

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 1 (56) ' 2023

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей: 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки)», 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки)», 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки)», 05.13.17 «Теоретические основы информатики (физико-математические науки)».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA J OURNAL OF C OMPUTER SCIENCE THEORY AND M ATHEMATICS

2023, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V.I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ No ФC77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.
АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВНИЙ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — **главный редактор**
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**
германчук М. С., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**
ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**
ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.
ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO , Prof., EngD	Leonid MESTETSKIY , Prof., EngD
Natalia APATOVA , Prof., EdD	Andrey MURAVNIK , Dr. Phys.-Math.
Alexander VATULIAN , Prof., Dr. Phys.-Math.	Igor POLOVINKIN , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Konstantin VORONTSOV , Prof., Dr. Phys.-Math.	Andrey RAIGORODSKY , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Gennady DEMIDENKO , Prof., Dr. Phys.-Math.	Dmitry ROKHLIN , Prof., Dr. Phys.-Math.
Yakov YERUSALIMSKY , Prof., EngD	Arkady SOLOVYOV , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Valentin ZAGREBNOV , Prof., Dr. Phys.-Math.	Fedor STONYAKIN , Prof., Dr. Phys.-Math.
Vladimir ZADOROZHNY , Prof., Dr. Phys.-Math.	Anton UTKIN , Senior Researcher, EngD
Vladimir KALINICHENKO , Prof., Dr. Phys.-Math.	Vyacheslav TSIBULIN , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Alexey KARAPETYANTS , Prof., Dr. Phys.-Math.	Tatyana CHERNOVA , Assoc. prof., EngD
Vladislav KRAVCHENKO , Prof., EngD	Vladimir CHILIN , Prof., Dr. Phys.-Math.
Viktor KRASNOPROSHIN , Prof., EngD,	

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIYEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. — **Secretary**
Dmitry ZAKORA, Prof., Dr. Phys.-Math.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Science editor**
Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math.
Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation
Tel. +7 978 782 31 99 — editor-in-chief
+7 978 837 82 77 — office
Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Chilin V. I., Zakirova G. B. Linear Isometries of Banach-Kantorovich L_p -spaces	7
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S. A New approach to optimal solutions of noncooperative games: accounting for Savage–Niehans risk	19
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S. A new approach to guaranteed solutions of multicriteria choice problems: Pareto consideration of Savage–Niehans risk and outcomes.....	42
Макаров О. О. Анализ метаэвристик для задач многоагентной маршрутизации	62
Рахимова А. И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций.....	88
Рефераты	111
Список авторов номера	114

TABLE OF CONTENTS

Chilin V. I., Zakirova G. B. Linear Isometries of Banach-Kantorovich L_p -spaces	7
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S. A new approach to optimal solutions of noncooperative games: accounting for Savage–Niehans risk	19
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S. A new approach to guaranteed solutions of multicriteria choice problems: Pareto consideration of Savage–Niehans risk and outcomes.....	42
Makarov O. O. Analysis of metaheuristics for multi-agent routing problems....	62
Rakhimova A. I. On hypercyclic operators in weighted spaces of entire functions	88
Abstracts	111
Authors	114

UDC: 517.98 (УДК 517.98)

MSC2010: 46B04, 46B42, 46E30, 46G10

LINEAR ISOMETRIES OF BANACH-KANTOROVICH L_p -SPACES

© V. I. Chilin, G. B. Zakirova

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN
9, UNIVERSITET, TASHKENT, 100174, UZBEKISTAN
E-MAIL: vladimirchil@gmail.com

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY
1, ODILXODJAEV, TASHKENT, 100167, UZBEKISTAN
E-MAIL: zg1090@list.ru

LINEAR ISOMETRIES OF BANACH-KANTOROVICH L_p -SPACES.

Chilin V. I., Zakirova G. B.

Abstract. Let B be a complete Boolean algebra, $Q(B)$ be the Stone compact of B , and $C_\infty(Q(B))$ be the commutative unital algebra of all continuous functions $x : Q(B) \rightarrow [-\infty, +\infty]$, assuming possibly the values $\pm\infty$ on nowhere-dense subsets of $Q(B)$. We consider the Banach-Kantorovich spaces $L_p(B, m) \subset C_\infty(Q(B))$, associated with a measure m defined on B with the values in the algebra of measurable real functions. It is shown that in the case when the measure m has the Maharam property, for any linear isometry $U : L_p(B, m) \rightarrow L_p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, there exist an injective normal homomorphisms $T : C_\infty(Q(B)) \rightarrow C_\infty(Q(B))$ and an element $y \in L_p(B, m)$ such that $U(x) = y \cdot T(x)$ for all $x \in L_p(B, m)$.

Keywords: Banach-Kantorovich space, Maharam measure, vector integration, linear isometry.

INTRODUCTION

One of the important results in the theory of isometries of Banach function spaces is the theorem of J. Lamperti [5], which describes the linear isometries of the spaces $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, for any measurable spaces (Ω, Σ, μ) with σ -finite measure μ . In the proof of this theorem, the property of preserving disjointness for such isometries was essentially used (see [2, Chapter 3]).

The development of the theory of integration for vector measures with values in vector lattices made it possible to construct L_p -spaces $L_p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, [3], [4], associated with the complete Boolean algebra B and a measure m defined on B with the values in the algebra $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ of real measurable functions on the measure space (Ω, Σ, μ) .

It is natural to expect that a similar description of linear isometries is valid for the linear isometries of the spaces $L_p(B, m)$. In this paper, we establish the explicit form of

the linear isometries acting in the space $L_p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, in the case when the measure m possesses the Maharam property.

We use the terminology and notation of the theory of Boolean algebras from [6], the theory of vector lattices from [7] and the theory of vector integration from [3].

1. PRELIMINARIES

Let X be a real vector space, F be a complete vector lattice and let $F_+ = \{f \in F : f \geq 0\}$. A mapping $\|\cdot\| : X \rightarrow F_+$ is called an F -valued norm if for any $x, y \in X$, and real number $\lambda \in \mathbb{R}$, the following holds: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

An F -valued norm $\|\cdot\|$ is said to be decomposable if for any $f_1, f_2 \in F_+$ and $x \in X$ with $\|x\| = f_1 + f_2$, there exist $x_1, x_2 \in X$ such that $x = x_1 + x_2$ and $\|x_i\| = f_i$, $i = 1, 2$.

A pair $(X, \|\cdot\|)$ with F -valued norm is called a lattice normed space. If, in addition, the norm $\|\cdot\|$ is decomposable, then $(X, \|\cdot\|)$ is called decomposable.

We say that a net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ from a lattice normed space $(X, \|\cdot\|)$ (bo) -converges to an element $x \in X$ if the net $(\|x - x_\alpha\|)_{\alpha \in A}$ (o) -converges to zero in the lattice F , that is, there exists a net $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset F_+$ such that $f_\alpha \downarrow 0$, and $\|x - x_\alpha\| \leq f_\alpha$ for all $\alpha \in A$. A net $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ is called (bo) -fundamental if the net $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times A}$ (bo) -converges to zero.

A lattice normed space is called (bo) -complete if every (bo) -fundamental net in it (bo) -converges to an element of this space. A decomposable (bo) -complete lattice normed space is called a Banach-Kantorovich space.

The F -valued norm $\|\cdot\|$ on a vector lattice X is said to be monotonic if condition $|x| \leq |y|$, $x, y \in X$, implies that $\|x\| \leq \|y\|$. If a Banach-Kantorovich space $(X, \|\cdot\|_X)$ is a vector lattice and the norm $\|\cdot\|_X$ is monotonic, then it is called a Banach-Kantorovich lattice.

Let B be a complete Boolean algebra with zero $\mathbf{0}$ and unit $\mathbf{1}$. The supremum and infimum of a set $\{e, q\} \subset B$ are denoted by $e \vee q$ and $e \wedge q$, and by Ce is denoted the complement to an element e . A non-empty set E of nonzero elements from B is said to be disjoint if $e \wedge q = \mathbf{0}$ for any $e, q \in E$, $e \neq q$.

A Boolean subalgebra A in B is called regular if $\sup E \in A$ and $\inf E \in A$ for any subset $E \subset A$. Every regular Boolean subalgebra in B is a complete Boolean algebra.

Let $Q(B)$ be the Stone compact of B , and let $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ be the commutative unital algebra over the field $\mathbb{R}$ of all continuous functions $x : Q(B) \rightarrow [-\infty, +\infty]$, assuming possibly the values $\pm\infty$ on nowhere-dense subsets of $Q(B)$ (see, for example,

[3, Chapter 1, Section 1.4.2], [7, Chapter V]). With respect to the partial order

$$f \leq g \Leftrightarrow g(t) - f(t) \geq 0 \text{ for all } t \in Q(B) \setminus (f^{-1}(\pm\infty) \cup g^{-1}(\pm\infty)),$$

the algebra $L^0(B)$ is a complete order vector lattice, and the set ∇ of all idempotents in $L^0(B)$ is a complete Boolean algebra with respect to the partial order induced from $L^0(B)$. In addition, ∇ is isomorphic to the Boolean algebra B (see, for example, [7, Chapter V]). It is known that the set $C(Q(B))$ of all continuous real functions on $Q(B)$ is a subalgebra in $L^0(B)$ and $C(Q(B))$ is a Banach space with respect to the uniform norm $\|x\|_\infty = \sup_{t \in Q(B)} |x(t)|$.

We denote by $s(x) := \sup_{n \geq 1} \{|x| > n^{-1}\}$ the support of an element $x \in L^0(B)$, where $\{|x| > \lambda\}$ is the characteristic function χ_{E_λ} of the set E_λ which is the closure of the set $\{t \in Q(B) : |x(t)| > \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

For any nonzero $x \in L^0(B)$ define $i(x)$ to be the inverse element to x on its support, i.e.

$$i(x)(t) = \begin{cases} \frac{1}{x(t)}, & \text{if } x(t) \neq 0, \\ 0, & \text{if } x(t) = 0. \end{cases}$$

It is clear that $i(x) \in L^0(B)$ and $i(x) \cdot x = s(x)$.

Let (Ω, Σ, μ) be a measurable space with σ -finite measure μ , and let $L^0(\Omega)$ be the algebra of all classes of almost everywhere equal real-valued measurable functions on (Ω, Σ, μ) . With respect to the partial order $f \leq g \Leftrightarrow g - f \geq 0$ almost everywhere, the algebra $L^0(\Omega)$ is a complete order vector lattice, and the set $B(\Omega)$ of all idempotents from $L^0(\Omega)$ is a complete Boolean algebra with respect to the partial order induced from $L^0(\Omega)$.

Since μ is a σ -finite measure, it follows that $B(\Omega)$ is a Boolean algebra of countable type, that is, any subset $E \subset B(\Omega)$ of nonzero pairwise disjoint elements is at most countable. Thus for any increasing net $x_\alpha \uparrow x \in L^0(\Omega)$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\Omega)$ there exists a sequence $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$ such that $x_{\alpha_n} \uparrow x$ (see, for example, [7, Chapter VI, §2]).

A mapping $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$ is called a $L^0(\Omega)$ -valued measure if it satisfies the following conditions:

- 1) $m(e) \geq 0$ for all $e \in B$;
- 2) $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$, for any $e, g \in B$, $e \wedge g = \mathbf{0}$;
- 3) $m(e_\alpha) \downarrow 0$ for any net $e_\alpha \downarrow \mathbf{0}$, $\{e_\alpha\} \subset B$.

A measure m is said to be strictly positive if $m(e) = 0$ implies $e = \mathbf{0}$. In this case, B is a Boolean algebra of countable type.

A strictly positive $L^0(\Omega)$ -valued measure m is said to be *decomposable* if for any $e \in B$ and a decomposition $m(e) = f_1 + f_2$, $f_1, f_2 \in L^0(\Omega)_+$, there exist $e_1, e_2 \in B$, such that $e = e_1 \vee e_2$, and $m(e_i) = f_i$, $i = 1, 2$. A measure m is decomposable if and only if it is a Maharam measure, that is, for any $e \in B$, $0 \leq f \leq m(e)$, $f \in L^0(\Omega)$, there exists $q \in B$, $q \leq e$, such that $m(q) = f$ (see [8]).

We use the following important property of the Maharam measure.

Proposition 1. [8, Proposition 3.2]. For each $L^0(\Omega)$ -valued Maharam measure $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$ there exists a unique injective completely additive homomorphism $\varphi : B(\Omega) \rightarrow B$ such that $\varphi(B(\Omega))$ is a regular Boolean subalgebra of B , and

$$m(\varphi(q)e) = qm(e) \text{ for all } q \in B(\Omega), e \in B.$$

Let $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$ be a Maharam measure. We identify B with the Boolean algebra of idempotents in $L^0(B)$, i.e. we assume that $B \subset L^0(B)$. By Proposition 1, there exists a regular Boolean subalgebra $\nabla(m)$ in B and an isomorphism φ from $B(\Omega)$ onto $\nabla(m)$ such that $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ for all $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. In this case, the algebra $L^0(\Omega)$ is identified with the algebra $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ (the corresponding isomorphism will also be denoted by φ). Thus, the algebra $C_\infty(Q(\nabla(m)))$ can be considered as a subalgebra and as a regular vector sublattice in $L^0(B) = C_\infty(Q(B))$ (this means that the exact upper and lower bounds for bounded subsets of $L^0(\nabla(m))$ are the same in $L^0(B)$ and in $L^0(\nabla(m))$). In particular, $L^0(B)$ is an $L^0(\nabla(m))$ -module.

Denote by $S(B)$ the vector sublattice in $L^0(B)$ of all step elements $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, where $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in B$, $e_i \cdot e_j = \mathbf{0}$, $i, j = 1, \dots, n$. The equality

$$I_m(x) := \int x dm := \sum_{i=1}^n \alpha_i m(e_i) \quad (x \in S(B))$$

uniquely defines a linear operator $I_m : S(B) \rightarrow L^0(\Omega)$.

A positive element $x \in L^0(B)_+$ is called *m-integrable* if there exists a sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S(B)$, $0 \leq x_n \uparrow x$, such that there is a supremum $\sup_{n \geq 1} I_m(x_n)$ in the lattice $L^0(\Omega)$. In this case, the integral of the element x with respect to the measure m is defined by

$$I_m(x) := \int x dm := \sup_{n \geq 1} I_m(x_n).$$

It is known that the definition of the integral $I_m(x)$ does not depend on the choice of a sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S(B)$, $0 \leq x_n \uparrow x$, for which there exists $\sup_{n \geq 1} I_m(x_n)$ (see, for example, [3, 6.1.3]).

An element $x \in L^0(B)$ is called m -integrable if its positive x_+ and negative x_- parts are m -integrable. The set of all m -integrable elements is denoted by $L^1(B, m)$, and for every $x \in L^1(B, m)$ we have

$$\int x dm := \int x_+ dm - \int x_- dm.$$

If $\|x\|_{1,m} := \int |x| dm, x \in L^1(B, m)$, then the pair $(L^1(B, m), \|\cdot\|_{1,m})$ is a lattice normed space over $L^0(\Omega)$ [3, 6.1.3]. Moreover, in the case when $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$ is a Maharam measure, the pair $(L^1(B, m), \|x\|_{1,m})$ is a Banach-Kantorovich space. In addition,

$$L^0(\nabla(m)) \cdot L^1(B, m) \subset L^1(B, m), \quad \int (\varphi(\alpha)x) dm = \alpha \int x dm, \quad \left| \int x dm \right| \leq \int |x| dm,$$

for all $x \in L^1(B, m), \alpha \in L^0(\Omega)$ [3, Theorem 6.1.10].

Let $p \in [1, \infty)$, and let

$$L^p(B, m) = \{x \in L^0(B) : |x|^p \in L^1(B, m)\},$$

$$\|x\|_{p,m} := \left[\int |x|^p dm \right]^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L^p(B, m).$$

It is known that for a Maharam measure m the pair $(L^p(B, m), \|x\|_{p,m})$ is a Banach-Kantorovich space [4, 4.2.2]. In addition,

$$\varphi(\alpha)x \in L^p(B, m) \quad \text{for all } x \in L^p(B, m), \alpha \in L^0(\Omega), 1 \leq p < \infty,$$

and $\|\varphi(\alpha)x\|_{p,m} = |\alpha| \|x\|_{p,m}$.

We use the following important property of order continuity of the norm $\|\cdot\|_{p,m}$.

Proposition 2. If $\{x_n\} \subset L^p(B, m)$ and $x_n \downarrow \mathbf{0}$, then $\|x_n\|_{p,m} \downarrow \mathbf{0}$.

Proof. Since $x_n^p \downarrow \mathbf{0}$, it follows that $I_m(x_n^p) \downarrow \mathbf{0}$ (see the Dominated Convergence Theorem 6.1.5 [3]). Thus $\|x_n\|_{p,m} \downarrow \mathbf{0}$. $\square$

Using Proposition 2 for any sequence

$$\{x_n\} \subset L^p(B, m), \quad x_n \uparrow x \in L^p(B, m),$$

we get the convergence $\|x - x_n\|_{p,m} \downarrow \mathbf{0}$.

Recall that writing $y_n \xrightarrow{(o)} y$ for elements $y_n, y, n = 1, 2, \dots$, from a vector lattice F means that the sequence $\{y_n\}$ (o)-converges to the element y , i.e. there exist sequences $a_n, b_n \in F$ such that $a_n \uparrow y, b_n \downarrow y$ and $a_n \leq y_n \leq b_n$ for all $n = 1, 2, \dots$. It is known that if $y_n \xrightarrow{(o)} y$ then $\lambda y_n \xrightarrow{(o)} \lambda y$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and $|y_n - y| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ (see, for example, [7, Chapter III, §7]).

Proposition 3. If $x, x_n \in L^0(B), n = 1, 2, \dots$, and $x_n \downarrow \mathbf{0}$, then $|x| \cdot x_n \downarrow \mathbf{0}$.

Proof. It is clear that $|x| \cdot x_n \downarrow y \in L^0(B)$, $y \geq \mathbf{0}$. If $y \neq \mathbf{0}$ then there exists $\varepsilon > 0$ such that $e = \{y \geq \varepsilon\} \neq \mathbf{0}$. Since

$$e \cdot |x| \cdot x_n \geq e \cdot y \geq \varepsilon e,$$

it follows that $e \cdot |x| \neq \mathbf{0}$. Thus there exists $\delta > 0$ such that $p = \{e \cdot |x| \geq \delta\} \neq \mathbf{0}$ and $p \leq e$. Therefore, $i(p|x|) \neq \mathbf{0}$ and

$$s(i(p|x|)) \cdot x_n = i(p|x|) \cdot p|x| \cdot x_n \geq i(p|x|) \cdot \varepsilon p \neq \mathbf{0} \text{ for all } n = 1, 2, \dots,$$

which is impossible, because

$$\mathbf{0} \leq s(i(p|x|)) \cdot x_n \leq x_n \downarrow \mathbf{0}.$$

Thus $y = \mathbf{0}$, that is, $|x| \cdot x_n \downarrow \mathbf{0}$. □

To describe the isometries of Banach-Kantorovich L_p -spaces, we need the notion of convergence in measure generated by a Maharam measure m .

Definition 1. We say that the sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L^0(B)$ converges in measure m to an element $x \in L^0(B)$ (notation $x_n \xrightarrow{m} x$) if

$$m(\{|x_n - x| > \varepsilon\}) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0} \text{ for all } \varepsilon > 0.$$

We need the following properties of measure convergence.

Proposition 4. (i). If $x_n, x, y \in L^0(B)$, $n = 1, 2, \dots$, and $x_n \xrightarrow{m} x$, $x_n \xrightarrow{m} y$, then $x = y$.

(ii). If $x_n, x \in L^0(B)$, $n = 1, 2, \dots$, and $x_n \xrightarrow{(o)} x$, then $x_n \xrightarrow{m} x$.

(iii). If $x_n, x \in L^p(B, m)$, $n = 1, 2, \dots$, $1 \leq p < \infty$, and $\|x_n - x\|_{p,m} \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$, then $x_n \xrightarrow{m} x$.

Proof. (i). Let us first show that for any $a, b \in L^0(B)$, $\varepsilon > 0$, the inequality

$$\{|a + b| > \varepsilon\} \leq \{|a| > \frac{\varepsilon}{2}\} \vee \{|b| > \frac{\varepsilon}{2}\} \quad (1)$$

is valid.

Let $e = \{|a| > \frac{\varepsilon}{2}\}$, $q = \{|b| > \frac{\varepsilon}{2}\}$. Since $Ce = \{|a| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, $Cq = \{|b| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, it follows that

$$(Ce \wedge Cq) \cdot |a + b| \leq (Ce \wedge Cq) \cdot |a| + (Ce \wedge Cq) \cdot |b| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot (Ce \wedge Cq) = \varepsilon \cdot (Ce \wedge Cq).$$

Thus $\{|a + b| \leq \varepsilon\} \geq Ce \wedge Cq$, and therefore

$$\{|a + b| > \varepsilon\} = C(\{|a + b| \leq \varepsilon\}) \leq C(Ce \wedge Cq) = e \vee q.$$

Let now $x_n, x, y \in L^0(B)$, $n = 1, 2, \dots$, and $x_n \xrightarrow{m} x$, $x_n \xrightarrow{m} y$. Let

$$e_k = \{|x - y| > \frac{1}{k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{and} \quad e = \sup_{k \geq 1} e_k.$$

If $p_{n,k} = \{|x_n - x| > \frac{1}{2k}\}$, $q_{n,k} = \{|x_n - y| > \frac{1}{2k}\}$ then using the equality $x - y = (x_n - y) + (x - x_n)$ and the inequality (1), we obtain that $e_k \leq p_{n,k} \vee q_{n,k}$. Thus

$$\mathbf{0} \leq m(e_k) \leq m(p_{n,k}) + m(q_{n,k}) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0} \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Consequently, $m(e_k) = \mathbf{0}$, that is, $e_k = \mathbf{0}$ for any $k = 1, 2, \dots$. Therefore, $e = \sup_{k \geq 1} e_k = \mathbf{0}$, which implies that $x = y$.

(ii). Since $x_n \xrightarrow{(o)} x$, it follows that $|x_n - x| \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Thus there exists $\mathbf{0} \leq z_n \in L^0(B)$ such that

$$|x_n - x| \leq z_n \downarrow \mathbf{0}.$$

Let $\varepsilon > 0$ and $e_n = \{|x_n - x| > \varepsilon\}$. Using inequalities

$$\mathbf{0} \leq \varepsilon e_n \leq e_n |x_n - x| \leq e_n z_n \leq z_n \downarrow \mathbf{0},$$

we obtain that $e_n \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Thus

$$q_n = \sup_{k \geq n} e_k \downarrow \mathbf{0} \quad \text{and} \quad m(e_n) \leq m(q_n) \downarrow \mathbf{0}.$$

Consequently, $m(\{|x_n - x| > \varepsilon\}) = m(e_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$ for any $\varepsilon > 0$, that is, $x_n \xrightarrow{m} x$.

(iii). Since

$$\int |x_n - x|^p dm = \|x_n - x\|_{p,m}^p \xrightarrow{(o)} \mathbf{0},$$

it follows that there exists $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset L^0(\Omega)$ such that $\alpha_n \downarrow \mathbf{0}$ and

$$\int |x_n - x|^p dm \leq \alpha_n \quad \text{for all } n = 1, 2, \dots$$

Let $\varepsilon > 0$ and $e_n = \{|x_n - x| > \varepsilon\}$. Using the inequalities

$$\varepsilon^p m(e_n) = \varepsilon^p \int e_n dm \leq \int e_n |x_n - x|^p dm \leq \int |x_n - x|^p dm \leq \alpha_n,$$

we obtain that

$$\mathbf{0} \leq m(e_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \alpha_n \downarrow \mathbf{0},$$

that is, $m(e_n) \xrightarrow{(o)} \mathbf{0}$. Thus $x_n \xrightarrow{m} x$. □

2. DESCRIPTION OF ISOMETRIES OF BANACH-KANTOROVICH L_p -SPACES

Let B be a complete Boolean algebra and let $m : B \rightarrow L^0(\Omega)$ be a Maharam measure for which $m(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{B(\Omega)}$. The algebra $L^0(\Omega)$ is identified with the algebra $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$, which is a subalgebra and a regular vector sublattice in $L^0(B) = C_\infty(Q(B))$.

Repeating the proof of Theorem 2.1 and Corollary 2.1 from [5] we have the following version of these statements for the Maharam measure m .

Theorem 1. *Let $x, y \in L^p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. Then the equality*

$$\|x + y\|_{p,m}^p + \|x - y\|_{p,m}^p = 2(\|x\|_{p,m}^p + \|y\|_{p,m}^p)$$

is valid if and only if $x \cdot y = \mathbf{0}$.

Let $U : L^p(B, m) \rightarrow L^p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, be a linear isometry, that is, U is a linear map and $\|U(x)\|_{p,m} = \|x\|_{p,m}$ for all $x \in L^p(B, m)$. If $x, y \in L^p(B, m)$ and $x \cdot y = \mathbf{0}$, then by Theorem 1 we have

$$\begin{aligned} \|U(x) + U(y)\|_{p,m}^p + \|U(x) - U(y)\|_{p,m}^p &= \|U(x + y)\|_{p,m}^p + \|U(x - y)\|_{p,m}^p = \\ &= \|x + y\|_{p,m}^p + \|x - y\|_{p,m}^p = 2(\|x\|_{p,m}^p + \|y\|_{p,m}^p) = 2(\|U(x)\|_{p,m}^p + \|U(y)\|_{p,m}^p). \end{aligned}$$

Again using Theorem 1, we get $U(x) \cdot U(y) = \mathbf{0}$. Thus, we have the following

Proposition 5. If $U : L^p(B, m) \rightarrow L^p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, is a linear isometry and $x, y \in L^p(B, m)$, $x \cdot y = \mathbf{0}$, then $U(x) \cdot U(y) = \mathbf{0}$.

A linear operator $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ is called a homomorphism if $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$ for all $x, y \in L^0(B)$. If $\mathbf{0} \leq x \in L^0(B)$, then $T(x) = T(\sqrt{x}) \cdot T(\sqrt{x}) \geq \mathbf{0}$, that is, the homomorphism $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ is a positive operator.

A positive linear operator $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ is called *normal* (resp., *completely additive*), if $T(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha T(x_\alpha)$ for any increasing net

$$\mathbf{0} \leq x_\alpha \uparrow x \in L^0(B), \{x_\alpha\} \subset L^0(B)$$

(resp., $T(\sum_{i \in I} e_i) = \sup_{\alpha \in A} \sum_{i \in \alpha} T(e_i)$, for every family of idempotents

$$\{e_i\}_{i \in I} \subset B, e_i e_j = \mathbf{0}, i \neq j, i, j \in I,$$

where $A = \{\alpha\}$ is the net of all finite subsets of I , ordered by inclusion).

It is clear that the normality property for a positive linear operator implies that this operator is a completely additive one. In the case when $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ is a homomorphism, the converse implication is also valid.

Theorem 2. ([1, Theorem 4]). *The homomorphism $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ is a normal operator if and only if T is completely additive operator.*

Since $m(\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_{B(\Omega)}$ and μ is a σ -finite measure, it follows that there exists a sequence $\{e_n\} \subset B(\Omega)$ such that

$$\mu(e_n) < \infty, \quad e_n e_k = \mathbf{0}, \quad n \neq k, \quad n, k = 1, 2, \dots, \quad \sup_{n \geq 1} e_n = \mathbf{1},$$

and $\{e_n \cdot m(q) : q \in B\} \subset L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Consequently, the function

$$\nu(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} e_n m(q) d\mu$$

is a σ -finite numerical measure on the Boolean algebra B , in particular, B is a Boolean algebra of countable type. In this case, in the definition of normality (resp., completely additivity) of a positive linear operator $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$, instead of an increasing net $\{x_\alpha\} \subset L^0(B)$ (resp., family of idempotents $\{e_i\}_{i \in I} \subset B, e_i e_j = \mathbf{0}, i \neq j, i, j \in I$), one should take a sequences $\{x_n\} \subset L^0(B)$ (resp., countable family of idempotents $\{e_i\}_{i \geq 1} \subset B, e_i e_j = \mathbf{0}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$)

The following Theorem is a vector-valued version of Lamperti's theorem (Theorem 3.1 [5]) for the Banach-Kantorovich space $(L^p(B, m), \|\cdot\|_{p,m})$.

Theorem 3. *Let $U : L^p(B, m) \rightarrow L^p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, be a linear isometry. Then there exist a normal homomorphism $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ and $y \in L^p(B, m)$ such that $U(x) = y \cdot T(x)$ for all $x \in L^p(B, m)$.*

Proof. Define the mapping $\varphi : B \rightarrow B$, by setting $\varphi(e) = s(U(e))$, $e \in B$, where $s(U(e))$ is the support of the element $U(e) \in L^p(B, m)$. It is clear that $\varphi(e) = \mathbf{0}$ if and only if $e = \mathbf{0}$. If $e, g \in B$ and $e \cdot g = \mathbf{0}$, then $U(e) \cdot U(g) = \mathbf{0}$ (see Proposition 5). Consequently, $\varphi(e) \cdot \varphi(g) = \mathbf{0}$ and

$$\begin{aligned} \varphi(e \vee g) &= s(U(e + g)) = s(U(e) + U(g)) = s(U(e)) + s(U(g)) = \\ &= \varphi(e) + \varphi(g) = \varphi(e) \vee \varphi(g). \end{aligned}$$

Using mathematical induction, we obtain that

$$\varphi\left(\sup_{1 \leq i \leq n} e_i\right) = \sup_{1 \leq i \leq n} \varphi(e_i)$$

for any finite set of pairwise disjoint idempotents $\{e_i\}_{i=1}^n \subset B$.

Let $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B$ be a countable set of pairwise disjoint idempotents and let $g_n = \sup_{1 \leq i \leq n} e_i$, $n = 1, 2, \dots$. Then $g_n \uparrow \sup_{n \geq 1} g_n = \sup_{i \geq 1} e_i := e$, and by Proposition 2 we get

$$\left\| \sum_{i=1}^n U(e_i) - U(e) \right\|_{p,m} = \|U(g_n) - U(e)\|_{p,m} = \|U(g_n - e)\|_{p,m} = \|g_n - e\|_{p,m} \downarrow \mathbf{0},$$

that is, $\sum_{i=1}^{\infty} U(e_i) = U(e)$ (the series converges with respect to the $\|\cdot\|_{p,m}$ -norm). Since $U(e_i) \cdot U(e_j) = \mathbf{0}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$, it follows that

$$\sup_{i \geq 1} \varphi(e_i) = \sup_{i \geq 1} s(U(e_i)) = s(U(e)) = \varphi(e).$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{1}) &= \varphi(e + Ce) = s(U(e + Ce)) = s(U(e) + U(Ce)) = \\ &= s(U(e)) + s(U(Ce)) = \varphi(e) + \varphi(Ce), \end{aligned}$$

that is, $\varphi(Ce) = \varphi(\mathbf{1}) - \varphi(e)$.

