ..., N_d$, и принимающими на каждой ячейке разбиения постоянное значение. Пусть

$$\tilde{h}(x) = h_k,\ \tilde{g}(x) = g_k,\ \tilde{\boldsymbol{j}}(x) = \boldsymbol{j}_k,\ x \in \sigma_k, \tag{2.1}$$

$k = 1, ..., N$, для функций h и $\tilde{\boldsymbol{j}}$, $k = N^1 + 1, ..., N$, для функции $\tilde{g}$. Указанные равенства выполнены во внутренних точках ячеек (т.е. точки не лежащие на краю). Значения приближенных функций на краях ячеек равны 0.

Каждый вектор $\boldsymbol{j}_k$ предполагается ортогональным вектору $\boldsymbol{n}_k$. Тогда этот вектор можно разложить в сумму проекций на касательные вектора рассматриваемой ячейки: $\boldsymbol{j}_k = j_i^1 \boldsymbol{\tau}_k^1 + j_i^2 \boldsymbol{\tau}_k^2$.

Пусть S – одна из поверхностей Σ_m, $m \in \{1, \dots, N_d\}$, а $\tilde{S}$ – приближающая ее поверхность. Поскольку интегральные операторы $W[S, h] = W_0[S, h]$ и $U[S, g] = U_0[S, g]$ являются частными случаями $W_\lambda[S, h]$ и $U_\lambda[S, g]$ при $\lambda = 0$, далее будут приведены формулы только для аппроксимации операторов $W_\lambda[S,h]$ и $U_\lambda[S,g]$, а также их градиентов $\nabla W_\lambda[S,h]$ и $\nabla U_\lambda[S,g]$. Данные формулы справедливы для всех $\lambda \geqslant 0$. Прямые значения потенциалов $W_\lambda[\tilde{S},\tilde{h}]$, $U_\lambda[\tilde{S},\tilde{g}]$, $\nabla W_\lambda[\tilde{S},\tilde{h}]$ и $R_\beta[\tilde{S},\tilde{\boldsymbol{j}}]$ в точке коллокации $x_i \in \Sigma_m$ будем приближать по формулам:

$$W_{\lambda_m}[\tilde{S},\tilde{h}](x_i) = \sum_{\sigma_k\in\tilde{S}} h_k W_{ik}^{\lambda_m}, \quad W_{ik}^{\lambda_m} = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_k} \frac{e^{-\lambda_m r_i}}{r_i} d\sigma_y,$$

$$U_{\lambda_m}[\tilde{S},\tilde{g}](x_i) = \sum_{\sigma_k\in\tilde{S}} g_k U_{ik}^{\lambda_m}, \quad U_{ik}^{\lambda_m} = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_k} (x_i - y, \boldsymbol{n_k}) \frac{e^{-\lambda_m r_i}(\lambda_m r_i + 1)}{r_i^3} d\sigma_y,$$

$$\nabla W_{\lambda_m}[\tilde{S},\tilde{h}](x_i) = \sum_{\sigma_k\in\tilde{S}} h_k \boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda_m}, \quad \boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda_m} = \frac{-1}{4\pi}\int_{\sigma_k} (x_i - y) \frac{e^{-\lambda_m r_i}(\lambda_m r_i + 1)}{r_i^3} d\sigma_y,$$

$$R_{\beta_m}[\tilde{S},\tilde{\boldsymbol{j}}](x_i) = \sum_{\sigma_k\in\tilde{S}} (j_k^1 \boldsymbol{\tau}_k^1 + j_k^2 \boldsymbol{\tau}_k^2) \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_m}, \quad \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_m} = -\boldsymbol{w}_{ik}^{\beta_m}.$$

Здесь $r_i = |x_i - y|$. Заметим, что при $i = k$ интегралы в выражении для величин $W_{ik}^{\lambda_m}$ являются несобственными абсолютно сходящимися, а в выражении для величин $U_{ik}^{\lambda_m}$, $\boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda_m}$, $\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_m}$ – сингулярными, понимаемыми в смысле главного значения.

Градиент потенциала двойного слоя. Прямые значения градиента потенциала двойного слоя $\nabla U_\lambda[S,g]$ в точках коллокации $x_i \in \Sigma^m$ приближаются формулой

$$\nabla U_{\lambda_m}[S,g] = \sum_{\sigma_k\in\tilde{S}} g_k \boldsymbol{u}_{ik}^{\lambda_m}, \quad \boldsymbol{u}_{ik}^{\lambda_m} = \nabla \int_{\sigma_k} \frac{\partial F_{\lambda_m}(x_i - y)}{\partial n_y}$$

Для вычисления интегралов $\boldsymbol{u}_{ik}^{\lambda}$ используется подход с выделением и аналитическим интегрированием особенности, развитый в [40, 41]. Представим функцию $F_\lambda(x-y)$ в виде:

$$F_\lambda(x-y) = F_0(x-y) + \tilde{F}_\lambda(x-y), \quad F_0(r) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \tilde{F}_\lambda(r) = \frac{e^{-\lambda r} - 1}{4\pi r}.$$

где $r = |x-y|$. Тогда

$$\boldsymbol{u}_{ik}^{\lambda} = \boldsymbol{u}_{ik}^{0} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^{\lambda}, \quad \boldsymbol{u}_{ik}^{0} = \nabla \int_{\sigma_k} \frac{\partial F_0(x_i - y)}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^{\lambda} = \nabla \int_{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{F}_\lambda(x_i - y)}{\partial n_y} d\sigma_y.$$

Для вычисления $\boldsymbol{u}_{ik}^0$ используем закон Био-Савара [42], согласно которому интеграл по ячейке сводится к контурному интегралу по ее краю:

$$\boldsymbol{u}_{ik}^0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\sigma_k}\frac{\boldsymbol{\tau}_y \times (x_i - y)}{|x_i - y|^3}, ds_y$$

причем, если край ячейки $\partial\sigma_k$ есть замкнутый многоугольник, данный интеграл вычисляется аналитически [43, §21.2, pp.436–437].
Для векторов $\tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^\lambda$ имеем выражение:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^\lambda = \int_{\sigma_k} V(x_i, y, \boldsymbol{n}(y))d\sigma_y, \quad V(x_i, y, \boldsymbol{n}(y)) = \nabla\frac{\partial\tilde{F}_\lambda(x_i - y)}{\partial n_y},$$

$$V(x_i, y, \boldsymbol{n}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{n}}{r_i^3}\left(1 - (1 + \lambda r_i)e^{-\lambda r_i}\right) + \\ + (x_i - y)(\boldsymbol{n}, x_i - y)\frac{(3 + 3\lambda r_i + \lambda^2 r_i^2)e^{-\lambda r_i} - 3}{r_i^5}.$$

Заметим, что для любого единичного вектора $\boldsymbol{n}$ и различных точек (x_i, y) справедлива оценка $V(x_i, y, n(y)) \leqslant O(r_i^{-1})$, $r_i = |x_i - y|$. Поэтому интеграл в последнем выражении существует как несобственный.

Приближенное вычисление интегралов. Интегралы в выражениях для величин W_{ik}^λ, U_{ik}^λ, $\boldsymbol{w}_{ik}^\lambda$, $\boldsymbol{r}_{ik}^\lambda$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^\lambda$ вычисляются приближено по методу прямоугольников. При этом каждая ячейка σ_k делится на более мелкие ячейки второго уровня. Построение ячеек разбиения второго уровня осуществляется путем построения на каждой стороне ячейки σ_k точек, делящих сторону на четное число n_0 равных частей (см. Рис. 2.1 справа). Далее соответствующие точки, лежащие на противопрожных сторонах рассматириваемой ячейки, соединяются отрезкми. В результате ячейка разбивается на n_0^2 ячеек второго уровня σ_{kj}. В каждой ячейке σ_{kj} дополнительного разбиения выбирается узел y_{kj}, как точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон этой вторичной ячейки. При этом в силу условия четности числа n_0 точка коллокации x_k является угловой точкой некоторых вторичных ячеек и не совпадает ни с одним из узлов y_{kj}.

Далее, например, величина W_{ik} заменяется конечной суммой:

$$W_{ik} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_0^2} \frac{s(\sigma_{kj})}{|x_i - y_{kj}|}, \tag{2.2}$$

где $s(\sigma_{kj})$ – площадь вторичной ячейки σ_{kj}. Остальные из указанных величин вычисляются аналогично. Схема такого типа для вычисления интегралов с полярной особенностью была описана в статье [44].

Дискретизация поверхностного градиента. Для численной аппроксимации поверхностного градиента функции g, заданной на поверхности Σ, в точке, приближаемой точкой коллокации $x_i \in \tilde{\Sigma}$, используются формулы из статьи [45]. Обозначим веришины ячейки σ_i как $x_{i,1}$, $x_{i,2}$, $x_{i,3}$, $x_{i,4}$, пронумеруем стороны ячейки $l' = 1, ..., 4$, и построим векторы обхода сторон ячейки $\boldsymbol{z}^i_{l'}$: $\boldsymbol{z}^i_{l'} = x_{i,(l+1)} - x_{i,l}$, $l = 1, 2, 3$, $\boldsymbol{z}^i_4 = x_{i,1} - x_{i,4}$. Номер ячейки, граничащей с ячейкой σ_i со стороны l', будем обозначать $j(l', i)$. Приближенное значение поверхностного градиента функции g, соответствующее точке коллокации x_i, вычисляется по формуле

$$(\operatorname{Grad} g)_i = \boldsymbol{\gamma}_i \times \boldsymbol{n}_i, \qquad \boldsymbol{\gamma}_i = \frac{1}{2s_i} \sum_{l'=1}^{4} g_{j(l',i)} \boldsymbol{z}^i_{l'}, \tag{2.3}$$

где g_j – значение функции g в точке, соответствующей точке коллокации x_j.

В дискретных уравнениях поверхностный градиент проектируется на касательные направления:

$$\boldsymbol{\tau}^1_i \cdot \boldsymbol{\gamma_i} \times \boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{\tau}^2_i \cdot \boldsymbol{\gamma_i}, \quad \boldsymbol{\tau}^2_i \cdot \boldsymbol{\gamma_i} \times \boldsymbol{n}_i = -\boldsymbol{\tau}^1_i \cdot \boldsymbol{\gamma_i}.$$

Элемент матрицы при переменной g_k выражается следующей формулой:

$$t^l_{ik} = (-1)^{l+1} \sum_{l'=1}^{4} \frac{\boldsymbol{z}^i_{l'} \boldsymbol{\tau}^{3-l}_i}{2s_i} \delta^k_{j(l',i)}, \; l = 1, 2, \quad i, k = N_1 + 1, ..., N, \tag{2.4}$$

где $\delta^k_{j(l',i)}$ равна 1 если $j(l', i) = k$ и 0 в противном случае.

2.3 Аппроксимация поля скоростей и давлений

Задачи фильтрации жидкости, описанные в пунктах 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, были сведены к соответствующим системам интегральных уравнений. Все данные системы решаются численно, при помощи кусочно-постоянных аппроксимаций неизвестных функций и аппроксимаций интегральных операторов. После того как найдены неизвестные плотности потенциалов, вычисляются приближенные значения скорости и давления в произвольных точках области фильтрации.

Для аппроксимации поля скоростей и давления в произвольной точки области используются численно аппроксимированные интегральные операторы $W_{\lambda_m}[\sigma_k, e]$, $U_{\lambda_m}[\sigma_k, e]$, $\nabla W_{\lambda_m}[\sigma_k, e]$, $\nabla U_{\lambda_m}[\sigma_k, e]$, $R_{\beta_m}[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^l]$, где e – функция, тождественно равная 1 на данной ячейке. Данные величины есть интегралы по ячейке разбиения σ_k. Данные интегралы вычисляются делением этой ячейки на более мелкие ячейки 2-го уровня, как в формуле (2.2). Заметим также, что формулы такого типа применимы только для точек, отделенных от граничных поверхностейна расстояние, не малое по отношению к шагу разбиения поверхностей.

2.3.1 Вязкое течение в однородной области.

Задача в области без включений (1.2)–(1.4) сводится к системе интегральных уравнений (1.23). Аппроксимируя поверхность Σ системой ячеек σ_k, с выбранными на них точками коллокации x_k, $k = 1, ..., N$, и применяя квадратурные формулы, описанные в п. 3.2, получим следующую систему линейных уравнений для неизвестных h_k, $k = 1, ..., N$, – приближенных значений функции h, соответствующих ячейкакм разбиения, и j_k^1, j_k^2 , $k = 1, ..., N$, – координат приближенных значений поверхностных токов $\boldsymbol{j}_k$, соответствующих ячейкам разбиения, в локальных базисах этих ячеек:

$$\frac{h_i}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k(\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{w}_{ik}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta}] + \\ + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta}] + \xi = f_{0,i}, \quad i = 1, ..., N, \quad (2.5)$$

$$\frac{(-1)^l}{2} j_i^{(3-l)} + \sum_{k=1}^{N} h_k(\boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \boldsymbol{w}_{ik}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta}] = 0, \quad i = 1, ..., N, \ l = 1, 2, \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{N} h_k s(\sigma_k) = 0. \quad (2.7)$$

Приближенные значения скорости жидкости и давления в области течения ищутся по формулам, аппроксимирующим выражения (1.21)–(1.22).

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla W[\sigma_k, e] + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 R_m[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^1] + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 R_m[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^2], \quad (2.8)$$

$$p = -\frac{\mu}{\kappa_m} \sum_{k=1}^{N} h_k W[\sigma_k, e]. \quad (2.9)$$

2.3.2 Течение в однородной области со смешанным граничным условием.

Запишем вместо системы интегральных уравнений (1.30) аналогичные уравнения на поверхности $\tilde{\Sigma}$ для приближенных потенциалов, которые должны выполняться в точках коллокации x_i, $i = 1, ..., N$.

$$\frac{h_i}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k(\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{w}_{ik}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times \boldsymbol{r}_{ik}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times \boldsymbol{r}_{ik}] - \xi_i = f_{0,i}, \quad i = 1, ..., N, \quad (2.10)$$

$$-\frac{j_i^l}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k(\boldsymbol{\tau}_i^l \times \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{w}_{ik}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 [\boldsymbol{\tau}_i^l \times \boldsymbol{n}_i] \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times \boldsymbol{r}_{ik}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^2 [\boldsymbol{\tau}_i^l \times \boldsymbol{n}_i] \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times \boldsymbol{r}_{ik}] = 0, \quad i = 1, ..., N, \ l = 1, 2 \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^{N} h_k s_k = 0 \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^{N} h_k \left(W_{i_m k} - W_{i_1 k}\right) = -\frac{\kappa}{\mu}(\psi_{i_m} - \psi_{i_1}), \quad x_{i_1}, x_{i_m} \in \tilde{\Sigma}^p,\ m = 2, ..., N_p. \tag{2.13}$$

Решив систему уравнений (2.10)–(2.13), можно вычислить приближенные значения скорости и давления в любой точке $x \in \Omega$, по формулам, аппроксимирующим формулы (1.21), (1.28), (1.29):

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla W[\sigma_k, e] + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 R[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^1] + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 R[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^2], \tag{2.14}$$

$$p = p_{add} - \frac{\mu}{\kappa} \sum_{k=1}^{N} h_k W[\sigma_k, e], \tag{2.15}$$

2.3.3 Сопряжение течения на границе разделов сред

Задача сопряжения (1.37)–(1.39) сводится к системе интегральных уравнений (1.49). Опять, аппроксимируя поверхность Σ из этой задачи системой ячеек σ_k, с выбранными на них точками коллокации x_k, $k = 1, ..., N$, и применяя квадратурные формулы, описанные в п. 3.2, получим следующую систему линейных уравнений для неизвестных h_k, g_k, $k = 1, ..., N$, – приближенных значений функций h и g, соответствующих ячейкам разбиения, и j_k^1, j_k^2 , $k = 1, ..., N$, – координат приближенных значений $\boldsymbol{j}_k$ плотности векторного потенциала $\boldsymbol{j}$, в локальных базисах ячеек:

$$g_i + \beta \sum_{k=1}^{N} h_k W_{ik} + \beta \sum_{k=1}^{N} g_k U_{ik} = -\beta \varphi_{0,i}, \quad i = 1, ..., N_1, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} - h_i + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times (\boldsymbol{r}_{ik,1} - \boldsymbol{r}_{ik,m})] + \\ + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times (\boldsymbol{r}_{ik,1} - \boldsymbol{r}_{ik,m})] = 0, \quad i = 1, ..., N_1, \end{gathered} \tag{2.17}$$

$$(-1)^{l+1} j_i^{(3-l)} + \sum_{k=1}^{N} t_{ik}^l g_k + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times (\boldsymbol{r}_{ik,1} - \boldsymbol{r}_{ik,m})]) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times (\boldsymbol{r}_{ik,1} - \boldsymbol{r}_{ik,m})] = 0, \quad i = 1, ..., N_1, \ l = 1, 2. \quad (2.18)$$

Приближенные значения скорости жидкости и давления в области течения ищутся по формулам, аппроксимирующим (1.45)–(1.46).