Thus, the mapping $\varphi : B \rightarrow B$ satisfies all the properties of a regular isomorphism from Definition 3.2.3 [2, Chapter III, §3.2], so φ is an injective completely additive Boolean homomorphism [2, Chapter III, §3.2, Remarks 3.2.4].

Using now Theorems 3 and 4 from [1], we get that there exists a unique injective normal homomorphism $T : L^0(B) \rightarrow L^0(B)$ such that $T(e) = \varphi(e)$ for all $e \in B$. In addition, the restriction $A = T|_{C(Q(B))}$ is $\|\cdot\|_{\infty}$ -continuous injective homomorphism from $C(Q(B))$ into $C(Q(B))$.

For any $e \in B$ we have that

$$\begin{aligned} U(e) &= U(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - e))s(U(e)) = U(\mathbf{1})\varphi(e) - U(\mathbf{1} - e)\varphi(\mathbf{1} - e)\varphi(e) = \\ &= U(\mathbf{1})\varphi(e) - U(\mathbf{1} - e)\varphi((\mathbf{1} - e)e) = U(\mathbf{1})\varphi(e), \end{aligned}$$

that is, $U(e) = U(\mathbf{1})\varphi(e)$. If

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in S(B) \subset C(Q(B)), \quad e_i \in B, \quad e_i e_j = \mathbf{0}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

is a step element, then

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U(e_i) = U(\mathbf{1}) \sum_{i=1}^n \alpha_i T(e_i) = U(\mathbf{1}) \cdot T(x).$$

Let $x \in C(Q(B))$, and let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(B)$ be a sequence of step elements such that $\|x_n - x\|_{\infty} \rightarrow 0$. Then

$$\|T(x_n) - T(x)\|_{\infty} = \|A(x_n) - A(x)\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\|U(x_n) - U(\mathbf{1})T(x)\|_{p,m} &= \|U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) - U(\mathbf{1})T(x)\|_{p,m} = \|U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n - x)\|_{p,m} \leq \\ &\leq \|U(\mathbf{1})\|_{p,m} \cdot \|T(x_n - x)\|_\infty \rightarrow \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Since

$$\|U(x_n) - U(x)\|_{p,m} = \|U(x_n - x)\|_{p,m} = \|x_n - x\|_{p,m} \leq \|x_n - x\|_\infty \|\mathbf{1}\|_{p,m} \rightarrow \mathbf{0},$$

it follows that $U(x) = U(\mathbf{1})T(x)$.

Let us show that $Ux = U(\mathbf{1}) \cdot T(x)$ holds for all $x \in L^p(B, m)$. It suffices to check this equality for all $\mathbf{0} \leq x \in L^p(B, m)$. Let $\mathbf{0} \leq x \in L^p(B, m)$, and let $\mathbf{0} \leq x_n = x \cdot \chi_{\{\mathbf{0} \leq x \leq n\mathbf{1}\}} \in C(Q(B))$. Since $x_n \uparrow x$ and the norm $\|\cdot\|_{p,m}$ is order continuous norm (Proposition 2), it follows that

$$\|U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) - U(x)\|_{p,m} = \|U(x_n) - U(x)\|_{p,m} = \|U(x_n - x)\|_{p,m} = \|x_n - x\|_{p,m} \downarrow \mathbf{0}.$$

Thus, $U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) - U(x) \xrightarrow{m} \mathbf{0}$ (Proposition 4 (iii)), that is, $U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) \xrightarrow{m} U(x)$.

Using the normality of the homomorphism T we obtain that $T(x_n) \uparrow T(x)$. Consequently (Proposition 3),

$$|U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) - U(\mathbf{1}) \cdot T(x)| = |U(\mathbf{1})| \cdot |T(x_n) - T(x)| \downarrow \mathbf{0},$$

that is, $U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) \xrightarrow{(o)} U(\mathbf{1}) \cdot T(x)$. Using Proposition 4 (ii), we obtain that $U(\mathbf{1}) \cdot T(x_n) \xrightarrow{m} U(\mathbf{1}) \cdot T(x)$. Thus, $U(x) = U(\mathbf{1}) \cdot T(x)$ (Proposition 4 (i)). Therefore, $Ux = U(\mathbf{1}) \cdot T(x)$ for all $x \in L^p(B, m)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chilin V. I., Katz A. A. (2021) A note on extensions of homomorphisms of Boolean algebras of projections of commutative AW*-algebras. . Proc. International Conf. on Topological Algebras and Their Applications -ICTAA 2021, Math. Stud. (Tartu), Est. Math. Soc., Tartu (V. 8). p. 62–73.
2. Fleming R., Jamison J. (2003) *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 129. Chapman and Hall, London .
3. Kusraev A. G. (2000) *Dominated Operators*. Mathematics and its Applications, 519, - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
4. Kusraev A. G. (1985) *Vector Duality and its Applications*. Nauka, Novosibirsk.
5. Lamperti J. (1958) On the isometries of some function spaces. . Pacific J. Math. (Vol.8). p. 459–466.

6. Vladimirov D. A. (2002) *Boolean Algebras in Analysis*. Mathematics and its Applications, 540. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
7. Vulikh B. Z. (1967) *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
8. Zakirov B. S., Chilin V. I. (2008) Decomposable measures with values in order complete vector lattices. . Vladikavkazskiy mathem. journal (10). p. 31-38.

УДК: 517.577.1

MSC2010: 91A10

A NEW APPROACH TO OPTIMAL SOLUTIONS OF NONCOOPERATIVE GAMES: ACCOUNTING FOR SAVAGE–NIEHANS RISK

© V. I. Zhukovskiy

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

© L. V. Zhukovskaya

FEDERAL STATE BUDGETARY INSTITUTION OF SCIENCE CENTRAL ECONOMIC AND MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES (CEMI RAS)
NAKHIMOVSKII PROSP., 47, MOSCOW, 117418, RUSSIA
E-MAIL: zhukovskaylv@mail.ru

© Y. S. Mukhina

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF HIGHER ALGEBRA
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: js.mukhina@mail.ru

A NEW APPROACH TO OPTIMAL SOLUTIONS OF NONCOOPERATIVE GAMES:
ACCOUNTING FOR SAVAGE–NIEHANS RISK.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S.

Abstract. The novelty of the approach presented below is that each person in a conflict (player) seeks not only to increase his payoff but also to reduce his risk, taking into account a possible realization of any uncertainty from a given admissible set. A new concept, the so-called strongly-guaranteed Nash equilibrium in payoffs and risks, is introduced and its existence in mixed strategies is proved under standard assumptions of the theory of noncooperative games, i.e., compactness and convexity of the sets of players' strategies and continuity of the payoff functions.

Keywords: *Savage–Niehans risk, minimax regret, uncertainties, noncooperative game, optimal solution*

1. PRINCIPIA UNIVERSALIA

Consider the noncooperative N -player normal-form game under uncertainty

$$\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \quad (1)$$

where $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N \geq 2\}$ denotes the set of players; each player $i \in \mathbb{N}$ chooses and uses a pure strategy $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ($i \in \mathbb{N}$), which yields a strategy profile $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = \sum_{i \in \mathbb{N}} n_i$); regardless of the players actions, an uncertainty $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ is realized in game (1); the payoff function $f_i(x, y)$ of player i is defined on the pairs $(x, y) \in X \times Y$, and its value is called the payoff of player i .

At a conceptual level, the goal of each player in the standard setup considered before was to choose his strategy so as to achieve as great payoff as possible.

The middle of the twentieth century was a remarkable period for the theory of noncooperative games. In 1949, 21 years old Princeton University postgraduate J. Nash suggested and proved the existence of a solution [1] that subsequently became known as the Nash equilibrium: a strategy profile $x^e \in X$ is called Nash equilibrium in a game $\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$ if

$$\max_{x_i \in X_i} f_i[x^e \| x_i] = f_i[x^e] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

where $[x^e \| x_i] = [x_1^e, \dots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \dots, x_N^e]$.

This concept (and the approach driven by it) has become invaluable for resolving global (and other) problems in economics, social and military sciences. After 45 years, in 1994, J. Nash together with R. Selten and J. Harsanyi were awarded the Nobel Prize in Economic Sciences "for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games." In 1951, American mathematician, economist and statistician L. Savage, who worked as a statistics assistant for J. von Neumann during World War II, proposed [2] the principle of minimax regret (the Savage–Niehans risk). In particular, for a single-criterion choice problem under uncertainty $\Gamma = \langle X, Y, \varphi(x, y) \rangle$, the principle of minimax regret can be written as

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} R(x, y) = \max_{y \in Y} R(x^e, y) = R \quad (2)$$

where the Savage–Niehans risk function [2] has the form

$$R(x, y) = \max_{z \in X} \varphi(z, y) - \varphi(x, y) \quad (3)$$

The value $R(x, y)$ is called the Savage–Niehans risk in a single-criterion choice problem Γ . It describes the risk of decision makers while choosing an alternative x (the difference between the desired value of the criterion $\max_{x \in X} \varphi(x, y)$ and the realized value $\varphi(x, y)$).

Note that a decision maker seeks to reduce precisely this risk as much as possible by choosing $x \in X$. In fact, the combination of the concept of Nash equilibrium with the principle of minimax regret is the fundamental idea of this work. Such an approach matches the desire of each player not only to increase his payoff, but also to reduce his risk with realizing this desire.

In this context, two questions arise naturally:

1. How can we combine the two objectives of each player (payoff increase with simultaneous risk reduction) using only one criterion?
2. How can we combine these actions (alternatives) in a single strategy profile, in such a way that uncertainty is also accounted for?

2. HOW CAN WE COMBINE THE OBJECTIVES OF EACH PLAYER TO INCREASE THE PAYOFF AND SIMULTANEOUSLY REDUCE THE RISK?

Construction of Savage–Niehans Risk Function

Recall that, in accordance with the principle of minimax regret, the risk of player i is defined by the Savage–Niehans risk function [3–5]

$$R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y), \quad (4)$$

where $f_i(x, y)$ denotes the payoff function of player i in game (1). Thus, to construct the risk function $R_i(x, y)$ for player i , first we have to find the dependent maximum

$$\max_{x \in X} f_i(x, y) = f_i[y]$$

for all $y \in Y$. To calculate $f_i[y]$, in accordance with the theory of two-level hierarchical games, it is necessary to assume the discrimination of the lower-level player, who forms the uncertainty $y \in Y$ and sends this information to the upper level for constructing counterstrategies $x^{(i)}(y) : Y \rightarrow X$ so that

$$\max_{x \in X} f_i(x, y) = f_i(x^{(i)}(y), y) = f_i[y] \quad \forall y \in Y.$$

The set of such counterstrategies is denoted by X^Y . (Actually, this set consists of n -dimensional vector functions $x(y) : Y \rightarrow X$ with the domain of definition Y and the codomain X .) Thus, to construct the first term in (4) at the upper level of the hierarchy, we have to solve N single-criterion problems of the form

$$\langle X^Y, Y, f_i(x, y) \rangle \quad (i \in \mathbb{N}),$$

for each uncertainty $y \in Y$; here X^Y is the set of counterstrategies $x(y) : Y \rightarrow X$, i.e., the set of pure uncertainties $y \in Y$. The problem itself consists in determining the scalar

functions $f_i[y]$ defined by the formula

$$f_i[y] = \max_{x(\cdot) \in X^Y} f_i(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

After that, the Savage-Niehans risk functions are constructed by formula (4).

Continuity of Risk Function, Guaranteed Payoffs and Risks

Hereinafter, the collection of all compact sets of Euclidean space $\mathbb{R}^k$ is denoted by $\text{comp } \mathbb{R}^k$, and if a scalar function $\psi(x)$ on the set X is continuous, we write $\psi(\cdot) \in C(X)$.

The main role in this work will be played by the following result.

Proposition 1. If $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n$, $Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$, and $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$, then

- (a) the maximum function $\max_{x \in X} f_i(x, y)$ is continuous on Y ;
- (b) the minimum function $\min_{y \in Y} f_i(x, y)$ is continuous on X .

These assertions can be found in most monographs on game theory, operations research, systems theory, and even in books on convex analysis [6].

Corollary 1. If in game (1) the sets $X \in \text{comp } \mathbb{R}^n$ and $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$ and the functions $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$, then the Savage-Niehans risk function $R_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) is continuous on $X \times Y$.

Indeed, by Proposition 1 the first term in (4) is continuous on Y and a difference of continuous functions is itself continuous for all $(x, y) \in X \times Y$.

Let us proceed with guaranteed payoffs and risks in game (1). In a series of publications [7, 8], three different ways to account for uncertain factors of decision-making in conflicts under uncertainty were proposed. Our analysis below will be confined to one of them presented in [8]. The method that will be applied here consists in the following. Each payoff function $f_i(x, y)$ in game (1) is associated with its strong guarantee $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$). As a consequence, choosing their strategies from a strategy profile $x \in X$, the players ensure a payoff $f_i[x] \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y$ to each player i , i.e., under any realized uncertainty $y \in Y$. Such a strongly-guaranteed payoff $f_i[x]$ seems natural for the interval uncertainties $y \in Y$, because no additional probabilistic characteristics of y (except for information on the admissible set $Y \subset \mathbb{R}^m$) are available. An example of such uncertainties can be the length of women's skirts [18]. For a clothing factory, production planning for a next year heavily affects its future profits; however, in view of the vagaries of fashion and female logic dictating fashion trends, availability of any probabilistic characteristics would be hardly expected. In such problems, it is possible to establish only some obvious limits of length variations. Proposition 1, in combination with Corollary 1 as well as the continuity of $f_i(x, y)$ and $R_i(x, y)$ on $X \times Y$, leads to the following result.

Proposition 2. If in game (1) the sets $X_i (i \in \mathbb{N})$ and Y are compact and the payoff functions $f_i(x, y)$ are continuous on $X \times Y$, then the guaranteed payoffs

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (5)$$

and the guaranteed risks

$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

are scalar functions that are continuous on X .

Remark 1. First, the meaning of the guaranteed payoff $f_i[x]$ from (5) is that, for any $y \in Y$, the realized payoffs $f_i(x, y)$ are not smaller than $f_i[x]$. In other words, using his own strategies from a strategy profile $x \in X$ in game (1), each player ensures a payoff $f_i(x, y)$ of at least $f_i[x]$ under any uncertainty $y \in Y$ ($i \in \mathbb{N}$). Therefore, the guaranteed payoff $f_i[x]$ gives a lower bound for all possible payoffs $f_i(x, y)$ occurring when the uncertainty y runs through all admissible values from Y . Second, the guaranteed risk $R_i[x]$ also gives an upper bound for all Savage–Niehans risks $R_i(x, y)$ that can be realized under any uncertainties $y \in Y$. Indeed, from (6) it immediately follows that

$$R_i(x, y) \leq R_i[x] \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Thus, adhering to his strategy x_i from a strategy profile $x \in X$, player $i \in \mathbb{N}$ obtains a guarantee in the payoff $f_i[x]$, because $f_i[x] \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y$, and simultaneously a guarantee in the risk $R_i[x] \geq R_i(x, y) \quad \forall y \in Y$.

3. TRANSITION FROM GAME (1) TO A NONCOOPERATIVE GAME WITH TWO-COMPONENT PAYOFF FUNCTION

The new mathematical model of a noncooperative N -player game under uncertainty with a two-component payoff function of each player in the form

$$G = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y, \{f_i(x, y), -R_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

matches the desire of each player to increase his payoff and simultaneously reduce his risk. Here, $\mathbb{N}, X_i$ and Y are the same as in game (1); the novelty consists in the transition from the one-component function $f_i(x, y)$ of each player i to the two-component counterpart $\{f_i(x, y), -R_i(x, y)\}$, where $R_i(x, y)$ denotes the Savage–Niehans risk function for player i . Recall that $R_i(x, y)$ figures in the game G with the minus sign, as in this case player i seeks to increase both criteria simultaneously by an appropriate choice of his strategy $x_i \in X_i$. In this model, we expect any uncertainty $y \in Y$ to occur. Since $R_i(x, y) \geq 0$ for all $(x, y) \in X \times Y$, an increase of $-R_i(x, y)$ is equivalent to a reduction of $R_i(x, y)$.

Since the game G involves interval uncertainties $y \in Y$ only (the only available information is the range of their variation), each player $i \in \mathbb{N}$ should focus on the guaranteed payoffs $f_i[x]$ from (5) and the guaranteed risks $R_i[x]$ from (6). This approach allows one to pass from the game G to the game of guarantees

$$G^g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

in which each player $i \in \mathbb{N}$ chooses his strategy $x_i \in X_i$ so as to simultaneously maximize both criteria $f_i[x]$ and $-R_i[x]$. By "freezing" the strategies of all players in G^g except for x_i , we arrive at the bi-criteria choice problem

$$G_i^g = \langle X_i, \{f_i[x], -R_i[x]\} \rangle$$

for each player i . Recall that, in the bi-criteria choice problem G_i^g , the strategies of all players except for player i are considered to be fixed ("frozen"), and this player i chooses his strategy $x_i \in X_i$ so that for $x_i = x_i^S$ the maximum possible values of $f_i[x]$ and $-R_i[x]$ are simultaneously realized. Right here it is necessary to answer the first of the two major questions formulated at the end of article.

4. HOW CAN WE COMBINE THE OBJECTIVES OF EACH PLAYER (INCREASE PAYOFF AND SIMULTANEOUSLY REDUCE REALIZED RISK) USING ONLY ONE CRITERION?

To answer this question, we will apply the concept of vector optimum-the Pareto efficient solution-proposed in 1909 by Italian economist and sociologist Pareto [10].

In what follows, for the choice problem G_i^g , introduce the notations $f_i[x_i] = f_i[x]$ and $R_i[x_i] = R_i[x]$ for the frozen strategies of all players except for the strategy x_i of player i . Then the problem $G_i^g = \langle X_i, \{f_i[x], -R_i[x]\} \rangle$ can be transformed into

$$\langle X_i, \{f_i[x_i], -R_i[x_i]\} \rangle. \quad (7)$$

Proposition 3. If in problem (7) there exists a strategy $x_i^e \in X_i$ and a value $\sigma_i \in (0, 1)$ such that x_i^e maximizes the scalar function

$$\Phi_i[x_i] = f_i[x_i] - \sigma_i R_i[x_i] \quad (8)$$

i.e.,

$$\Phi_i[x_i^e] = \max_{x_i \in X_i} (f_i[x_i] - \sigma_i R_i[x_i]) \quad (9)$$

then x_i^e is the Pareto-maximal alternative in (7); in other words, for any $x_i \in X_i$ the system of two inequalities

$$f_i[x_i] \geq f_i[x_i^e], \quad -R_i[x_i] \geq -R_i[x_i^e],$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

Assume on the contrary that the strategy x_i^e yielded by (9) is not the Pareto-maximal alternative in problem (7). Then there exists a strategy $\bar{x}_i \in X_i$ of player i such that the system of two inequalities

$$f_i[\bar{x}_i] \geq f_i[x_i^e], \quad -R_i[\bar{x}_i] \geq -R_i[x_i^e]$$

with at least one strict inequality, is consistent.

Multiply both sides of the first inequality by $1 - \sigma_i > 0$ and of the other inequality by $\sigma_i > 0$ and then add separately the left- and right-hand sides of the resulting inequalities to obtain

$$(1 - \sigma_i) f_i[\bar{x}_i] - \sigma_i R_i[\bar{x}_i] > (1 - \sigma_i) f_i[x_i^e] - \sigma_i R_i[x_i^e]$$

or, taking into account (8),

$$\Phi_i[\bar{x}_i] > \Phi_i[x_i^e]$$

This strict inequality contradicts (9), and the conclusion follows.

Remark 2. The combination of criteria (5) and (6) in form (8) is of interest for two reasons. First, even if for $\bar{x}_i \neq x_i^e$ we have an increase of the guaranteed result $f_i[\bar{x}_i] > f_i[x_i^e]$, then due to the Pareto maximality of x_i^e and the fact that $R_i[x_i] \geq 0$ such an improvement of the guaranteed payoff $f_i[\bar{x}_i] > f_i[x_i^e]$ inevitably leads to an increase of the guaranteed risk $R_i[\bar{x}_i] > R_i[x_i^e]$; conversely, for the same reasons, a reduction of the guaranteed risk $R_i[\bar{x}_i] < R_i[x_i^e]$ leads to a reduction of the guaranteed payoff $f_i[\bar{x}_i] < f_i[x_i^e]$ (both cases are undesirable for player i). Therefore, the replacement of the bi-criteria choice problem (7) with the single-criterion choice problem $\langle X_i, f_i[x_i] - \sigma_i R_i[x_i] \rangle$ matches the desire of player i to increase $f_i[x_i]$ and simultaneously reduce $R_i[x_i]$.

Second, since $R_i[x_i] \geq 0$, an increase of the difference $f_i[x_i] - \sigma_i R_i[x_i]$ also matches the desire of player i to increase the guaranteed payoff $f_i[x]$ and simultaneously reduce the guaranteed risk $R_i[x]$.

5. FORMALIZATION OF GUARANTEED EQUILIBRIUM IN PAYOFFS AND RISKS FOR GAME (1)

Now, let us answer the second question from the beginning: how can we combine the efforts of all N players in a single strategy profile taking into account the existing interval uncertainty? To do this, from game (1) we will pass successively to noncooperative games

Γ_1, Γ_2 and Γ_3 , where

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y, \{f_i(x, y), -R_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \\ \Gamma_2 &= \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \\ \Gamma_3 &= \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\Phi_i[x] = f_i[x] - \sigma_i R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.\end{aligned}$$

In all these three games, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N \geq 2\}$ is the set of players; $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i} (i \in \mathbb{N})$ denote the strategies of player i ; $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \subset \mathbf{R}^n (n = \sum_{i \in \mathbb{N}} n_i)$ forms a strategy profile; $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$ are uncertainties; the payoff function $f_i(x, y)$ of each player $i \in \mathbb{N}$ is defined on the pairs $(x, y) \in X \times Y$, in (4), $R_i(x, y)$ denotes the Savage–Niehans risk function of player i ; finally, $\sigma_i \in (0, 1) (i \in \mathbb{N})$ are some constants. In the game Γ_1 , the payoff function of player i becomes two-component as the difference between the payoff function $f_i(x, y)$ of player i from (1) and the risk function $R_i(x, y)$ from (4).

In the game Γ_2 , the payoff function $f_i(x, y)$ and the risk function $R_i(x, y)$ are replaced with their guarantees $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ and $R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y)$, respectively. Finally, in the game Γ_3 , the linear combination of the guarantees $f_i[x]$ and $-R_i[x]$ (see Proposition 3) is used instead of the payoff function of player i .

6. INTERNAL INSTABILITY OF THE SET OF NASH EQUILIBRIA

Consider a noncooperative N -player game in pure strategies (a non-zero-sum game of guarantees) of the form

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\Phi_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle \quad (10)$$

Each player i chooses and uses his pure strategy $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ without making coalitions with other players, thereby forming a strategy profile $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^n (n = \sum_{i \in \mathbb{N}} n_i)$; a payoff function $\Phi_i[x]$ is defined for each $i \in \mathbb{N}$ on the set of strategy profiles X , and its value is called the payoff of player i . Below, we will again use the notations $[x^e || x_i] = [x_1^e, \dots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \dots, x_N^e]$ and $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$.

Definition 1. A strategy profile $x^e = (x_1^e, \dots, x_N^e) \in X$ is called a Nash equilibrium in game (10) if

$$\max_{x_i \in X_i} \Phi_i[x^e || x_i] = \Phi_i[x^e] \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (11)$$

denote by X^e the set $\{x^e\}$ of Nash equilibria in game (10).

Let us analyze the internal instability of X^e . A subset $X^* \subset \mathbf{R}^n$ is internally unstable if there exist at least two strategy profiles $x^{(j)} \in X^* (j = 1, 2)$ such that

$$[\Phi[x^{(1)}] < \Phi[x^{(2)}]] \Leftrightarrow [\Phi_i[x^{(1)}] < \Phi_i[x^{(2)}]] \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (12)$$

and internally stable otherwise.

For example, let us consider the two-player game

$$\left\langle \{1, 2\}, \{X_i = [-1, 1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x) = -x_i^2 + 2x_1x_2\}_{i=1,2} \right\rangle \quad (13)$$

A strategy profile $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in [-1, 1]^2$ is a Nash equilibrium in game (13) if (see (5))

$$-x_i^2 + 2x_1x_2^e \leq -(x_i^e)^2 + 2x_1^ex_2^e \quad \forall x_i \in [-1, 1] (i = 1, 2)$$

which is equivalent to

$$-(x_1 - x_2^e)^2 \leq -(x_1^e - x_2^e)^2, \quad -(x_1^e - x_2)^2 \leq -(x_1^e - x_2^e)^2$$

Therefore, $x_1^e = x_2^e = \alpha \forall \alpha = \text{const} \in [-1, 1]$, i.e., in (13) we have the sets

$$X^e = \{(\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha \in [-1, 1]\}$$

and $f_i(X^e) = \bigcup_{x^e \in X^e} f_i(x^e) = \bigcup_{\alpha \in [-1, 1]} (\alpha^2, \alpha^2)$. Thus, the set X^e is internally unstable, since for game (13) with $x^{(1)} = (0, 0)$ and $x^{(2)} = (1, 1)$ we obtain $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1 (i = 1, 2)$ (see (6)).

Remark 3. In the zero-sum setup of game (10) (i.e., with $N = \{1, 2\}$ and $f_1 = -f_2 = \bar{f}$), the equality $\bar{f}(x^{(1)}) = \bar{f}(x^{(2)})$ holds for any two saddle points $x^{(k)} \in X (k = 1, 2)$ (by the equivalence of saddle points). Therefore, the set of saddle points in the zero-sum game is always internally stable. Note that a saddle point is a Nash equilibrium in the zero-sum set-up of game (10).

Remark 4. In the non-zero-sum setup of game (10), internal instability (see the previous example) does not occur if there is a unique Nash equilibrium in (10).

Let us associate with game (10) an auxiliary N -criteria choice problem of the form

$$\Gamma_c = \langle X^e, \{\Phi_i[x]\}_{i \in N} \rangle \quad (14)$$

where the set X^e of alternatives x coincides with the set of Nash equilibria x^e of game (10) and the i th criterion $\Phi_i[x]$ is the payoff function (8) of player i .

Definition 2. An alternative $x^P \in X^e$ is a Pareto-maximal (weakly efficient) alternative in (14) if for all $x \in X^e$ the system of inequalities

$$\Phi_i[x] \geq \Phi_i[x^P] \quad (i \in N),$$

with at least one strict inequality, is inconsistent. Denote by X^P the set $\{x^P\}$ of all such strategy profiles.

In accordance with Definition 2, the set $X^P \subseteq X^e$ is internally stable.

The following assertion is obvious. If

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x^P) \quad (15)$$

for all $x \in X^e$, then x^P is a Pareto-maximal alternative in problem (14).

Remark 5. A branch of mathematical programming focused on numerical methods of Nash equilibria design in games (10) has recently become known as equilibrium programming. At Moscow State University, research efforts in this field are being undertaken by the groups of Professors F.P. Vasiliev and A.S. Antipin at the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. However, the equilibrium calculation methods developed so far yield a Nash equilibrium that is not necessarily Pareto-maximal (in other words, the methods themselves do not guarantee Pareto maximality). At the same time, such a guarantee appears (!) if equilibrium is constructed using the sufficient conditions below-see Theorem 1.

7. FORMALIZATION OF PARETO-NASH EQUILIBRIUM

Let us return to the noncooperative game (10)

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\Phi_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

associating with it the N -criteria choice problem (14)

$$\langle X^e, \{\Phi_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

Recall that the set of Nash equilibria x^e of game (10) (Definition 1) is denoted by X^e , while the set of Pareto-maximal alternatives x^P of problem (14) (Definition 2) is denoted by X^P .

Definition 3. A strategy profile $x^* \in \mathbf{X}$ is called a Pareto-Nash equilibrium in game (10) if x^* is simultaneously

- (a) a Nash equilibrium in (10) (Definition 1) and
- (b) a Pareto-maximal alternative in (14) (Definition 2).

Remark 6. The existence of x^* in game (10) with $X^e \neq \emptyset$, compact sets X_i and continuous payoff functions $\Phi_i[x](i \in \mathbb{N})$ follows directly from the fact that $X^e \in \text{comp } X$.

8. SUFFICIENT CONDITIONS OF PARETO-NASH EQUILIBRIUM IN GAME (10)

Relying on (5) and (15), introduce $N + 1$ scalar functions of the form

$$\varphi_i(x, z) = f_i(z \| x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$\varphi_{N+1}(x, z) = \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z), \quad (16)$$

where $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z_i \in \mathbf{X}_i$ ($i \in \mathbb{N}$), $z \in \mathbf{X}$, and $x \in \mathbf{X}$. The Germeier convolution [11, p.66] of the scalar functions (16) is given by

$$\varphi(x, z) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z). \quad (17)$$

Finally, let us associate with game (10) and the N -criteria choice problem (14) the zero-sum game

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} = \mathbf{X}, \varphi(x, z) \rangle, \quad (18)$$

in which the first player chooses his strategy $x \in \mathbf{X}$ to increase the payoff function, while the opponent (the second player) forms his strategy $z \in \mathbf{X}$, seeking to decrease as much as possible the payoff function $\varphi(x, z)$ from (16) and (17).

A saddle point $(x^0, z^*) \in \mathbf{X}^2$ in game (18) is defined by the chain of inequalities

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z) \quad \forall x, z \in \mathbf{X}. \quad (19)$$

In this case, the saddle point is formed by the minimax strategy z^* ,

$$\left(\min_{z \in \mathbf{X}} \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z) = \max_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x, z^*) \right),$$

in combination with the maximin strategy x^0 ,

$$\left(\max_{x \in \mathbf{X}} \min_{z \in \mathbf{X}} \varphi(x, z) = \min_{z \in \mathbf{X}} \varphi(x^0, z) \right),$$

in game (18).