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla W[\sigma_k, e] + \sum_{k=1}^{N} g_k \nabla U[\sigma_k, e] + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 R_m[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^1] + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 R_m[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^2], \quad (2.19)$$

$$p = p_0 - \frac{\mu}{\kappa_m} \left(\sum_{k=1}^{N} h_k W[\sigma_k, e] + \sum_{k=1}^{N} g_k U[\sigma_k, e] \right). \quad (2.20)$$

2.3.4 Задача сопряжения с всасыванием

Запишем вместо интегральных уравнений (1.71)–(1.73) аналогичные уравнения на поверхности $\tilde{\Sigma}$ для приближенных потенциалов, которые должны выполняться в точках коллокации x_i, $i = 1, ..., N$.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} g_i + \sum_{k=1}^{N} g_k \left(\alpha_1 U_{ik}^0 - \alpha_2 U_{ik}^\lambda \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} h_k \left(\alpha_1 W_{ik}^0 - \alpha_2 W_{ik}^\lambda \right) = -p_v, \quad i = 1, ..., N, \quad (2.21)$$

$$\sum_{k=1}^{N} g_k \, \boldsymbol{n}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^\lambda - h_i + \sum_{k=1}^{N} h_k \, \boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{w}_{ik}^0 - \boldsymbol{w}_{ik}^\lambda) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_k^1 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_2}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_k^2 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_2}) =$$

$$= \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\mu} \boldsymbol{n}_i \cdot \nabla p_0(x_i), \quad i = 1, ..., N, \quad (2.22)$$

$$\sum_{k=1}^{N} g_k t_{ik}^l + \sum_{k=1}^{N} g_k\, \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^{\lambda} + \sum_{k=1}^{N} h_k\, \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot (\boldsymbol{w}_{ik}^0 - \boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda}) + (-1)^l j_i^{3-l} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \boldsymbol{\tau}_k^1 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_2}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \boldsymbol{\tau}_k^2 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_2}) =$$
$$= \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\mu} \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \nabla p_0(x_i), \quad i = 1, ..., N,\ l = 1, 2. \quad (2.23)$$

Суммарные поля скоростей и давлений в точке $x \in \Omega_i$, $i = 1, 2$, вычисляются приближенно по следующим формулам:

$$\boldsymbol{v} = \nabla U_{\lambda}[\tilde{\Sigma}, \tilde{g}] + \nabla W_{\lambda}[\tilde{\Sigma}, \tilde{h}] + R_{\beta_i}[\tilde{\Sigma}, \tilde{\boldsymbol{j}}] + v_0, \quad (2.24)$$
$$p = -\alpha_i \Big(U_{\lambda}[\tilde{\Sigma}, \tilde{g}] + W_{\lambda}[\tilde{\Sigma}, \tilde{h}] \Big) + \chi_{\Omega_2} p_v + p_0. \quad (2.25)$$

Здесь, как и ранее, χ_{Ω_2} – индикатор области Ω_2. Коэффициенты заданы в Таблице 1.1.

2.3.5 Потенциальное течение в двух областях

Запишем вместо интегральных уравнений (1.78)–(1.80) аналогичные уравнения на поверхностях $\tilde{\Sigma}_m$ для приближенных потенциалов, которые должны выполняться в точках коллокации x_i, $i = 1, ..., N$.

$$\frac{h_i}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{w}_{ik}^0) + 1 \sum_{k=N_1+1}^{N} g_j (\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{u}_{ik}^0) - \xi_i = f_{0,i}, \quad i = 1, ..., N_1, \quad (2.26)$$

$$\sum_{k=1}^{N} h_k (\alpha_1 W_{ik}^0 - \alpha_m W_{ik}^{\lambda_m}) + \frac{\alpha_1 + \alpha_m}{2} g_i +$$
$$+ \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k (\alpha_1 U_{ik}^0 - \alpha_m U_{ik}^{\lambda_m}) = -p_v^m, \quad i = N_1 + 1, ..., N, \quad (2.27)$$

$$-h_i + \sum_{k=1}^{N} h_k \boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{w}_{ik}^0 - \boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda_m}) + \sum_{k=1}^{N} g_k (\boldsymbol{n}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^{\lambda_m}) = 0, \quad i = N_1 + 1, ..., N. \quad (2.28)$$

Решив систему уравнений (2.26)–(2.28), можно вычислить приближенные значения скорости жидкости и давления в точке $x \in \Omega_m$, $m = 1, ..., N_d$, по формулам, аппроксимирующим формулы (1.76), (1.77):

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla W_{\lambda_m}[\sigma_k, e] + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k \nabla U_{\lambda_m}[\sigma_k, e], \tag{2.29}$$

$$p = \chi_{\Omega_2} p_v - \alpha_m \left(\sum_{k=1}^{N} h_k W_{\lambda_m}[\sigma_k, e] + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k U_{\lambda_m}[\sigma_k, e] \right), \tag{2.30}$$

2.3.6 Вязкое течение в системе областей

Запишем вместо интегральных уравнений (1.89)–(1.94) аналогичные уравнения на поверхностях $\tilde{\Sigma}_m$ для приближенных потенциалов, которые должны выполняться в точках коллокации x_i, $i = 1, ..., N$. Дискретное уравнение для нормальной компоненты вектора скорости на внешней границе Σ_1:

$$\frac{h_i}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{w}_{ik}^0) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1}] + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1}] + \\ + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_j (\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{u}_{ik}^0) - \xi_i = f_{0,i}, \quad i = 1, ..., N_1. \tag{2.31}$$

Дискретные уравнения для касательных компоненты вектора скорости на внешней границе Σ_1:

$$\frac{(-1)^l}{2} j_i^{(3-l)} + \sum_{k=1}^{N} h_k (\boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \boldsymbol{w}_{ik}^0) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1}] + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1}] + \\ + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k (\boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \boldsymbol{u}_{ik}^0) = 0, \quad i = 1, ..., N_1, \quad l = 1, 2. \tag{2.32}$$

Дискретное уравнение для давления на части внешней границы Σ_1^p:

$$\sum_{k=1}^{N} h_k W_{ik}^0 + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k U_{ik}^0 = -\frac{\psi_i}{\alpha_1}, \quad i = i_1, ..., N_p. \tag{2.33}$$

Дискретное уравнение для давления на границе Σ^m, $m = 2, \ldots, N_d$:

$$\sum_{k=1}^{N} h_k(\alpha_1 W_{ik}^0 - \alpha_m W_{ik}^{\lambda_m}) + \frac{\alpha_1 + \alpha_m}{2} g_i +$$
$$+ \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k(\alpha_1 U_{ik}^0 - \alpha_m U_{ik}^{\lambda_m}) = -p_v^m, \quad i = N_1 + 1, ..., N. \quad (2.34)$$

Дискретное уравнение для нормальной компоненты вектора скорости на Σ^m, $m = 2, \ldots, N_d$:

$$- h_i + \sum_{k=1}^{N} h_k \boldsymbol{n}_i \cdot (\boldsymbol{w}_{ik}^0 - \boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda_m}) + \sum_{k=1}^{N} g_k(\boldsymbol{n}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^{\lambda_m}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_m})] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{n}_i \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1})] = 0, \quad i = N_1 + 1, ..., N. \quad (2.35)$$

Дискретные уравнения для касательных компоненты вектора скорости на Σ^m, $m = 2, \ldots, N_d$.

$$(-1)^{l+1} j_i^{(3-l)} + \sum_{k=1}^{N} h_k \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot (\boldsymbol{w}_{ik}^0 - \boldsymbol{w}_{ik}^{\lambda_m}) + \sum_{k=1}^{N} j_k^1 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^1 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_m})] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^2 \boldsymbol{\tau}_i^l \cdot [\boldsymbol{\tau}_k^2 \times (\boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_1} - \boldsymbol{r}_{ik}^{\beta_m})] + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k(\boldsymbol{\tau}_i^l \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{ik}^{\lambda_m}) +$$
$$+ \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k t_{ik}^l = 0, \quad i = N_1 + 1, ..., N, \quad l = 1, 2. \quad (2.36)$$

Решив систему уравнений (2.31)–(2.36), можно вычислить приближенные значения скорости жидкости и давления в точке $x \in \Omega_m$, $m = 1, ..., N_d$, по формулам, аппроксимирующим формулы (1.87), (1.88):

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{N} h_k \nabla W_{\lambda_m}[\sigma_k, e] + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k \nabla U_{\lambda_m}[\sigma_k, e] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} j_k^1 R_{\beta_m}[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^1] + \sum_{k=1}^{N} j_k^2 R_{\beta_m}[\sigma_k, \boldsymbol{\tau}_k^2], \quad (2.37)$$

$$p = p_v^m - \alpha_m \left(\sum_{k=1}^{N} h_k W_{\lambda_m}[\sigma_k, e] + \sum_{k=N_1+1}^{N} g_k U_{\lambda_m}[\sigma_k, e] \right), \qquad (2.38)$$

Глава 3

Верификация численных решений задачи фильтрации вязкой жидкости

При подготовке данной главы диссертации использованы публикации автора [32,33], в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования.

3.1 Верификация модели

В данной главе проводится верификация численных решений для различных постановок задачи. Проверка численных решений происходит путем контроля выполнения законов сохранения и граничных условий.

3.1.1 Вязкое течение в однородной области

Рассмотрим упрощенную краевую задачу (1.2)–(1.4) о фильтрационном течении в области без включений, граница которой – поверхность Σ – есть сфера радиуса $R = 1$. Задача решается в безразмерном виде при следующих значениях параметров пористой среды: $\kappa = 0.01$, $\mu = 30$.

Решались уравнения (2.5)–(2.7), позволяющие построить приближенное решение соответствующих этой задаче граничных интегральных уравнений

(1.23). Для анализа практической сходимости метода были построены численные решения для пяти вариантов расчетных сеток, аппроксимирующих поверхность Σ, параметры которых приведены в Таблице 3.1. Пример расчетной сетки приведен на Рисунке 3.1 слева (для $N = 800$).

N	400	800	1600	3200	6400
h	0.25	0.16	0.125	0.08	0.0625

Таблица 3.1: Параметры аппроксимации сферы единичного радиуса системой четырехугольных ячеек, N – число ячеек, h – наибольший из диаметров ячеек.

Были рассмотрены два варианта задачи (см. Рисунок 3.1, справа).

Вариант задачи №1 – течение инициировано заданием потока через внешнюю границу при отсутствии источников и стоков внутри области течения.

Вариант задачи №2 – течение инициировано заданными источником и стоком внутри области течения при отсутствии потока через границу.

В первом случае предполагалось, что на поверхности Σ^1 имеются входное S_{in} и выходное S_{out} отверстия с центрами в точках $x_{\text{in}} = (-1, 0, 0)$, $x_{\text{out}} = (1, 0, 0)$ соответственно, одинакового радиуса $r_0 = 0.15$, через которые осуществляется втекание и вытекание жидкости со скоростью, имеющей параболический профиль. С математической точки зрения входное и выходное отверстия рассматривались как участки поверхности Σ, определяемые соотношениями $S_{\text{in}} = \{x \in \Sigma : |x - x_{\text{in}}| < r_0\}$, $S_{\text{out}} = \{x \in \Sigma : |x - x_{\text{out}}| < r_0\}$. Поток жидкости через эти отверстия моделировался заданием функции f_0 в уравнении (1.4) в виде

$$f_0(x) = \begin{cases} -Q \cdot \frac{r_0^2 - |x - x_{\text{in}}|^2}{S'_{\text{in}}}, & x \in S_{\text{in}}, \quad S'_{\text{in}} = \int_{S_{\text{in}}} (r_0^2 - |x - x_{\text{in}}|^2) d\sigma, \\ Q \cdot \frac{r_0^2 - |x - x_{\text{out}}|^2}{S'_{\text{out}}}, & x \in S_{\text{out}}, \quad S'_{\text{out}} = \int_{S_{\text{out}}} (r_0^2 - |x - x_{\text{in}}|^2) d\sigma, \end{cases} \tag{3.1}$$

функция f_0 полагалась равной нулю на остальной части поверхности Σ, здесь $Q = 16$ – заданный поток жидкости. При этом в системе линейных уравнений (2.5)–(2.7) мы полагали $f_{0,i} = f_0(x_i)$, где значения $f_0(x_i)$ вычислялись по формуле (3.1) с

$$S'_{\mathrm{in}} = \sum_{x_i \in S_{\mathrm{in}}} (r_0^2 - |x_i - x_{\mathrm{in}}|^2) s_i, \quad S'_{\mathrm{out}} = \sum_{x_i \in S_{\mathrm{out}}} (r_0^2 - |x_i - x_{\mathrm{out}}|^2) s_i,$$

где s_i – площадь ячейки σ_i.

Во втором случае предполагалось, что течение инициируется первичными полями скоростей $\boldsymbol{v}_0$ и давления p_0, определяемыми формулами (1.33)–(1.35), где $N_s = 2$, $q_1 = (-0.5, 0, 0)$, $q_2 = (0.5, 0, 0)$ – положения источника и стока, $Q_1 = -Q_2 = 1$. При этом функция f_0 в уравнении (1.4) полагалась равной 0.

На Рисунке 3.2 показаны поля скоростей, полученные численно для этих двух вариантов задачи в сечении Ox_1x_2 с применением формулы (2.8) (данные поля скоростей получены при использовании разбиения поверхности Σ на $N = 1600$ ячеек, расположение расчетного сечения показано на Рисунке 3.1 справа).

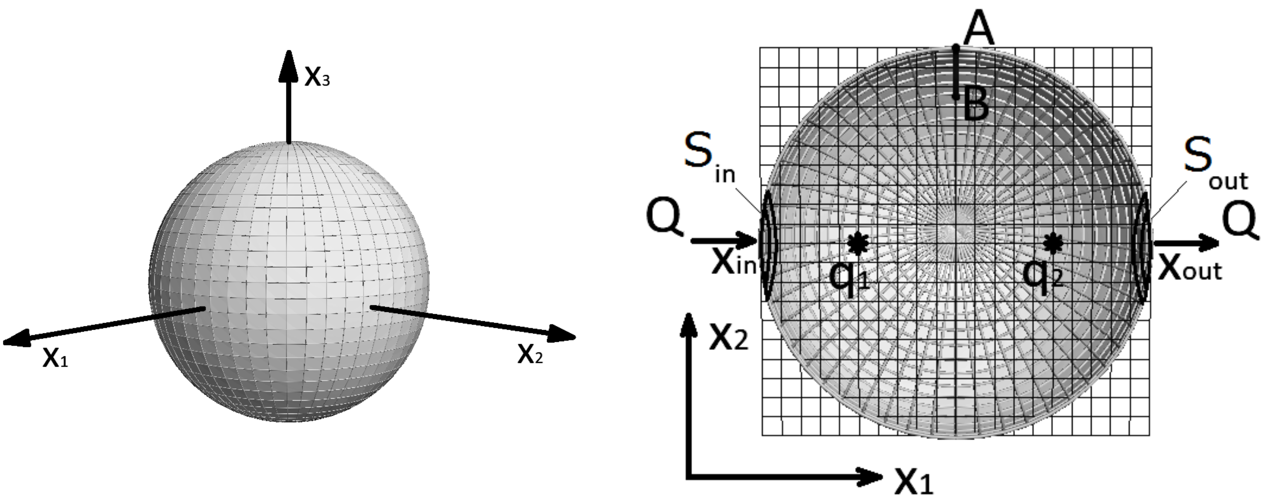

Рис. 3.1: Конфигурация расчетной области для задачи фильтрации в области без включений.

Для оценки точности численного решения задачи был проведен анализ точности выполнения граничного условия на поле скорстей. Заметим, что приближенные поля скоростей и давления, получаемые по формулам (2.8)–(2.9), автоматически удолетворяют системе уравнений (1.4) в области течения. А вот граничные условия при построении этих решений проверялись только приближенно и только в точках коллокации. Заметим также, что формулы (2.8)–(2.9) изначально ориентированы на вычисление скорости и

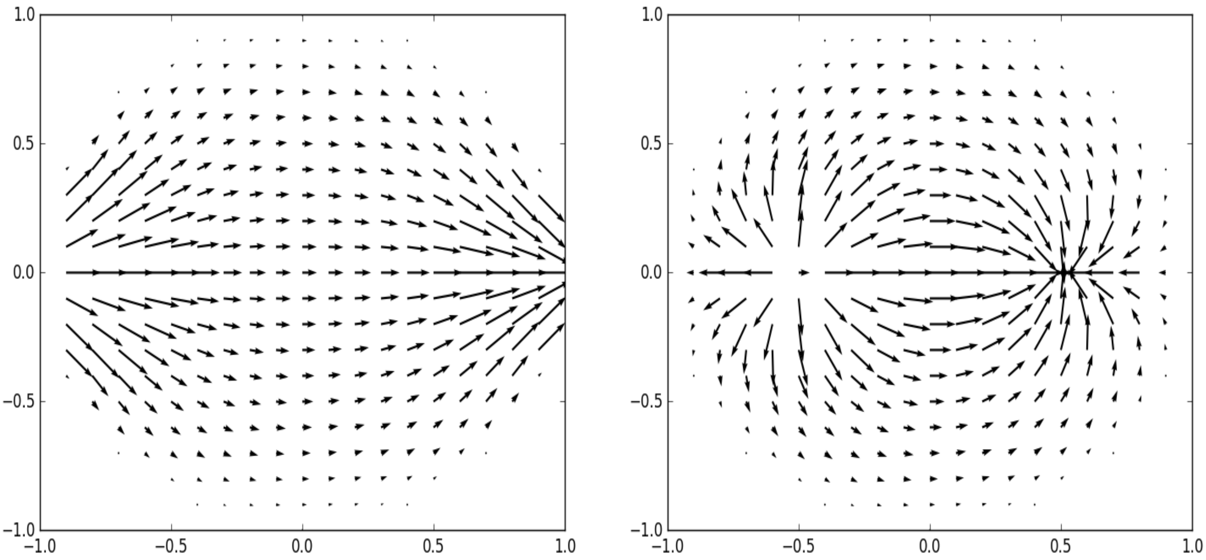

Рис. 3.2: Поле скоростей в сечении плоскостью Oxy. Слева: вариант задачи №1, справа: вариант задачи №2.

давления на расстояниях от границы, не малых по сравнению с шагом сетки.

Влияние вязкости проявляется в том, что должно быть выполнено граничное условие $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} = 0$ на всей части границы и $\boldsymbol{v} = 0$ на той части границы, где отсутствует поток. На Рисунке 3.2 видно, что скорость действительно затухает при приближении к точкам границы, лежащим вне входного и выходного отверстий.

Для более точного анализа было исследовано поведение значений скорости $\boldsymbol{v}$ вблизи границы методом экстраполяции из внутренней области. Используемый алгоритм экстраполяции состоял в следующем.

Выберем параметр $h_0 > 0$ – толщину области экстраполяции. Далее для каждой точки $x \in \Omega$, лежащей на расстоянии меньшем $h_0 > 0$ от поверхности Σ, построим точку $z^0 \in \Sigma$ – основание кратчайшего перепендикуляра, опущенного на поверхность Σ. Далее построим точки $z^k = z^0 + \boldsymbol{n'}(z^0)kh_0$, $k = 1, 2, 3$, где $\boldsymbol{n'}(z^0)$ – орт вектора нормали к поверхности Σ в точке z^0, направленный в сторону области, из которой экстраполируется скорость.

Далее построим экстраполированное значение $\boldsymbol{v_p}$ скорости жидкости в точке x по формуле

$$\boldsymbol{v_e}(x) = \boldsymbol{V(\rho)}, \quad \rho = |x - z_0|, \quad \boldsymbol{V}(\rho) = \boldsymbol{\alpha}\rho^2 + \boldsymbol{\beta}\rho + \boldsymbol{\gamma}. \tag{3.2}$$

Коэффициенты квадратичной функции $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ выбираются так, что

$\boldsymbol{V}(kh_0) = \boldsymbol{v}(z^k)$, $k = 1, 2, 3$, $\boldsymbol{v}$ – скорость, полученная прямым вычислением по формуле (2.8).

На Рисунке 3.3 слева графики изображают зависимость модуля скорости от расстояния до поверхности для точек, лежащих на отрезке AB, для первого варианта задачи (положение этого отрезка показано на Рисунке 3.1, справа). Кривая *1* соответствует значениям скорости $\boldsymbol{v}$, полученной прямым вычислением по формуле (2.8). В этом расчете использовалось разбиение с максимальным диаметром ячейки $h = 0.125$. Видно, что вблизи поверхности характер кривой резко меняется, это связано с погрешностью, возникающей, когда расстояние до поверхности мало по сравнению с шагом дискретизации. Кривая *2* показывает зависмость от расстояния до поверхности для модуля скорости $\boldsymbol{v_e}$, полученной путем экстраполяиии из внешней области. Толщина области сглаживания была выбрана как $h_0 = h/4$, исходя из анализа поведения кривой *1*. На графике круглыми маркерами отмечены значения, соответствующие точкам, по которым проводилась экстраполяция. Квадратным маркером отмечено нулевое значение скорости на границе, соответствующее случаю точного выполнения граничного условия.

Заметим, что экстраполированная скорость стремится к 0 при приближении к поверхности, что соответствует граничному условию.

Для количественной оценки точности выполнения граничного условия на всей поверхности были рассчитаны краевые значения скорости во всех точках коллокации путем экстраполяции из области течения. Среднее значение погрешности модуля скорости на границе области вычислялось по формуле

$$E(\boldsymbol{v}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(|\boldsymbol{v_e}(x_i) - \tilde{\boldsymbol{v}}_i)|)s_i}{q}, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_i = f_{0,i}\boldsymbol{n}_i, \quad q = \sum_{i=1}^{N}(|f_{0,i} - \boldsymbol{v}_{0,i}\cdot\boldsymbol{n}_i|)s_i.$$

На Рисунке 3.3 справа приведены зависимости величины $E(\boldsymbol{v})$ от числа ячеек разбиения сетки, аппроксимирующей поверхность, для двух рассматриваемых вариантов задачи. При этом во всех вариантах расчета толщина области сглаживания выбиралась как $h_0 = h/4$. Видно повышение точности аппроксимции скорости на границе при увеличении числа ячеек разбиения.

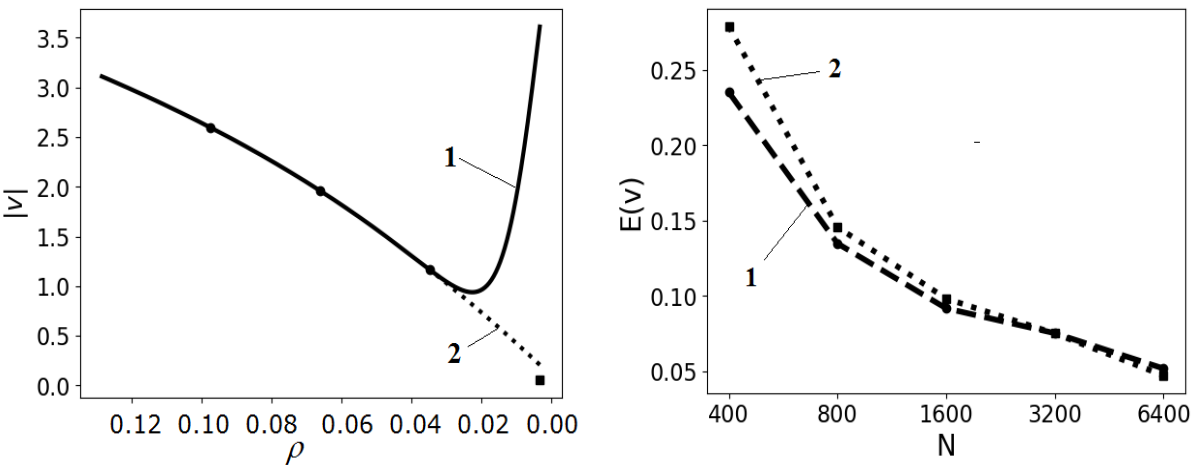

Рис. 3.3: Слева: изменение модуля вектора скорости вдоль отрезка AB: *1* – для прямых значений скорости, *2* – для значений скорости, полученных экстраполяцией из области течения. Справа: зависимость относительной ошибки $E(v)$ от числа ячеек разбиения N, *1* – вариант задачи №1, *2* – вариант задачи №2.

3.1.2 Течение в однородной области со смешанным граничным условием

Для тестирования численной схемы были использованы три постановки задачи с различными граничными условиями. Во всех задачах Σ – единичная сфера с центром в начале координат. Σ^q и Σ^p одно или несколько отверстий радиуса $r = 0.26$. Численнная аппроксимация поверхности $\tilde{\Sigma}$ – система четырехугольных ячеек (треугольных на полюсах). Число ячеек $N = 1581$, диаметр разбиения $h = 0.16$. Параметры $\kappa = \mu = 1$.

Распишем функции граничных условий на примере одного отверстия с заданым потоком и одного отверстия с заданым давлением.

Для $\tilde{\Sigma}^q$ заданы поток Q, центр z^q и радиус r.

$$\tilde{\Sigma}^q = \{\sigma_i : |x_i - z^q| < r\}$$

Начальная скорость f_0 определяется формулой

$$f_{0,i} = \frac{Q(r^2 - |x_i - z^q|^2)}{\sum_{k:\sigma_k \in \tilde{\Sigma}^q}(r^2 - |x_k - z^q|^2)s_k}.$$

Для $\tilde{\Sigma}^p$ заданы давление P, центр z^p и радиус r.

$$\tilde{\Sigma}^p = \{\sigma_i : |x_i - z^p| < r\}$$

Неизвестная скорость ξ на $\tilde{\Sigma}^p$ задается как функция от ξ^p скорости в точке z^p

$$\xi_i = \xi^p \frac{r^2 - |x_i - z^p|^2}{r^2}.$$

Такой вид функций f_0, ξ обеспечивает параболический профиль течения через отверстия в границе.

Также задавалось давление в точке z^p: $\psi(z_p) = P$. Таким образом, достаточно добавить в систему одну переменную $\xi(z^p)$ и одно уравнение вместо уравнений для всех ячеек $\sigma_k \in \tilde{\Sigma}^p$. При наличии двух и более отверстий с заданным давлением в систему добавлялись уравнения для разности давлений в центрах отверстий.

Для каждой постановки задачи решалась система интегральных уравнений (1.30) по численной схеме (2.10)–(2.13). Далее вычислялись скорость и давление по формулам (2.14), (2.15). В качестве проверки правильности решения было использованно следующее условие: суммарный поток через границу $\tilde{\Sigma}$ должен быть равен нулю.

$$\sum_{\sigma_k \in \tilde{\Sigma}} q_k = 0, \quad q_k = \boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{v}(x_k) s_k. \tag{3.3}$$

Для всех экспериментов была вычислена абсолютная и относительная ошибка по формулам

$$E_{abs} = \sum_{\sigma_k \in \tilde{\Sigma}} q_k, \quad E_{rel} = \frac{\sum_{\sigma_k \in \tilde{\Sigma}} q_k}{\max_{\sigma_k \in \tilde{\Sigma}} q_k}. \tag{3.4}$$

При тестировании численных схем были использованы три постановки задач, граничные условия которых схематично представлены на Рисунке 3.4. Центры всех отверстий расположены на плоскости Oxy. Давлением и потоком в центре далее будут называться давление и поток через ячейку, на которой лежит точка z_p или z^q.

Пример 1: два потока – одно давление. Дано $Q_1 = -1$, $Q_2 = -1$, $P_1 = 20$. Получено $Q(\Sigma_1^p) = 2$, $P(\Sigma_1^q) = 54.7$, $P(\Sigma_2^q) = 54.7$. На Рисунке 3.5

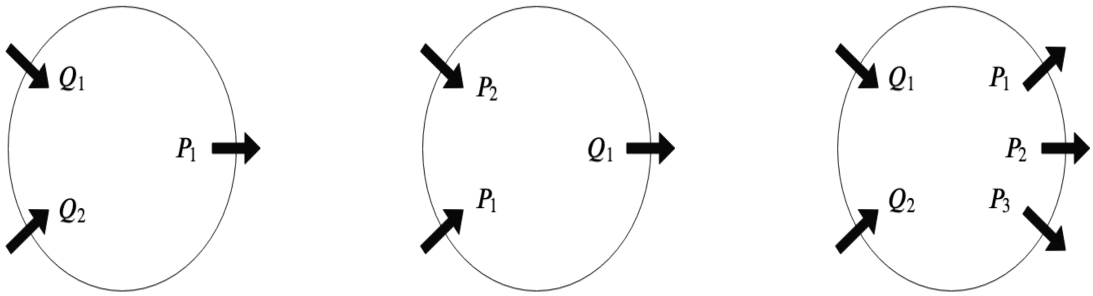

Рис. 3.4: Граничные условия для тестовых постановок задач

можно увидеть, что большая часть потока идет от Σ_1^q и Σ_2^q к центру области и далее к Σ_1^p, а вблизи границы Σ^0 скорость существенно меньше чем в центре, что обусловлено вязкостью жидкости.