The next result provides a sufficient condition for the existence of a Pareto equilibrium in game (10).

Theorem 1. *If there exists a saddle point (x^0, z^*) in the zero-sum game (18) (i.e., inequalities (19) hold), then the minimax strategy z^* is a Pareto-Nash equilibrium in game (10).*

Доказательство. Let $z = x^0$ in the right-hand inequality of (19). Then, using (16) and (17), we obtain

$$\varphi(x^0, x^0) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x^0, x^0) = 0$$

In accordance with (19), it appears that

$$0 \geq \varphi(x, z^*) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z^*) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Therefore, the following chain of implications is valid for all $x \in X$:

$$\begin{aligned}
 & \left[0 \geq \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z^*) \geq \varphi_j(x, z^*) \right] \\
 & \implies [\varphi_j(x, z^*) \leq 0 (j = 1, \dots, N+1)] \\
 & \stackrel{(16)}{\implies} \{[f_i(z^* \| x_i) - f_i(z^*) \leq 0 \quad \forall x_i \in X_i \quad (i \in \mathbb{N})] \\
 & \bigwedge \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) - \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(z^*) \leq 0 \quad \forall x \in X^e \right] \} \\
 & \implies \left\{ \left[\max_{x_i \in X_i} f_i(z^* \| x_i) = f_i(z^*) (i \in \mathbb{N}) \right] \right. \\
 & \left. \bigwedge \left[\max_{x \in X^e} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(z^*) \right] \right\} \\
 & \stackrel{(5), (15)}{\implies} \{[z^* \in X^e] \bigwedge [z^* \in X^P]\},
 \end{aligned}$$

due to the inclusion $X^e \subseteq X$. □

Remark 7. Theorem 1 suggests the following design method for a Pareto–Nash equilibrium x^* in game (10).

Step 1. Using the payoff function $\Phi_i[x](i \in \mathbb{N})$ from (5.2.10) and also the vectors $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z_i \in X_i$, and $x = (x_1, \dots, x_N)$, $x_i \in X_i (i \in \mathbb{N})$, construct the function $\varphi(x, z)$ by formulas (16) and (17).

Step 2. Find the saddle point (x^0, z^*) of the zero-sum game (18). Then z^* is the Pareto–Nash equilibrium solution of game (10).

As far as we know, numerical calculation methods for the saddle point (x^0, z^*) of the Germeier convolution

$$\varphi(x, z) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z)$$

are lacking; however, they are crucial (see Theorem 1) for constructing Nash equilibria that are simultaneously Pareto-maximal strategy profiles. Seemingly, this is a new field of equilibrium programming and it can be developed, again in our opinion, using the mathematical tools of Germeier convolution optimization $\max_j \varphi_j(x)$ that were introduced by Professor V. F. Demyanov.

Remark 8. The next statement follows from results of operations research (see Proposition 1) and is a basic recipe for proving the existence of a Pareto–Nash equilibrium in mixed strategies in game (10). Namely, in game (10) with the sets $X_i \in \text{comp}$

$\mathbb{R}^{n_i}$ and the payoff functions $\Phi_i[\cdot] \in C(X)$ ($i \in \mathbb{N}$), the Germeier convolution $\varphi(x, z) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z)$ (16), (17) is continuous on $X \times X$.

9. FORMALIZATION OF STRONGLY-GUARANTEED EQUILIBRIUM IN PAYOFFS AND RISKS

Let us consider the concept of guaranteed equilibrium in game (1) from the viewpoint of a risk-neutral player. Assume each player i exhibits a risk-neutral behavior, i.e., chooses his strategy to increase the payoff (the value of the payoff function $f_i(x, y)$) and simultaneously reduce the risk (the value of the Savage–Niehans risk function $R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y)$) under any realization of the uncertainty $y \in Y$. Hereinafter, we use three N -dimensional vectors f y $(f_1, \dots, f_N)$, $R = (R_1, \dots, R_N)$, and $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ as well as N values $\sigma_i \in (0, 1)$ ($i \in \mathbb{N}$).

Definition 4. A triplet (x^P, f^P, R^P) is called a strongly-guaranteed Nash equilibrium in payoffs and risks in game (1) if first, $f^P = f[x^P]$ and $R^P = R[x^P]$; second, there exist scalar functions $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ and $R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y)$, $R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$), that are continuous on X ; third, the set X^e of all Nash equilibria x^e in the game of guarantees

$$\Gamma_3 = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\Phi_i[x] = f_i[x] - \sigma_i R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

is non-empty at least for one value $\sigma_i \in (0, 1)$, i.e.,

$$\max_{x_i \in X_i} \Phi_i[x^e \| x_i] = \Phi_i[x^e], \quad (i \in \mathbb{N}),$$

where $X^e = \{x^e\}$ and $[x^e \| x_i] = [x_1^e, \dots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \dots, x_N^e]$; fourth, x^P is a Pareto-maximal alternative in the N -criteria choice problem of guarantees

$$\langle X^e, \{\Phi_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

i.e., the system of inequalities

$$\Phi_i[x] \geq \Phi_i[x^P] \quad (i \in \mathbb{N}) \quad \forall x \in X^e,$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

Remark 9. Let us list a number of advantages of this equilibrium solution. First, as repeatedly mentioned, economists often divide decision makers (in our game (1), players) into three groups. The first group includes those who do not like to take risks (risk-averse players); the second group, risk-seeking players; and the third group, those who consider the payoffs and risks simultaneously (risk-neutral players). Definition 4 treats all players as risk-neutral ones, though it would be interesting to analyze the players from different

groups (risk-averse, risk-seeking and risk-neutral players). We hope to address these issues in future work.

Second, lower and upper bounds on the payoffs and risks are provided by the inequalities $f_i[x^P] \leq f_i(x^P, y) \forall y \in Y$ and $R_i[x^P] \geq R_i(x^P, y) \forall y \in Y$, respectively; note that the continuity of the guarantees $f_i[x]$ and $R_i[x]$ follows directly from the inclusions $X_i \in \text{comp } \mathbb{R}^{n_i} (i \in \mathbb{N})$, $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$, and $f_i[\cdot] \in (X \times Y)$ (see Proposition 2).

Third, an increase of the guaranteed payoffs for a separate player (as compared to $f_i[x^P]$) would inevitably cause an increase of the guaranteed risk (again, as compared to $R_i[x^P]$), whereas a reduction of this risk would inevitably cause a reduction of the guaranteed payoff.

Fourth, it is impossible to increase the difference $\Phi_i[x^P]$ for all players simultaneously (this property follows from the Pareto maximality of the strategy profile x^P).

Fifth, the best solution has been selected from all guaranteed solutions, as the difference $\Phi_i[x^P]$ takes the largest value (in the sense of vector maximum).

Sixth, under the assumption that the sets $X_i (i \in \mathbb{N})$ and Y are compact and the payoff functions $f_i(x, y)$ are continuous on $X \times Y$, the guarantees $f_i[x]$ and $R_i[x]$ exist and are continuous on X (Proposition 2). Therefore, the existence of solutions formalized by Definition 4 rests on the existence of Nash equilibria in the game of guarantees. Note that the framework developed in this section can be also applied to the concepts of Berge equilibrium, threats and counterthreats, and active equilibrium.

Below we will present a new method of proving the existence of a strongly. guaranteed Nash equilibrium in payoffs and risks. In particular, using the Germeier convolution of the payoff function, we have already established sufficient conditions for the existence of Nash equilibria in pure strategies that are simultaneously Pareto maximal with respect to all other equilibria (see Theorem 1).

Concluding this section, we will show the existence of such an equilibrium in mixed strategies under standard assumptions of noncooperative games (compact strategy sets and continuous payoff functions of all players).

10. EXISTENCE OF PARETO EQUILIBRIUM IN MIXED STRATEGIES

The hope that game (10) has a Pareto equilibrium in pure strategies (Definition 3) is delusive. Such an equilibrium may exist only for a special form of the payoff functions, a special structure of the strategy sets, and a special number of players. Therefore, adhering to an approach that stems from Borel [12], von Neumann [13], Nash [1] and their followers, we will establish the existence of a Pareto equilibrium in mixed strategies

in game (10) under standard assumptions of noncooperative games (compact strategy sets and continuous payoff functions).

Thus, suppose that in game (10) the sets X_i of pure strategies x_i are convex and compact in $\mathbb{R}^{n_i}$ (i.e., convex, closed and bounded; denote this by $X_i \in \text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}$) while the payoff function $f_i[x]$ of each player $i (i \in \mathbb{N})$ is continuous on the set of all pure strategy profiles $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.

Consider the mixed extension of game (10). For each of the N compact sets $X_i (i \in \mathbb{N})$, construct the Borel σ -algebra $\mathfrak{B}(X_i)$ and probability measures $v_i(\cdot)$ of $\mathfrak{B}(X_i)$ (i.e., nonnegative countably-additive scalar functions defined on the element of $\mathfrak{B}(X_i)$ that are normalized to 1 on X_i). Denote by $\{v_i\}$ the set of such measures, a measure $v_i(\cdot)$ is called a mixed strategy of player $i (i \in \mathbb{N})$ in game (5.2.10). Then, for the same game (10), construct mixed strategy profiles, i.e., the product measures $v(dx) = v_1(dx_1) \cdots v_N(dx_N)$. Denote by $\{v\}$ the set of such strategy y profiles. Finally, calculate the expected values

$$f_i(\nu) = \int_X f_i(x) \nu(dx) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (20)$$

As a result, we associate with the game Γ_3 (10) its mixed extension

$$\tilde{\Gamma}_3 = \langle \mathbb{N}, \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

In the noncooperative game $\tilde{\Gamma}_3$,

$v_i(\cdot) \in \{v_i\}$ is a mixed strategy of player i ;

$v(\cdot) \in \{v\}$ is a mixed strategy profile;

$f_i(v)$ is the payoff function of player i , defined by (10).

In what follows, we will use the vectors $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$, where $z_i \in X_i (i \in \mathbb{N})$, and $x = (x_1, \dots, x_N) \in X$, as well as the mixed strategy profiles $\nu(\cdot), \mu(\cdot) \in \{v\}$ and the expected values

$$\begin{aligned} \Phi_i(v) &= \int_X \Phi_i(x) v(dx), \quad \Phi_i(\mu) = \int_X \Phi_i(z) \mu(dz) \\ \Phi_i(\mu \| v_i) &= \int_{X_1} \cdots \int_{X_{i-1}} \int_{X_i} \int_{X_{i+1}} \cdots \int_{X_N} \Phi_i(z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \\ &\quad \dots, z_N) \mu_N(dz_N) \cdots \mu_{i+1}(dz_{i+1}) v_i(dx_i) \mu_{i-1}(dz_{i-1}) \cdots \mu_1(dz_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Once again, take notice that $x_i, z_i \in X_i (i \in \mathbb{N})$ and $x, z \in X$.

The following concept of Nash equilibrium in mixed strategies $v^e(\cdot) \in \{v\}$ in game (10) corresponds to Definition 1 of a Nash equilibrium in pure strategies $x^e \in X$ in the same game (10).

Definition 5. A strategy profile $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ is called a Nash equilibrium in the game $\tilde{\Gamma}_3$ if

$$\Phi_i[\nu^e||v_i] \leq \Phi_i[\nu^e] \quad \forall v(\cdot) \in \{v_i\} (i \in \mathbb{N}) \quad (22)$$

sometimes, the same strategy profile $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ will be also called a Nash equilibrium in mixed strategies in game (10).

By Glicksberg's theorem, under the conditions $X_i \in \text{cocomp } \mathbf{R}^{n_i}$ and $f_i(\cdot) \in C(X) (i \in \mathbb{N})$, there exists a Nash equilibrium in mixed strategies in game (10). Denote by $\mathfrak{V}$ the set of such mixed strategy profiles $\{v\}$. With the game $\tilde{\Gamma}_3$ we associate the N -criteria choice problem

$$\tilde{\Gamma}_\nu = \langle \mathfrak{V}, \{\Phi_i[\nu]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle. \quad (23)$$

In (9), the DM chooses a strategy profile $\nu(\cdot) \in \mathfrak{V}$ in order to simultaneously maximize all elements of a vector criterion $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_N(v))$. Here a generally accepted solution is a Pareto-maximal alternative.

Definition 6. A strategy profile $v^P(\cdot) \in \mathfrak{V}$ is called a Pareto-maximal alternative for the N -criteria choice problem $\tilde{\Gamma}_\nu$ from (9) if for any $\nu(\cdot) \in \mathfrak{V}$ the system of inequalities

$$\Phi_i[\nu] \geq \Phi_i^P[\nu] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

An analog of (15) states the following. If

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(v) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(v^P), \quad (24)$$

for all $v(\cdot) \in \mathfrak{V}$, then the mixed strategy profile $v^P(\cdot) \in \mathfrak{V}$ is a Pareto-maximal alternative in the choice problem $\tilde{\Gamma}_\nu$ (9).

Definition 7. A mixed strategy profile $v^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is called a Pareto-Nash equilibrium in mixed strategies in game (10) if

$v^*(\cdot)$ is a Nash equilibrium in the game $\tilde{\Gamma}_3$ (Definition 5);

$v^*(\cdot)$ is a Pareto-maximal alternative in the multicriteria choice problem (9) (Definition 6).

Now, we will prove the existence of a Nash equilibrium in mixed strategies that is simultaneously Pareto-maximal with respect to all other Nash equilibria.

Proposition 4. Consider the noncooperative game (10), assuming that

1. the set of pure strategies $\mathbf{X}_i$ of each player i is a nonempty, convex, and compact set in $\mathbb{R}^{n_i} (i \in \mathbb{N})$;
2. the payoff function $\Phi_i[x]$ of player $i (i \in \mathbb{N})$ is continuous on the set of all strategy profiles $\mathbf{X} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_i$.

Then there exists a Pareto equilibrium in mixed strategies in game (10).

Доказательство. Using formulas (16) and (17), construct the scalar function

$$\varphi(x, z) = \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z),$$

where, as before,

$$\varphi_i(x, z) = f_i(z \| x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$\varphi_{N+1}(x, z) = \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z),$$

$z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbf{X}$, $z_i \in \mathbf{X}_i$ ($i \in \mathbb{N}$), and $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbf{X}$, $x_i \in \mathbf{X}_i$ ($i \in \mathbb{N}$). By the construction procedure and Remark 9, the function $\varphi(x, z)$ is well-defined and continuous on the product of compact sets $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Introduce the auxiliary zero-sum game

$$\Gamma_a = \langle \{I, II\}, \mathbf{X}, \mathbf{Z} = \mathbf{X}, \varphi(x, z) \rangle.$$

In this game, player I chooses his strategy $x \in \mathbf{X}$ to maximize a continuous payoff function $\varphi(x, z)$ on $\mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z} = \mathbf{X}$) while player II seeks to minimize it by choosing an appropriate strategy $z \in \mathbf{X}$.

Next, we can apply a special case of Glicksberg's theorem to the game Γ_a , since the saddle point in the game Γ_a coincides with the Nash equilibrium in the noncooperative two-player game

$$\Gamma_2 = \langle \{I, II\}, \{\mathbf{X}, \mathbf{Z} = \mathbf{X}\}, \{f_I(x, z) = \varphi(x, z), f_{II}(x, z) = -\varphi(x, z)\} \rangle.$$

In this game, player I chooses his strategy $x \in \mathbf{X}$ to maximize $f_I(x, z) = \varphi(x, z)$, while player II seeks to maximize $f_{II}(x, z) = -\varphi(x, z)$. In the game Γ_2 , the sets $\mathbf{X}$ and $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ are compact, while the payoff functions $f_I(x, z)$ and $f_{II}(x, z)$ are continuous on $\mathbf{X} \times \mathbf{Z}$. Therefore, by the before mentioned Glicksberg theorem, there exists a Nash equilibrium (ν^e, μ^*) in the mixed extension of the game Γ_2 , i.e.,

$$\tilde{\Gamma}_2 = \left\langle \{I, II\}, \{\nu\}, \{\mu\}, \left\{ f_i(\nu, \mu) = \int_{\mathbf{X}} \int_{\mathbf{X}} f_i(x, z) \nu(dx) \mu(dz) \right\}_{i=I, II} \right\rangle.$$

Moreover, (ν^e, μ^*) obviously represents a saddle point in the mixed extension of the game Γ_a ,

$$\tilde{\Gamma}_a = \left\langle \{I, II\}, \{\nu\}, \{\mu\}, \varphi(\nu, \mu) = \int_{\mathbf{X}} \int_{\mathbf{X}} \varphi(x, z) \nu(dx) \mu(dz) \right\rangle$$

Consequently, by Glicksberg's theorem, there exists a pair (ν^e, μ^*) representing a saddle point of $\varphi(\nu, \mu)$, i.e.,

$$\varphi(\nu, \mu^*) \leq \varphi(\nu^e, \mu^*) \leq \varphi(\nu^e, \mu), \quad \forall \nu(\cdot), \mu(\cdot) \in \{\nu\}. \quad (25)$$

Setting $\mu = \nu^e$ in the right-hand inequality in (2), we obtain $\varphi(\nu^e, \nu^e) = 0$, and hence for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ inequalities (2) yield

$$0 \geq \varphi(\nu, \mu^*) = \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z) \nu(dx) \mu^*(dz) \quad (26)$$

As established in [14],

$$\begin{aligned} \max_{j=1, \dots, N+1} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \varphi_j(x, z) \nu(dx) \mu(dz) \\ \leq \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \max_{j=1, \dots, N+1} \varphi_j(x, z) \nu(dx) \mu(dz) \end{aligned} \quad (27)$$

(This is an analog of the property that the maximum of a sum is not greater than the sum of corresponding maxima.) From (11) and (12) it follows that

$$\max_{j=1, \dots, N+1} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \varphi_j(x, z) \nu(dx) \mu^*(dz) \leq 0 \quad \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\}$$

but then for each $j = 1, \dots, N + 1$ we surely have

$$\int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \varphi_j(x, z) \nu(dx) \mu^*(dz) \leq 0 \quad \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\}. \quad (28)$$

Recall the normalization conditions of the mixed strategies and mixed strategy, profiles, namely,

$$\int_{\mathbf{x}} v_i(dx_i) = 1, \int_{\mathbf{x}} \mu_i(dz_i) = 1 (i \in \mathbb{N}), \int_{\mathbf{x}} v(dx) = 1, \int_{\mathbf{x}} \mu(dz) = 1, \quad (29)$$

which hold $\forall v_i(\cdot) \in \{v_i\}$ and $\forall \mu_i(\cdot) \in \{\mu_i\}$ as well as $\forall \nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\forall \mu(\cdot) \in \{\mu\}$. Taking these conditions into account, we will distinguish two cases, $j \in \mathbb{N}$ and $j = N + 1$, and further specify inequalities (28) for each case.

Case 1: $j \in \mathbb{N}$ Using (16) and (29) for each $i \in \mathbb{N}$, inequality (28) is reduced to

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} [f_i(z\|x_i) - f_i(z)] v(dx) \mu^*(dz) &= \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}_i} [f_i(z\|x_i) \\ &- f_i(z)] v_i(dx_i) \mu^*(dz) = \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}_i} f_i(z\|x_i) v_i(dx_i) \mu^*(dz) \\ &- \int_{\mathbf{x}} f_i(z) \mu^*(dz) \int_{\mathbf{x}_i} v_i(dx_i) \stackrel{(29)}{=} \left[\int_{\mathbf{x}_1} \cdots \int_{\mathbf{x}_{i-1}} \int_{\mathbf{x}_i} \int_{\mathbf{x}_{i+1}} \cdots \int_{\mathbf{x}_N} f_i(z_1 \right. \\ &\left. \cdots z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots z_N) \mu_N^*(dz_N) \cdots \mu_{i+1}^*(dz_{i+1}) v_i(dx_i) \mu_{i-1}^*(dz_{i-1}) \right. \\ &\left. \cdots \mu_1^*(dz_1) \right] - f_i(\mu^*) = f_i(\mu^*\|v_i) - f_i(\mu^*) \leq 0 \quad \forall v_i(\cdot) \in \{v_i\}. \end{aligned}$$

In combination with (8), this inequality shows that $\mu^*(\cdot) \in \mathfrak{N}$, i.e., the mixed strategy profile $\mu^*(\cdot)$ is a Nash equilibrium in game (10) (Definition 5).

Case 2: $j = N + 1$ Now inequality (28) takes the form

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \varphi_{N+1}(x, z) v(dx) \mu^*(dz) &= \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) v(dx) \mu^*(dz) \\ &- \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(z) v(dx) \mu^*(dz) = \int_{\mathbf{x}} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) v(dx) \int_{\mathbf{x}} \mu^*(dz) \\ &- \int_{\mathbf{x}} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(z) \mu^*(dz) \int_{\mathbf{x}} v(dx) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\mathbf{x}} f_i(x) v(dx) \\ &- \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\mathbf{x}} f_i(z) \mu^*(dz) \stackrel{(5.2.24)}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(v) - \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(\mu^*) \leq 0 \quad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{N} \end{aligned}$$

since $\mathfrak{N} \subseteq \{v\}$. Hence, for $v^P = \mu^*$ we directly get (10), i.e., the strategy profile $\mu^*(\cdot)$ is a Pareto-maximal alternative in the N -criteria choice problem $\tilde{\Gamma}_c$ (9) (Definition 2).

This result, together with the inclusion $\mu^*(\cdot) \in \mathfrak{N}$, completes the proof of Proposition 4. $\square$

11. DE OMNI RE SCIBILI ET QUIBUSDAM ALIIS

As easily noticed, all the constructions, and lines of reasoning used in our work can be successfully carried over to the case of Berge equilibrium. We will do this below.

To avoid repetitions, we will emphasize the moments in the proof that are dictated by the specifics of Berge equilibrium. Again consider the N -player game (1)

$$\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

and, using formulas (4), define the Savage-Niehans risk functions

$$R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y).$$

Next, by formulas (5) and (6), construct the strongly-guaranteed payoff $f_i[x]$ of player i and the corresponding guaranteed Savage-Niehans risk $R_i[x]$. As a result, we arrive at the game of guarantees

$$\Gamma^g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

Then it is natural to pass to the auxiliary game (10),

$$\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\Phi_i[x] = f_i[x] - \sigma_i R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

with a constant $\sigma_i \in (0, 1)$.

Recall that, if in the two-player game ($\mathbb{N} = \{1, 2\}$) the players exchange their payoff functions, then a Nash equilibrium in the new game is a Berge equilibrium in the original game. Therefore, all the properties intrinsic to Nash equilibria remain in force for Berge equilibria. In particular, the set of Berge equilibria is internally unstable. With this instability in mind, let us introduce an analog of Definition 3 for the auxiliary game (10). As before, $[x||z_i] = [x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N]$.

Definition 8. A strategy profile $x^B \in X$ is called a Pareto-Berge equilibrium in game (10) if $x^B = (x_1^B, \dots, x_N^B)$ is simultaneously

1. a Berge equilibrium in (10), i.e.,

$$\max_{x \in X} \Phi_i[x||x_i^B] = \Phi_i[x^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

and

2. a Pareto-maximal alternative in the N -criteria choice problem

$$\langle X^B, \{\Phi_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

i.e., for any $x \in X^B$ the system of inequalities

$$\Phi_i[x] \geq \Phi_i[x^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

Denote by X^B the set of all $\{x^B\}$.

Sufficient conditions for the existence of a Pareto-Berge equilibrium also involve the Germeier convolution, with the N -dimensional vectors $x = (x_1, \dots, x_N) \in X$, $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, $R = (R_1, \dots, R_N)$, and $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$,

as well as N constants $\sigma_i \in [0, 1]$ ($i \in \mathbb{N}$). Specifically, consider the $N + 1$ scalar functions

$$\begin{aligned}\psi_1(x, z) &= \Phi_1[z_1, x_2, \dots, x_N] - \Phi_1[z] \\ \psi_2(x, z) &= \Phi_2[x_1, z_2, \dots, x_N] - \Phi_2[z] \\ &\dots \\ \psi_N(x, z) &= \Phi_N[x_1, x_2, \dots, z_N] - \Phi_N[z] \\ \psi_{N+1}(x, z) &= \sum_{j=1}^N \Phi_j[x] - \sum_{j=1}^N \Phi_j[z]\end{aligned}\tag{30}$$

and their Germeier convolution

$$\psi(x, z) = \max_{j=1, \dots, N+1} \psi_j(x, z).\tag{31}$$

Proposition 5. If there exists a saddle point $(x^0, z^B) \in X \times X$ in the zero-sum game

$$\langle X, Z = X, \psi(x, z) \rangle$$

i.e.,

$$\max_{x \in X} \psi(x, z^B) = \psi(x^0, z^B) = \min_{z \in X} \psi(x^0, z)$$

then the minimax strategy z^B is a Pareto-Berge equilibrium in game (10).

Like in Proposition 4, we may establish the existence of a Pareto-Berge equilibrium in mixed strategies.

Proposition 6. Consider the noncooperative game (10), assuming that

1. the sets $\mathbf{X}_i (i \in \mathbb{N})$ and $\mathbf{Y}$ are nonempty, convex and compact in $\mathbb{R}^{n_i} (i \in \mathbb{N})$;
2. the payoff functions $f_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$ are continuous on the Cartesian product $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Then there exists a Pareto-Berge equilibrium in mixed strategies in this game.

12. A LA FIN DES FINS

Classical scholars believe that the whole essence of mathematical game theory is to provide comprehensive answers to the following three questions:

1. What is an appropriate optimality principle for a given game?
2. Does an optimal solution exist?
3. If yes, how can one find it?

The answer to the first question for the noncooperative N -player game (1) is the concept of Pareto-Nash equilibrium (Definition 4) or the concept of Pareto-Berge equilibrium (Definition 8).

Next, the answer to the second question is given by Propositions 4 or 6: if the sets of strategies are convex and compact and the payoff functions of the players are continuous on $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, then such equilibria exist in mixed strategies.

Finally, the answer to the third question is provided by the following procedure: first, construct the guarantees of the outcomes $f_i[x]$ (5) and risks $R_i[x]$ (6); second, define the functions $\Phi_i[x] = f_i[x] - \sigma_i R_i[x]$ ($i \in \mathbb{N}$); third, find the Germeier convolution of the payoff functions $\varphi(x, z)$ using formulas (16) and (17) for Nash equilibrium or using formulas (30) and (2) for Berge equilibrium; fourth, calculate the saddle point (x^0, z^*) of this convolution; then the minimax strategy z^* is the desired Pareto-Berge (or Pareto-Nash) equilibrium.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NASH, J. F. (1951) Non-cooperative Games. *Ann. Math.* 54. p. 286–295.
2. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of Statistical Decision. *J. American Statistic Association*. 46. p. 55–67.
3. Черемных, Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: Инфо-М, 2008. — 60 с.
CHEREMNYKH, Y. N. (2008) *Microeconomics: Advance Level*. Moscow: Info-M.
4. Черкасов, В. В.. Проблемы риска в управленческой деятельности. — М.: Рефл-бук, 1999. — 78 с.
CHERKASOV, V. V. (1996) *Business Risk in Entrepreneurship*. Kiev: Libra.
5. Шикин, Е. В.. От игр к играм. — М.: URSS, 1997. — 70 с.
SHIKIN, E. V. (1997) *From Games to Games*. Moscow: URSS.
6. Дмитрук, А. В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. — М.: МАКС-ПРЕСС, 2012. — 34 с.
DMITRUK, A. V. (2012) *Convex analysis. An Elementary Introductory Course*. Moscow: Makspress.
7. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2013. — Т. 5. — С. 27–44.
ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. I. Analog of a Saddle-Point. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (1). p. 27–44.

8. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2013. — Т. 5. — С. 3–45.
ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. II. Analog of a Maximin. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (2). p. 3–45.
9. Венцель, Е. С. Исследование операций. — М.: Знание, 1976. — 40 с.
VENTSEL', I. A. (1976) *Operations Research*. Moscow: Znanie.
10. PARETO, V. (1909) *Manuel d'economie politique*. Paris: Geard.
11. Подиновский, В. В., Ногин, В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 100 с.
PODINOVSKII, V. V., NOGIN, V. D. (2007) *Pareto Optimal Solutions of Multicriteria Problems*. Moscow: Fizmatlit.
12. BOREL, E. (1927) Sur les systemes de formes linears a determinant symetric gauche et la theorie generale du jeu. *Comptes Rendus de l'Academie ds Sciences*. 184. p. 52–53.
13. VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Math. Ann.* 100. p. 295–320.
14. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Парето-оптимальное равновесие Нэша: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях. — М.: URSS, 2004. — 61 с.
ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N. (2004) *Pareto-Optimal Nash Equilibrium: Sufficient Conditions and Existence in Mixed Strategies*. Moscow: URSS.

УДК: 519.810

MSC2010: 91.830

A NEW APPROACH TO GUARANTEED SOLUTIONS OF MULTICRITERIA CHOICE PROBLEMS: PARETO CONSIDERATION OF SAVAGE–NIEHANS RISK AND OUTCOMES

© V. I. Zhukovskiy

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

© L. V. Zhukovskaya

FEDERAL STATE BUDGETARY INSTITUTION OF SCIENCE CENTRAL ECONOMIC AND MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES (CEMI RAS)
NAKHIMOVSKII PROSP., 47, MOSCOW, 117418, RUSSIA
E-MAIL: zhukovskaylv@mail.ru

© Y. S. Mukhina

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF HIGHER ALGEBRA
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: js.mukhina@mail.ru

A NEW APPROACH TO GUARANTEED SOLUTIONS OF MULTICRITERIA CHOICE
PROBLEMS: PARETO CONSIDERATION OF SAVAGE–NIEHANS RISK AND OUTCOMES.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S.

Abstract. This article considers three new approaches to important problems of mathematical game theory and multicriteria choice. The first approach ensures payoff increase with simultaneous risk reduction in the Savage–Niehans sense in multicriteria choice problem and noncooperative games. The second approach allow us to stabilize coalitional structures in cooperative games without side payments under uncertainty. The third approach serves to integrate the selfish Nash equilibrium with the altruistic Berge equilibrium. Note that the investigations involve a special Germeier convolution of criteria and calculation of its saddle point in mixed strategies.

Keywords: *Savage–Niehans risk, minimax regret, uncertainties, multicriteria choice, Pareto consideration*

1. PROLOGUE

This article introduces an original approach to multicriteria choice problems under uncertainty: a decision maker (DM) seeks not only to increase the guaranteed values of each criterion, but also to reduce the guaranteed risk of such increase. The approach lies at the junction of multicriteria choice problems [1, 2] and the Savage–Niehans principle of minimax regret (risk) [3–5]. More specifically, we will employ the notion of a weakly efficient estimate and the Germeier theorem [6, 7] from the theory of multicriteria choice problems and an estimated value of the regret function as the Savage–Niehans risk from the principle of minimax regret [3]. Considerations are restricted to interval-type uncertainty, i.e., the DM merely knows the limits of a range of values, without any probabilistic characteristics. We suggest a new concept — the Slater–maximal strongly–guaranteed solution in outcomes and risks (SGOR) — and establish its existence under standard assumptions of mathematical programming (continuous criteria, compact strategy sets and compact uncertainty [9] – [12]). As a possible application, the SGOR in the diversification problem of a deposit into sub–deposits in different currencies is calculated in explicit form.

2. INTRODUCTION

Consider a multicriteria choice problem under uncertainty (MCPU)

$$\Gamma_c = \langle \mathbb{N}, X, Y, f(x, y) \rangle,$$

where $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$ ($N \leq 2$) denotes the set of numbers assigned to the elements $f_i(x, y)$ of a vector criterion $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_N(x, y))$; $X \subset \mathbb{R}^n$ is the set of alternatives x ; $Y \subset \mathbb{R}^m$ forms the set of interval uncertainty y . For Savage–Niehans risk function design, we will also use the strategic uncertainties $y(x) : X \rightarrow Y$, denoting their set by Y^X .

At the conceptual level, it is often assumed that the DM in the problem Γ_c seeks for an alternative $x \in X$ that maximizes the values of all criteria (outcomes) under any realization of the uncertainty $y \in Y$. In this article we will also take into account N new criteria – the risk posed by increasing these outcomes. Thus, the problem setup will include N additional criteria, i.e., the Savage–Niehans risk function associated with outcome increase.

Thus, this article will justify in mathematical terms the next design method of alternatives in the MCPUs that simultaneously "hits into targets" namely, achieving higher of all outcomes under smaller risks posed by them.

THE SAVAGE–NIEHANS PRINCIPLE OF MINIMAX REGRET

In 1939 A. Wald, a Romanian mathematician who emigrated to the USA in 1938, introduced the maxmin principle, also known as the principle of guaranteed outcome. This principle allows one to find a guaranteed outcome [13, 14] in a single-criterion choice problem under uncertainty (SCPU). Almost a decade later, German mathematician J. Niehans (1948) and American mathematician, economist and statistician L. Savage (1951) suggested the principle of minimax regret (PMR) for building guaranteed risks in the SCPUs [4]. In the modern literature, this principle is also referred to as the Savage risk or the Niehans–Savage criterion. Interestingly, during World War II Savage worked as an assistant of J. von Neumann, which surely contributed to the appearance of the PMR. Note that the authors of two most remarkable dissertations in economics and statistics are annually awarded the Savage Prize, which was established in 1971 in the USA.

For the single-criterion problem $\Gamma_1 = \langle X, Y, \phi(x, y) \rangle$, the PMR is to construct a pair $(x^r, R_\phi^r) \in X \times \mathbb{R}$ that satisfies the chain of equalities [12]

$$R_\phi^r = \max_{y \in Y} R_\phi(x^r, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_\phi(x, y), \quad (1)$$

where the Savage–Niehans risk function has the form

$$R_\phi(x, y) = \max_{z \in X} \phi(z, y) - \phi(x, y). \quad (2)$$

The value R_ϕ^r given by (1) is called the Savage–Niehans risk in the problem Γ_1 . The risk function $R_\phi(x, y)$ assessed the difference between the realized value of the criterion $\phi(x, y)$ and its best-case value $\max_{z \in X} \phi(z, y)$ from the DM's view. Obviously, the DM strives to reduce $R_\phi(x, y)$ as much as possible with an appropriately chosen alternative $x \in X$, naturally expecting the strongest opposition from the uncertainty in accordance with the principle of guaranteed result (formula (1)). Therefore, adhering to (1)–(2), the DM is an optimist seeking for the best-case value $\max_{x \in X} \phi(x, y)$. In contrast, the pessimistic DM is oriented towards the worst-case result — the Wald maximin solutions $(x^0, \phi^0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \phi(x, y) = \min_{y \in Y} \phi(x^0, y))$.

In the sequel, we will consider that the DM in the problem Γ_c is an optimist: for each element $f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) of the vector criterion $f(x, y)$, he forms a corresponding Savage–Niehans risk function:

$$R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

Note two important aspects as follows. First, each criterion $f_i(x, y)$ from Γ_c has its own risk $R_i(x, y)$ (see (3)). Second, the DM tries to choose alternatives $x \in X$ so as to reduce all risks $R_i(x, y)$, expecting any realization of the strategic uncertainty $y(\cdot) \in Y^X$, $y(x) : X \rightarrow Y$.

Remark 1. The models Γ_c arise naturally, e.g., in economics: a seller in a market is interested in maximizing his profits under import uncertainty.

The uncertainties present in the problem Γ_1 lead to the sets

$$\phi(x, Y) = \{\phi(x, y) \mid \forall y \in Y\},$$

which are induced by an alternative $x \in X$. The set $\phi(x, Y)$ can be reduced using risks. What is a proper comprehension of risk? A well-known Russian expert in optimization, T. Sirazetdinov [16], claims that today there is no rigorous mathematical definition of risk. The monograph [17, p. 15] even suggested sixteen possible concepts of risk. Most of them require statistical data of uncertainty. However, in many cases the DM does not possess such information for objective reasons.

Thus, here risks will be understood as possible deviations of realized values from the desired ones. Note that this definition (in particular, the Savage–Niehans risk) is in good agreement with the conventional notion of microeconomic risk; e.g., see [19, pp. 40–50].

Risk management is a topical problem of economics: in 1990, H. Markowitz was awarded the Nobel Prize in Economic Sciences "for having developed the theory of portfolio choice". In this article, the idea of his approach will be extended to the multicriteria choice problems and conflicts under uncertainty. In publications on microeconomics (e.g., see [18, p.5], [19, p.103]) all decision makers are divided into three categories: risk-averse, risk-neutral and risk-seeking. Further the DM is assumed to be a risk-neutral and, of course, an optimist.

STRONG GUARANTEES AND TRANSITION FROM Γ_c TO $2N$ -CRITERIA CHOICE PROBLEM

For each of the N criteria $f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$), construct the corresponding risk function $R_i(x, y)$ using formulas (3), thereby extending the MCPU Γ_c to the $2N$ -criteria choice problem

$$\langle \mathbb{N}, X, Y, \{f_i(x, y), -R_i(x, y)\}_{i \in N} \rangle. \quad (4)$$

In (4) the sets $\mathbb{N}$, X and Y are the same as in Γ_c , while the vector criterion $f(x, y)$ has an additional term in the form of the N -dimensional vector $-R(x, y) = (-R_1(x, y), \dots, -R_N(x, y))$. Here the minus sign reflects a uniform effect of any alternative $x \in X$ on each criterion $f_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$. More specifically, in problem (4) the DM chooses an alternative $x \in X$ in order to increase as much as possible the value of each element $f_i(x, y)$ and $-R_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$ of the two N -dimensional vectors $f(x, y)$ and $-R(x, y)$. Moreover, the DM must expect any realization of uncertainty $y \in Y$ (note that an increase of $-R_i(x, y)$ is equivalent to a decrease of $R_i(x, y)$ due to the minus sign and $R_i(x, y) \geq 0$).

Now, consider the strong guarantees of criteria. In a series of papers [21, 22] the authors suggested three methods to take the uncertain factors into account — an analog of saddle point [22] and two analogs of maximin [21], namely, strong and vector guarantees. Note that strong guarantee is used below, while vector guarantee was applied.

Definition 1. A scalar function $f_i[x]$ is called a strong guarantee of a criterion $f_i(x, y) : X \rightarrow Y$ if, for each $x \in X$,

$$f_i[x] \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Remark 2. Obviously, the function $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y) \quad \forall x \in X$ is a strong guarantee of $f_i(x, y)$. Hence, we have an explicit design method for the strong guarantees of all $2N$ criteria from (4).

Let us find the strong guarantees $R_i[x]$ of the risk functions $R_i(x, y)$ given by (3). This will be done in three steps as follows.

First, define

$$\psi_i(y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Second, construct the Savage–Niehans risk function

$$R_i(x, y) = \psi_i(y) - f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Third, calculate the strong guarantee $\min_{y \in Y} [-R_i(x, y)]$, i.e.,

$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Note, that the DM seeks to minimize the risk $R_i(x, y)$ with an appropriate alternative $x \in X$ under any realization of the uncertainty $y \in Y$.

Whenever the functions $f_i[x]$ and $-R_i[x]$ described in the remark exist, they are strong guarantees of $f_i(x, y)$ and $-R_i(x, y)$, respectively. Indeed, for each $x \in X$, we have the implications

$$[f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)] \Rightarrow [f_i[x] \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y],$$

$$[-R_i[x] = \min_{y \in Y} (-R_i(x, y))] \Rightarrow [-R_i[x] \leq -R_i(x, y) \quad \forall y \in Y].$$

The existence of $f_i[x]$ and $R_i[x]$ follows from a well-known result in operation research, which was mentioned earlier.

Lemma 1. (see [23, p.54])

If the sets X and Y are compact and the criteria $f_i(x, y)$ are continuous on $X \times Y$, then the functions $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ and $\psi_i[y] = \max_{z \in X} f_i(z, y)$ are continuous on X and Y , respectively.

From this point onwards, $\text{comp } \mathbb{R}^n$ stands for the set of all compact sets from space $\mathbb{R}^n$. In addition, if $f_i(x, y)$ is continuous on $X \times Y$, we will write $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$.

Remark 3. If in the MCPU Γ_c the criterion $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$, $X \in \text{comp } \mathbb{R}^n$ and $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$, then the Savage–Niehans risk function $R_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) defined by (3) is continuous on $X \times Y$. Indeed, the continuity of $\psi_i[y] = \max_{z \in X} f_i(z, y)$ follows from Lemma 1, and hence by (3) the function $R_i(x, y) = \psi[y] - f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) is also continuous.

Remark 4. The Savage–Niehans risk function (3) characterizes the deviation of the criterion $f_i(x, y)$ from the desired value $\max_{z \in X} f_i(z, y)$. This stimulates the DM's choice of an alternative $x \in X$ that would reduce as much as possible the difference $R_i(x, y)$ from (3) or, equivalently, maximize $-R_i(x, y)$.

Let us associate with the initial MCPU Γ_c the $2N$ –criteria choice problem (4). Once again, at a conceptual level the DM in problem (4) seeks for an alternative $x \in X$ under which all the $2N$ criteria $f_i(x, y)$ and $-R_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) would take the greatest values possible under any realization of the uncertainty $y \in Y$.

FORMALIZATION OF A GUARANTEED SOLUTION IN OUTCOMES AND RISKS FOR PROBLEM Γ_c

The MCPUs are well-described in the literature (in particular, we refer to the monograph [24]). The specifics of the interval-type uncertainty y figuring in the problem Γ_c compel the DM to use in (4) the available information (the limits of the range of values). In this article, our analysis will be confined to the strong guarantees $f_i[x]$ and $-R_i[x]$ of the criteria $f_i(x, y)$ and $-R_i(x, y)$, respectively. Therefore, it seems natural to pass from the MCPU (4) to the multicriteria choice problem of guarantees without uncertainty

$$\Gamma^g = \langle X, \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

The criteria $f_i[x]$ and $-R_i[x]$ in Γ^g are closely related in terms of optimization: the criterion $R_i[x]$ is used for assessing the DM's risk posed by the outcome $f_i[x]$ so that an increase

in the difference $f_i[x] - R_i[x]$ leads to a higher guaranteed outcome $f_i[x]$ and (or) a lower guaranteed risk $R_i[x]$. Conversely, a decrease in this difference leads to a lower guaranteed outcome $f_i[x]$ and (or) a higher risk $R_i[x]$. The DM is interested in the maximization of $f_i[x]$ with simultaneous minimization of $R_i[x]$ for each $i \in \mathbb{N}$. Therefore, we will associate with the original $2N$ -criteria choice problem Γ^g the auxiliary N -criteria choice problem

$$\Gamma^a = \langle X, \{F_i[x] = f_i[x] - R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle. \quad (5)$$

For a formalization of the optimal solution in guaranteed outcomes and risks for the problem Γ_c , we will use a concept of vector maximum from the theory of multicriteria choice problems [3]. A first optimal solution of this type was introduced in 1909 by Italian economist and sociologist V. Pareto, (1848–1923), and subsequently it became known as Pareto maximum.

The analysis below will employ the concept of Slater maximum, which includes the Pareto maximum as a particular case. Perhaps this concept appeared in the Russian literature after the translation of a paper by Hurwitz [25].

Definition 2. An alternative $x^S \in X$ is called Slater-maximal (weakly efficient) in the N -criteria choice problem (5) if the system of strict inequalities

$$F_i[x] > F_i[x^S] \quad (i \in \mathbb{N})$$

is inconsistent for any $x \in X$.

Remark 5. By definition 2, an alternative $x^* \in X$ is not Slater-maximal in problem (5) if there exists an alternative $\bar{x} \in X$ satisfying the N inequalities

$$F_i[\bar{x}] > F_i[x^*] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Proposition 1. If

$$\min_{i \in \mathbb{N}} F_i[x^S] = \max_{x \in X} \min_{i \in \mathbb{N}} F_i[x], \quad (6)$$

then the alternative $x^S \in X$ is Slater-maximal in problem (5).

Доказательство. By equality (6) and Remark 5, for any alternative $x \in X$ there exists a number $j \in \mathbb{N}$ such that $[F_j[x] \leq F_j[x^S]] \Rightarrow [\text{the system of inequalities } F_j[x] > F_j[x^S] \ (i \in \mathbb{N}) \text{ is inconsistent}] \Rightarrow [x^S \text{ is Slater-maximal in problem (5)}]. \quad \square$

Theorem 1. If $f(\cdot) \in C(X \times Y)$ and the sets X and Y are compact, then there exists a Slater-maximal alternative $x^S \in X$ in problem (5).

Доказательство. Using Lemma 1, we have

$$[f_i(\cdot) \in C(X \times Y), i \in \mathbb{N}] \Rightarrow [f_i[x] \in C(X), i \in \mathbb{N}],$$

and, in accordance with Remark 3, $R_i(\cdot) \in C(X \times Y)(i \in \mathbb{N})$. Then, again by Lemma 1, $\min_{i \in \mathbb{N}} F_i[x] = \min_{i \in \mathbb{N}} (f_i[x] - R_i[x]) \in C(X)(i \in \mathbb{N})$. Since the continuous function $\min_{i \in \mathbb{N}} F_i[x]$ defined on the compact set X achieves maximum its at some point $x^S \in X$, we arrive at (6), and now the conclusion follows from Proposition 1. $\square$

Definition 3. A triplet $(x^S, f[x^S], R[x^S])$ is called a strongly-guaranted solution in outcomes and risks (SGOR) of the MCPU Γ_c if

- (1) $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y), R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$;
- (2) the alternative x^S is Slater-maximal in problem (5).

Recall that

$$\begin{aligned} f[x] &= (f_1[x], \dots, f_N[x]), \quad R[x] = (R_1[x], \dots, R_N[x]), \\ R_i[x] &= \max_{y \in Y} R_i(x, y), R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) (i \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (7)$$

Why is the strongly-guaranteed solution in outcomes and risks (SGOR) a good solution for the MCPU Γ_c ?

First, it provides an answer to the indigenous Russian question: "What is to be done?". The decision maker is suggested to choose the alternative x^S from the triplet $(x^S, f[x^S], R[x^S])$.

Second, for all $i \in \mathbb{N}$, this alternative x^S yields outcomes $f_i(x^S, y)$ that are not smaller than $f_i[x^S]$ with a risk $R_i(x^S, y)$ not exceeding $R_i[x]$ under any realization of the uncertainty $y \in Y$. In other words, x^S establishes lower bounds on the outcomes realized under $x = x^S$ and also upper bounds on the risks posed by them.

Third, the situation x^S implements the largest (Slater-maximal) outcomes and corresponding "minus"risks, i.e., there is no other situation $x \neq x^S$ in which all outcome guarantees $f_i[x^S]$ would increase and, at the same time, all risk guarantees $R_i[x^S]$ would decrease.

In fact, the second and third properties considered together give some analog of the maximin alternative in the single-criterion problem Γ_1 under uncertainty if the inner minimum and outer maximum in maximin are replaced by $\min_{y \in Y} F_i(x, y)(i \in \mathbb{N})$ and Slater maximum, respectively. There are two lines further investigations in this field. In accordance with the first direction, one should substitute Slater maximality with Pareto, Borwein, Geoffrion optimality or conical optimality, and then establish connections between such different solutions. The second direction proceeds from the DM's desire for

higher profits under the lowest guarantees in the sense of Definition 2. Consequently, it is possible to replace scalar minimum (from the inner minimum in maximin) by one of the listed vector minima, thereby increasing the guarantees for some $i \in \mathbb{N}$.

Also, it seems interesting to build a bridge between such solutions; some research efforts were made in the monograph [24].

Remark 6. Definition 2 suggests a constructive method of SGOR design. It consists of four steps as follows.

Step 1. Using $f_i(x, y)$, find $\max_{z \in X} f_i(z, y) = \psi_i[y]$ and construct the Savage–Niehans risk function $R_i(x, y) = \psi_i[y] - f_i(x, y)$ for the criterion $f_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$.

Step 2. Evaluate the outcome guarantees $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ and also the risk guarantees $R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$.

Step 3. For the auxiliary N –criteria choice problem of guarantees Γ^a , calculate the Slater–maximal alternative x^S . At this step, we may take advantage of Proposition 2 or perform transition to the concept of Pareto optimality. For the sake of completeness, we recall this concept.

Definition 4. An alternative $x^P \in X$ is called Pareto–maximal (efficient) in problem (5) if for any alternatives $x \in X$ the system of inequalities

$$F_i[x] \geq F_i[x^P] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

Note that, first, by Definitions 2 and 3, every Pareto–maximal alternative is also Slater–maximal (the converse generally fails); second, by Karlin’s lemma [26], an alternative $x^P \in X$ that satisfies the condition

$$\max_{x \in X} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i F_i[x] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i F_i[x^P] \quad (8)$$

for some $\alpha_i = \text{const} > 0$ is Pareto–maximal for problem (5).

For the bi–criteria choice problem, letting $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ in (8) gives the equality

$$\max_{x \in X} (F_1[x] + F_2[x]) = F_1[x^S] + F_2[x^S] \quad (9)$$

for obtaining a Pareto–maximal (hence, Slater–maximal) alternative x^S .

Step 4. Using x^S , evaluate the guarantees $f_i[x^S]$ and $R_i[x^S] (i \in \mathbb{N})$ and compile the two N –dimensional vectors $f[x^S] = (f_1[x^S], \dots, f_N[x^S])$ and $R[x^S] = (R_1[x^S], \dots, R_N[x^S])$.

The resulting triplet $(x^S, f[x^S], R[x^S])$ is the desired SGOR, which complies with Definition 3, i.e., for each criterion $f_i(x, y) (i \in \mathbb{N})$ the alternative x^S leads to a guaranteed outcome $f_i[x^S]$ with a guaranteed Savage–Niehans risk $R_i[x^S]$.

RISKS AND OUTCOMES FOR DIVERSIFICATION OF A DEPOSIT INTO SUB-DEPOSITS CURRENCIES

As mentioned earlier, in economics all decision makers are divided [26] – [32] into three categories: risk-averse, risk-neutral and risk-seeking. In this work we will solve the problem of diversification of a one-year deposit into sub-deposits in national and foreign currency for a risk-neutral person. Note that a similar problem was addressed in the paper [1, p.9], and the results established therein differ from those below. The case is that the Slater solutions generally form a set of distinct elements. Like in [1], the analysis in this article involves different elements of the same set.

Let us proceed to the diversification problem. The amount of money in a deposit diversified into two sub-deposits (in national and foreign currency) accumulated by the end of the year can be represented as $\phi(x, y) = x(1 + r) + \frac{(1 - x)}{k}(1 + d)y$; see [30, pp.58–60] and also the explanations below. This leads to the single-criterion choice problem $\Gamma_1 = \langle X, Y, \phi(x, y) \rangle$, which was studied in [1]. In particular, the guaranteed solutions for risk-averse, risk-neutral and risk-seeking persons was found. In contrast to the paper [1] dealing with the single-criterion choice problem with the criterion $\phi(x, y)$, in this work we will consider a bi-criteria analog of the problem Γ_1 with the criteria

$$f_1(x) = x(1 + r), \quad f_2(x, y) = \frac{(1 - x)}{k}(1 + d)y. \quad (10)$$

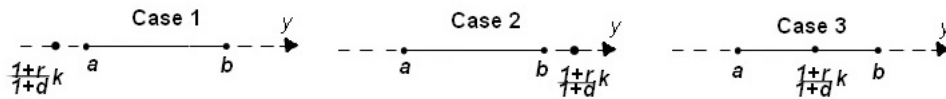
The first criterion concerns the annual income for the sub-deposit in national currency from an investment x , while the second concerns the annual income for the sub-deposit in foreign currency from the residual investment $1 - x$. In formula (10), r and d denote the interest rates for the sub-deposits in national and foreign currency, respectively; k and y are the exchange rates (to the national value) at the beginning and at the end of the year, respectively; finally, $x \in [0, 1]$ specifies a proposition in which the main deposit is divided into the sub-deposits. Thus, x is the part corresponding to the national sub-deposit, while the other part $1 - x$ is converted into foreign currency, $\frac{1 - x}{k}$, and then allocated to the corresponding sub-deposit. At the end of the year, it is converted back into national currency, $\frac{(1 - x)}{k}(1 + d)y$; the resulting amount of money makes up $f_1(x) + f_2(x, y)$. The decision maker (depositor) has to determine the part x under which the resulting amount of money is as large as possible. It must be taken in account that the future exchange rate y is usually unknown. However, we will assume a range of its possible fluctuations, i.e., $y \in [a, b]$, where the constants $b > a > 0$ are given or a priori known.

The mathematical model of the bi-criteria deposit diversification problem can be written as an ordered triplet

$$\Gamma_2 = \langle X = [0, 1], Y = [a, b], \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle, \quad (11)$$

where the functions $f_i(x, y)$ are defined by (10); the set $X = [0, 1]$ consists of the DM's alternatives x ; $Y = [a, b]$ is the set of uncertainties y ; finally, $f_i(x, y)$ denote the DM's utility function (criteria), and their values are called outcomes. In the terminology of operations research, Γ_2 is a single-criterion choice problem under uncertainty. The DM's desire to take into account the existing uncertain factors has a close connection with risk — "possible deviation of some variables from the desired values". We will use the Savage–Niehans risk function. For problem (5), consider three cases as illustrated at Fig.1, namely,

$$\begin{aligned} (1) \quad & k \frac{1+r}{1+d} \leq a; \\ (2) \quad & k \frac{1+r}{1+d} \geq b; \\ (3) \quad & a < k \frac{1+r}{1+d} < b. \end{aligned}$$



Puc. 1. The possible arrangements of the point $k \frac{1+r}{1+d}$ and the interval $[a, b]$ on axis y

Cases 1 and 2. Recall that Γ_2 is a bi-criteria problem under uncertainty. We will solve it using Definition 4, which is based on the concept of Pareto optimality.

Proposition 2. In cases 1 and 2, the SGOR in the problem Γ_2 has the explicit form

$$\begin{aligned} (x^S, f[x^S], R[x^S]) &= (x^S; f_1[x^S], f_2[x^S]; R_1[x^S], R_2[x^S]) \\ &= \begin{cases} (0; 0, \frac{1+d}{k}a; 1+r, 0), & \text{if } k \frac{1+r}{1+d} \leq a \\ (1; 1+r, 0; 0, \frac{1+d}{k}b), & \text{if } k \frac{1+r}{1+d} \geq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

That is, in case 1 the DM invests everything in the foreign currency sub-deposit, obtaining with zero risk a guaranteed minimum amount of $\frac{1+d}{k}a$ at the end of the year; in case 2, he invests everything in the national currency sub-deposit, obtaining with zero risk a guaranteed minimum amount of $1+r$ at the end of the year. In both cases,

the guaranteed minimum amounts are obtained with zero risk under any exchange rate functions $y \in [a, b]$ during the year.

Доказательство. We carry out the proof in two steps. In first step, following Remark 6, we construct the resulting $2N$ -criteria choice problem of guarantees Γ^g and then the N -criteria choice problem (5). In the second step, for this problem (5), we find the Slater-maximal alternative x^S using Proposition 1 and then calculate the explicit form of the SGOR for the bi-criteria choice problem (5).

First step. In (5), the criteria are given by

$$f_1(x, y) = f_1(x) = x(1 + r), \quad f_2(x, y) = \frac{(1 - x)}{k}(1 + d)y.$$

Sub-step 1. Using (3), construct the Savage-Niehans risk function

$$R_1(x, y) = [\max_{z \in [0, 1]} f_1(z)] - (1 + r)x = (1 + r) - x(1 + r) = (1 - x)(1 + r),$$

$$R_2(x, y) = [\max_{z \in [0, 1]} f_2(z)] - (1 - x)\frac{1 + d}{k}y = \frac{1 + d}{k}y - (1 - x)\frac{1 + d}{k}y = xy\frac{1 + d}{k}.$$

Sub-step 2. Now, calculate the strong guarantees in outcomes and risks

$$f_1[x] = \min_{y \in [a, b]} x(1 + r) = x(1 + r),$$

$$f_2[x] = \min_{y \in [a, b]} (1 - x)\frac{1 + d}{k}y = (1 - x)\frac{1 + d}{k}a,$$

$$R_1[x] = \max_{y \in [a, b]} R_1(x, y) = (1 - x)(1 + r),$$

$$R_2[x] = \max_{y \in [a, b]} R_2(x, y) = x\frac{1 + d}{k}b.$$

Sub-step 3. The quad-criteria choice problem of guarantees takes the form

$$\Gamma^g = \langle X = [0, 1], \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i=1,2} \rangle.$$

Step 2 also allows us to define the criteria

$$F_1[x] = f_1[x] - R_1[x] = x(1 + r) - (1 - x)(1 + r) = (2x - 1)(1 + r),$$

$$F_2[x] = f_2[x] - R_2[x] = (1 - x)\frac{1 + d}{k}a - x\frac{1 + d}{k}b = \frac{1 + d}{k}a - \frac{1 + d}{k}(a + b)x$$

in the auxiliary bi-criteria problem (5)

$$\Gamma^a = \langle X = [0, 1], \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle.$$

Second step. Sub-step 4. Maximize the sum of criteria

$$\max_{[0,1]} (F_1[x] + F_2[x]) = F_1[x^S] + F_2[x^S].$$

The resulting Pareto-maximal (ergo, Slater-maximal) alternative x^S is

$$F[x^S] = \max_{[0,1]} F[x], \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} F[x] &= F_1[x] + F_2[x] = (2x - 1)(1 + r) + \frac{1 + d}{k}a - \frac{1 + d}{k}(a + b)x \\ &= x[2(1 + r) - \frac{1 + d}{k}(a + b)] - (1 + r) + \frac{1 + d}{k}a \\ &= \frac{1 + d}{k}\{[2\gamma - (a + b)]x - \gamma + a\}, \end{aligned}$$

and $\gamma = \frac{1 + r}{1 + d}k$. The function $F[x]$ under maximization is linear in x and defined on the interval $[0, 1]$. Therefore, it achieves maximum at one of the endpoints of this interval, i.e., either at $x = 0$, or at $x = 1$. For $x = 0$, we have $F[0] = \frac{1 + d}{k}(\alpha - \gamma)$; for $x = 1$, $F[1] = \frac{1 + d}{k}(\gamma - b)$.

Lemma 2. *The next implication is valid*

$$[a \geq \gamma] \Rightarrow [F[0] > F[1]].$$

Доказательство. Indeed

$$\begin{aligned} [a \geq \gamma] &\Leftrightarrow \left[\left[\frac{a + a}{2} \geq \gamma \right] \Rightarrow \left[\frac{a + b}{2} > \gamma \right] \right] \Rightarrow [a - \gamma > \gamma - b] \\ &\Rightarrow [F[0] = \frac{1 + d}{k}(a - \gamma) > F[1] = \frac{1 + d}{k}(\gamma - b)]. \end{aligned}$$

□

In a similar fashion, we can easily establish

Lemma 3. *The implication*

$$[\gamma \geq b] \Rightarrow [F[0] < F[1]]$$

is valid.

Доказательство. Indeed,

$$\begin{aligned} [\gamma \geq b] &\Leftrightarrow \left[\left[\gamma \geq \frac{b + b}{2} \right] \Rightarrow \left[\gamma > \frac{b + a}{2} \right] \right] \Rightarrow [\gamma - b > a - \gamma] \\ &\Rightarrow [F[1] = \frac{1 + d}{k}(\gamma - b) > F[0] = \frac{1 + d}{k}(a - \gamma)]. \end{aligned}$$

□

By lemmas 2 and 3, the maximum in (13) is achieved

(a) at $x^S = 0$ if $a \geq \gamma$;

(b) at $x^S = 1$ if $\gamma \geq b$.

The corresponding guarantees are calculated using this result and Sub-step 2:

$$\begin{aligned} f_1[0] &= 0, f_2[0] = \frac{1+d}{k}a, R_1[0] = 1 + rR_2[0] = 0; \\ f_1[1] &= 1 + r, f_2[1] = 0, R_1[1] = 1, R_2[1] = \frac{1+d}{k}b. \end{aligned}$$

Recall that $\gamma = \frac{1+r}{1+d}k$, and the proof of Proposition 2 is complete. □

Let us make a few of remarks. First, $R_1[0] = 1 + r$ (the Savage–Niehans risk). The value $R_2[0] = \frac{1+d}{k}b$ has a similar meaning. Second, Proposition 2 was proved in the paper [29] using a different technique.