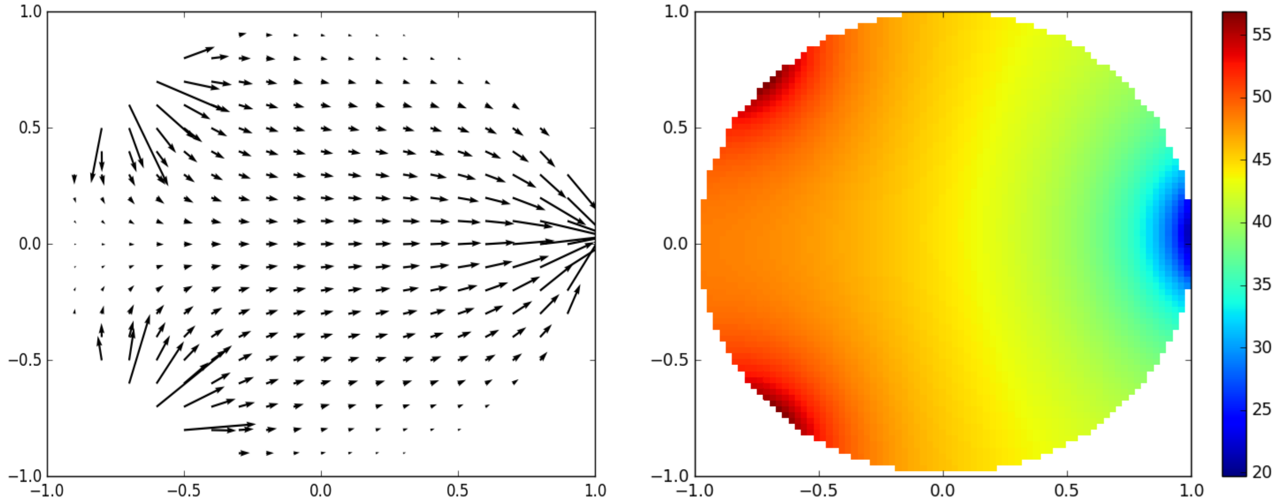

Рис. 3.5: Поле скоростей и давление для примера 1

Пример 2: Один поток - два давления. Дано $Q_1 = 1$, $P_1 = 20$, $P_2 = 50$. Получено $Q(\Sigma_2^p) = -1.8$, $Q(\Sigma_1^p) = 0.8$, $P(\Sigma_1^q) = 18.7$ На Рисунке 3.6 можно увидеть, что поток идет от Σ_2^p в центр области и разделяется на два потока к Σ_1^p и к Σ_1^q, причем поток к Σ_1^p немного меньше. На противоположной стороне от Σ_2^p течения практически нет. Давление на Σ_1^q меньше чем на Σ_1^p, что обеспечивает больший поток через данное отверстие.

Пример 3: два потока - три давления. Дано $Q_1 = -0.5$, $Q_2 = -1$, $P_1 = 15$, $P_2 = 20$, $P_3 = 10$. Получено $Q(\Sigma_1^p) = 0.6$, $Q(\Sigma_2^p) = -0.1$, $Q(\Sigma_3^p) = 1$, $P(\Sigma_1^q) = 27.3$, $P(\Sigma_2^q) = 31.7$. На Рисунке 3.7 показано, что течение идет от Σ_1^q к Σ_1^p и от Σ_2^q к Σ_1^p. Также как и в прошлых примерах, течение идет не по кратчайшей таректории, а через центр области. Отверстие Σ_2^p, на котором задано большее давление чем на Σ_1^p и Σ_3^p, оказывается входным, из него идет

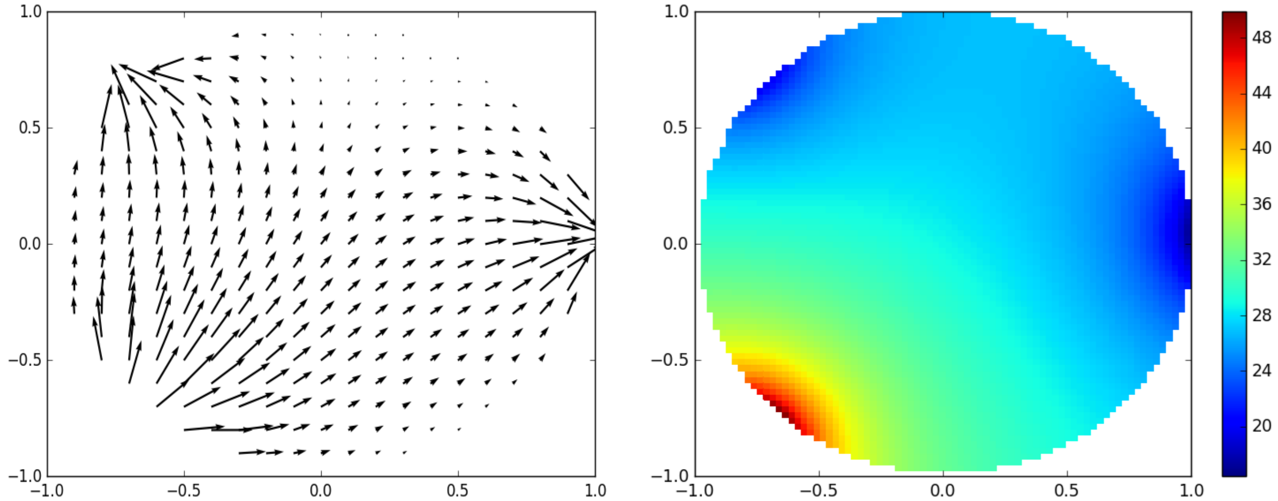

Рис. 3.6: Поле скоростей и давление для примера 2

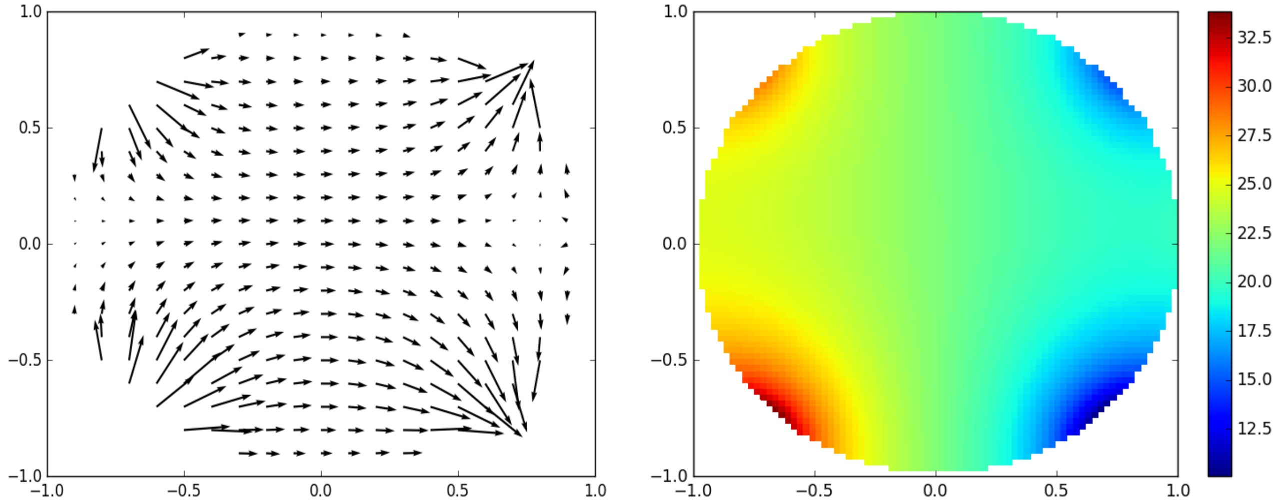

Рис. 3.7: Поле скоростей и давление для примера 3

небольшой поток к Σ_1^p и Σ_3^p. Основной поток от Σ_1^q и Σ_2^q тормозится вблизи Σ_2^p, сталкиваясь со встречным течением.

Для всех расчетов $E_{abs} < 10^{-6}$, $E_{rel} < 10^{-6}$, то есть точность решения системы достаточно высокая.

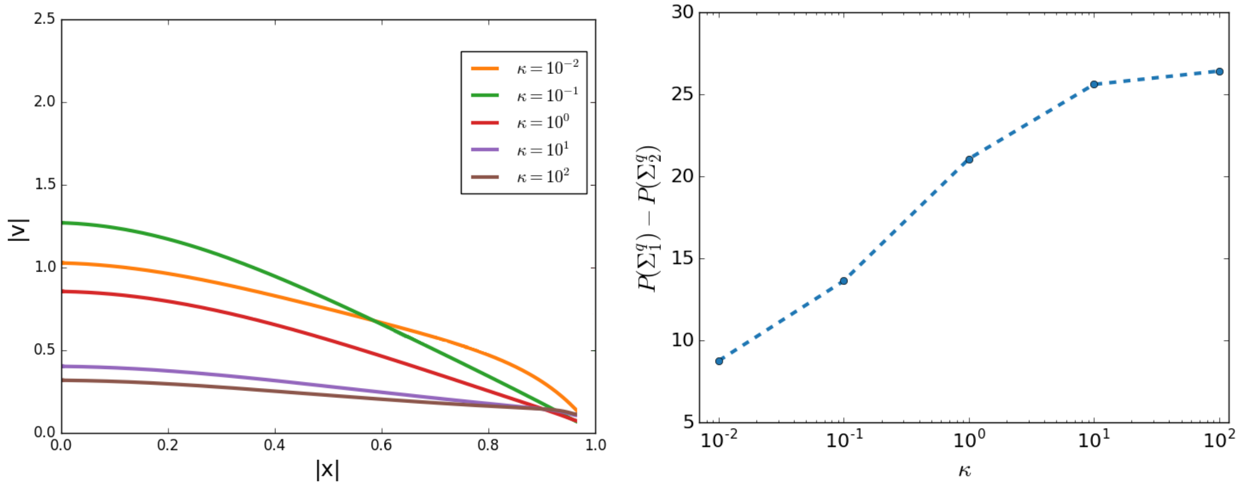

Рис. 3.8: Модуль вектора скорости на оси Оу при различных значениях κ (слева). Давление на входном отверстии Σ_1^q (справа)

Также было исследовано влияние коэффициента гидравлической проводимости κ на течение. Рассматривались значения $\kappa = \{100, 10, 1, 0.1, 0.01\}$. Для того, чтобы потенциальная составляющая не изменялась, варьировался коэффициент вязкости μ, таким образом, что $\mu = \kappa$. Поверхности Σ и $\tilde{\Sigma}$ такие же как и в предыдущих расчетах. Для простоты рассматривались граничные условия только на поток: на оси Ох задавалось два диаметрально противоположных отверстия Σ_1^q, Σ_2^q с равным по модулю потоком $-Q(\Sigma_1^q) = Q(\Sigma_2^q) = 1$. Во всех расчетах получалось $P(\Sigma_1^q) = -P(\Sigma_2^q)$.

На Рисунке 3.8 слева показан модуль вектора скорости на отрезке оси Оу, перпендикулярном направлению течения. Уменьшение κ относительно стартового значения $\kappa = 1$ оказывает неоднозначное влияние на профиль скорости, в то время как увеличение κ уменьшает модуль вектора скорости и делает убывание вблизи края менее заметным.

На Рисунке 3.8 справа показан перепад давления между отверстиями Σ_1^q и Σ_2^q. Разность давлений растет с ростом κ, так как для того же потока в более вязкой среде требуется больший градиент давления. Также заметна тендеция замедления роста при больших значениях κ.

3.1.3 Сопряжение течения на границе разделов сред

Была рассмотрена краевая задача (1.37)–(1.39) о сопряжении течений в двух областях в случае, когда поверхность раздела Σ есть сфера радиуса $R = 1$ (см. Рисунок 3.9). Задача решалась при значениях параметров $\kappa_1 = 0.01$, $\kappa_2 = 0.001$, $\mu = 30$. Течение инициировалось источником и стоком, расположенными во внешней области в точках $q_1 = (-1.5, 0, 0)$, $q_2 = (1.5, 0, 0)$ соответственно. Первичные поля скорости $\boldsymbol{v}_0$ и давления p_0 задавались формулами (1.33)–(1.35), где $N_s = 2$, $Q_1 = -Q_2 = 1$.

Численно решалась система уравнений (2.16)–(2.18), аппроксимирующая граничные интегральные уравнения (1.49). Были получены решения на поверхностных сетках, параметры которых приведены в Таблице 3.1.

На Рисунке 3.10 справа показано поле скоростей в сечении (положение сечения изображено на Рисунке 3.9), полученное в этой задаче по формуле (2.19) в варианите расчета с разбиением сферы на 1600 ячеек. На Рисунке 3.10 слева для сравнения приведено первичное поле (такое поле соответствует течению, индуцируемому теми же источниками в однородной среде без включения). Сравнение этих полей скоростей показывает, что при наличии области с малой проводимостью течение перестравиватся в обход этой области.

На Рисунке 3.11 показаны распределения в этом же сечении значений потенциала φ (слева) и давления (справа). Для расчета давления использовалась формула (2.20), потенциал выражался через давление по формуле $\varphi(x) = -\mu p(x)/\kappa_m$, $m = 1, 2$. Здесь видны разрывность потенциала на поверхности Σ и непрерывность давления на этой же поверхности.

На Рисунке 3.12 слева приведены зависимости модуля скорости от величины $r = |x|$ на отрезке AB, положение которого показано на Рисунке 3.9. Здесь кривая *1* соответствует значениям скорости, рассчитанным напрямую по формуле (2.19), кривая *2* соответствует значениям скорости, полученным с применением экстраполяции из области течения. При этом при $r > 1$ экстраполяция осуществлялась из области Ω_1, а при $r < 1$ – из области Ω_2. Этот график согласуется с условием непрерывности скорости на границе раздела сред.

Для количественной оценки точности выполнения граничного условия на всей поверхности раздела была проведена экстраполяция из областей Ω_1 и Ω_2 по формулам, аналогичным (3.2). Для каждой точки коллокации x_i краевые значения скорости $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}^+$ и $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}^-$ были полученны путем экстраполяции из областей Ω_1 и Ω_2 соответственно. При вычислениях опять использовалось значение параметра $h_0 = h/4$, где h – наибольший из диаметров ячеек разбиения.

Далее вычислялась величина $E(\boldsymbol{v})$, характеризующая среднюю относительную погрешность выполнения граничного условия на скорость, по формуле

$$E(\boldsymbol{v}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-|\, s_i}{q}, \quad q = \sum_{i=1}^{N} |\frac{\boldsymbol{v}_i^+ + \boldsymbol{v}_i^-}{2}| s_i.$$

На Рисунке (3.12) справа, приведена погрешность $E(\boldsymbol{v})$ в зависимости от числа ячеек разбиения для этой задачи.

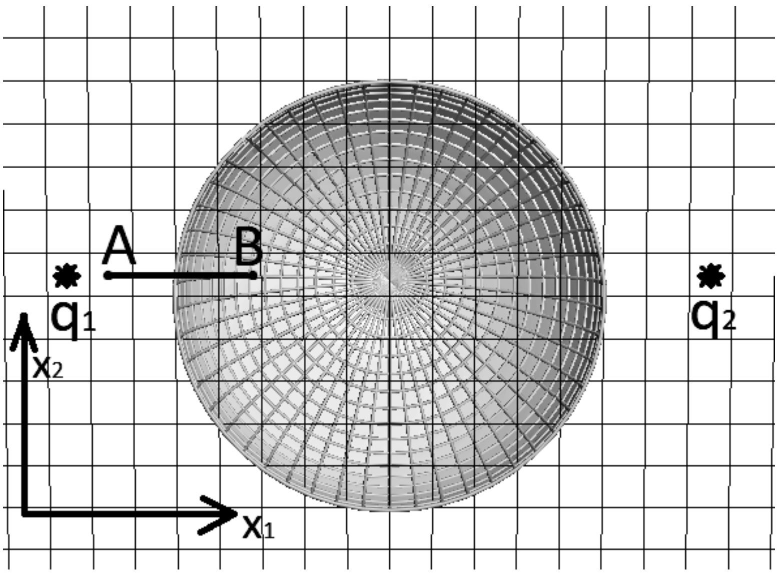

Рис. 3.9: Конфигурация расчетной области для задачи сопряжения.

Так же на примере рассматриваемой задачи было проведено исследование влияния проводимости среды во внутренней области Ω_2 на объем жидкости, проходящей через границу этой области. Для этого были получены решения краевой задачи (1.37)–(1.39) для той же конфигурации поверхности Σ и для того же первичного поля, что и в рассмотренном примере, но при различных значениях проницаемости среды во внутренней области: $\kappa_2 = \{0.0025, 0.005, 0.01, 0.02\}$, и для одних и тех же значений параметров $\kappa_1 = 0.01$, $\mu = 30$. Отметим, что случай $\kappa_2 = \kappa_1$ фактически обозначает

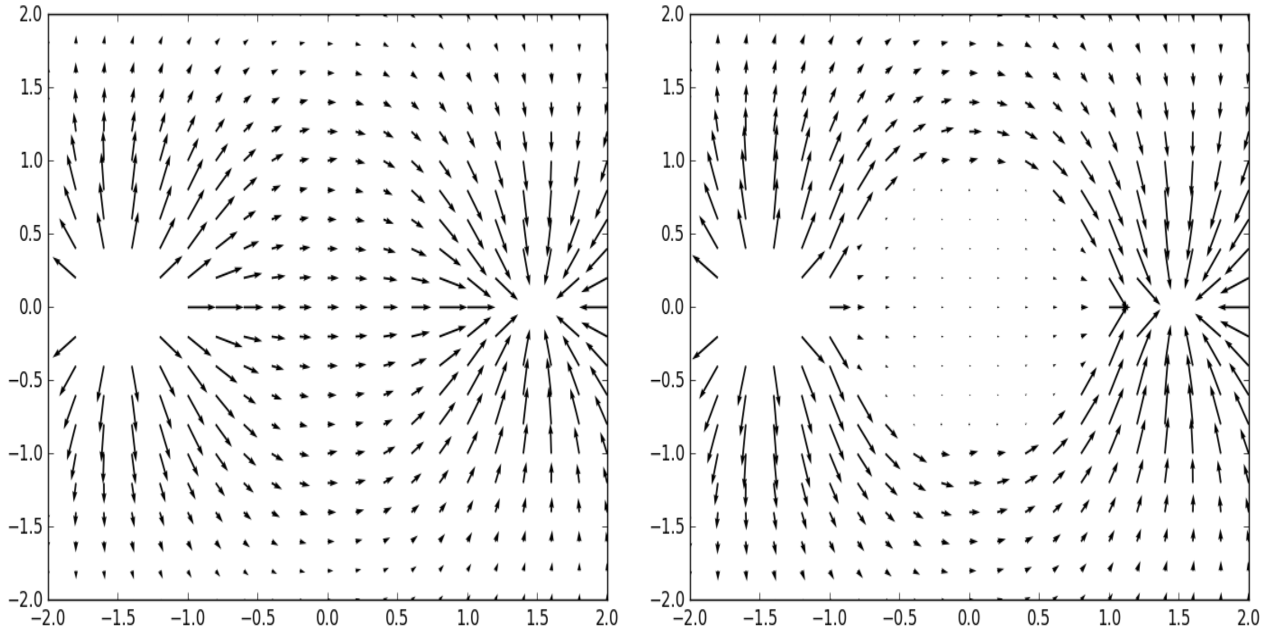

Рис. 3.10: Поле скоростей в сечении области течения плоскостью Ox_1x_2. Слева: при свободном течении, справа: в задаче сопряжения.

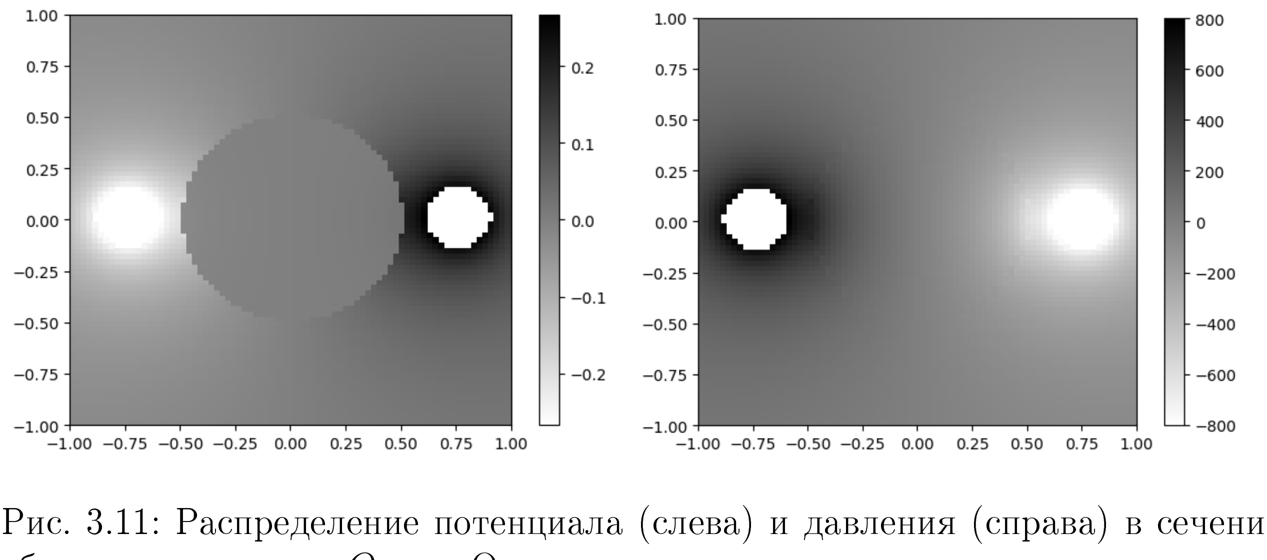

Рис. 3.11: Распределение потенциала (слева) и давления (справа) в сечении области плоскостью Ox_1x_2. Окрестности точечных источников вырезаны.

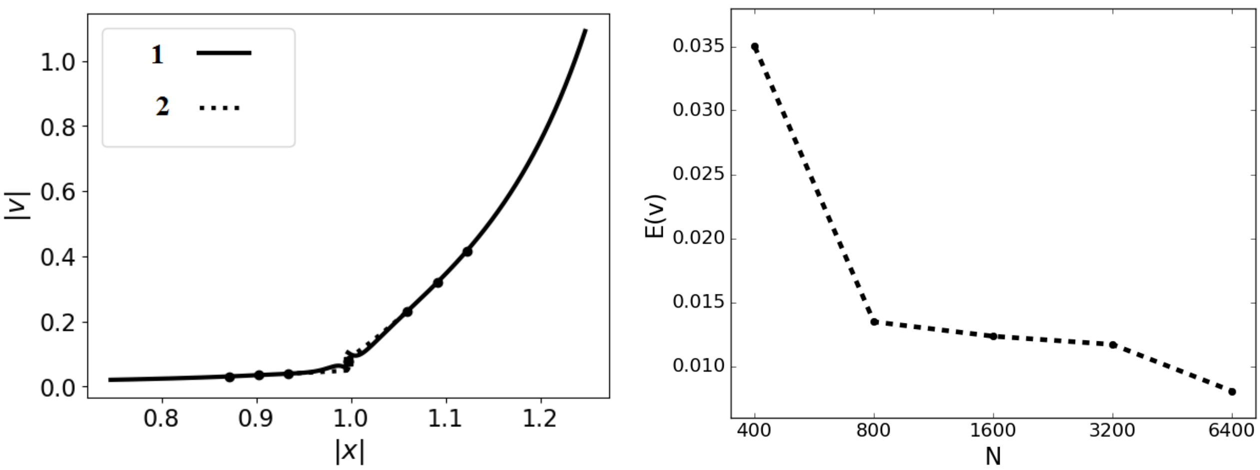

Рис. 3.12: Слева: изменение модуля вектора скорости вдоль отрезка AB: *1* – для прямых значений скорости, *2* – для значений скорости, полученных экстраполяцией из области течения. Круглым маркером отмечены точки, по которым проводилась экстраполяция. Квадратным маркером отмечено краевое значение скорости на границе. Справа: зависимость относительной погрешости вычислений $E(v)$ от числа ячеек разбиения поверхности.

отсутствие границы разделов сред Σ.

Расчеты проводились с аппроксимацией поверхности системой из $N = 1600$ ячеек. По результатам расчетов были получены значения скорости во всех точках коллокации $\boldsymbol{v}(x_i)$ (для вычисления краевого значения скорости на поверхности Σ здесь дискретизировалась формула (1.47)). Далее вычислялся поток жидкости через поверхность включения Σ по формуле

$$Q = \sum_{l=1}^{N} (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}(x_i))\, s_i.$$

На Рисунке 3.13 приведены зависимость обезразмеренного потока Q от отношения проводимостей внутренней и внешней сред κ_2/κ_1, обезразмеривание производилось делением потока Q на сумму $Q_0 = |Q_1| + |Q_2|$ модулей потоков в источнках поля. Видно, что поток через поверхность раздела сред растет с увеличением проводимости внутренней области.

3.1.4 Задача сопряжения с всасыванием

Была рассмотрена кревая задача (1.37), (1.56)–(1.58) о сопряжении течения с всасыванием. Первичное поле скоростей и давлений описывало равно-

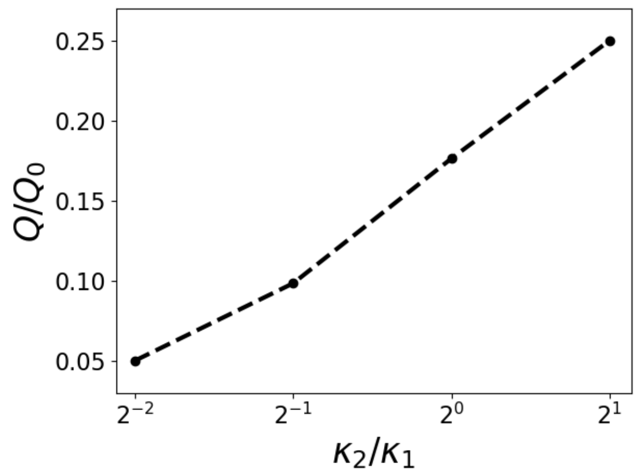

Рис. 3.13: Зависимость относительного потока жидкости через границу раздела от отношения проницаемостей областей.

мерное течение вдоль оси Ox, то есть

$$p_0 = -x, \quad \boldsymbol{v_0} = [\frac{\kappa_i}{\mu}, 0, 0]^T, \quad x \in \Omega_i,\ i = 1, 2$$

Поверхность Σ – сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Решалась система интегральных уравнений (1.71) по численной схеме (2.21). Параметры задачи следующие: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $L = 1$.

Было проведено исследование зависимости характера течения от параметра p_v. Область Ω_2 может являться источником или стоком жидкости в зависимости от разности давлений $p(x) - p_v$. Рассматривались значения $p_v = \{2, 0, -2\}$. Для каждого значения вычислялся сток жидкости в Ω_2 по формуле:

$$Q_{sink} = -\sum_{\sigma_i \in \tilde{\Sigma}} (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}(x_i)) s_i. \tag{3.5}$$

В Таблице 3.2 показала зависимость потока Q_{sink} от давления p_v. На Рисунках 3.14, 3.15 показаны поля скоростей и давлений, полученные при решении задачи с указанными значениями параметра p_v. При $p_v = 2$ область Ω_2 является источником жидкости, первичное поле давлений меньше 2 в данной области, поэтому наблюдается увеличение давления и вытекание жидкости через границу Σ. При $p_v = 0$ давление в области примерно равно первичному, поэтому Ω_2 является одновременно источником и стоком жидкости, причем объем втекающей жидкости примерно равен объему вытекающей. При

$p_v = -2$ Ω_2 является стоком, наблюдается ситуация противоположная случаю $p_v = 2$. Объем стекающей жидкости при $p_v = -2$ по модулю равен объему вытекающей при $p_v = 2$.

p_v	2	0	-2
Q_{sink}	-2.91	10^{-8}	2.91

Таблица 3.2: Зависимость стока жидкости в области Ω_2 от давления p_v.

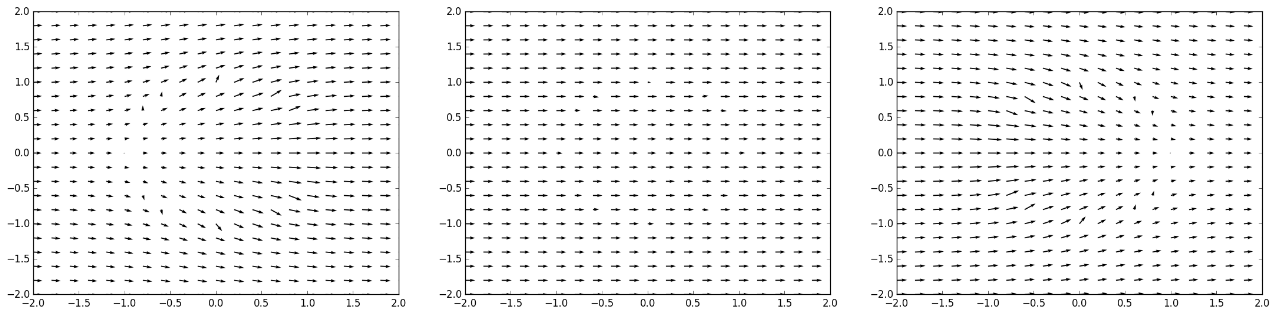

Рис. 3.14: Поле скоростей в плоскости Oxy при давлении в области стока $p_v = \{2, 0, -2\}$.

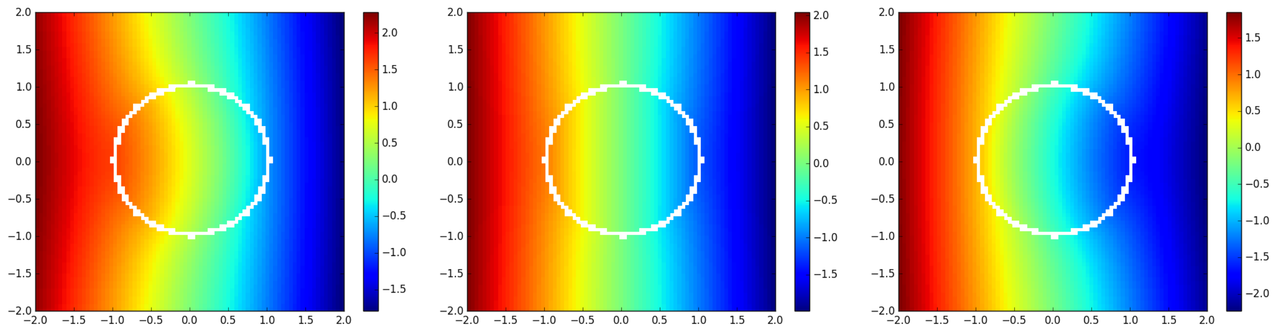

Рис. 3.15: Поле давлений в плоскости Oxy при давлении в области стока $p_v = \{2, 0, -2\}$.