Finally, consider case 3. Here we will utilize, first, the results of Sub-step 3 of Proposition 2, in particular, the bi-criteria choice problem

$$\Gamma^a = \langle X = [0, 1], \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle,$$

where

$$\begin{aligned} F_1[x] &= (2x - 1)(1 + r), \\ F_2[x] &= \frac{1+d}{k}a - \frac{1+d}{k}(a + b)x; \end{aligned} \tag{14}$$

second, the sufficient conditions (6) for the existence of the alternative x^S (see Proposition 1), writing them for the deposit diversification problem (5) as

$$\min_{i=1,2} F_i[x^S] = \max_{x \in [0,1]} \min_{i=1,2} F_i[x].$$

Proposition 3. If $a < \frac{1+r}{1+d}k < b$, the SGOR in the problem Γ_2 has the form

$$\begin{aligned} (x^S, f[x^S], R[x^S]) &= (x^S; f_1[x^S], f_2[x^S]; R_1[x^S], R_2[x^S]) \\ &= \left(\frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}; \frac{(\gamma + a)(1 + r)}{2\gamma + a + b}, \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b} \frac{1 + d}{k}a; \right. \\ &\quad \left. (1 + r) \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}, b \frac{1 + d}{k} \frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство. Draw the graphs of the two functions $F_1[x]$ and $F_2[x]$ from (14). These functions are linear in x and defined on the interval $[0, 1]$ (a compact set); see Fig.2.

In Fig. 2 the function $\min_{i=1,2} \{F_1[x], F_2[x]\}$ is indicated by the bold line, see the angle ABC . For $\max_{x \in [0,1]} \min_{i=1,2} \{F_1[x], F_2[x]\}$, the point B satisfies the equality

$$F_1[x^S] = F_2[x^S]$$

or, using (14)

$$x^S \left[2(1+r) + \frac{1+d}{k}(a+b) \right] = 1+r + \frac{1+d}{k}a.$$

With the notation $\gamma = \frac{1+r}{1+d}k$, it can be written as

$$x^S[2\gamma + a + b] = \gamma + a,$$

which gives

$$x^S = \frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}, \quad 1 - x^S = \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}.$$

Using the formulas of Sub-step 2, we calculate the strong guarantees in outcomes and risks:

$$\begin{aligned} f_1[x^S] &= (1+r) \frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}, & f_2[x^S] &= \frac{1+d}{k}a \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}, \\ R_1[x^S] &= (1+r) \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}, & R_2[x^S] &= \frac{1+d}{k}b \frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}. \end{aligned}$$

□

Thus, we have established the following result (see Proposition 3). If $a < \frac{1+r}{1+d}k < b$, the strongly-guaranteed solution in outcomes and risks of the deposit diversification problem has form (15). It suggests the DM to invest the part $\frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}$ in the national currency sub-deposit and the residual part $\frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}$ in the foreign currency sub-deposit. At the end of the year, the DM will obtain the amount $(1+r) \frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}$ for the national currency sub-deposit with the Savage-Niehans risk $(1+r) \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}$ and the amount $\frac{1+d}{k}a(1+r) \frac{\gamma + b}{2\gamma + a + b}$ (after conversion in national currency) for the foreign currency sub-deposit with the Savage-Niehans risk $\frac{1+d}{k}b \frac{\gamma + a}{2\gamma + a + b}$ under the exchange rate fluctuations $y \in [a, b]$ during the year.

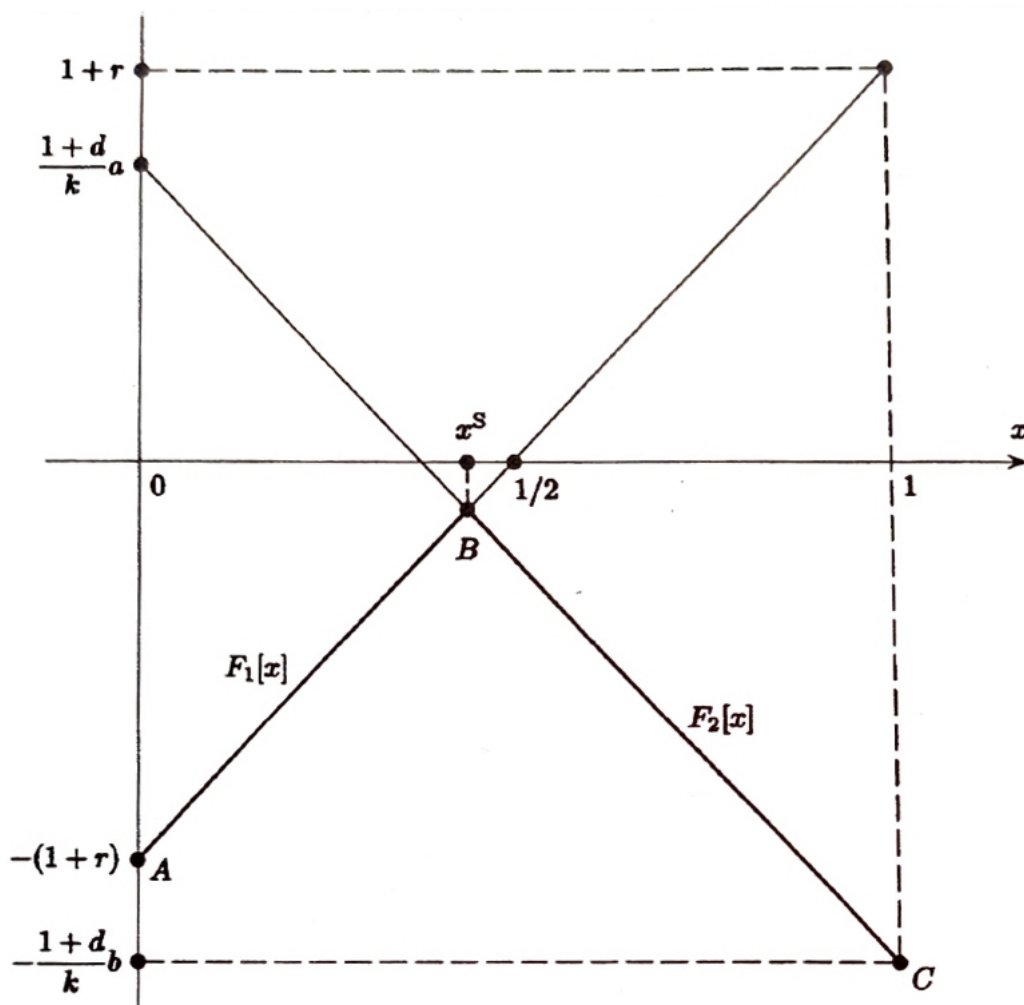


Рис. 2. Graphs of functions defined by (14).

Remark 7. If $\frac{1+r}{1+d}k \leq a$ (case 1), the DM is recommended to invest everything in the foreign currency sub-deposit, because at the end of the year he will obtain the guaranteed minimum income $\frac{1+d}{k}a$ with zero risk (Proposition 2).

If $\frac{1+r}{1+d}k \geq b$ (case 2), the DM is recommended to invest everything in the national currency sub-deposit, which will yield him the guaranteed minimum income $(1+r)$ with zero risk at the end of the year (Proposition 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капитоненко, В. В. Финансовая математика и ее приложения. — М.: ПРИОР, 2000. — 42 с.
KAPITONENKO, V. V. (2000) *Financial Mathematics and Its Applications*. Moscow: Prior.
2. Колемаев, В. А. Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 53 с.
KOLEMAEV, V. A. (2002) *Mathematical Economics*. Moscow: Yuniti.
3. SAVAGE, L. Y. (1954) *The Foundation of Statistics*. New York: Wiley.
4. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of Statistical Decision. *J. American Statistic Association*. 46. p. 55–67.
5. NICANS, J. (1951) Zur Preisbildung bei Unterwissen. *Zschweizerische Zeitschrift Association*. 46 (3). p. 55–67.
6. Гермейер, Ю. Б. Введение в исследование операций. — М.: Наука, 1971. — 34 с.
GERMEIER, Y. B. (1971) *Introduction to Operation Research*. Moscow: Nauka.
7. Гермейер, Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 64 с.
GERMEIER, Y. B. (1976) *Games with Nonopposite Interests*. Moscow: Nauka.
8. Мушик, Э., Мюллер, П. Методы принятия технических решений. — М.: Мир, 1990. — 56 с.
MUSCHICK, E. and MULLER, P. (1990) *Methods of Technical Decision-Making*. Moscow: Mir.
9. Найт, Ф. Х. Риск, неопределенность и прибыль. — М.: Дело, 2003. — 86 с.
KNIGHT, F. H. (2003) *Risk, Uncertainty, and Profit*. Moscow: Delo.
10. Жуковский, В. И. Конфликты и риски. — М.: ЗосЗИТЛП, 2007. — 54 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2007) *Conflicts and Risks*. Moscow: Ross. Zaochn. Inst. Tekstil. Legk. Promysh.
11. Жуковский, В. И.. Риски при конфликтных ситуациях. — М.: УРСС, ЛЕНАНД, 2011. — 78 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2011) *Risks in Conflict Situations*. Moscow: URSS.
12. Жуковский, В. И., Жуковская, Л. В. Риски в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 67 с.

- ZHUKOVSKIY, V. I., ZHUKOVSKAYA, L. V. (2004) *Risks in Multicriteria Choice and Conflict Systems under Uncertainty*. Moscow: URSS.
13. WALD, A. (1939) Contribution to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypothesis. *Annals Math. Statist.* 10. p. 299–326.
14. WALD, A. (1950) *A Statistical Decision Functions*. N.Y.: Wiley.
15. Ауман, Р. Дж. Экономический индекс рискованности // Российский журнал менеджмента. — 2007. — Т. 5. — С. 3–14.
- AUMANN, R. (2007) An Economic Index of Riskiness. *Russian Management Journal*. 5 (5). p. 3–14.
16. Черкасов, В. В.. Проблемы риска в управленческой деятельности. — М.: Рефл-бук, 1999. — 78 с.
- CHERKASOV, V. V. (1999) *Risk Problems in Management*. Moscow: Refa-buk.
17. Шахов, В. В.. Введение в страхование. Экономический аспект. — М.: Финансы и статистика, 1994. — 52 с.
- SHAKHOV, V. V. (1994) *Introduction to Insurance. Economic Aspect*. Moscow: Finansi i Statistika.
18. Черемных, Ю. Н.. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: Инфо-М, 2008. — 60 с.
- CHEREMNYKH, Y. N. (2008) *Microeconomics: Advance Level*. Moscow: Info-M.
19. Цветкова, Е. В., Арлюкова, И. О. Риски в экономической деятельности. — Санкт-Петербург: СПбИВЭСЭП, 2002. — 76 с.
- TSVETKOVA, E. V. and ARLYUKOVA, I. O. (2002) *Risks in Economic Activity*. St.-Peterburg: Inst. Vneshneekon. Svyav. Ekon. Prav.
20. MARKOVITS, H. M. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 7 (1). p. 77–89.
21. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2013. — Т. 5. — С. 27–44.
- ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. I. Analog of a Saddle-Point. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (1). p. 27–44.
22. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2013. — Т. 5. — С. 3–45.

- ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. II. Analog of a Maximin. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (2). p. 3–45.
23. Дмитрук, А. В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. — М.: МАКС-ПРЕСС, 2012. — 34 с.
- DMITRUK, A. V (2012) *Convex analysis. Elementary introductory course*. Moscow: MAKS-PRESS.
24. ZHUKOVSKIY, V. I., SALUKVADZE, M. E. (1994) *The vector-valued maximin*. N.Y. etc: Academic Press.
25. ARROW, K. J., HURWICZ, L. and UZAWA, H. (1958) *Studies in Linear and Non-linear Programming*. Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford Univ. Press.
26. KARLIN, S. (1959) *Mathematical Methods and Theory in Games*. Programming and Economics, London–Paris: Pergamon Press.
27. Клейманов, А. Ф. Неантогонистические позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1993. — 86 с.
- KLEIMENOV, A. F. (1993) *Nonantagonistic Positional Differential Games*. Yekaterinburg: Nauka.
28. Колесник, Г. В. Теория игр. — М.: СПбИВЭСЭП, 2010. — 120 с.
- KOLESNIK, G. V. (2010) *Game Theory*. Moscow: Либроком.
29. Кудрявцев, К. Н., Стабулит, И. С. Гарантированное по Парето равновесие в дуополии Хотеллинга на плоскости // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — Т. 14. — С. 173–177.
- KUDRYAVTSEV, K. N. and STABULIT, I. S. (2012) Pareto–Guaranteed Equilibrium in 2D Hotelling Duopoly. *Vest. Yuzhno–Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Modelir. Programmir.* 14 (40). p. 173–177.
30. Жуковский, В. И., Чикрий, А. А., Солдатова, Н. Г. Равновесие по Бержу в конфликтах при неопределенности // Сборник 12 Всероссийского совещания по проблемам управления. — М.: Институт управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 8290–8302.
- ZHUKOVSKIY, V. I., CHIKRII, A. A. and SOLDATOVA, N. G. (2014) *The Berge Equilibrium in the Conflicts under Uncertainty*. Proc. XII All-Russian Meeting on Control Problems (AMCP–114), Moscow: Inst. Probl. Upravlen..8290–8302

31. ZHUKOVSKIY, V. I., SALUKVADZE, M. E. (2020) *The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for Golden Rule of Ethics*. Springer.
32. ZHUKOVSKIY, V. I., SALUKVADZE, M. E. (2021) *The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for Golden Rule of Ethics. A Dynamic-Theoretic Framework Based of Berge Equilibrium*. N.Y.: CRC Press Taylor and Francis Group.

УДК: 004.023; 519.16

MSC2010: 90C27

АНАЛИЗ МЕТАЭВРИСТИК ДЛЯ ЗАДАЧ МНОГОАГЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ

© О. О. Макаров

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *fantom2.00@mail.ru*

ANALYSIS OF METAHEURISTICS FOR MULTI-AGENT ROUTING PROBLEMS.

Makarov O. O.

Abstract. The article presents a numerical experiment dedicated to solving the Traveling Salesman Problem (TSP) using various metaheuristics on a data set from the TSPLIB library. The main goal of the experiment was to determine the most efficient and accurate methods for finding routes. A brief description of each of the studied algorithms is given.

An approach is described for collecting graph metric characteristics that are unique for the network structure. In the context of TSP, these metrics may include node degrees, edge weights, connectivity, and other properties that describe the relationships between cities. By using metadata, it is possible to obtain a generalized description of the network, which aids in understanding its complexity and properties. A detailed description of the algorithm for calculating the statistics of weight distribution in a graph is also given. Understanding the weight distribution is essential in determining the characteristics of the TSP instances, such as the presence of clusters or patterns that might impact the choice of metaheuristic. The application of this algorithm to the graph made it possible to automate the selection of the reference distance parameter for hierarchical clustering. Hierarchical clustering is a method used to group similar items together based on their characteristics. By identifying cohesive point sets using this approach, it can potentially discover patterns or substructures in the TSP instances.

The experiment showed that all the applied metaheuristics are able to find approximate solutions for TSP on various data sets. However, depending on the characteristics of the problem, some methods proved to be more efficient and accurate than others. The final table contains a list of the best algorithms with an indication of the number of times when each of them produced the best solution among the others. It could provide valuable insights into which metaheuristics work best under certain conditions.

Based on the results obtained, it is planned to establish a link between the graph metadata and the results, which will allow developing an intelligent system for choosing the optimal metaheuristic. The choice of metaheuristics is recommended to be carried out taking into account the specifics of the TSP, such as the number of cities, geographical characteristics, accuracy

requirements, and execution time. Combining different metaheuristics is suggested as a possible approach to improve the results in solving the TSP. Hybrid approaches that leverage the strengths of multiple algorithms could lead to better solutions, especially for complex TSP instances.

The findings in the article have practical implications for real-world routing and scheduling problems that can be modeled as TSP instances. By understanding the performance of different metaheuristics based on the problem's characteristics, practitioners can make informed decisions on selecting the most suitable approach for their specific needs.

In summary, the article's numerical experiment, which explores the application of various metaheuristics to solve the TSP problem, yields valuable insights into the efficiency and effectiveness of these algorithms. By considering the graph metadata and characteristics of TSP instances, researchers aim to develop an intelligent system that can select the best metaheuristic for different scenarios, leading to improved solutions for real-world routing and optimization problems.

Keywords: *traveling salesman problem, multiple traveling salesman problem, hierarchical clustering, algorithm for solving multiple traveling salesman problems, graph metadata, metaheuristics, graph metrics*

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире задача маршрутизации играет ключевую роль для оптимизации логистических перевозок. Данную задачу можно рассматривать как сложную оптимизационную проблему маршрутизации типа MTSP (Multiple Traveling Salesman Problem, задача многих коммивояжеров), которая требует нахождения оптимальных путей для нескольких коммивояжеров, с целью эффективного обслуживания пунктов назначения.

Выбор подходящей метаэвристики, позволяющей находить приближенные или оптимальные решения в сложных и многомерных пространствах поиска для решения задачи MTSP, является актуальной проблемой. Метаэвристические алгоритмы (генетические и муравьиные системы, имитация отжига и др.) позволяют эффективно решать проблему оптимизации маршрутов. Отдельной задачей становится выбор оптимального алгоритма и метапараметров для каждой конкретной задачи. Это связано с большим разнообразием метаэвристик. Предполагается, что алгоритм, который хорошо работает на определенной, уже решенной задаче, также подойдет для близкой к ней задаче. В данном случае, если метаэвристика дает хороший результат на графе определенной структуры, то и на подобном графе она даст хорошие результаты.

Цель данной статьи – найти способ определения метаэвристик для близких задач, основываясь на метаданных графа и близости математических моделей задач. Для

этого рассматриваются различные метаэвристики, применяемые в задачах маршрутизации типа TSP (Traveling Salesman Problem, задача коммивояжера) и MTSP. Исследуются факторы, влияющие на выбор оптимальной метаэвристики в зависимости от особенностей задачи и требований к результатам. Понимание выбора метаэвристики для решения задачи MTSP имеет важное значение для разработки эффективных алгоритмов маршрутизации.

Рассмотрим предлагаемые в современной литературе подходы, которые можно использовать для решения задач MTSP.

В статье [3] рассматриваются прикладные модели многоагентной маршрутизации с учетом специфики организации структуры сети, целей системы и локальных целей агентов. Выделен класс задач многих коммивояжеров разного уровня иерархии (HCMTSP, Hierarchical Clusterd Multiple Traveling Salesman Problem, иерархическая кластерная задача многих коммивояжеров). Построение маршрутов HCMTSP согласовано с естественной кластеризацией сложной инфраструктурной сети. Выделяется иерархическая кластеризация сети. Показано, что в зависимости от логистических целей должен быть выбран различный тип кластеризации, согласованной с MTSP. Сравниваются результаты вычислительного эксперимента по типам кластеризации и маршрутам. Отдается предпочтение иерархической кластеризации, согласованной с иерархией маршрутов HCMTSP.

В [2] рассматривается алгоритм иерархической кластеризации для HCMTSP. Приводится сравнительный анализ решателя Concorde и алгоритма имитации отжига SA (Simulated Annealing, алгоритм имитации отжига) для решения MTSP. Показано, что многоуровневая кластеризация для задач большой размерности способствует снижению сложности решения MTSP. После предварительной кластеризации происходит процедура локальной оптимизации TSP на каждом из сформированных кластеров, а затем множество полученных решений объединяется в единое решение HCMTSP.

В [33] представлен новый гибридный алгоритм для решения MTSP, названный GELS-GA (Gravitational Emulation Local Search Genetic Algorithm, гравитационная эмуляция генетического алгоритма с локальным поиском). Произведен сравнительный анализ предложенного алгоритма с генетическим алгоритмом и муравьиной колонии. Показано, что оптимальность достигается даже в очень сложных сценариях. Несмотря на простоту предлагаемого алгоритма, он показывает хорошее время выполнения и находит близкие к оптимальным решения для задач, сравнительно с другими, рассмотренными алгоритмами. Данные для сравнительного анализа брались из TSPLIB (Traveling Salesman Problem Library, библиотека задач коммивояжера) [67].

В [60] приведен обзор для выявления наиболее перспективных и эффективных метаэвристик. Выделяются такие перспективные подходы, как оптимизация искусственной пчелиной колонии, оптимизация бактериального добывания корма и алгоритм светлячков.

В статье [34] рассматривается проблема получения эффективного решения задачи коммивояжера с использованием традиционной HNN (Hopfield Neural Network, нейронная сеть Хопфилда) и метода штрафов. Однако, в результате недостатков применяемого метода штрафов, HNN часто застревает в локальном минимуме и не сходится к эффективному решению. В [34] предлагается улучшенный алгоритм, основанный на ускоренной расширенной лагранжевой нейронной сети Хопфилда (AALHNN, Accelerated Augmented Lagrangian Hopfield Neural Network, ускоренная расширенная лагранжева нейронная сеть Хопфилда), который позволяет преодолеть этот недостаток. В алгоритме AALHNN используется метод множителей Лагранжа, обеспечивая получение эффективного решения задачи коммивояжера. В алгоритм добавлены факторы второго порядка, стабилизирующие динамическую модель нейронной сети и повышающие эффективность решения. В ходе исследования авторы внесли изменения в модели TSP Хопфилда и Танка. Ограничения TSP умножаются на множители Лагранжа и усиленные множители Лагранжа соответственно. Алгоритм использует функцию расширенного лагранжиана, включающую функцию длины пути, что обеспечивает надежную сходимость и избавление от локального минимума. Множители Лагранжа обновляются с использованием техники ускорения Нестерова [35]. В работе доказано, что экстремум, полученный с помощью этого улучшенного алгоритма, является оптимальным решением исходной задачи. В ходе эксперимента успешно получено приближенное оптимальное решение TSP. По сравнению с традиционной HNN, данный метод обеспечивает эффективное решение задачи коммивояжера и достижение более качественных результатов.

Похожий подход, основанный на нейронных сетях, описан в работах [4, 5], где предложено использовать функционал Ляпунова, построенный на модели TSP, в качестве основы для искусственной нейронной сети. Данный подход можно использовать при решении задач типа MTSP. Основная сложность заключается в процессе обучения, так как много ресурсов уходит на подбор корректных параметров для нейронной сети.

1. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МНОГОАГЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ ТИПА КОММИВОЯЖЕРА

При решении TSP возникает вопрос выбора оптимального алгоритма и набора параметров для получения лучшего маршрута за приемлемое время. Зачастую требуется применить несколько алгоритмов последовательно, например, запускается быстрый жадный алгоритм для первого приближения, затем другим алгоритмом производится улучшение этого решения. Но на текущий момент не представлено автоматизированного способа отбора композиций алгоритмов решения TSP и набора метаэвристических параметров. В данной статье представлен этап формирования базы данных для обучения интеллектуальной системы выбора алгоритма, основываясь на метаинформации графа и математической модели задачи. Приведен вычислительный эксперимент для сравнительного анализа на тестовых наборах данных, для которых известны близкие к точным решения.

Алгоритмы решения задачи многоагентной маршрутизации типа коммивояжера (многих коммивояжеров) опираются на метаэвристические алгоритмы решения TSP. Таким образом, предлагаемая методика применима для MTSP, а также является основой для выбора алгоритмов решения транспортной задачи с временными окнами.

1.1. Описание данных. Для проведения эксперимента использовались датасеты из TSPLIB [67]. TSPLIB – это библиотека эталонных примеров для TSP. TSPLIB состоит из коллекции данных для различных TSP, а также оптимальных или лучших известных решений для каждого экземпляра. TSPLIB содержит различные типы данных для TSP, такие как симметричная TSP (когда расстояние между любыми двумя городами одинаково в обоих направлениях) и асимметричная TSP (когда расстояние может меняться в разных направлениях). Библиотека предоставляет различные форматы файлов для представления экземпляров, что облегчает ее использование в различных средах. Эта библиотека широко используется в сообществе исследователей TSP в качестве стандартного эталона для оценки алгоритмов и эвристик для решения TSP. С ее помощью можно сравнить производительность различных алгоритмов, разработать новые методы решения и оценить прогресс в этой области с течением времени.

Программный комплекс тестировался на следующих графах из TSPLIB [67], число в названии указывает на количество вершин: eil51, berlin52, st70, pr76, eil76, gr96, rat99, rd100, kroB100, kroD100, kroA100, kroC100, kroE100, eil101, lin105, pr107, pr124, bier127, ch130, pr136, gr137, pr144.

1.2. Метаэвристики локальных агентов. Для обучения системы автоматического выбора алгоритма необходимо собрать базу данных результатов расчета для набора метаэвристических алгоритмов и построить систему определения метаданных. В данном разделе приводится результат просчетов для 39 метаэвристических алгоритмов.

Как правило, эти алгоритмы содержат в себе некоторые пользовательские параметры, которые сильно влияют на результаты работы для конкретного графа. Так как подбор оптимальных параметров является отдельной трудоемкой задачей, в данном эксперименте он не проводился. Вместо этого пользовательские параметры задаются средними общепринятыми значениями, а количество итераций задается в зависимости от размерности набора данных (чем больше размерность, тем больше итераций). Такой подход позволяет получить опорные результаты работы алгоритмов для любого набора данных.

В качестве библиотеки метаэвристических алгоритмов используется `pyCombinatorial` [65]. Это библиотека Python, предоставляющая набор алгоритмов комбинаторной оптимизации и инструментов для решения задач. В ней представлены такие метаэвристические алгоритмы, как генетический, оптимизация роя частиц и имитация отжига, которые могут быть использованы для эффективного решения комбинаторных задач. Библиотека `pyCombinatorial` предоставляет функциональные возможности для оценки производительности алгоритмов оптимизации. Она включает метрики для измерения качества решений, такие как значения объективной функции и выполнимость решения. Библиотека предлагает возможности визуализации, чтобы помочь пользователям понять и проанализировать поведение алгоритмов оптимизации; она предоставляет инструменты для визуализации хода выполнения алгоритмов, визуализации маршрутов или назначений решений, а также построения графиков или диаграмм для анализа производительности. Важно отметить, что `pyCombinatorial` имеет открытый исходный код. Это позволило настроить и расширить функциональность в соответствии с конкретными потребностями вычислительного эксперимента.

Разработанное приложение для расчетов имеет модульную структуру. Взаимодействие между модулями одного приложения реализовано за счет вызова функций. Схема программного продукта представлена на рис. 1. «Главный блок» является менеджером всего проекта, на вход этого блока подается список графов. В «Главном блоке» происходит считывание графа, после чего он передается в «Алгоритмический блок», который производит вызов заданного списка алгоритмов из библиотек (в данном случае это либо `pyCombinatorial`, либо «Библиотека алгоритмов»). Этот

модуль содержит авторские реализации некоторых подходов. После того как «Алгоритмический блок» завершит расчет, результат возвращается в «Главный блок» и записывается в файл.

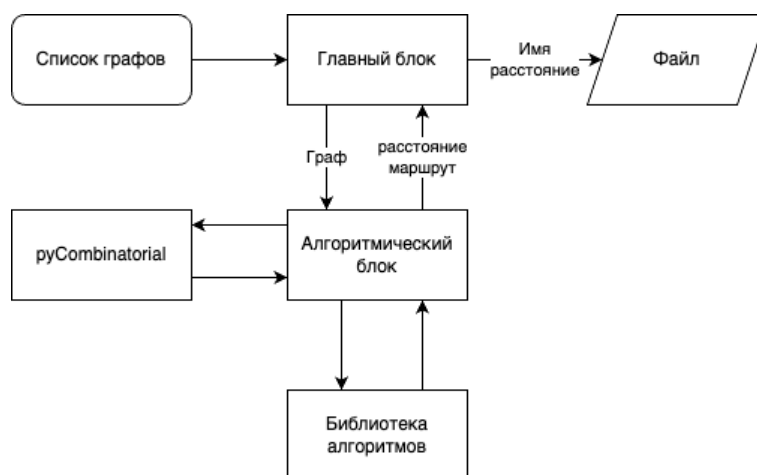


Рис. 1. Схема расчетного модуля

Модульный подход позволяет масштабировать приложение в зависимости от требований. К примеру, «Алгоритмический блок» может получить еще один модуль-библиотеку алгоритмов и интеграция этого блока не потребует особых усилий со стороны разработчика, единственное возможное затруднение – это реализация адаптера для соблюдения интерфейса дочернего модуля «Алгоритмического блока». Точно так же легко можно изменить способ записи результатов, например, на запись в базу данных или консоль.

Произведен анализ следующих метаэвристических алгоритмов:

1. **Best Known(BK)** — лучшее известное на данный момент решение для набора данных из библиотеки TSPLIB [67].
2. **Ant Colony Optimization (ACO)** — метаэвристический алгоритм, инспирированный поведением муравьев в поисках пищи. Алгоритм ACO (Ant Colony Optimization, оптимизация муравьиной колонии) для TSP может находить качественные решения за разумное время, но его эффективность зависит от выбора параметров и конкретных характеристик решаемого экземпляра TSP [6, 21, 52, 62].
3. **2-opt (2opt)** — простой эвристический алгоритм, используемый для улучшения решения TSP. Основная идея алгоритма заключается в итеративном удалении двух ребер из маршрута TSP и замене их двумя новыми ребрами, которые

- соединяют маршрут другим способом, чтобы получить более короткое общее расстояние [19].
4. **2-opt-stochastic (2optS)** — вариант алгоритма 2-opt для TSP. Основная идея алгоритма заключается в случайном выборе набора ребер в маршруте и последующем применении алгоритма 2-opt только к этим ребрам, а не ко всему маршруту. Такой подход может помочь избежать локального оптимума и исследовать большее пространство решений [25].
 5. **2h-opt (2Hopt)** — расширение алгоритма 2-opt для TSP. Основная идея алгоритма 2.5-opt заключается в том, чтобы удалить три ребра из маршрута TSP, а затем соединить маршрут с помощью трех новых ребер другим способом, чтобы получить меньшее общее расстояние [58].
 6. **2h-opt-stochastic (2HoptS)** — вариант алгоритма 2.5-opt для TSP, включающий стохастический элемент. Основная идея 2.5-opt stochastic заключается в случайном выборе набора из трех ребер в маршруте и последующем применении алгоритма 2.5-opt только к этим ребрам, а не ко всему маршруту. Такой подход может помочь избежать локального оптимума и исследовать большее пространство решений [58].
 7. **3-opt (3opt)** — расширение алгоритма 2-opt. Основная идея алгоритма 3-opt заключается в том, чтобы удалить три ребра из маршрута TSP, а затем соединить маршрут с помощью трех новых ребер другим способом, чтобы получить более короткое общее расстояние [45].
 8. **3-opt-stochastic (3optS)** — вариант алгоритма 3-opt для решения задачи коммивояжера, включающий стохастический элемент. Основная идея 3-opt stochastic заключается в случайном выборе набора из трех ребер в маршруте и последующем применении алгоритма 3-opt только к этим ребрам, а не ко всему маршруту. Такой подход может помочь выйти из локального оптимума и исследовать большее пространство решений [45].
 9. **Biased Random Key Genetic Algorithm (BRKGA)** — алгоритм, каждое решение которого представлено вектором случайных ключей, которые являются действительными числами от 0 до 1. Затем вектор сортируется, и порядок городов определяется индексами сортировки. Операция сортировки является смещенной, то есть ключи, которые ближе к 1, скорее всего, будут отсортированы раньше, что приводит к высококачественным решениям [30].
 10. **Cheapest Insertion (CI)** — алгоритм, основанный на частичном маршруте, который содержит два города. На каждом шаге алгоритм выбирает город, который еще не включен в маршрут, и вставляет его в маршрут таким образом,

чтобы минимизировать увеличение длины маршрута. Алгоритм продолжается до тех пор, пока все города не будут включены в маршрут. Cheapest Insertion имеет временную сложность $O(n^2)$, где n — количество городов [53].