Также было проведено исследование влияния значений параметров L и κ_2 на всасывание жидкости. Для выявления зависимости стока жидкости от коэффициента всасыания L использовалась та же геометрия что и в предыдущем примере. Параметры следующие: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0.5$, $\mu = 1$, $p_v = -2$. Параметр L принимал значения $\{0.25, 0.5, 1, 2, 4\}$. Сток жидкости вычислялся по формуле (3.5). На графике 3.16 (слева) приведена зависимость стока жидкости от параметра L. Для исследования зависимости стока жидкости от гидравлической проводимости внутренней области κ_2 использовалась та же геометрия с параметрами: $\kappa_1 = 1$, $\mu = 1$, $L = 1$, $p_v = -2$. Параметр κ_2 принимал значения $\{0.25, 0.5, 1, 2, 4\}$. На графике 3.16 (справа) приведена зависимость стока жидкости от параметра κ_2. Заметно, что параметр L оказывает существенное влияние на всасывание жидкости, в то время как рост κ_2 оказывает малое влияние на значение Q_{sink}.

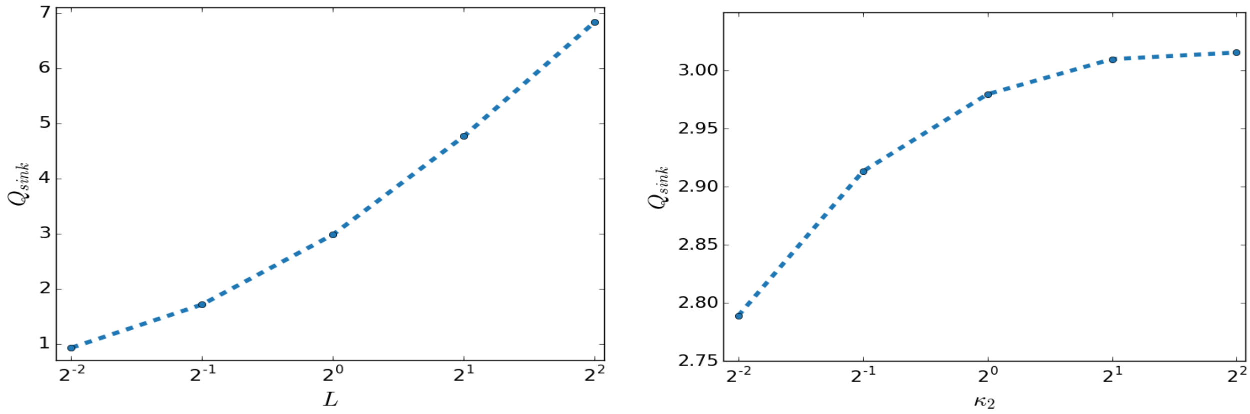

Рис. 3.16: Зависимость стока жидкости от коэффициента всасывания L и гидравлической проводимости области всасывания κ_2.

3.1.5 Вязкое течение в системе областей

Рассмотрим краевую задачу (1.81)–(1.83). В качестве модельной геометрии рассмотрим цилиндрическую трубку со сферическим включением в центре. Будем полагать, что включение имеет меньшую гидравлическую проводимость чем среда в трубке. Зададим поток через левое основание цилиндра Q_1 и давление на правом основании цилиндра P_2, для включения зададим давление p_v^2. Обозначим через z^q центр левого основания, z^p – центр правого основания и r – радиус основания. Функции f_0, ξ аппроксимируются таким образом, чтобы течение через основания имело параболический профиль.

$$f_{0,i} = Q_1 \frac{r^2 - |x_i - z^q|^2}{\sum_{k:\sigma_k \in \tilde{\Sigma}^q} (r^2 - |x_k - z^q|^2) s_k}, \quad \psi = P_2. \tag{3.6}$$

Дополнительная неизвестная ξ на $\tilde{\Sigma}^p$ аппроксимируется аналогично.

$$\xi_i = \xi^p \frac{r^2 - |x_i - z^p|^2}{\sum_{k:\sigma_k \in \tilde{\Sigma}^p} (r^2 - |x_k - z^p|^2) s_k}. \tag{3.7}$$

Была исследована зависимость течения от граничных условий. Для описанной выше геометрии трубки решалась краевая задача (1.89)–(1.94) по численной схеме (2.31)–(2.36). Параметры модели $L_2 = 0.01$, $\kappa_1 = 0.1$, $\kappa_2 = 0.01$, $\mu = 1$. Граничные условия задавались формулой (3.6) с фиксированным входным потоком $Q_1 = -1$, выходным давлением $P_2 = 1$ и различными давлениями p_v^2. В качестве основной анализируемой характеристики течения рассматривался суммарный поток жидкости через границу области всасывания (этот поток характеризует количество жидкости, всасываемой в области Ω_2 в единицу времени), который определялся по формуле (3.5).

В Таблице 3.3 приведены значения параметров граничных условий и сток жидкости Q_{sink}, полученный при решении задачи с данными граничными условиями. На Рисунке 3.17 показаны поля скорости и давления, расчитанные по формулам (2.37), (2.38) в центральном сечении трубки. Видно, что при наименьшем из рассмотренных значений давления $p_v^2 = 0.5$ почти весь поток идет внутрь области всасывания, При значении давления $p_v^2 = 1.0$ всасывается половина потока жидкости. При больших значениях давления $p_v^2 = 2.5$ происходит вытекание жидкости из внутренней области.

p_v^2	0.5	1	2.5
Q_{sink}	0.91	0.56	-0.45

Таблица 3.3: Сток жидкости во внутренней области в зависимости от значений параметров граничных условий

Также была исследована зависимость течения от параметров модели при фиксированных граничных условиях. Для описанной выше геометрии трубки решалась краевая задача (1.89)–(1.94) по численной схеме (2.31)–(2.36). Граничные условия заданы формулой (3.6) с $Q_1 = -1$, $P_2 = 1$, $p_2^0 = 1$. Мы рассмотрели четыре набора парамеров L_2, κ_1, κ_2 (значение параметра вязкости жидкости фиксировано). В Таблице 3.4 приведены значения параметров, а также сток жидкости внутри области всасывания Ω_2.

На Рисунках 3.18 и 3.19 показаны поля скорости и давления, расчитанные по формулам (2.37), (2.38) в центральном сечении трубки. На Рисунке 3.20 показана зависимость стока жидкости от параметров L_2 и κ_2. В первом случае варьируется $L_2 \in [10^{-2}, 10^2]$ при $\kappa_2 = 10$, во втором варьируется

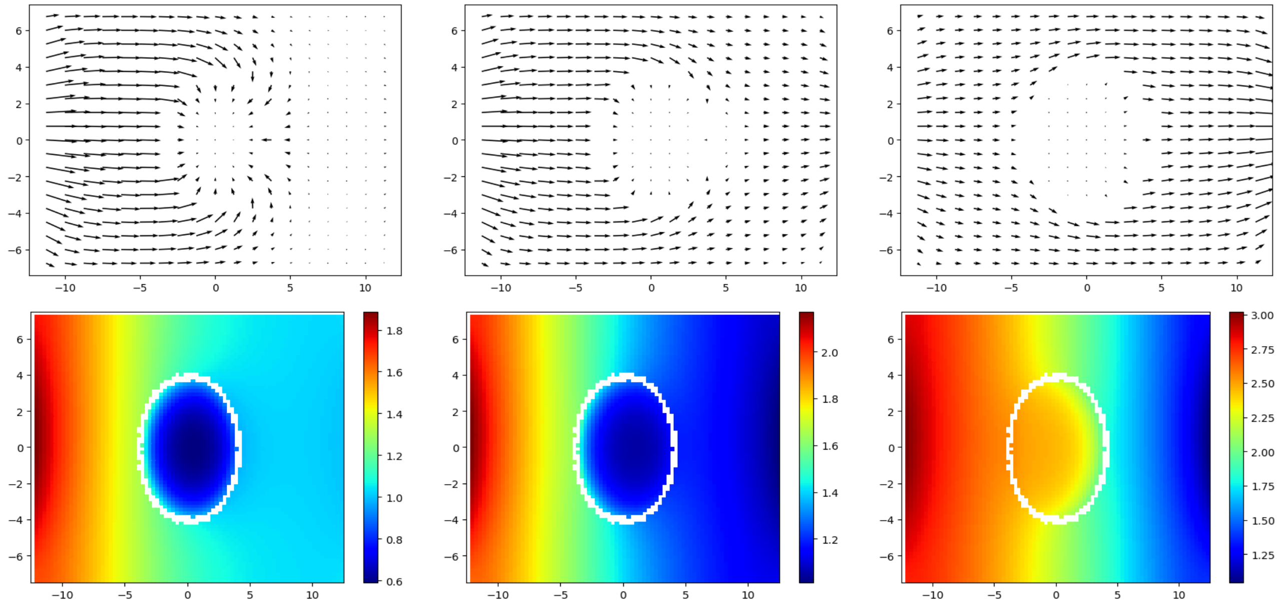

Рис. 3.17: Поле скоростей в центральном сечении трубки при параметрах, указанных в Таблице 3.3

$\kappa_2 \in [10^{-2}, 10^2]$ при $L_2 = 0.1$. Во всех расчетах коэффициент гидравлической проводимости в внешней области задается отношением $\kappa_1 = 10\kappa_2$, вязкость жидкости фиксирована $\mu = 1$. Заметно, что с увеличением параметра L_2 объем всасываемой жидкости растет, уменьшение гидравлической проводимости также усиливает всасывание жидкости. Можно высказать предположение, что сток жидкости есть сигмоидная функция от логарифма L_2 или сигмоидная со знаком минус от κ_2 при фиксированных остальных параметрах модели. Заметно также, что при малых значениях гидравлической проводимости течение жидкости внутри области всасывания существенно меньше чем при высоких, несмотря на то, что отношение κ_1/κ_2 остается неизменным.

L_2	κ_1	κ_2	Q_{abs}
0.1	100	10	0.1
1	100	10	0.54
10	100	10	0.97
0.1	1	0.1	0.63

Таблица 3.4: Сток жидкости во внутренней области в зависимости от значений параметров модели

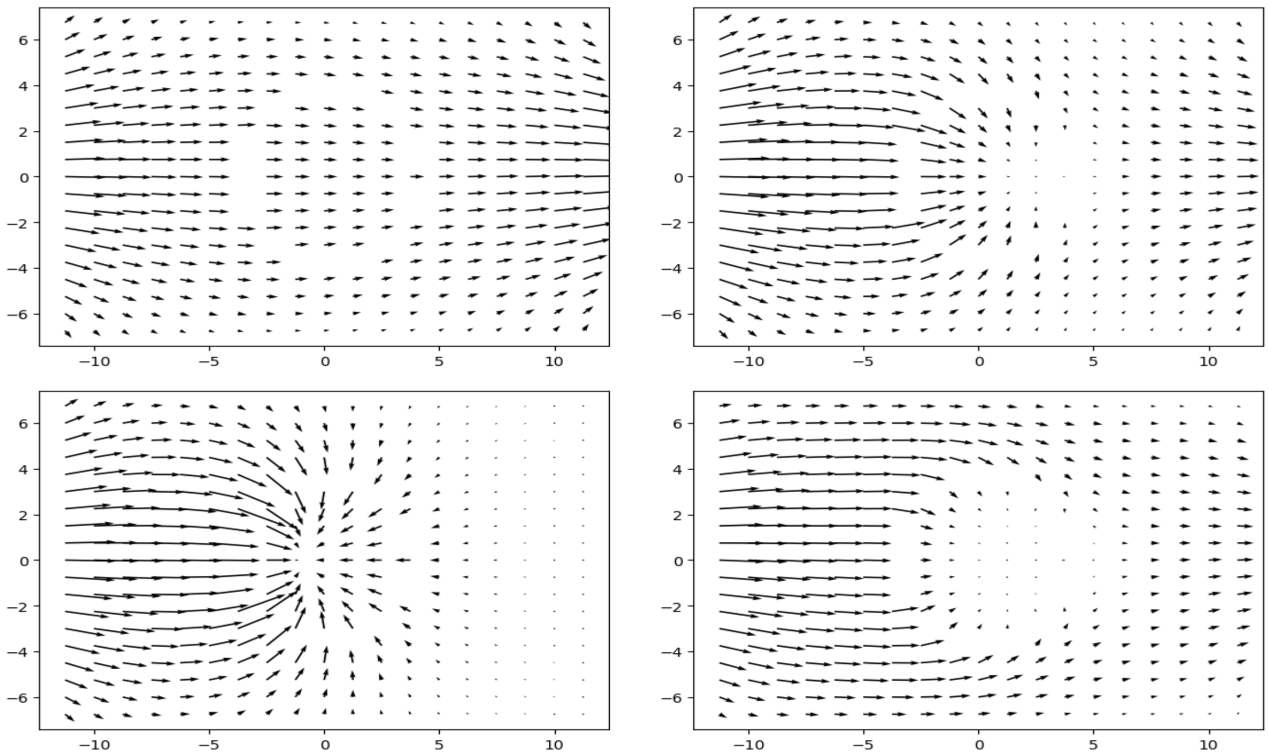

Рис. 3.18: Поле скоростей в центральном сечении трубки при параметрах, указанных в Таблице 3.4

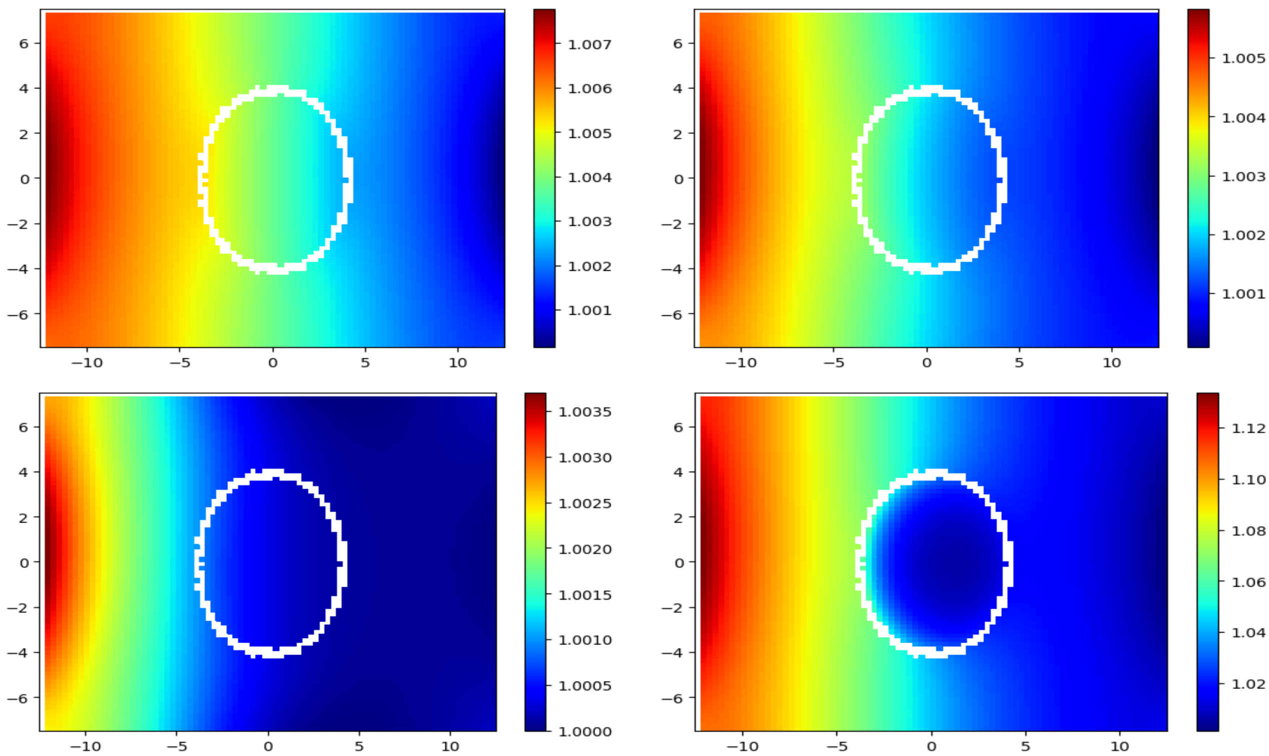

Рис. 3.19: Поле давлений в центральном сечении трубки при параметрах, указанных в Таблице 3.4