11. **Christofides (Chris)** — алгоритм, основанный на комбинации минимального охватывающего дерева и идеального соответствия. Christofides Algorithm имеет наихудшую временную сложность $O(n^3)$, где n — количество городов. Алгоритм гарантированно выдает маршрут, который максимум в 1,5 раза длиннее оптимального маршрута, что делает его одним из самых эффективных эвристических алгоритмов для TSP [31, 41, 61].
12. **Clarke and Wright Savings (CWS)** — жадный алгоритм для решения задачи коммивояжера. Clarke and Wright (Savings Heuristic) имеет временную сложность $O(n^2 \log n)$, где n — количество городов. Алгоритм может находить качественные решения для небольших и средних экземпляров TSP и часто используется в качестве отправной точки для более продвинутых эвристических алгоритмов [17].
13. **Concave Hull (Conc H)** — алгоритм, не предназначенный специально для решения задачи коммивояжера, но это полезный алгоритм для нахождения вогнутой оболочки набора точек в двумерном пространстве. Concave Hull Algorithm имеет временную сложность $O(n \log n)$, где n — количество точек [36, 47].
14. **Convex Hull (Conv H)** — алгоритм, не предназначенный специально для решения задачи коммивояжера, но полезный для нахождения выпуклой оболочки множества точек в двумерном пространстве. Convex Hull Algorithm имеет временную сложность $O(n \log n)$, где n — количество точек [39].
15. **Elastic Net (EN)** — алгоритм машинного обучения, который сочетает методы регуляризации $L1$ и $L2$ для достижения баланса между разреженностью и корреляцией при выборе признаков. Он не был специально разработан для решения задачи коммивояжера, но был применен к TSP в качестве эвристического алгоритма оптимизации [22].
16. **Extremal Optimization (EO)** — алгоритм, основанный на концепции самоорганизованной критичности, когда система развивается в направлении критического состояния, при котором ландшафт оптимизации становится более доступным [13, 59].
17. **Farthest Insertion (FI)** — конструктивный эвристический алгоритм для решения задачи коммивояжера. Принадлежит к семейству алгоритмов вставки,

которые начинаются с частичного маршрута и итеративно вставляют оставшиеся города в маршрут для создания полного маршрута. Алгоритм Farthest Insertion имеет наихудшую временную сложность $O(n^2)$, где n — количество городов, поскольку ему необходимо вычислить расстояние между каждой парой городов, чтобы выбрать самый дальний город [54].

18. **Genetic** — метаэвристический алгоритм оптимизации, основанный на принципах естественного отбора и генетики [51, 57].
19. **Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP)** — многозадачный алгоритм, который сочетает жадную конструктивную эвристику с методами локального поиска [24, 49].
20. **Greedy Karp-Steele Patching (GKSP)** — улучшение традиционного жадного алгоритма [26].
21. **Guided Search (GS)** — конструктивный алгоритм, который строит решение постепенно, выбирая лучший следующий ход на основе жадного критерия, но с некоторой рандомизацией, позволяющей исследовать различные пространства поиска [16].
22. **Hopfield Network (HN)** — алгоритм на основе нейронной сети, который может быть использован для решения задач оптимизации, включая задачу коммивояжера. Алгоритм основан на сети взаимосвязанных вычислительных блоков (нейронов), где каждый нейрон соответствует городу в TSP, а связи между нейронами представляют собой расстояния между городами [43, 44].
23. **Iterated Search (IS)** — алгоритм, основная идея которого заключается в том, чтобы начать с текущего решения, а затем применить процедуру поиска для его улучшения. Этот процесс повторяется несколько раз, каждый раз начиная с наилучшего решения, найденного на данный момент. Процедуры поиска, используемые на каждой итерации, могут быть одинаковыми или разными и выбираются с учетом их сильных и слабых сторон [18, 23].
24. **Karp-Steele Patching (KSP)** — алгоритм, который начинается с выбора текущего города в качестве начальной точки для гамильтонова цикла. Затем он итеративно добавляет в цикл новые города, по одному за раз, на основе набора правил. Правила разработаны таким образом, чтобы гарантировать, что результирующий гамильтонов цикл выполним и имеет низкую стоимость [42].
25. **Multifragment Heuristic (MH)** — алгоритм, который начинается с разделения экземпляра TSP на несколько более мелких подзадач, каждая из которых состоит из подмножества городов. Подзадачи могут быть созданы на основе

различных критериев, таких как расстояние, связность или кластеризация городов [38].

26. **Nearest Insertion (NI)** — алгоритм, который работает, начиная с текущего маршрута, включающего два города, а затем итеративно добавляя к маршруту новые города таким образом, чтобы минимизировать общую продолжительность маршрута [7, 54].
27. **Nearest Neighbour (NN)** — алгоритм, который работает, начиная с произвольного города, а затем многократно выбирая ближайший непосещенный город, пока все города не будут посещены, что приводит к полному гамильтонову циклу, который посещает каждый город ровно один раз [32, 56].
28. **Random Insertion (RI)** — алгоритм, который начинается с выбора произвольного начального города, а затем добавления в маршрут города, который находится ближе всего к начальному городу. Следующий добавляемый город выбирается случайным образом из набора непосещенных городов и вставляется в маршрут в случайном месте, которое минимизирует увеличение общей длины маршрута [7, 54].
29. **Random Tour (RT)** — алгоритм, который работает, генерируя случайный гамильтонов цикл, который посещает каждый город ровно один раз, а затем итеративно улучшает маршрут, меняя местами пары городов, чтобы уменьшить общую длину маршрута [11].
30. **Scatter Search (SS)** — алгоритм, который начинается с создания начальной совокупности возможных решений с использованием эвристики построения, такой как ближайший сосед или случайная вставка. Затем эта популяция делится на несколько подгрупп, каждая из которых оптимизируется с использованием метода локального поиска, такого как алгоритм 2-opt или алгоритм 3-opt. Лучшие решения из каждой подгруппы объединяются для создания разнообразного набора решений-кандидатов, которые дополнительно оптимизируются с использованием метода локального поиска [14, 28, 29, 40].
31. **Self Organizing Maps (SOM)** — алгоритм нейронной сети, во время каждой итерации которого случайным образом выбирается город и находится ближайшая к нему ячейка сетки. Затем алгоритм обновляет позиции городов в соседних ячейках сетки, используя определенную функцию соседства. Функция соседства является убывающей функцией расстояния, что позволяет алгоритму эффективно исследовать пространство решений [20].

32. **Space Filling Curve Hilbert (SFCH)** — алгоритм, использующий кривую заполнения пространства для сведения проблемы поиска оптимального маршрута к проблеме упорядочения городов на кривой. Кривая Гильберта представляет собой фрактальную кривую, заполняющую квадрат. Преимущество этого алгоритма в том, что его относительно легко реализовать, и он может обрабатывать большие экземпляры TSP с тысячами городов [50].
33. **Space Filling Curve Morton (SFCM)** — алгоритм, использующий кривую заполнения пространства, чтобы свести проблему поиска оптимального маршрута к проблеме упорядочения городов на кривой. Кривая Мортон — это тип кривой, заполняющей пространство, которая отображает двумерное пространство в одномерную кривую. Кривая строится путем чередования двоичных представлений координат x и y точек [48].
34. **Space Filling Curve Sierpinski (SFCS)** — использует кривую заполнения пространства для сведения проблемы поиска оптимального маршрута к проблеме упорядочения городов на кривой. Кривая Серпинского — это тип фрактальной кривой, которая начинается с треугольника и рекурсивно подразделяет его на более мелкие треугольники. Кривая строится путем посещения вершин треугольников в определенном порядке [10].
35. **Stochastic Hill Climbing (SHC)** — алгоритм, который начинается со случайного текущего решения и итеративно улучшает его, внося небольшие случайные изменения в решение и принимая изменение, если оно приводит к лучшему решению. Случайные изменения могут включать замену двух городов местами, изменение порядка подмножества городов или другие возмущения [55].
36. **Sweep** — конструктивный алгоритм, который начинается с выбора «центральной» точки в экземпляре TSP, например, геометрического центра, а затем сортирует города в полярных координатах относительно этой точки. Алгоритм строит маршрут, соединяя города в отсортированном порядке [9, 12].
37. **Tabu Search (TS)** — алгоритм, основанный на идее краткосрочных жертв ради достижения долгосрочных выгод. Tabu Search поддерживает структуру памяти, называемую «списком запретов», которая отслеживает недавно посещенные решения и предотвращает их повторное посещение алгоритмом. Алгоритм начинается с текущего решения, которое может быть сгенерировано с использованием различных методов, таких как Nearest Neighbour или Random Insertion. Затем алгоритм выполняет серию итераций локального поиска, в которых он исследует окрестности текущего решения, внося небольшие изменения, такие как замена двух городов или вставка города между двумя другими.

Алгоритм оценивает новые решения, созданные этими модификациями, и выбирает лучшее из них для перехода [27, 37].

38. **Truncated Branch and Bound (TBB)** — алгоритм для TSP, основанный на методе ветвей и границ, который исследует пространство решений, разветвляясь на подмножества городов и ограничивая поиск, отбрасывая частичные решения, которые не могут привести к оптимальным решениям. Основная идея TBB состоит в том, чтобы использовать ограничение по времени для контроля количества ветвлений и ограничений. То есть вместо того, чтобы исследовать все дерево поиска, алгоритм останавливается через заданное время и возвращает лучшее решение, найденное на данный момент. Таким образом, TBB может обрабатывать крупные экземпляры TSP [8].
39. **Twice-Around the Tree Algorithm (TAT)** — эвристический алгоритм, основанный на поиске минимального остовного дерева входного графа и последующем обходе дерева дважды для формирования маршрута. Алгоритм имеет временную сложность $O(n \log n)$ для построения минимального остовного дерева и $O(n)$ для его обхода, где n — количество вершин в графе [15].
40. **Variable Neighborhood Search (VNS)** — алгоритм, который начинает работу с текущего решения (например, случайно сгенерированного маршрута), а затем выполняет локальный поиск по этому решению. Если локальный поиск не дает улучшенного решения, алгоритм переходит к новому решению в другом районе (например, путем изменения порядка подмножества городов в маршруте). Затем снова выполняется локальный поиск нового решения, и процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено удовлетворительное решение или пока не будет выполнен какой-либо критерий завершения (например, достигнуто максимальное количество итераций) [46].

1.3. Метрические характеристики графа. Метрические характеристики графа представляют собой количественные показатели, используемые для измерения и анализа свойств графа. Они предоставляют информацию о расстояниях и связях между вершинами графа.

Метрические характеристики графа играют важную роль в анализе и сравнении различных типов графов, а также в решении различных задач, связанных с сетями, маршрутизацией и оптимизацией. Они позволяют качественно описывать и изучать структуру и свойства графа, что способствует лучшему пониманию его характеристик и поведения. Близкие графы обеспечивают близость задач TSP и выбор алгоритмов.

Понятие метаданные можно рассматривать как «данные о данных, которые вычисляются на основе данных». Они могут включать такую информацию, как размер или плотность графа, распределение степеней или показатели центральности узлов, коэффициент кластеризации или модульность структуры сообщества, а также любые другие сводные статистические данные или метрики, которые отражают важные свойства графа.

Список извлекаемых метрических данных приведен в таблице 1.

Таблица 1. Метрические характеристики графа

Название метрики	Значение
is_directed	является ли граф направленным
is_regular	является ли граф регулярным
has_bridges	наличие в графе мостов
is_chordal	является ли граф хордовым
diameter	диаметр графа
radius	радиус графа
nodes	количество вершин
edges	количество ребер
count_max_cliques	количество максимальных клик
max_weight_clique	вес максимальной клики
density	плотность графа
node_connectivity	параметр связности узлов
count_triangles	количество триангуляций
number_of_isolates	количество изолированных вершин
s_metric	s-метрика графа

Вычисленные метаданные могут быть полезны для нескольких целей, таких как:

- характеристика глобальных свойств и структуры графа. Вычисленные метаданные могут дать представление об общей топологии и поведении графа, а также помочь выявить любые закономерности или аномалии, которые могут иметь отношение к анализу;
- сравнение графов или графовых алгоритмов. Вычисленные метаданные могут быть использованы для сравнения производительности или эффективности графовых алгоритмов или моделей на тестовых наборах данных, а также для определения того, какие из них больше подходят для данной задачи или приложения;
- руководство по выбору параметров или моделей для анализа графов. Вычисленные метаданные могут служить руководством при выборе подходящих параметров или моделей для анализа графов, выделяя соответствующие аспекты графа, которые необходимо принимать во внимание.

Некоторые примеры вычисляемых метаданных в анализе графов включают:

- распределение степеней. Распределение степеней графа представляет собой гистограмму количества узлов с каждой степенью и может дать представление о связности и неоднородности сети;
- меры центральности. Такие показатели центральности, как центральность между узлами, центральность близости или центральность собственного вектора, могут дать представление о важности или влиянии узлов в графе;
- структура сообщества. Алгоритмы обнаружения сообществ могут определить группы узлов, которые плотно связаны между собой, но слабо связаны с другими группами, и выявить модульную или иерархическую структуру графа.

Вычисленные метаданные графа являются источником информации для его анализа, помогают обнаружить скрытые закономерности и структуры в сложных сетях.

Алгоритм 1. Алгоритм подсчета статистики распределения весов в графе

Вход: Список точек на плоскости (*Points*), пользовательские параметры (*split_parts* – количество диапазонов для подсчета статистики).

Выход: Объект типа $\{ "statistic" "min_distance" "max_distance" "step" \}$, где *statistic* – список из *split_parts* элементов, в котором каждый элемент соответствует количеству весов, попавших в данный диапазон. *min_distance* – минимальный вес, *max_distance* – максимальный вес, *step* – шаг, на который отличаются диапазоны.

1. Инициализировать переменные $min_distance = inf$, $max_distance = -inf$, $statistic = [0_1, 0_2, \dots, 0_{split_parts}]$.
2. Для каждой точки получить ее индекс в *Points*.
3. Для каждой точки получить ее индекс *point1_index* в *Points*.
 - а) Для каждой точки, начиная с индекса *point1_index* + 1, получить ее индекс *point2_index* в *Points*.
 - (i) Вычислить расстояние *distance* между точками с индексами *point1_index* и *point2_index*.
 - (ii) Если полученное расстояние больше, чем *max_distance*
(A) Присвоить $max_distance = distance$.
 - (iii) Если полученное расстояние меньше, чем *min_distance*
(A) Присвоить $min_distance = distance$.
4. Вычислить шаг по формуле $step = (max_distance - min_distance) / split_parts$.
5. Для каждой точки получить ее индекс *point1_index* в *Points*.
 - а) Для каждой точки, начиная с индекса *point1_index* + 1, получить ее индекс *point2_index* в *Points*.
 - (i) Вычислить расстояние *distance* между точками с индексами *point1_index* и *point2_index*.

- (ii) Вычислить индекс диапазона, в который попадает вес $index = distance // step$ (где $//$ – операция деления нацело).
 - (iii) Увеличить количество весов в диапазоне по индексу $statistic[index] + 1$.
6. Вернуть объект типа $\{statistic, min_distance, max_distance, step\}$.

В алгоритме 1 умышлено применяется дублирование кода обхода всех вершин графа в п. 3 и 5. Этого можно было избежать путем добавления вспомогательного массива весов, но в этом случае увеличивается нагрузка на оперативную память при вычислении статистики распределения весов в полносвязных графах, содержащих более 100000 вершин. Например, для 100000 вершин записей во вспомогательном массиве весов будет $100000 \cdot (100000 - 1) / 2 = 4999950000$. Поэтому было принято решение повысить нагрузку на процессор и снизить нагрузку на оперативную память.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

В результате численных экспериментов сформирована таблица работы 39 метаэвристических алгоритмов для графов из TSPLIB. В колонке «ВК» находится лучшее известное решение для конкретного набора данных на данный момент. Из таблицы видно, что разброс решений, полученных каждым из алгоритмов, не очень большой. В конкретных случаях можно выделить фаворита. То есть для определенного набора данных один из алгоритмов дает лучшее решение среди остальных.

Если считать, что выбор алгоритма зависит от структуры графа и его метаданных, то можно создать систему, которая будет определять близость нового, еще не посчитанного набора данных с уже посчитанным и рекомендовать композицию алгоритмов для, предположительно, лучшего решения. В случае, когда алгоритм не смог найти решение в связи с достижением пределов допустимой памяти или другими ограничениями, в найденное расстояние устанавливается значение 0 и считается, что данный алгоритм не применим к такой структуре данных. Приведем некоторые результаты расчетов.

Таблица 2. Результаты расчетов метаэвристик

№	Graph	BK	ACO	2-opt	2-opt-s	2h-opt	2h-opt-s	3-opt	3-opt-s	BRKGA
1	eil51	426.0	429.53	447.75	462.18	447.59	441.65	444.24	459.44	437.44
2	berlin52	7542.0	7544.36	8167.56	8383.20	7544.36	7606.94	8238.29	7834.97	7979.28
3	st70	675.0	677.19	730.12	722.74	732.07	713.28	704.45	721.40	733.48
4	pr76	108159.0	108276.70	112729.20	112780.22	112850.22	111303.44	115021.33	111483.65	113384.60
5	eil76	538.0	559.89	590.68	584.89	577.19	568.97	584.91	578.71	569.48
6	gr96	513.0	517.97	545.84	575.84	526.26	529.42	530.06	575.34	569.78
7	rat99	1211.0	1239.79	1299.92	1399.72	1321.66	1296.95	1360.37	1342.51	1295.77
8	rd100	7910.0	8004.78	8683.90	8754.32	8563.66	8354.23	8469.93	8791.99	8400.92
9	kroB100	22141.0	22276.46	23942.18	24011.29	23095.20	24243.62	22998.08	23169.84	24057.63
10	kroD100	21294.0	21637.25	21731.16	24008.92	22316.84	22419.64	21756.90	22843.45	23101.22
11	kroA100	21282.0	21298.97	22559.31	25493.61	22019.61	22127.75	22862.20	23135.99	22387.36
12	kroC100	20749.0	20869.58	22031.61	23347.89	22683.12	22164.09	21584.71	21869.79	22348.93
13	kroE100	22068.0	22284.07	24315.47	23596.70	22870.31	23280.25	23624.86	24257.74	22344.01
14	eil101	629.0	659.44	686.87	694.80	675.00	698.06	689.18	699.15	670.39
15	lin105	14379.0	14382.99	14996.22	15676.55	15200.16	15156.76	16523.81	15218.50	15024.53
16	pr107	44303.0	44346.18	47131.45	52111.44	47254.60	46028.45	44634.43	47269.51	49449.20
17	pr124	59030.0	59208.55	66851.30	70866.02	61319.06	60370.74	61118.96	64272.20	60290.45
18	bier127	118282.0	119302.01	128625.53	129316.30	124153.88	128362.69	122248.22	124259.82	125811.42
19	ch130	6110.0	6255.06	6506.12	7242.88	6494.04	6389.63	6435.45	6859.48	6488.68
20	pr136	96772.0	98203.23	102043.55	112530.64	101719.29	100062.18	102991.44	107814.45	106079.00
21	gr137	706.0	710.27	780.10	856.05	749.59	779.91	757.46	774.83	736.27
22	pr144	58537.0	58535.22	62981.24	72809.04	65040.18	61754.71	58604.90	67500.88	63246.04

Таблица 2 (продолжение). Результаты расчетов метаэвристик

№	CI	Chris	CWS	SFCM	Concave	Convex	EN	EO	FI	Genetic
1	445.29	443.96	457.91	468.69	441.23	441.23	443.14	474.42	433.71	429.53
2	8215.84	7868.36	8092.39	8089.82	8325.96	7544.36	7544.36	8529.12	7777.33	7544.36
3	682.64	696.19	721.08	701.03	695.54	701.95	689.07	752.54	677.19	690.63
4	113347.92	113744.39	115002.74	111253.88	111159.94	109989.10	111989.11	109446.59	108663.45	110703.54
5	587.61	570.35	585.55	588.24	566.01	566.01	570.20	598.17	556.02	566.02
6	527.74	0.0	569.75	570.68	517.49	517.49	536.73	548.52	513.85	534.11
7	1297.74	1303.40	1293.98	1299.76	1281.05	1252.56	1289.19	1318.65	1232.64	1281.94
8	8022.96	8336.74	8814.33	8362.28	8167.40	8173.48	8168.96	9113.01	8113.10	8268.31
9	24201.45	22994.26	23943.54	23895.26	22407.52	22570.54	23493.49	24717.16	22349.21	22326.01
10	22147.91	21726.74	22799.43	22410.31	21777.24	21728.54	22876.70	24283.54	21523.83	21778.30
11	22469.81	22126.62	22254.16	22123.04	21481.30	21481.30	22424.90	25419.88	21452.06	21381.83
12	21398.81	21321.74	22030.40	21734.51	21109.46	21081.31	21868.09	24131.50	21043.72	21268.11
13	23577.71	22794.99	23444.14	23704.72	22912.52	22779.45	22546.78	23004.48	22463.79	22423.36
14	669.16	664.48	706.83	693.92	656.47	656.47	658.41	710.69	657.78	650.79
15	14796.39	15014.92	15126.60	14464.91	0.0	14975.80	15067.68	17264.39	14439.70	14931.06
16	45768.42	45317.79	47389.63	49952.99	0.0	49295.19	46642.07	50323.09	45023.63	44620.66
17	60257.65	59570.32	60106.74	60601.53	0.0	60388.39	61775.50	70638.64	59030.73	60088.84
18	130620.10	122143.48	124886.48	128737.41	122893.60	122893.60	122794.91	126082.84	119336.12	123941.64
19	6502.18	0.0	6528.89	6510.52	6502.65	6630.58	6317.33	7101.52	6224.74	6344.00
20	100706.58	98905.33	104853.73	108161.83	0.0	102780.48	101517.94	112089.26	98235.27	99807.24
21	787.41	0.0	737.02	780.01	722.77	722.77	782.29	805.49	708.67	733.05
22	59736.47	58810.93	60745.01	63913.49	0.0	60639.49	60335.09	72120.51	58880.62	58587.14

Оценка работы алгоритмов приведена на рис. 2, 3 для каждого из наборов данных. Здесь отображена относительная оценка по полученным решениям: $\delta(d) = (d - d^*)/d^*$, где d – результат расчетов из таблицы 2, d^* – лучшее значение.

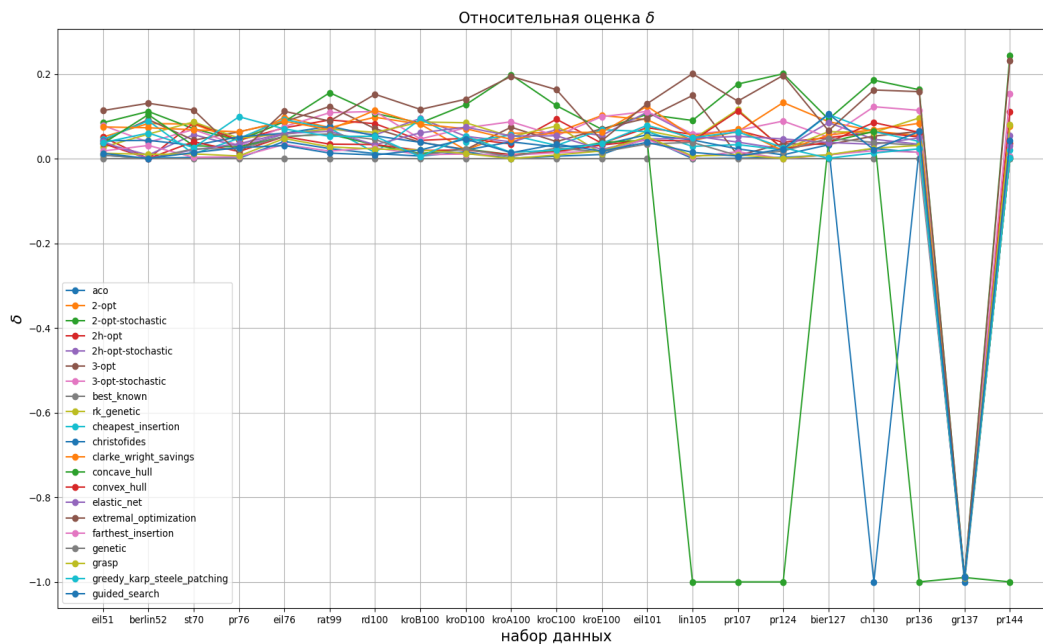


Рис. 2. Результаты работы алгоритмов

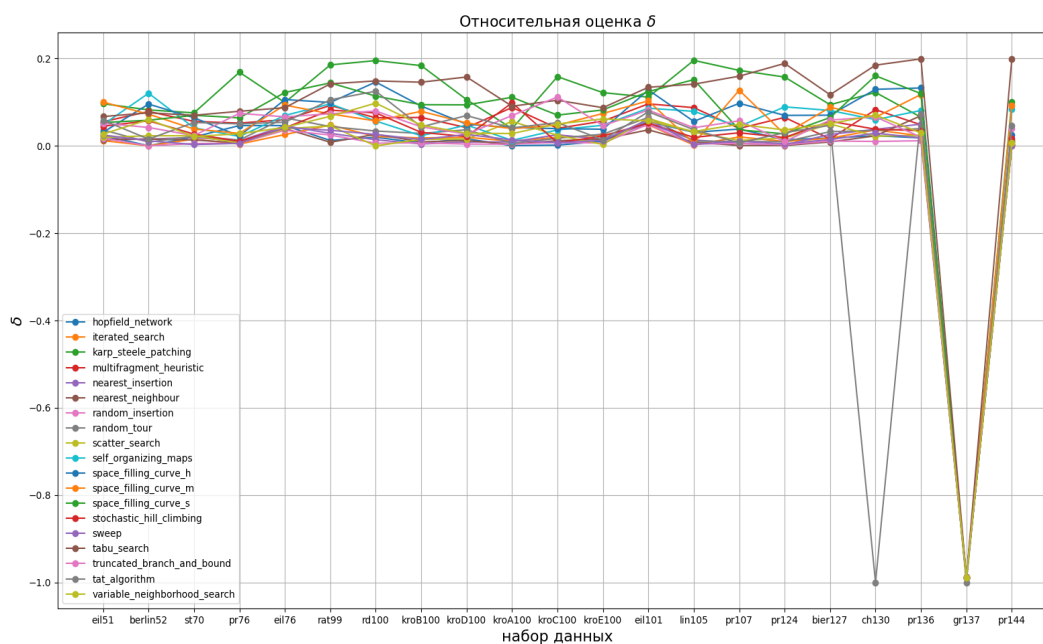


Рис. 3. Результаты работы алгоритмов

Предполагается, что лучшее известное решение меньше либо равно любому найденному в процессе эксперимента. Но если какой-либо алгоритм улучшит известное

решение, то это будет заметно на графике, так как значение относительной оценки станет отрицательным. Таким образом, чем точка ближе к нулю, тем оптимальнее решение было найдено. Значения, равные -1 отражают 0 из таблицы значений, что соответствует случаю, когда решение алгоритмом не найдено.

Таблица 3. Алгоритм, показавший лучший результат на графе

Algorithm	with best solution
ACO	eil51, berlin52, pr76
Chris	gr96, ch130, gr137
Concave Hull	lin105, pr107, pr124, pr136, pr144
Genetic	eil101
GRASP	kroA100
Greedy Karp-Steele Patching	bier127
Hopfield Network	kroC100
Iterated Search	eil76
Nearest Insertion	kroB100
Nearest Neighbour	rat99
Random Insertion	kroD100
Scatter Search	rd100, kroE100
Sweep	st70

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе произведен численный эксперимент по решению TSP с использованием различных метаэвристик на множестве данных из библиотеки TSPLIB с целью определения наиболее эффективных методов для нахождения оптимальных маршрутов.

Результаты эксперимента показали, что все примененные метаэвристики способны найти приближенные или оптимальные решения задачи коммивояжера на различных наборах данных. Однако, в зависимости от характеристик задачи, некоторые методы проявили себя более эффективными, чем другие.

Исследование алгоритмов показало, что некоторые алгоритмы показывают лучший результат на нескольких тестовых множествах. Количество лучших решений в процентном соотношении от всех тестовых данных такой: Concave Hull 22%, ACO 12%, Christofides 12%, Scatter Search 9%, Sweep 5%, Iterated Search 5%, Nearest Neighbour 5%, Nearest Insertion 5%, Random Insertion 5%, GRASP 5%, Hopfield Network 5%, Genetic 5%, Greedy Karp-Steele Patching 5%.

Приведен список лучших алгоритмов, а также количество раз, когда конкретный алгоритм показывал лучшее решение среди остальных. Можно сделать вывод, что Concave_hull выдал лучшие результаты в 5 тестовых примерах из всей выборки, также хорошие результаты показали ACO и Christofides. На основе этих данных планируется сформировать зависимость метаданных графа от результатов работы алгоритмов и построить интеллектуальную систему по подбору метаэвристик.