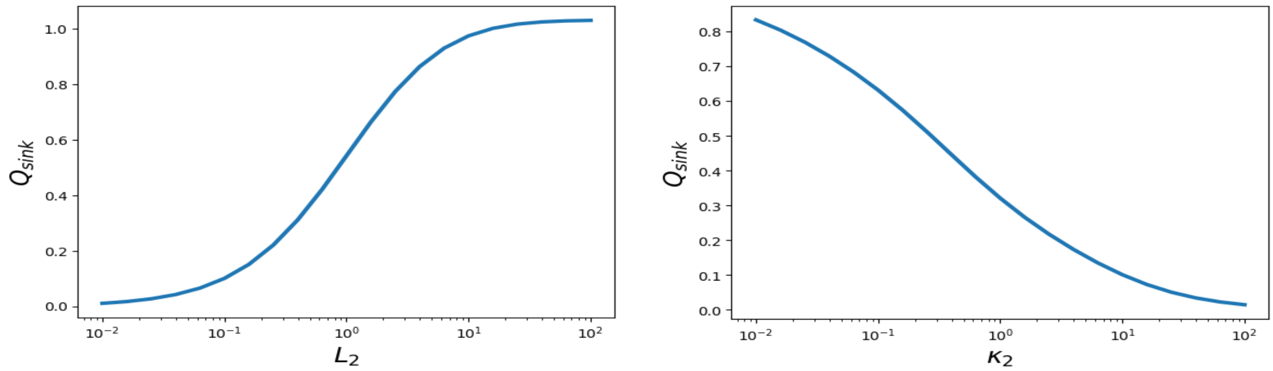

Рис. 3.20: Зависимость стока жидкости от параметров модели: слева $L_2 \in [10^{-2},\ 10^2]$, $\kappa_2 = 10$, справа $\kappa_2 \in [10^{-2},\ 10^2]$, $L_2 = 0.1$

3.2 Валидация модели

Модель потенциального течения с всасыванием может быть применена для моделирования течения лимфы в лимфатическом узле (ЛУ) с учетом пористой структуры и всасывания в кровеносную систему (КС). Для калибровки модели используются экспериментальные данные по всасыванию лимфы из ЛУ в КС, приведенные в работах [46–48].

3.2.1 Фильтрационное течение лимфы в лимфоузле

Лимфатические узлы являются важной составляющей лимфатической системы, их функция – фильтрация лимфы и запуск имунных процессов. Форма ЛУ может быть приближена сферой или эллипсоидом, диаметр ЛУ варьируется от 0.5 – 1 мм до 30-50 мм и более. В лимфатический узел входят 2-4 афферентных (входных) сосуда и выходит 1-2 эфферентных (выходных) сосуда [49]. При прохождении лимфы по лимфатическому узлу около 1/3 её объёма стекает в кровеносную систему.

Существующие модели фильтрационного течения в лимфоузле [8], [7], а также модель распространения интерферона в ЛУ [12], основаны на применении пространственного метода конечных элементов. Существуют также различные геометрические модели, описывающие структуру лимфоузла и расположение кровеносных сосудов в нем [34, 50, 51], а также модель лимфатической системы человека [35], демонстрирующая положение ЛУ в теле. В данной работе использована более простая модель, состоящая из двух однородных областей. Упрощенная модель лимфоула состоит из двух областей: внешняя область – субкапсулярный синус, внутренняя область (Т-клеточная и медулярная зоны). Внутренняя область характеризуется существенно более высоким гидравлическим сопротивлением, также во внутренней области происходит сток лимфы в КС [10, 11, 49, 52]. Структура лимфоузла схематично изображена на Рисунке 3.21.

Задача фильтрационного течения лимфы с всасыванием в КС описывается системой уравнений (1.74) с граничными условиями (1.75). Фильтрация лимфы в ЛУ также может описываться законом Дарси-Бринкмана, однако параметры гидравлической проводимости лимфоузла и динамической вязкости лимфы [7, 8] таковы, что коэффициент при Лапласиане скорости $\Delta \boldsymbol{v}$ пренебрежимо мал (порядок величин параметров: $\kappa_1 = 10^{-4}\ mm^2$, $\kappa_2 = 10^{-7} mm^2$, $\mu = 2 \cdot 10^{-7}\ mmHg \cdot min$, $\beta_1 = 10^2\ mm^{-1}$, $\beta_2 = 10^3\ mm^{-1}$). Потому мы использовали модель, основанную на законе Дарси без поправки Бринкмана.

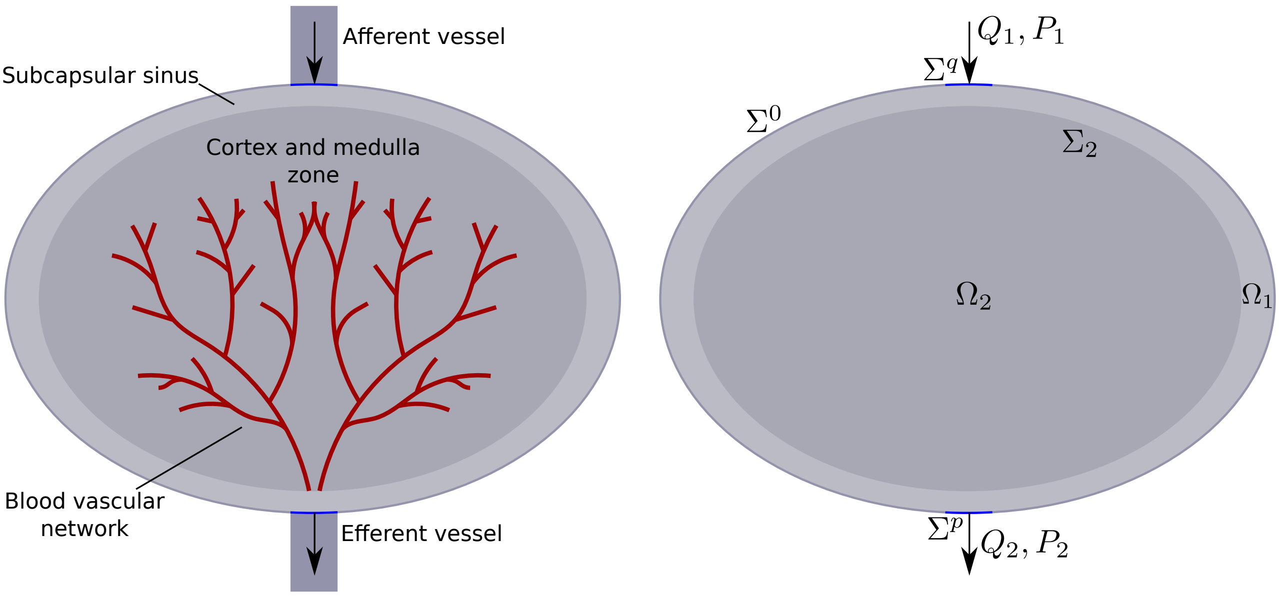

Рис. 3.21: Схематичное упрощенное представление ЛУ: внешняя область с низким гидравлическим сопротивлением и внутренняя область, в которой лимфа всасывается в кровь

Для тестирования модели мы использовали экспериментальные данные, приведенные в статье [48]. В эксперименте использовался лимфоузел с одним афферентым отверстием Σ^q, через который шел фиксированный поток Q_1, и одним эфферентым отверстием Σ^p, на котором задавалось давление P_2 (см

Рисунок 3.21 справа). Обозначим через z^q центр афферентного отверстия, z^p центр афферентного отверстия, r – радиус отверстий. Поверхности Σ^q и Σ^p аппроксимируются следующим образом:

$$\tilde{\Sigma}^q = \{\sigma_i : |x_i - z^q| < r\}, \qquad \tilde{\Sigma}^p = \{\sigma_i : |x_i - z^p| < r\}.$$

Функции f_0, ψ и ξ аппроксимируются по формулам (3.6), (3.7).

Обмен жидкостью между лимфоузлом и кровеносной системой описывается уравнением Старлинга

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}(x) = -L_b A(p(x) - p_b + \sigma \cdot (\pi_b - \pi_{lymph})),$$

где L_b – коэффициент всасывания в кровь, A – площадь поверхности кровеносных сосудов, p_b – давление в к.с., π_b онкотическое давление в крови, π_{lymph} онкотическое давление в лимфе, σ – коэффициент онкотического отражения. Значение σ бралось равным 0.88 (см. [8]). В эксперименте измерялось давление в крови p_b, а также концентрации белков в крови C_b и лимфе C_l. Вычислить онкотическое давление можно по формуле

$$\pi = \frac{C}{M} RT$$

где $M = 67.2$ кг/моль – молярная масса белков, $R = 8.31$ – универсальная газовая постоянная, $T = 301$ K – абсолютная температура. Таким образом, можно вычислить $p_v = p_b - \sigma \cdot (\pi_b - \pi_{lymph})$.

3.2.2 Приближение к экспериментальным данным

Упрощение постановки задачи для лимфоузла позволяет сократить количество параметров модели до трех. $L = L_b A$ – коэффициент всасывания в КС во внутренней области, $\alpha_1 = \mu/\kappa_1$ – гидравлическое сопротивление во внешней области, и $\alpha_2 = \mu/\kappa_2$ – гидравлическое сопротивление во внутренней области. Обозначим вектор параметров $\theta = \{L,\ \alpha_1,\ \alpha_2\}$. Система интегральных уравнений (1.78)–(1.80) решается по численной схеме (2.26)–(2.28) с параметрами θ и граничными условиями (3.6), в которые подставлялись значения Q_1 и P_2, взятые из Таблицы 1 статьи [48].

Для сравнения предсказаний модели с экспериментальными данными Q_2, P_1 использовались значения $\bar{P}_1$ – давление на Σ_1^q и $\bar{Q}_2$ – поток через Σ_1^p, вычисляемые по следующим формулам:

$$\bar{Q}_2 = \sum_{\sigma_i \in \Sigma_1^p} \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{v}_i^- \cdot s_i, \quad \bar{P}_1 = \frac{\sum_{\sigma_i \in \Sigma_1^q} p_i^- \cdot s_i}{\sum_{\sigma_i \in \Sigma_1^q} s_i}$$

В статье [48] приводятся данные по нескольким животным (собаки породы борзая), для каждого животного приводятся 6 или 7 экспериментальных значений. Будем полагать, что разным животным соответствуют различные значения параметров θ. Мы будем искать оптимальные значения параметров как минимум функционала Φ_{err} по всем экспериментам для каждого животного.

$$\Phi_{err}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{N_{exp}} \frac{(Q_2^i - \bar{Q}_2^i(\theta))^2}{Q_{avg}} + \frac{(P_1^i - \bar{P}_1^i(\theta))^2}{P_{avg}} \right)^{\frac{1}{2}},$$
$$Q_{avg} = \sum_{i=1}^{N_{exp}} \frac{(Q_2^i)^2}{N_{exp}}, \quad P_{avg} = \sum_{i=1}^{N_{exp}} \frac{(P_1^i)^2}{N_{exp}}, \quad (3.8)$$

где Q_2^i, P_1^i – данные i-ого эксперимента, $\bar{Q}_2^i$, $\bar{P}_1^i$ – результаты модели для i-ого эксперимента.

Для решения оптимизационной задачи использовался метод Нелдера-Мида. Для каждого животного решалась отдельная оптимизационная задача. Значения функционала, а также оптимальные значения параметров приведены в Таблице 3.5. Для первых четырех животных в эксперименте варьировалось значение P_2 при малых изменениях p_v и неизменном Q_1, поэтому сравнение результатов моделирования с результатами эксперимента можно представить как зависимость P_1 и Q_2 от P_2 (см. Рисунки 3.22, 3.23). В случае 5-го и 6-го животного давление P_2 сначала увеличивалось, потом убывало, потому для большей информативности сравнение результатов с экспериментом приведено в Таблице 3.6.

Значение функционала отклонения результатов от эксперимента Φ_{err} демонстрируют, что модель достаточно точно приближает данные для первых четырех животных, и существенно хуже для двух последних. Модель позволяет моделировать течение лимфы при существенных перепадах давления на эфферентном отверстии P_2, однако мало чувствительна к небольшим изменениям p_v при неизменном P_2.

Dog	Φ_{err}	L	α_1	α_2
1	0.16	6.22	$1.2{\cdot}10^{-3}$	3.08
2	0.26	8.42	$0.7{\cdot}10^{-3}$	4.46
3	0.24	7.94	$0.6{\cdot}10^{-3}$	3.67
4	0.19	6.17	$0.7{\cdot}10^{-3}$	3.49
5	0.45	6.89	$0.7{\cdot}10^{-3}$	3.11
6	0.38	10.66	$0.5{\cdot}10^{-3}$	2.05

Таблица 3.5: Параметры, обеспечивающие оптимальное приближение к экспериментальным данным по шести животным

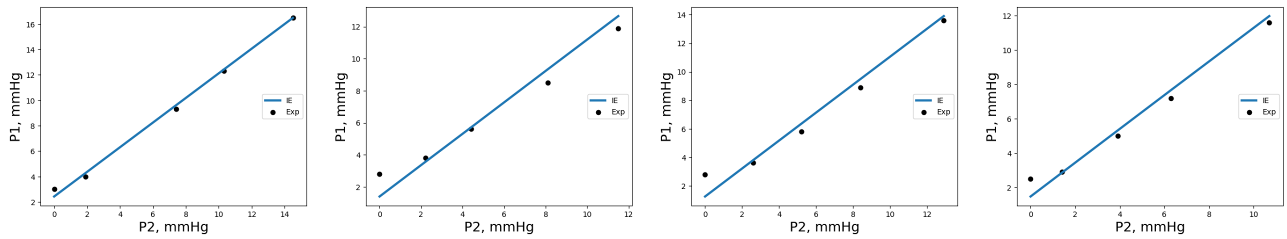

Рис. 3.22: Значения давления P_1 на афферентном отверстии в зависимости от давления P_2 на эфферентном отверстии для 1–4-ого животных.