Основываясь на результатах, рекомендуется выбирать метаэвристику в зависимости от особенностей задачи маршрутизации коммивояжера. Необходимо учитывать количество городов, географические и инфраструктурные характеристики, требования к точности решения и время выполнения. Комбинирование различных метаэвристик может привести к получению существенно лучших результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Германчук М.С. Знаниеориентированные модели многоагентной маршрутизации. — дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — ВГУ, Воронеж, 2022 - 150 с.
Germanchuk M.S. Knowledge-oriented multi-agent routing models. - dis. phd Phys.-Math. Sciences: 05.13.18. - VSU, Voronezh, 2022 - 150 p.
2. Козлова М. Г., Лукьяненко В. А., Макаров О. О., Германчук М. С. Кластеризация сети с иерархической структурой в задаче многоагентной маршрутизации // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 г. — Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2023. — С. 445-452.
Kozlova M. G., Lukyanenko V. A., Makarov O. O., Germanchuk M. S. Network clustering with a hierarchical structure in the problem of multi-agent routing // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics: collection of proceedings of the International Scientific Conference, Voronezh , December 12–14, 2022 — Voronezh: Scientific Research Publications Publishing House, 2023. — P. 445-452.
3. Козлова М.Г., Лукьяненко В.А., Макаров О.О., Матковский В. А. Разработка алгоритмов многоагентной иерархической маршрутизации // Управление большими системами. Труды XVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Южно-Уральский государственный университет Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, 2022. — С. 469-475.
Kozlova M.G., Lukyanenko V.A., Makarov O.O., Matkovsky V.A. Development of algorithms for multi-agent hierarchical routing // Management of large systems. Proceedings of the XVIII All-Russian School-Conference of Young Scientists. Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation South Ural State University Institute of Management Problems. V.A. Trapeznikova of the Russian Academy of Sciences, 2022. — P. 469-475.

4. Муравник А.Б., Данильченко М.Н. Нейросетевой подход к построению маршрута в автоматизированной системе управления специального назначения. — М. Н. Данильченко, А. Б. Муравник. — Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. — 2021. — Т. 13, № 1. — С. 58–66.

Muravnik A.B., Danilchenko M.N. Neural network approach to building a route in an automated control system for special purposes. — M. N. Danilchenko, A. B. Muravnik. — High technologies in space researches of the Earth. — 2021. — V. 13, No. 1. — S. 58-66.

5. Муравник А.Б. Функции Ляпунова в задаче нейросетевого моделирования: сравнительный анализ. — Радиолокация, навигация, связь: сб. трудов XXVI Международной научно-технической конференции (г. Воронеж 29 сентября - 1 октября 2020 г., в 6 т. / Воронежский государственный университет; Воронеж : Изд. Дом ВГУ. — 2020. — С. 49–55.

Muravnik A.B. Lyapunov functions in the problem of neural network modeling: a comparative analysis. — Radar, navigation, communications: Sat. Proceedings of the XXVI International Scientific and Technical Conference (Voronezh, September 29 - October 1, 2020, in 6 volumes / Voronezh State University; Voronezh: Publishing House of VSU. — 2020. — P. 49-55.

6. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы // Exponenta Pro. Математика в приложениях, 2003. — № 4, С. 70-75.

Shtovba S.D. Ant algorithms // Exponenta Pro. Mathematics in Applications, 2003. — No. 4, pp. 70-75.

7. Alipour, Mir Mohammad & Razavi, Seyed Naser. A new local search heuristic based on nearest insertion into the convex hull for solving Euclidean TSP. — International Journal of Operational Research, 2019. — Chapter 34, 409.
8. Archit Rastogi, Ankur Kumar Shrivastava, Nitisha Payal and Ramander Singh. A Proposed Solution to Travelling Salesman Problem using Branch and Bound. — International Journal of Computer Applications, 2013. — V. 65(5), P. 44-49.
9. Arit Thammano, Petcharat Rungwachira. Hybrid modified ant system with sweep algorithm and path relinking for the capacitated vehicle routing problem. — Heliyon, 2021. — V. 7, Issue 9.
10. Bartholdi, John. A routing system based on spacefilling curves. — Georgia Institute of, 1995.
11. Basel, J., Willemain, T.R. Random Tours in the Traveling Salesman Problem: Analysis and Application. — Computational Optimization and Applications, 2001. — V. 20, P. 211-217.

12. Billy E. Gillett, Leland R. Miller. A Heuristic Algorithm for the Vehicle-Dispatch Problem. — *Operations Research*, 1974. — P. 340-349.
13. Boettcher, Stefan; Percus, Allon G. Optimization with Extremal Dynamics. — *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), 2001. — V. 86, N 23, P. 5211-5214.
14. Bouridah A. and Belhadef H. A scatter search algorithm to configure service function chaining. — *International Journal of Internet Technology and Secured Transactions*, 2020. — V. 10, N 6, P. 654-674.
15. Christos H Papadimitriou, Umesh V Vazirani. On two geometric problems related to the travelling salesman problem. — *Journal of Algorithms*, 1984. — V. 5, Issue 2, P. 231-246.
16. Christos Voudouris, Edward Tsang. Guided local search and its application to the traveling salesman problem. — *European Journal of Operational Research*, 1999. — V. 113, Issue 2, P. 469-499.
17. Clarke G., Wright J. W.. Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. — *Operations Research*, 1964. — V. 12(4), P. 568-581.
18. Claudia Archetti, Dominique Feillet, Andrea Mor, M. Grazia Speranza. An iterated local search for the Traveling Salesman Problem with release dates and completion time minimization. — *Computers & Operations Research*, 2018. — V. 98, P. 24-37.
19. Croes, G. A. A Method for Solving Traveling-Salesman Problems. — *Operations Research*, 1958. — V. 6, N 6, P. 791-812.
20. Dantas, Joao & Costa, Andre & Maximo, Marcos & Yoneyama, Takashi. Enhanced Self-Organizing Map Solution for the Traveling Salesman Problem. — In: *Encontro Nacional de Inteligencia Artificial e Computacional (ENIAC)*, 2021. — V. 18, P. 799-802.
21. Dorigo M. and Gambardella L. M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. — in *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1997. — V. 1, N 1, P. 53-66.
22. Durbin, R., Willshaw, D. An analogue approach to the travelling salesman problem using an elastic net method. — *Nature*, 1987. — V. 326, P. 689-691.
23. Eric B. Baum. Towards practical 'neural' computation for combinatorial optimization problems. — *AIP Conference Proceedings*, 1986. — V. 151, P. 53-58.
24. Feo, T.A., Resende, M.G.C. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. — *Journal of Global Optimization*, 1995. — V. 6, P. 109-133.
25. Francesca Maggioni, Guido Perboli, Roberto Tadei. The Multi-path Traveling Salesman Problem with Stochastic Travel Costs: Building Realistic Instances for City

- Logistics Applications. — Transportation Research Procedia, 2014. — V. 3, P. 528-536.
26. Fred Glover, Gregory Gutin, Anders Yeo, Alexey Zverovich. Construction heuristics for the asymmetric TSP. — European Journal of Operational Research, 2001. — V. 129, Issue 3, P. 555-568.
 27. Fred Glover. Tabu Search—Part I. — ORSA Journal on Computing, 1989. — V. 1(3), P. 190-206.
 28. Ge J., Liu X., Liang G. Research on vehicle routing problem with soft time windows based on hybrid tabu search and scatter search algorithm. — Computers, Materials & Continua, 2020. — V. 64, N 3, P. 1945-1958.
 29. Glover, F. Heuristics for integer programming using surrogate constraints. — Decision Sciences, 1977. — V. 8, P. 156-166.
 30. Goncalves, J.F., Resende, M.G.C. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. — J Heuristics, 2011. — V. 17, P. 487-525.
 31. Goodrich M. T. and Tamassia R. The christofides approximation algorithm. — Algorithm Design and Applications, Wiley, 2015. — P. 513-514.
 32. Gregory Gutin, Anders Yeo, Alexey Zverovich. Traveling salesman should not be greedy: domination analysis of greedy-type heuristics for the TSP. — Discrete Applied Mathematics, 2002. — V. 117, Issues 1-3, P. 81-86.
 33. Hosseinabadi A.A., Kardgar M., Shojafar M., Shamshirband S., Abraham A. GELSGA: Hybrid metaheuristic algorithm for solving Multiple Travelling Salesman Problem. — 14th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications, 2014. — P. 76-81.
 34. Hu Yun Duan, Qianqian Solving the TSP by the AALHNN algorithm. — Mathematical biosciences and Engineering, 2022. — V. 19(4), P. 3427-3448.
 35. Kang M., Yun S., Woo H., Kang M. Accelerated bregman method for linearly constrained $\ell_1 - \ell_2$ minimization. — J. Sci. Comput., 2013. — P. 515-534.
 36. Ihsan Kilic, K., Mostarda, L. Novel. Concave Hull-Based Heuristic Algorithm For TSP. — Operations Research Forum, 2022. — V. 3, 25.
 37. John Knox. Tabu search performance on the symmetric traveling salesman problem. — Computers & Operations Research, 1994. — V. 21, Issue 8, P. 867-876.
 38. Johnson, David S. and Lyle A. McGeoch. The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization. — 2008.
 39. Kai A. and Mingrui X. A Simple Algorithm for Solving Travelling Salesman Problem. — Proceedings of the 2012 Second International Conference on Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control, Harbin, China, 2012. — P. 931-935.

40. Kalra, Minakshi & Tyagi, Shobhit & Chahar, Vijay & Kaur, Manjit & Mashwani, Wali & Shah, Habib & Shah, Kamal. A Comprehensive Review on Scatter Search: Techniques, Applications, and Challenges. — Mathematical Problems in Engineering, 2021.
41. Karlin, A., Klein, N., and Oveis Gharan, S. A (slightly) improved approximation algorithm for metric TSP. — Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, 2021. — P. 32-45.
42. Karp, Richard M. A Patching Algorithm for the Nonsymmetric Traveling-Salesman Problem. — SIAM J. Comput, 1979. — V. 8, P. 561-573.
43. Luo, Y. Design and Improvement of Hopfield network for TSP. — Proceedings of the 2019 International Conference on Artificial Intelligence and Computer Science, 2019. — P. 79-83.
44. Mandziuk, Jacek. Solving the travelling salesman problem with a hopfield-type neural network. — Demonstratio Mathematica, 1996. — V. 29, N 1, P. 219-232.
45. Misevicius, Alfonsas. Combining 2-OPT, 3-OPT and 4-OPT with K-SWAP-KICK perturbations for the traveling salesman problem. — Conference: 17th International Conference on Information and Software TechnologiesAt: Kaunas, 2011.
46. Mladenovic N., Hansen P. Variable neighborhood search. — Computers & Operations Research, 1997. — V. 24, Issue 11, P. 1097-1100.
47. Moreira, Adriano & Santos, Maribel. Concave hull: A k-nearest neighbours approach for the computation of the region occupied by a set of points. — Conference: GRAPP 2007, Proceedings of the Second International Conference on Computer Graphics Theory and Applications, Barcelona, Spain, 2007. — P. 61-68.
48. Morton, Guy. A Computer Oriented Geodetic Data Base and a New Technique in File Sequencing. — International Business Machines Company, 1966. — P. 32.
49. Neuenfeldt Junior, Alvaro & Guimaraes, Lucas. A greedy randomized adaptive search procedure application to solve the travelling salesman problem. — International Journal of Industrial Engineering and Management, 2019. — V. 10, N 3, P. 238-242.
50. Norman, M.G., & Moscato, P. The euclidean traveling salesman problem and a space-filling curve. — Chaos Solitons & Fractals, 1995. — V. 6, P. 389-397.
51. Potvin, JY. Genetic algorithms for the traveling salesman problem. — Annals of Operations Research, 1996. — V. 63, P. 337-370.
52. Rafal Skinderowicz. Improving Ant Colony Optimization efficiency for solving large TSP instances. — Applied Soft Computing, 2022. — V. 120.
53. Rosenkrantz, D.J., Stearns, R.E., Lewis, P.M. An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem. — In: Ravi, S.S., Shukla, S.K. (eds) Fundamental Problems

- in Computing. Springer, Dordrecht, 2009.
54. Rosenkrantz, Daniel & Stearns, Richard & II, Philip. An Analysis of Several Heuristics for the Traveling Salesman Problem. — SIAM J. Comput., 1977. — V. 6, P. 563-581.
 55. Russell S.J. and Russell, S. and Norvig, P. Artificial Intelligence: A Modern Approach. — Pearson series in artificial intelligence, University of California at Berkeley, Published by Pearson, 2020.
 56. Sahin, M. Solving TSP by using combinatorial Bees algorithm with nearest neighbor method. — Neural Comput & Applic, 2023. — V. 35, P. 1863-1879.
 57. Scholz, Jan. Genetic algorithms and the traveling salesman problem a historical review. — Proc. of the MInf Seminar at the Dept. of Computer Science of the Hamburg University of Applied Sciences, 2019.
 58. Stattenberger, G., Dankesreiter, M., Baumgartner, F. et al. On the Neighborhood Structure of the Traveling Salesman Problem Generated by Local Search Moves. — J Stat Phys, 2007. — V. 129, P. 623-648.
 59. Stefan Boettcher, Allon G. Percus. Extremal Optimization: Methods derived from Co-Evolution. — Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, 1999.
 60. Tansel Dokeroglu, Ender Sevin, Tayfun Kucukyilmaz, and Ahmet Cosar. A survey on new generation metaheuristic algorithms. — Comput. Ind. Eng., 2019. — V. 137 (5).
 61. Vera Traub. Improving on Best-of-Many-Christofides for T-tours. — Operations Research Letters, 2020. — V. 48, Issue 6, P. 798-804.
 62. Yao, Xuan-Shi & Ou, Yun & Zhou, Kai-Qing. TSP Solving Utilizing Improved Ant Colony Algorithm. — Journal of Physics: Conference Series, 2021. — V. 2129(1).
 63. Concorde TSP Solver. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html>. — Свободный (дата обращения 11.06.2023).
 64. NetworkX. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://networkx.org> — Свободный (дата обращения 24.05.2023).
 65. pyCombinatorial — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://github.com/Valdecy/pyCombinatorial>. — Свободный (дата обращения 24.05.2023).
 66. Solomon benchmark. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.sintef.no/projectweb/top/vrptw/solomon-benchmark/>. — Свободный (дата обращения 12.05.2023).
 67. TSPLIB. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://comopt.ifl.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/>. — Свободный (дата обращения 24.05.2023).

УДК: 517.547, 517.555

MSC2010: 32A15, 47A16

О ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

© А. И. Рахимова

УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ул. Заки Валиди, 32, УФА, 450076, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *alsu1405@mail.ru*

ON HYPERCYCLIC OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS.

Rakhimova A. I.

Abstract.

In this paper we have studied various hypercyclic operators in the weighted space of entire functions $\mathcal{F}_\varphi$. Hypercyclic operators play an important role in the theory of dynamical systems. Note that questions about hypercyclic operators have been considered in detail only in spaces of entire and analytic functions. And in the weighted spaces of entire functions, such operators are not yet very well studied and provide a large number of research problems.

The space $\mathcal{F}_\varphi$ is defined as follows. Let $\varphi = \{\varphi_m(z)\}_{m=1}^\infty$ — arbitrary family of functions convex in $\mathbb{C}^n$ taking real values and satisfying some conditions on their growth $i_1)–i_4)$. Now for each function we introduce a weighted normed space $\mathcal{F}_m$ consisting of from integer functions in $\mathbb{C}^n$. Let $\mathcal{F}_\varphi$ denote their projective limit. Then it is a Frechet–Schwarz space of type (FS) .

Next for the space $\mathcal{F}_\varphi$ one can find additional conditions on the weight functions, under which it will be invariant under differentiation. It can also be shown that, under the same conditions, it is shift-invariant. Then we can consider the problems of hypercyclicity in it partial differentiation and shift operators, their compositions, convolution operator and operators commuting with differentiation.

Theorem 1 proves hypercyclicity in the space $\mathcal{F}_\varphi$ partial differentiation operator $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in \{1; n\}$ with respect to any of the complex variables.

In Theorem 2 hypercyclicity in this space of a finite sum of such operators was shown $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha D_z^\alpha f$, and in Theorem 3 — their infinite sum $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} c_\alpha D_z^\alpha f$ under certain conditions on the coefficients of the series.

Theorem 4 states that the shift operator by some constant $T_a : f(z) \in \mathcal{F}_\varphi \longrightarrow f(z + a)$, where $a \in \mathbb{C}^n$, and it is not equal to zero, is hypercyclic in $\mathcal{F}_\varphi$.

By Theorem 5 it follows that a continuous linear operator T in the space $\mathcal{F}_\varphi$, which commutes with partial differentiation operators and is not equal to a scalar multiple of the identity mapping, is hypercyclic in the given space.

The following corollaries follow from this theorem. The finite sum of shifts and the sum of compositions of shifts with partial differentiation operators are hypercyclic. Also, under certain requirements for the coefficients of the series, the infinite sum of shifts will be hypercyclic.

Theorem 6 considers an operator of the form $Tf(z) = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial}{\partial z_j} (f(\lambda z + b))$, where all numbers $\lambda \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^n$ and $c_j \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1; n\}$ fixed. Then this operator is hypercyclic in the space $\mathcal{F}_\varphi$ under the condition $|\lambda| \leq 1$.

Next in Theorem 7 consider a generalized function with compact support S , whose Fourier-Laplace transform is not identical to a constant value. Then we can make sure that the convolution operator of the form $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ is hypercyclic in $\mathcal{F}_\varphi$. We also consider the case when the additional condition are satisfied for the family of functions φ , and S is defined as a continuous linear functional on $\mathcal{F}_\varphi$. Then the convolution operator $M_S[f]$ will also be hypercyclic in $\mathcal{F}_\varphi$.

Keywords: hypercyclic operator, weight space, partial differentiation operator, shift operator, convolution operator, entire function

ВВЕДЕНИЕ

Линейный непрерывный оператор T на сепарабельном локально выпуклом пространстве X называют гиперциклическим, если существует элемент $x \in X$ (называемый гиперциклическим вектором) такой, что ее орбита $Orb\{x, T\} = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ плотна в X . Такие операторы играют важную роль в теории динамических систем. Первые результаты теории гиперциклических операторов были получены для рассматриваемого с обычной топологией равномерной сходимости на компактах комплексной плоскости пространства целых функций $H(\mathbb{C})$. А именно, в 1929 году Дж.Д. Биркхоф [1] доказал, что существует целая функция f такая, что множество, состоящее из функций $f(z), f(z+1), f(z+2), \dots$, плотно в $H(\mathbb{C})$, что означает гиперциклическость оператора T в $H(\mathbb{C})$, действующего по правилу $(Tf)(z) = f(z+1)$, а в 1952 году Дж.Р. Маклейн [2] доказал, что существует функция $f \in H(\mathbb{C})$ такая, что множество, состоящее из функций $f, f', f'', \dots$, плотно в $H(\mathbb{C})$, что означает гиперциклическость оператора дифференцирования в $H(\mathbb{C})$.

В работах К.-Г. Гроссе-Эрдманна [7] и Г. Петерсона [8] приведен большой обзор гиперциклических операторов для различных пространств. Проблема гиперциклическости в произвольных линейных топологических пространствах рассматривалась Г. Годефруа и Дж.Г. Шапиро [9], Р.М. Гефнером и Дж.Г. Шапиро [10], К. Китаи [11]. Основными результатами статей [9] и [10] являются приведенные ниже критерии гиперциклическости в сепарабельном пространстве Фреше. В статье [9] также доказано

утверждение о гиперциклическости в $H(\mathbb{C})$ любого оператора свертки, характеристическая функция которой не тождественна постоянной. А в работе [10] приведены доказательства теорем о гиперциклическости из работ Дж.Д. Биркгофа и Дж.Р. МакЛейна, а также некоторых обобщений В. Лу, В.П. Сейделем и Дж.Л. Вальшем теоремы Биркгофа.

В дальнейшем было показано, что многие важные в приложениях классы операторов в пространствах целых функций (как одной, так и многих переменных) обладают этим свойством [3]–[14]. В работах В.Э. Кима [3], Р. Арона и Д. Маркосе [4] изучались различные гиперциклические операторы в $H(\mathbb{C})$. У них также имеется подробный обзор литературы по данной теме. В этой области еще можно отметить статьи Дж. Бэса [5] и Дж.Дж. Бетанкура [6], они занимались гиперциклическостью в $H(\mathbb{C})$ различных операторов и операторов свертки, ассоциирующихся с оператором Данкла.

Цель работы. В последнее время большое внимание уделяется изучению динамических свойств таких классических операторов, как оператор дифференцирования, оператор Харди, оператор сдвига, в весовых пространствах целых функций. В частности, в [12], [13], [14] были найдены условия гиперциклическости оператора дифференцирования в весовых банаховых пространствах целых функций, задаваемых при помощи радиальных весовых функций. Однако, жёсткая структура банаховых пространств затрудняет исследование динамических свойств таких важных в приложениях операторов, как дифференциальные операторы конечного и бесконечного порядка, операторы свёртки, что побуждает к их рассмотрению в пространствах с менее жёсткой структурой, например, счётно-нормированных пространствах. Имея это в виду, определим весовое пространство $\mathcal{F}_\varphi$ целых функций комплексных переменных следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ — семейство выпуклых в $\mathbb{C}^n$ функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

- $i_1)$ $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;
- $i_2)$ $\varphi_m(z) > \varphi_{m+1}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$;
- $i_3)$ $\lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$;
- $i_4)$ существуют постоянные $a_m > 0$ и $b_m > 0$ такие, что

$$\varphi_{m+1}(z+t) \leq \varphi_m(z) + b_m, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C}^n : |t| \leq a_m.$$

Далее для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим пространство

$$\mathcal{F}_m = \{f \in H(\mathbb{C}^n), f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : p_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty\}.$$

Очевидно, $\mathcal{F}_m$ — банахово пространство. Отметим, что для всех $m \in \mathbb{N}$ вложения $\mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_m$ непрерывны в силу условия i_2), а ввиду условия i_3) они вполне непрерывны. Положим $\mathcal{F}_\varphi = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m$. С обычными операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа $\mathcal{F}_\varphi$ образует линейное пространство. Снабдим его топологией проективного предела пространств $\mathcal{F}_m$. Топология пространства $\mathcal{F}_\varphi$ также может быть определена с помощью метрики

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(f_1 - f_2)}{1 + p_m(f_1 - f_2)}.$$

Будучи проективным пределом компактной последовательности банаховых пространств $\mathcal{F}_m$, $\mathcal{F}_\varphi$ — пространство Фреше–Шварца. В силу условия i_4) пространство $\mathcal{F}_\varphi$ инвариантно относительно дифференцирования (см. Лемма 5). Также пространство $\mathcal{F}_\varphi$ является инвариантным относительно сдвига (см. Теорема 4).

Отметим, что пространства вида $\mathcal{F}_\varphi$ в связи с различными задачами комплексного анализа встречались в работах многих математиков [15]–[22].

Цель данной работы — изучение задачи о гиперциклическости в $\mathcal{F}_\varphi$ оператора дифференцирования и линейных непрерывных операторов, коммутирующих с дифференцированием, а также при дополнительных предположениях о семействе φ задачи о гиперциклическости операторов сдвига и свёртки.

Следующие утверждения важны для всей теории гиперциклических операторов.

Теорема А (Теорема Годафруа–Шапиро [9]). Пусть $T : X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше X , подпространства $X_0 = \text{Lin}\{x \in X : Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}^n, |\lambda| < 1\}$ и $Y_0 = \text{Lin}\{x \in X : Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}^n, |\lambda| > 1\}$ плотны в X , тогда T — гиперциклический оператор.

Теорема В (Теорема Китаи–Гефнера–Шапиро [10]). Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и $T : X \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор. Пусть X_0, Y_0 — плотные подмножества X и последовательность $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ отображений $S_k : Y_0 \rightarrow X$ таковы, что:

- 1) $T^k \rightarrow 0$ поточечно на X_0 при $k \rightarrow \infty$;
- 2) $S_k \rightarrow 0$ поточечно на Y_0 при $k \rightarrow \infty$;
- 3) $T^k S_k = I$ на Y_0 . Тогда оператор T является гиперциклическим.

Обозначения. Для точек $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ из $\mathbb{C}^n$ определим $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ — евклидова норма в $\mathbb{C}^n$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и точек $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, n$, $D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$. Если пространство $\mathcal{F}_\varphi$ инвариантно относительно сдвига, то для любого $a \in \mathbb{C}^n$ через T_a обозначаем оператор сдвига на вектор a в $\mathcal{F}_\varphi$, то есть $T_a : f \in \mathcal{F}_\varphi \rightarrow f(z + a)$.

Для произвольной вещественнозначной функции φ в $\mathbb{C}^n$ такой, что $\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(z)}{\|z\|} = +\infty$, определим преобразование Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}(z) = \sup_{t \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle z, t \rangle - \varphi(t))$, $z \in \mathbb{C}^n$. В нашей работе из условия i_1) следует, что их преобразования Юнга-Фенхеля $\tilde{\varphi}_m(z)$ ограничены во всем $\mathbb{C}^n$.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения:

Лемма 1. *Полиномы плотны в $\mathcal{F}_\varphi$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}_\varphi$. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Утверждение будет доказано, если покажем, что для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ найдётся полином P такой, что $\rho(f, P) < \varepsilon$. Теперь выберем натуральное число $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее отметим, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Действительно, оценим выражение в виде

$$\frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} = \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_{m+1}(z)}} e^{\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)} \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)}.$$

Отсюда и из условия i_3) вытекает (1). В силу установленного факта можно воспользоваться Теоремой 4 из [17], согласно которой полиномы будут плотны в каждом $\mathcal{F}_m$. Значит, можно подобрать полином P так, что $p_N(f - P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда учитывая, что $p_1(f - P) \leq p_2(f - P) \leq \dots \leq p_N(f - P) < \frac{\varepsilon}{2}$, получим, что $\rho(f, P) < \varepsilon$. $\square$

Поскольку из них можно выбрать некоторое подмножество полиномов с рациональными коэффициентами, то оно образует счетное всюду плотное множество в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$.

Лемма 2. *Пространство $\mathcal{F}_\varphi$ сепарабельно.*

В силу условия i_1) функция $f_z : \lambda \in \mathbb{C}^n \rightarrow e^{\lambda z}$ принадлежит $\mathcal{F}_\varphi$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$. Поэтому всюду в $\mathbb{C}^n$ корректно определена функция $\hat{S}(z) := S_\lambda(e^{\lambda z})$, $z \in \mathbb{C}^n$, которую называем преобразованием Лапласа функционала S .

Далее приведем следующие леммы:

Лемма 3. Пусть S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi$. Тогда функция $\widehat{S}(z) = (S_\xi, e^{\langle \xi, z \rangle})$ целая в $\mathbb{C}^n$, причём для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняется равенство $D_z^\alpha \widehat{S}(z) = S_\xi(\xi^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\eta \in \mathbb{C}^n$. Покажем, что функция $\widehat{S}$ аналитична в точке η . Далее для всех z из шара $\|z - \eta\| < 1$ в $\mathbb{C}^n$ определим функцию $g_z(\xi) = e^{\langle \xi, z \rangle} - e^{\langle \xi, \eta \rangle} - \langle \xi, z - \eta \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}$, $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Отсюда следует неравенство $|g_z(\lambda)| \leq (1 + |\lambda| + |\lambda|^2) |\zeta - z|^2 e^{\operatorname{Re} \lambda z}$. Вместе с условием i_1) эта формула дает оценку $p_m(g_z) \leq C \|z - \eta\|^2$, где C — некоторая постоянная. Отсюда в силу непрерывности функционала S получим, что $S(g_z) = o(\|z - \eta\|)$ при $z \rightarrow \eta$.

Пользуясь линейностью S , имеем

$$\begin{aligned} \widehat{S}(z) - \widehat{S}(\eta) &= S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle}) - S_\xi(e^{\langle \xi, \eta \rangle}) = S_\xi(\langle \xi, z - \eta \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}) + S_\xi(g_z(\xi)) = \\ &= \sum_{j=1}^n S_\xi(\xi_j e^{\langle \xi, \eta \rangle})(z_j - \eta_j) + o(\|z - \eta\|), \quad z \rightarrow \eta. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда по определению аналитичности получим, что $\widehat{S}(z)$ — голоморфная функция в точке η и $\frac{\partial}{\partial z_j} \widehat{S}(z) = S_\xi(\xi_j e^{\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$. Поскольку η — произвольная точка в $\mathbb{C}^n$, то $\widehat{S}(z)$ аналитична во всем $\mathbb{C}^n$, значит, она является целой функцией. Тогда при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняется равенство $D_z^\alpha \widehat{S}(z) = S_\xi(\xi^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$. $\square$

Лемма 4. Если $\Omega \in \mathbb{C}^n$ — открытое непустое множество, то система экспонент $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in \Omega}$ при фиксированном числе $\xi \in \mathbb{C}^n$ полна в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Применим теорему Хана-Банаха о непрерывном продолжении линейного функционала. Возьмем произвольный линейный непрерывный функционал $S \in \mathcal{F}_\varphi^*$ такой, что $S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ для всех $z \in \Omega$. Нужно показать, что S — нулевой функционал.

По Лемме 3 $\widehat{S}(z) = (S_\xi, e^{\langle \xi, z \rangle})$ — целая функция в пространстве $\mathbb{C}^n$, поэтому по теореме единственности $S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$. Поскольку в силу Леммы 3 при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ справедлива формула $D_z^\alpha \widehat{S}(z) = S_\xi(\xi^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle})$, то получим $D_z^\alpha \widehat{S}(z) = S_\xi(\xi^\alpha e^{\langle \xi, z \rangle}) = 0$. Значит, при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняется $S_\xi(\xi^\alpha) = 0$.

Тогда для любых полиномов $p(z) \in \mathcal{F}_\varphi$ $S(p) = 0$. Ввиду плотности полиномов по Лемме 1 в $\mathcal{F}_\varphi$ для всех $f \in \mathcal{F}_\varphi$ выполняется $S(f) = 0$, поэтому S — нулевой функционал. Следовательно, система экспонент $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in \Omega}$ при фиксированном $\xi \in \mathbb{C}^n$ полна в $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

В силу Леммы 4 любую функцию в $\mathcal{F}_\varphi$ можно приблизить некоторой суммой функций из $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in \Omega}$. Поскольку любую функцию из $\mathcal{F}_\varphi$ можно приблизить некоторой функцией из $\text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in \Omega}$, то множество $\text{Lin } X$ плотно в $\mathcal{F}_\varphi$. Если $\Omega \in \mathbb{C}^n$ — открытое непустое множество, то линейная оболочка системы экспонент $\text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in \Omega}$ при фиксированном числе $\xi \in \mathbb{C}^n$ плотна в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$.

Далее покажем, что оператор частного дифференцирования непрерывен в $\mathcal{F}_\varphi$.