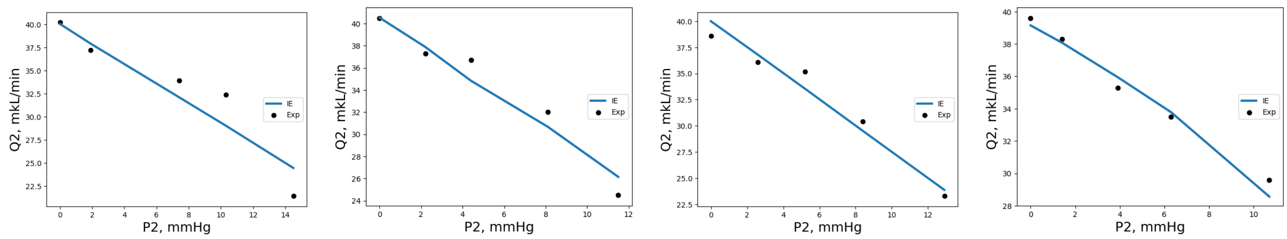

Рис. 3.23: Значения потока Q_2 на эфферентном отверстии в зависимости от давления P_2 на эфферентном отверстии для 1–4-ого животных.

Dog	Q_1	P_2	p^0	Q_2	P_1	$\bar{Q}_2$	$\bar{P}_1$
5	45.5	0.0	-4.38	40.1	3.30	39.52	1.53
5	45.5	5.3	-4.43	34.0	5.70	33.36	6.72
5	45.5	9.3	-4.57	29.4	9.80	28.59	10.64
5	45.5	9.3	-4.34	28.2	9.60	28.85	10.63
5	45.5	5.3	-4.39	33.2	5.90	33.4	6.72
5	45.5	0.0	-4.60	40.4	3.10	39.27	1.52
6	46.2	0.0	-0.16	41.6	2.7	44.82	1.22
6	46.2	6.0	-0.28	33.9	6.2	33.97	7.08
6	46.2	10.8	-0.11	26.7	10.9	25.76	11.77
6	46.2	10.8	-0.02	25.9	10.9	25.92	11.77
6	46.2	6.0	-0.4	34.5	6.3	33.76	7.07
6	46.2	0.0	-0.67	43.1	2.7	43.92	1.21

Таблица 3.6: Сравнение потока Q_2 на эфферентном отверстии и давления P_1 на афферентном отверстии с экспериментальными данными для 5-ого и 6-го животных.

Заключение

В диссертационной работе была построена модель фильтрационного течения жидкости в кусочно-однородной области с учетом того, что внутри основной области течения могут содержаться подобласти, в которых происходит всасывание жидкости в среду. Также были рассмотрены частные случаи данной модели: течение в однородной области без всасывания и течение через границу разделов сред.

В первую очередь было рассмотрено вязкое течение в однородной области без всасывания. Для данной задачи было построено выражение для полей скорости и давления жидкости через потенциалы на границе области, а также было доказано, что при определенных условиях выражение для полей скоростей и давлений через интегральные операторы существует и является решением задачи фильтрации в однородной области.

Также было рассмотрено вязкое течение в однородной области со смешанным граничным условием: на части границы задавалось давление, на части поток, а на остальных частях ставилось условие непротекания. Решение данной задачи отличалось от предыдущего на константу, значение которой определялось при помощи интегральных операторов по части гранцы, на которой задано давление.

Далее была рассмотрена задача сопряжения течения на границе разделов сред. Рассматривалась постановка задачи без всасывания, течение инициировалось точечными источниками. Для данной задачи было построено выражение для полей скорости и давления жидкости через потенциалы на границе раздела сред. Краевая задача была сведена к системе интегральных уравнений и доказано при малой разнице между гидравлическими проводимостями сред решение системы интегральных уравнений существует и единственно.

Для сопряжения течения также была сформулирована другая постановка задачи: во внутренней области происходило всасывание жидкости, а течение инициировалось заданным первичным полем давлений. Для такой задачи было построено выражение для полей скорости и давления жидкости через потенциалы на границе раздела сред. Однако в данном случае, в отличие от предыдущих, использовались поверхностные потенциалы для уравнения Гельмгольца, а не Лапласа.

Также была рассмотренна задача потенциального течения в системе из двух областей со всасыванием во внутренней области. Данная задача фактически является частным случаем вязкого течения в системе областей, и используется для валидации модели.

Вязкое течение в системе областей является объединением задачи о течении в однородной области со смешанным граничным и задачи сопряжения течения на границе разделов сред со всасыванием. Было построено выражение для полей скорости и давления жидкости через потенциалы на границе области и на границах разделов сред. Краевая задача фильтрации была сведена к системе интегральных уравнений.

В Главе 2 для всех систем интегральных уравнений, описанных в Главе 1, были построены численные схемы решения, основанные на методе кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Также в данной главе была описана дискретизация поверхностей и интегральных операторов.

В Главе 3 было описано тестирование и верификация численных схемы для всех постановок задач, кроме потенциального течения в системе из двух областей. Для вязкого течения в однородной области без всасывания была проведена верификация решения при помощи интерполяции значения на границе через значения в области. Для течения в однородной области со смешанным граничным условием были решены задачи с различными граничными условиями. Также было показано, что решение вычисляется с высокой точностью: ошибка в суммарном потоке через границу не превосходит 10^{-6}. Для задачи сопряжения течения на границе разделов сред также была проведена верификация при помощи интерполяции значений из различных областей. Для задачи сопряжения с всасыванием было проведено исследование влияния параметров на характеристики течения и всасывания.

Для задачи вязкого течение в системе областей было исследовано поведение численных решений при различных граничных условиях и показано, что модель позволяет описывать как всасывание так и приток жидкости. Также была исследована зависимость объема всасываемой жидкости от параметров модели.

В Главе 3 также было проведено сравнение предсказаний модели с экспериментальными данными по фильтрации лимфы в лимфоузле. Была использована модель, описывающая потенциальное течение в двух областях. Было достигнуто согласование значений суммарных характеристик течения, полученных причисленном моделировании с экспериментальными данными с ошибкой в пределах 10%. Таким образом, анализ полученных результатов тестирования, в частности, показывает применимость разработанной численной модели для моделирования течения лимфы в лимфоузлах.

Литература

[1] Reddy Narender P, Krouskop Thomas A, Newell Jr Paul H. A computer model of the lymphatic system // Computers in biology and medicine. 1977. Т. 7, № 3. С. 181–197.

[2] Reddy Narender P, Krouskop Thomas A, Newell Jr Paul H. Biomechanics of a lymphatic vessel // Journal of Vascular Research. 1975. Т. 12, № 5. С. 261–278.

[3] Modeling flow in collecting lymphatic vessels: one-dimensional flow through a series of contractile elements / Alison J MacDonald, Kenton Paul Arkill, Gavin R Tabor [и др.] // American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology. 2008. Т. 295, № 1. С. H305–H313.

[4] Mozokhina AS, Mukhin SI. Quasi-one-dimensional flow of a fluid with anisotropic viscosity in a pulsating vessel // Differential Equations. 2018. Т. 54, № 7. С. 938–944.

[5] Mozokhina AS, Mukhin SI. Some Exact Solutions to the Problem of a Liquid Flow in a Contracting Elastic Vessel // Mathematical Models and Computer Simulations. 2019. Т. 11, № 6. С. 894–904.

[6] Mozokhina Anastasiya Sergeevna, Mukhin Sergei Ivanovich. Some exact solutions of the problem of liquid flow in the contracting or expanding vessel // Matematicheskoe modelirovanie. 2019. Т. 31, № 3. С. 124–140.

[7] An image-based model of fluid flow through lymph nodes / Laura J Cooper, James P Heppell, Geraldine F Clough [и др.] // Bulletin of mathematical biology. 2016. Т. 78, № 1. С. 52–71.

[8] Modeling lymph flow and fluid exchange with blood vessels in lymph nodes / Mohammad Jafarnejad, Matthew C Woodruff, David C Zawieja [и др.] // Lymphatic research and biology. 2015. Т. 13, № 4. С. 234–247.

[9] Setukha AV, Tretyakova RM, Bocharov GA. Methods of potential theory in a filtration problem for a viscous fluid // Differential Equations. 2019. Т. 55, № 9. С. 1182–1197.

[10] Organ-wide 3D-imaging and topological analysis of the continuous microvascular network in a murine lymph node / Inken D Kelch, Gib Bogle, Gregory B Sands [и др.] // Scientific reports. 2015. Т. 5. С. 16534.

[11] Wiig Helge, Swartz Melody A. Interstitial fluid and lymph formation and transport: physiological regulation and roles in inflammation and cancer // Physiological reviews. 2012. Т. 92, № 3. С. 1005–1060.

[12] Reaction-diffusion modelling of interferon distribution in secondary lymphoid organs / G Bocharov, A Danilov, Yu Vassilevski [и др.] // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2011. Т. 6, № 7. С. 13–26.

[13] Chan BKC, Ivey CM, Barry JM. Natural convection in enclosed porous media with rectangular boundaries // Heat Transfer. 1970. Т. 92, № 1. С. 21–27.

[14] Hickox CE, Gartling DK. A numerical study of natural convection in a horizontal porous layer subjected to an end-to-end temperature difference // Heat Transfer. 1981. Т. 103, № 4. С. 797–802.

[15] Gartling David K, Hickox Charles E. MARIAH: A finite-element computer program for incompressible porous flow problems. Theoretical background // NASA STI/Recon Technical Report N. 1982. Т. 83. С. 22562.

[16] Prasad V, Kulacki FA. Convective heat transfer in a rectangular porous cavity—effect of aspect ratio on flow structure and heat transfer // Heat Transfer. 1984. Т. 106, № 1. С. 158–165.

[17] Chen Zhangxin, Huan Guanren, Ma Yuanle. Computational methods for multiphase flows in porous media. SIAM, 2006.

[18] Iterative solution methods for modeling multiphase flow in porous media fully implicitly / S. Lacroix, Y. Vassilevski, J. Wheeler [и др.] // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. Т. 25, № 3. С. 905–926.

[19] Nikitin Kirill, Novikov Konstantin, Vassilevski Yury. Nonlinear finite volume method with discrete maximum principle for the two-phase flow model // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Т. 37, № 5. С. 570–581.

[20] Terekhov Kirill M, Vassilevski Yuri V. Finite volume method for coupled subsurface flow problems, I: Darcy problem // Journal of Computational Physics. 2019. Т. 395. С. 298–306.

[21] В.Ф. Пивень. Математические модели фильтрации жидкости. Орёл: ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, 2015.

[22] Lifanov IK, Piven VF, Stavtsev SL. Mathematical modelling of the three-dimensional boundary value problem of the discharge of the well system in a homogeneous layer // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2002. Т. 17, № 1. С. 99–112.

[23] A Stokes–Brinkman model of the fluid flow in a periodic cell with a porous body using the boundary element method / RF Mardanov, SK Zaripov, VF Sharafutdinov [и др.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2018. Т. 88. С. 54–63.

[24] A non-primitive boundary element technique for modeling flow through non-deformable porous medium using Brinkman equation / Chandra Shekhar Nishad, Anirban Chandra, Timir Karmakar [и др.] // Meccanica. 2018. Т. 53, № 9. С. 2333–2352.

[25] Karageorghis Andreas, Lesnic Daniel, Marin Liviu. The method of fundamental solutions for Brinkman flows. Part I. Exterior domains // Journal of Engineering Mathematics. 2021. Т. 126, № 10. С. 1–12.

[26] Leiderman Karin, Olson Sarah D. Swimming in a two-dimensional Brinkman fluid: computational modeling and regularized solutions // Physics of Fluids. 2016. Т. 28, № 2. С. 021902.

[27] Martins Nuno FM, Rebelo Magda. Meshfree methods for nonhomogeneous Brinkman flows // Computers & Mathematics with Applications. 2014. T. 68, № 8. C. 872–886.

[28] Jecl Renata, Skerget L, Petresin E. Natural convection in porous media: a numerical study of Brinkman model. WIT Press, 1999. T. 25.

[29] Jecl Rand Skerget L, Petresin E. Boundary domain integral method for transport phenomena in porous media // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2001. T. 35, № 1. C. 39–54.

[30] Dual reciprocity boundary element method solution of natural convection in Darcy–Brinkman porous media / Bozidar Sarler, Janez Perko, Dominique Gobin [и др.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2004. T. 28, № 1. C. 23–41.

[31] Partridge P. W., Brebbial C. A., Wrobel L. C. The dual reciprocity boundary element method. Elsevier, 1992.

[32] Setukha AV, Tretyakova RM. Numerical Solution of a Stationary Filtration Problem of Viscous Fluid in a Piecewise Homogeneous Porous Medium by Applying the Boundary Integral Equation Method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. T. 60, № 12. C. 2076–2093.

[33] Tretiakova RM. Filtration of Viscous Fluid in Homogeneous Domain with Mixed Boundary Condition // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. T. 42, № 6. C. 1465–1474.

[34] Critical issues in modelling lymph node physiology / Dmitry Grebennikov, Raoul Van Loon, Mario Novkovic [и др.] // Computation. 2017. T. 5, № 1. C. 3.

[35] Developing computational geometry and network graph models of human lymphatic system / Rufina Tretyakova, Rostislav Savinkov, Gennady Lobov [и др.] // Computation. 2018. T. 6, № 1. C. 1.

[36] Кочин НЕ, Кибель ИА, Розе НВ. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М.: Физматгиз, 1963.

[37] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

[38] Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Flow, Turbulence and Combustion. 1949. Т. 1, № 1. С. 27–34.

[39] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[40] Лебедева СГ, Сетуха АВ. О численном решении полного двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения методом дискретных особенностей // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 223–223.

[41] Даева С.Г., Сетуха А.В. О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, № 3. С. 421–435.

[42] Сетуха АВ, Семенова АВ. О численном решении некоторого поверхностного гиперсингулярного интегрального уравнения методами кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 6. С. 990–1006.

[43] И.К. Лифанов. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.

[44] Setukha Alexey, Fetisov Sergey. The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects // Journal of Computational Physics. 2018. Т. 373, № 15. С. 631–647.

[45] Гутников ВА, Лифанов ИК, Сетуха АВ. О моделировании зданий и сооружений методом дискретных вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. Т. 4. С. 78–92.

[46] Quantitation of changes in lymph protein concentration during lymph node transit / T.H. Adair, D.S. Moffatt, A.W. Paulsen [и др.] // American Journal

of Physiology-Heart and Circulatory Physiology. 1982. Т. 243, № 3. С. H351–H359.

[47] Adair T.H., Guyton A.C. Modification of lymph by lymph nodes. II. Effect of increased lymph node venous blood pressure // American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology. 1983. Т. 245, № 4. С. H616–H622.

[48] Adair T.H., Guyton A.C. Modification of lymph by lymph nodes. III. Effect of increased lymph hydrostatic pressure // American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology. 1985. Т. 249, № 4. С. H777–H782.

[49] Harisinghani Mukesh G. Atlas of lymph node anatomy. Springer Science & Business Media, 2012.

[50] Computational approach to 3D modeling of the lymph node geometry / Alexey Kislitsyn, Rostislav Savinkov, Mario Novkovic [и др.] // Computation. 2015. Т. 3, № 2. С. 222–234.

[51] Data-driven modelling of the FRC network for studying the fluid flow in the conduit system / Rostislav Savinkov, Alexey Kislitsyn, Daniel J Watson [и др.] // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2017. Т. 62. С. 341–349.

[52] Global lymphoid tissue remodeling during a viral infection is orchestrated by a B cell–lymphotoxin-dependent pathway / Varsha Kumar, Elke Scandella, Renzo Danuser [и др.] // Blood. 2010. Т. 115, № 23. С. 4725–4733.