Лемма 5. В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ оператор частного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z_j}$, где $j = 1, \dots, n$, непрерывен и отображает его в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi$. В силу аналитичности функции f любая ее частная производная аналитична, поэтому $\frac{\partial}{\partial z_j} f \in H(\mathbb{C}^n)$. Используя интегральную формулу Коши, получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_z} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\xi_{j-1} - z_{j-1}) (\xi_j - z_j)^2 (\xi_{j+1} - z_{j+1}) \cdot \dots \cdot (\xi_n - z_n)}, \quad (3)$$

где R и r_j , $j = 1, \dots, n$ — положительные константы, z — фиксированная точка из некоторого ограниченного шара $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leq R, j \in \{1; n\}\}$, а ξ — точка из границы поликруга $\Pi_z = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_j - z_j| = r_j, r_j > 0, j \in \{1; n\}\}$.

Далее введем обозначения $k_1 = \max_{j \in \{1; n\}} \{r_j\}$, $k_2 = \min_{j \in \{1; n\}} \{r_j\}$ и из (3) найдем оценку сверху:

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \right| \leq \frac{(R + r_1) \dots (R + r_n)}{r_1 \dots r_{j-1} r_j^2 r_{j+1} \dots r_n} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)| \leq \frac{(R + k_1)^n}{k_2^{n+1}} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|. \quad (4)$$

Из определения нормы для любого $m \in \mathbb{N}$ получим формулу $|f(z)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z)}$.

В силу $i_4)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ получим оценку $\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi)) \exp(-\varphi_m(z)) \right) \leq \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{c_m}$.

Вычислим с помощью (4) норму действия оператора

$$\begin{aligned} p_m \left(\frac{\partial}{\partial z_j} f(z) \right) &\leq \frac{(R + k_1)^n}{k_2^{n+1}} p_{m+1}(f) \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi)) \exp(-\varphi_m(z)) \right) \leq \\ &\leq \frac{e^{c_m} (R + k_1)^n}{k_2^{n+1}} p_{m+1}(f) = C_m p_{m+1}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\frac{\partial}{\partial z_j}$ действует из $\mathcal{F}_{m+1}$ в $\mathcal{F}_m$ для любых $m \in \mathbb{N}$, значит, он непрерывен и $\frac{\partial}{\partial z_j} : \mathcal{F}_\varphi \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$, где $j = 1, \dots, n$. $\square$

Далее приведем утверждения о гиперциклическости для дифференциальных операторов и оператора сдвига.

Теорема 1. В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ оператор частного дифференцирования $T = \frac{\partial}{\partial z_j}$ для любого $j = 1, \dots, n$ гиперциклический и его образ лежит в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Выше было показано, что оператор T линейный и непрерывный. Докажем его гиперцикличесность с помощью теоремы Гефнера-Шапиро.

Функция $e^{\langle \xi, z \rangle}$ для всех $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ принадлежит пространству $\mathcal{F}_\varphi$, так как она целая и для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка $p_m(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty$.

Вычислим характеристическую функцию оператора: $\check{T}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(e^{\langle \xi, \lambda \rangle})e^{-\langle \xi, \lambda \rangle} = \lambda_j$.

Введем множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| > 1\}$, множества W_1 и W_2 открытые и непустые. Определим линейные оболочки $X_0 = \operatorname{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ и $Y_0 = \operatorname{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$, тогда по Лемме 4 множества X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}_\varphi$. Заметим, что точки z фиксированные из $\mathbb{C}^n$, а оператор T действует по ξ .

Действие оператора на экспоненту для всех $k \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ имеет вид $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = z_j^k e^{\langle \xi, z \rangle}$. Тогда при фиксированном $z \in W_1$ и любых $m \in \mathbb{N}$ верна формула:

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |z_j|^k \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = |z_j|^k e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty. \quad (5)$$

Значит, из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}_\varphi$, для всех $k \in \mathbb{N}$ получается $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}_\varphi$.

Для всех $z \in W_1$ в силу $|z_j| < 1$ следует $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Ввиду полноты множества $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ по Лемме 4 для любых $f \in X_0$ вытекает, что $T^k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$.

Для точек $z \in W_2$ определим для произвольного $k \in \mathbb{N}$ отображение $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$ таким, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(z))^k}$. Поэтому при всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение:

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |z_j|^{-k} \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = |z_j|^{-k} e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty. \quad (6)$$

Тогда при $z \in W_2$ по условию $|z_j| > 1$ получим $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Из полноты системы $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$ для любых $f \in Y_0$ следует, что $S_k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Также заметим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $T^k S_k(f) = f$. Таким образом, все требования теоремы В выполнены. Следовательно, оператор T гиперциклический в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Теорема 2. Пусть в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ задан некоторый полином с постоянными коэффициентами $\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha z^\alpha$, $z \in \mathbb{C}^n$, отличный от константы. Тогда оператор $T : f \in \mathcal{F}_\varphi \longrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha D_z^\alpha f$ гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Очевидно, оператор T линейный. Покажем его непрерывность. Возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi$. Частные производные функции f для произвольного мультииндекса α в силу его голоморфности в $\mathbb{C}^n$ можно представить в виде

$$(D_z^\alpha f)(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\Pi_z = \{\xi: |\xi_j - z_j| = r_j, r_j > 0, j \in \{1; n\}\}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{\alpha+1}}, \quad (7)$$

где R и r_j , $j = 1, \dots, n$ — положительные константы, z — фиксированная точка из некоторого ограниченного шара $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leq R, j \in \{1; n\}\}$, а ξ — точка из границы поликруга $\Pi_z = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : |\xi_j - z_j| = r_j, r_j > 0, j \in \{1; n\}\}$.

Введем обозначения $k_1 = \max_{j \in \{1; n\}} \{r_j\}$ и $k_2 = \min_{j \in \{1; n\}} \{r_j\}$. Далее из формулы (7) найдем оценку сверху

$$|D_z^\alpha f(z)| \leq \frac{\alpha! (R + k_1)^n}{k_2^{|\alpha|+1}} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|. \quad (8)$$

Тогда в силу (8) получается оценка

$$|Tf(z)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |c_\alpha| |D^\alpha f(z)| = (R + k_1)^n \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)| \sum_{|\alpha| \leq m} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|+1}}. \quad (9)$$

Из определения нормы при всех $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ верно неравенство $|f(z)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z)}$. Вычислим, используя формулу (9), норму действия оператора

$$p_m(Tf) \leq (R + k_1)^n p_{m+1}(f) \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp \left(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi) \right) \exp \left(-\varphi_m(z) \right) \right) \sum_{|\alpha| \leq m} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|+1}}. \quad (10)$$

По условию i_4) при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp \left(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi) \right) \exp \left(-\varphi_m(z) \right) \right) \leq \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{c_m} = \widetilde{c}_m < \infty.$$

В силу ограниченности числа $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|+1}} \leq \frac{(m+1)^n m!}{\tau} \max_{|\alpha| \leq m} |c_\alpha| = \widetilde{\widetilde{c}}_m < \infty,$$

$$\text{где } \tau = \begin{cases} k_2^{|\alpha|+1} & \text{при } k_2 \leq 1, \\ k_2 & \text{при } k_2 > 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что норма из формулы (10) конечная:

$$p_m(Tf) \leq \widetilde{c}_m \widetilde{\widetilde{c}}_m (R + k_1)^n p_{m+1}(f) = C_m p_{m+1}(f) < \infty.$$

Значит, для всех $f \in \mathcal{F}_\varphi$ функции Tf лежат в $\mathcal{F}_\varphi$. Таким образом, рассматриваемый оператор T линейный и непрерывный. Докажем с помощью теоремы Гефнера-Шапиро, что он гиперциклический.

В Теореме 1 показано, что $e^{\langle \xi, z \rangle}$ при всех $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ принадлежит $\mathcal{F}_\varphi$. Вычислим характеристическую функцию оператора: $\check{T}(\lambda) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \lambda^\alpha = \Phi(\lambda)$.

Введем множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |\Phi(z)| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |\Phi(z)| > 1\}$. По условию теоремы $\Phi(z)$ — не равный константе полином, тогда W_1 и W_2 открытые и непустые. Определим линейные оболочки $X_0 = \text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ и $Y_0 = \text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$, по Лемме 4 множества X_0, Y_0 плотны в $\mathcal{F}_\varphi$. Заметим, что точки z фиксированные из $\mathbb{C}^n$, а оператор T действует по ξ .

Действие оператора на экспоненту для всех $k \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ имеет вид $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(z))^k e^{\langle \xi, z \rangle}$. Тогда при значениях $z \in W_1$ и любых $m \in \mathbb{N}$ верна формула

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\Phi(z)|^k \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (|e^{\langle \xi, z \rangle}| e^{-\varphi_m(\xi)}) = |\Phi(z)|^k e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty. \quad (11)$$

Значит, из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}_\varphi$, для всех $k \in \mathbb{N}$ следует $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}_\varphi$.

Для всех $z \in W_1$ из условий $|\Phi(z)| < 1$ и $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(z))^k e^{\langle \xi, z \rangle}$ вытекает $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Ввиду полноты множества $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ по Лемме 4 следует, что для любых $f \in X_0$ $T^k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$.

Для точек $z \in W_2$ определим для всех $k \in \mathbb{N}$ отображение $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$ таким, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(z))^k}$. Значит, для любых $m \in \mathbb{N}$ получается соотношение

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\Phi(z)|^{-k} \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\text{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = |\Phi(z)|^{-k} e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty. \quad (12)$$

Тогда при $z \in W_2$ в силу $|\Phi(z)| > 1$ и $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(z))^k}$ выполняется $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Из полноты системы $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$ следует, что для любых $f \in Y_0$ $S_k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Также для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $T^k S_k(f) = f$. Следовательно, все требования теоремы В выполнены. Оператор T гиперциклический в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Теорема 3. Пусть $\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha$ — непостоянная целая функция в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$, тогда определим оператор $T : f \in \mathcal{F}_\varphi \xrightarrow{\Phi(D)} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \geq 0} c_\alpha D_z^\alpha f$. Тогда если $\Phi(z)$ — функция экспоненциального типа, то оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Легко убедиться, что оператор T линейный, теперь проверим его непрерывность. Возьмем произвольную функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi$. Введем обозначения идентично Теореме 2. Как было показано в доказательстве Теоремы 2, для производных при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется неравенство

$$|D_z^\alpha f(z)| \leq \frac{\alpha!(R+k_1)^n}{k_2^{|\alpha|+1}} \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)|.$$

Далее оценим действие оператора на функцию:

$$|Tf(z)| \leq \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| |D^\alpha f(z)| \leq (R+k_1)^n \max_{\xi \in \Pi_z} |f(\xi)| \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|+1}}.$$

По определению нормы для любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $m \in \mathbb{N}$ получается оценка $|f(z)| \leq p_{m+1}(f)e^{\varphi_{m+1}(z)}$. По условию i_4) при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\exp \left(\max_{\xi \in \Pi_z} \varphi_{m+1}(\xi) \right) \exp \left(-\varphi_m(z) \right) \right) \leq \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{c_m} = \widetilde{c}_m < \infty$.

Вычислим для произвольных $m \in \mathbb{N}$ его нормы:

$$p_m(Tf) \leq \widetilde{c}_m (R+k_1)^n p_{m+1}(f) \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|+1}}. \quad (13)$$

Для непрерывности оператора $T : \mathcal{F}_\varphi \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$ в силу (13) необходимо выполнение условия

$$p_m(Tf) \leq \frac{\widetilde{c}_m (R+k_1)^n}{k_2} p_{m+1}(f) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|}} |c_\alpha| < \infty.$$

Поскольку величины $\frac{\widetilde{c}_m (R+k_1)^n}{k_2}$ и $p_{m+1}(f)$ конечные, то требуется сходимость ряда $\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|}} |c_\alpha|$. Найдем условие для коэффициентов c_α , при котором данная сумма конечная.

Применим для этого признак сравнения. В качестве мажоранты возьмем степенной ряд $b \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{(|\alpha|+1)^\rho}$, где ρ — произвольное число такое, что $\rho > n$, а b — некоторая положительная постоянная. Тогда при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ должно выполняться условие $\frac{\alpha!}{k_2^{|\alpha|}} |c_\alpha| \leq \frac{b}{(|\alpha|+1)^\rho}$. Отсюда для коэффициентов c_α при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ получим такое требование:

$$|c_\alpha| \leq \frac{b k_2^{|\alpha|}}{\alpha! (|\alpha|+1)^\rho}. \quad (14)$$

Следовательно, ввиду формулы (14) для функции $\Phi(z)$ получается оценка

$$|\Phi(z)| \leq \sum_{|\alpha| \geq 0} |c_\alpha| |z|^{|\alpha|} \leq b \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(k_2 |z|)^{|\alpha|}}{\alpha! (|\alpha|+1)^\rho} \leq b \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(\tau |z|)^{|\alpha|}}{\alpha!} = b e^{\tau |z|},$$

где $\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } k_2 \leq 1, \\ k_2 & \text{при } k_2 > 1. \end{cases}$

Таким образом, для непрерывности оператора T необходимо выполнение условия (14), то есть $\Phi(z)$ должна быть функцией экспоненциального типа.

Далее всюду полагаем, что функция $\Phi(z)$ экспоненциального типа. Тогда рассматриваемый оператор T линейный и непрерывный. Докажем, что он гиперциклический. Для этого в дальнейшем воспользуемся теоремой Гефнера-Шапиро.

В Теореме 1 было показано, что функция $e^{\langle \xi, z \rangle}$ при всех $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ принадлежит $\mathcal{F}_\varphi$. Вычислим характеристическую функцию оператора: $\tilde{T}(\lambda) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \lambda^\alpha = \Phi(\lambda)$.

Введем множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |\Phi(z)| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |\Phi(z)| > 1\}$. Поскольку $\Phi(z)$ — целая функция, по малой теореме Пикара она принимает все значения из $\mathbb{C}^n$, кроме, может быть, одной величины, поэтому W_1 и W_2 открытые и непустые.

Определим множества $X_0 = \text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$, $Y_0 = \text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$, по Лемме 4 X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}_\varphi$. Заметим, что точки z фиксированные из $\mathbb{C}^n$, а оператор действует по ξ .

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получается формула

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\Phi(z)|^k \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\text{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = |\Phi(z)|^k e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty.$$

Значит, из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}_\varphi$, следует $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}_\varphi$.

Для всех $z \in W_1$ выполняется условие $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$, так как $|\Phi(z)| < 1$ и $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = (\Phi(z))^k e^{\langle \xi, z \rangle}$. Из полноты системы $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ по Лемме 4 вытекает, что для любых $f \in X_0$ $T^k(f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$.

Для точек $z \in W_2$ определим при любых $k \in \mathbb{N}$ отображение $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$ таким, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(z))^k}$. Значит, для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |\Phi(z)|^{-k} \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\text{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = |\Phi(z)|^{-k} e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty.$$

Тогда $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$, поскольку $|\Phi(z)| > 1$ и $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = \frac{e^{\langle \xi, z \rangle}}{(\Phi(z))^k}$. В силу полноты множества $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$ следует, что для любых $f \in Y_0$ $S_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Также для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $T^k S_k(f) = f$. Таким образом, выполнены все условия теоремы В. Оператор T гиперциклический в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Далее рассмотрим свойства оператора сдвига в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. Из следующей теоремы получается инвариантность $\mathcal{F}_\varphi$ относительно сдвига.

Теорема 4. В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ определим оператор сдвига T_a в виде $T_a : f(z) \in \mathcal{F}_\varphi \longrightarrow f(z + a)$, где $a \in \mathbb{C}^n$, причем $a \neq (0, 0, \dots, 0, 0)$. Тогда T_a гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Оператор T линейный, покажем его непрерывность. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi$, докажем, что $Tf \in \mathcal{F}_\varphi$. Действие оператора $k \in \mathbb{N}$ раз на функцию имеет вид $T^k f(z) = f(z + ka)$.

Для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $m \in \mathbb{N}$ из определения нормы следует оценка $|f(z + a)| \leq p_{m+1}(f)e^{\varphi_{m+1}(z+a)}$. В силу условия i_4) можно найти конечное число c_m , для которого $\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + a) - \varphi_m(z)) \leq c_m$. Тогда получается неравенство

$$|Tf(z)| = |f(z + a)| \leq p_{m+1}(f)e^{\varphi_{m+1}(z+a)} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Вычислим для произвольных $m \in \mathbb{N}$ полунормы действия оператора:

$$p_m(Tf) \leq p_{m+1}(f) \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + a) - \varphi_m(z)) \right) \leq e^{c_m} p_{m+1}(f) = \widetilde{c}_m p_{m+1}(f) < \infty. \quad (16)$$

Следовательно, оператор T непрерывен в $\mathcal{F}_\varphi$. По Теореме В покажем его гиперциклическость.

В силу Теоремы 1 для всех $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}_\varphi$. Определим характеристическую функцию оператора $\check{T}(\lambda) = e^{\langle a, \lambda \rangle}$, тогда получим $|\check{T}(z)| = e^{\operatorname{Re} \langle a, z \rangle}$. Введем множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |\check{T}(z)| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |\check{T}(z)| > 1\}$. Функция $\check{T}(z)$ целая, по малой теореме Пикара она принимает все значения в пространстве, кроме, может быть, одной величины. Следовательно, W_1 и W_2 открытые и непустые. Обозначим $X_0 = \operatorname{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ и $Y_0 = \operatorname{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$, по Лемме 4 множества X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}_\varphi$.

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и всех $z \in \mathbb{C}^n$ действие оператора имеет вид $T_\xi^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = e^{k\langle a, z \rangle} e^{\langle \xi, z \rangle}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ при фиксированной точке z получается формула

$$p_m(T^k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |e^{\langle a, z \rangle}|^k \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = e^{k \operatorname{Re} \langle a, z \rangle} e^{\widetilde{\varphi}_m(z)} < \infty.$$

Значит, из того, что $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}_\varphi$, следует, что $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \in \mathcal{F}_\varphi$.

Для точек $z \in W_1$ из условия $|\check{T}(z)| < 1$ получается выражение $T^k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Из полноты множества $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ по Лемме 4 вытекает, что для любых $f \in X_0$ $T^k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$.

При условии $z \in W_2$ определим для любого $k \in \mathbb{N}$ отображение $S_k : Y_0 \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$ таким, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) = e^{-k\langle a, z \rangle} e^{\langle \xi, z \rangle} = (\tilde{T}(z))^{-k} e^{\langle \xi, z \rangle}$. Значит, для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$p_m(S_k(e^{\langle \xi, z \rangle})) = |e^{\langle a, z \rangle}|^{-k} \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = e^{-k \operatorname{Re} \langle a, z \rangle} e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty.$$

Тогда в силу $|\tilde{T}(z)| > 1$ следует, что $S_k(e^{\langle \xi, z \rangle}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Ввиду полноты системы $\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$ получим, что для любых $f \in Y_0$ $S_k(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ в $\mathcal{F}_\varphi$.

Также для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $T^k S_k(f) = f$. Все условия теоремы В выполнены. Следовательно, оператор сдвига T гиперциклический в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Приведем следующее утверждение для коммутирующих с дифференцированием операторов.

Теорема 5. Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ коммутирует с операторами частного дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T — гиперциклический оператор в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Отметим, что для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\xi) := e^{\langle \xi, z \rangle}$ принадлежит $\mathcal{F}_\varphi$, поскольку при каждом $m \in \mathbb{N}_0$ его нормы конечны: $p_m(f_z) = \exp \left(\sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (\operatorname{Re} \langle \xi, z \rangle - \varphi_m(\xi)) \right) = e^{\tilde{\varphi}_m(z)} < \infty$. Поэтому на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ корректно определена функция $F_T(\xi, z) = T(f_z)(\xi)$.

Так как T коммутирует с операторами частного дифференцирования, то справедливо равенство

$$D_j T_\xi(f_z) = T_\xi D_j f_z = z_j T_\xi(f_z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Отсюда получим систему уравнений в частных производных: $\frac{\partial}{\partial \xi_j} T_\xi(f_z) = z_j T_\xi(f_z)$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, искомая функция имеет вид $T_\xi(f_z) = e^{C(z)} e^{\langle \xi, z \rangle} = a_T(z) e^{\langle \xi, z \rangle}$. Из последней формулы вытекает, что существует функция $a_T(z) \in \mathbb{C}^n$ такая, что

$$T_\xi(f_z) = a_T(z) f_z. \quad (18)$$

Таким образом, при произвольных $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ получим $F_T(\xi, z) = a_T(z) e^{\langle \xi, z \rangle}$. Заметим, что F_T по ξ является целой функцией. Докажем, что F_T по z также целая. Действительно, так как T — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi$, то для всех

$k \in \mathbb{N}_0$ найдутся числа $c_k > 0$ и $m \in \mathbb{N}_0$, для которых

$$p_k(T(g)) \leq c_k p_m(g), \quad g \in \mathcal{F}_\varphi. \quad (19)$$

Пусть $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^n$ — произвольные точки. Для любого $z \in \mathbb{C}^n$ такого, что $\|z - \zeta\| < 1$, рассмотрим функцию $g_{z,\zeta}(\xi) := e^{\langle \xi, z \rangle} - e^{\langle \xi, \zeta \rangle} - \langle \xi, z - \zeta \rangle e^{\langle \xi, \zeta \rangle}$, $\xi \in \mathbb{C}^n$. В силу (19) выполняется $|T(g_{z,\zeta})(\xi)| \leq c_k p_m(g_{z,\zeta}) e^{\varphi_m(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{C}^n$. Тогда из оценки $p_m(g_{z,\zeta}) \leq C \|z - \zeta\|^2$ в Лемме 3, справедливой при некотором положительном C , и линейности оператора T получим, что для произвольного $\xi \in \mathbb{C}^n$

$$F_T(\xi, z) - F_T(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^n T(f_{j,\zeta})(\xi)(z_j - \zeta_j) + o(\|z - \zeta\|), \quad z \rightarrow \zeta,$$

где $f_{j,\zeta}(\xi) := \xi_j \exp(\langle \xi, \zeta \rangle)$.

Следовательно, для каждого фиксированного $\xi \in \mathbb{C}^n$ функция $F_T(\xi, z)$ голоморфна в точке ζ как функция переменного z . Так как $\zeta \in \mathbb{C}^n$ была взята произвольно, то F_T по переменной z является целой функцией. Отсюда и из того, что по Теореме 1 $e^{\langle \xi, z \rangle}$ — целая функция по z , вытекает, что a_T — целая функция в $\mathbb{C}^n$. Поскольку по условию оператор T не является скалярным кратным тождественного отображения, то a_T — непостоянная функция.

Отметим теперь, что если Ω непустое открытое множество $\mathbb{C}^n$, то по Лемме 4 система $\{f_z\}_{z \in \Omega}$ полна в $\mathcal{F}_\varphi$. Рассмотрим множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |a_T(z)| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |a_T(z)| > 1\}$. Они непустые и открытые в $\mathbb{C}^n$. Пусть X_0 — линейная оболочка системы $\{f_z\}_{z \in W_1}$, Y_0 — линейная оболочка системы $\{f_z\}_{z \in W_2}$. Множества X_0 и Y_0 плотны в $\mathcal{F}_\varphi$. Тогда линейные оболочки множеств $\bigcup_{|\lambda| < 1} \ker(T - \lambda)$ и $\bigcup_{|\lambda| > 1} \ker(T - \lambda)$ плотны в $\mathcal{F}_\varphi$. Таким образом, все условия Теоремы А выполнены, оператор T — гиперциклический. $\square$

Из Теоремы 5 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть заданы числа $N \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ и точки $a^j \in \mathbb{C}^n$, $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^N c_j f(z + a^j)$, не кратный тождественному отображению, гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Очевидно, оператор T коммутирует с операторами частного дифференцирования. По Теореме 4 оператор T_a непрерывен в $\mathcal{F}_\varphi$. Тогда линейный оператор T как конечная сумма сдвигов также является непрерывным в этом пространстве. Из Теоремы 5 следует, что T — гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Следствие 2. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и для каждого $j = 1, 2, \dots, N$ заданы числа $c_j \in \mathbb{C}$, точки $a^j \in \mathbb{C}^n$ и мультииндексы $\alpha^j \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^N c_j (D_z^{\alpha^j} f)(z + a^j)$, действующий в $\mathcal{F}_\varphi$ и не кратный тождественному, является гиперциклическим.

Доказательство. В Теореме 2 показано, что при произвольном $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ оператор D^α действует непрерывно из $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\varphi$. В силу Теоремы 4 сдвиг T_a тоже непрерывен в $\mathcal{F}_\varphi$. Следовательно, оператор T непрерывный как конечная сумма их композиций. Поскольку он коммутирует с операторами частного дифференцирования, то по Теореме 5 T гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Если $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$ — заданная последовательность точек $\lambda_j \in \mathbb{C}^n$, то для семейства функций φ при всех $m, j \in \mathbb{N}$ в силу условия i_4) существует зависящая от нее совокупность чисел $b_{j,m}(\Lambda) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + \lambda_j) - \varphi_m(z))$.

Следствие 3. Пусть для семейства φ заданы последовательность $(d_j)_{j=1}^\infty$ комплексных чисел d_j и последовательность $\Lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty$ точек $\lambda_j \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = \infty$ и $\sum_{j=1}^\infty |d_j| e^{b_{j,m}(\Lambda)} < \infty$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Определим на $\mathcal{F}_\varphi$ оператор $T(f)(z) = \sum_{j=1}^\infty d_j f(z + \lambda_j)$, где $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда T гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}_\varphi$. Тогда при всех $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^n$ выполняется оценка $|f(z + \lambda_j)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_{m+1}(z + \lambda_j)}$. Из условия i_4) следует, что $|f(z + \lambda_j)| \leq p_{m+1}(f) e^{\varphi_m(z) + b_{j,m}(\Lambda)}$.

Его норма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p_m(Tf) &= \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\left| \sum_{j=1}^\infty d_j f(z + \lambda_j) \right| e^{-\varphi_m(z)} \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^\infty |d_j| p_{m+1}(f) \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\varphi_{m+1}(z + \lambda_j) - \varphi_m(z)) \right) \leq p_{m+1}(f) \sum_{j=1}^\infty |d_j| e^{b_{j,m}(\Lambda)} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор T линейный и непрерывный и переводит $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Также он коммутирует с операторами частного дифференцирования, поэтому по Теореме 5 оператор T гиперциклический. $\square$

Следствие 4. Пусть в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ S — обобщенная функция с компактным носителем, причем ее преобразование Фурье-Лапласа $\widehat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не является константой. Тогда оператор свертки вида $M_S[f](z) = S_t(f(z + t))$ гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что $M_S[f] \in \mathcal{F}_\varphi$ при всех $f \in \mathcal{F}_\varphi$ и линейный оператор M_S отображает непрерывно $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\varphi$. Поскольку носитель обобщенной функции S компактен и любая функция $f \in \mathcal{F}_\varphi$ целая в $\mathbb{C}^n$, то получим, что $M_S[f] \in H(\mathbb{C}^n)$.

В силу компактности носителя S при произвольной $f \in \mathcal{F}_\varphi$ существуют компактное множество K в $\mathbb{C}^n$ и постоянная $C > 0$, для которых $|S(f)| \leq C \max_{t \in K} |f(t)|$. Отсюда следует, что $|M_S[f](z)| \leq C_1 \max_{t \in K} |f(z+t)|$. Заметим, что для любого $m \in \mathbb{N}_0$ по условию i_4) можно найти константу $c_m > 0$, удовлетворяющую оценке $\varphi_{m+1}(z+t) - \varphi_m(z) \leq c_m$, где $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in K$. Тогда из определения нормы при всех $z \in \mathbb{C}^n$ получается неравенство

$$|M_S[f](z)| \leq C_1 p_{m+1}(f) \exp \left(\max_{t \in K} \varphi_{m+1}(z+t) \right), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда и из ограниченности компакта K вытекает оценка нормы оператора свертки:

$$\begin{aligned} p_m(M_S[f]) &\leq C_1 p_{m+1}(f) \exp \left(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left(\max_{t \in K} \varphi_{m+1}(z+t) - \varphi_m(z) \right) \right) \leq \\ &\leq C_1 p_{m+1}(f) e^{c_m} = C_2 p_{m+1}(f) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор M_S непрерывно отображает $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\varphi$. В работе [19] было доказано, что оператор свертки M_S в $H(\mathbb{C}^n)$ коммутирует с операторами частного дифференцирования. Так как $\hat{S}(z)$ не равен постоянной, то M_S не кратен тождественному оператору. Значит, в силу Теоремы 5 оператор M_S гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Далее приведем пример гиперциклического оператора, не являющегося сверткой.

Теорема 6. Оператор $Tf(z) = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial}{\partial z_j} (f(\lambda z + b))$ в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$, где числа $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$ и $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1; n\}$ фиксированы, гиперциклический при условии $|\lambda| \leq 1$.

Доказательство. Возьмем некоторую функцию $f \in \mathcal{F}_\varphi$. Оператор T линейный и непрерывный как конечная сумма операторов частного дифференцирования, а их непрерывность была доказана в Лемме 5. Покажем ее гиперциклическость, используя теорему Гефнера-Шапиро.

В доказательстве Теоремы 1 было показано, что для всех $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ $e^{\langle \xi, z \rangle} \in \mathcal{F}_\varphi$. Введем обозначение $P(z) = \sum_{j=1}^n c_j z_j$. Определим множества $W_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |P(z)| < 1\}$ и $W_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : |P(z)| > 1\}$, W_1 и W_2 открытые и непустые. Обозначим $X = \text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_1}$ и $Y = \text{Lin}\{e^{\langle \xi, z \rangle}\}_{z \in W_2}$, по Лемме 4 множества X и Y плотны в $\mathcal{F}_\varphi$.

Вычислим для произвольного $n \in \mathbb{N}$ действие оператора на степенную функцию:

$$T_\xi^n e^{\xi z} = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} P^n(z) \exp \left(z \left(\lambda^n \xi + b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right) \right) \right). \quad (20)$$

Для значений $|\lambda| \leq 1$ получается утверждение $T_\xi^n e^{\xi z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в множестве X , поскольку при всех $z \in X$ из формулы (20) получим выражение

$$p_m(T_\xi^n e^{\xi z}) = |P(z)|^n |\lambda|^{\frac{n(n+1)}{2}} \exp \left(\operatorname{Re} \left(z b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right) \right) \right) \exp \left(\widetilde{\varphi}_m(\lambda^n \xi) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Определим обратный оператор на множестве Y в виде $S e^{\xi z} = \frac{1}{P(z)} \exp \left(\frac{z(\xi - b)}{\lambda} \right)$, тогда выполняется равенство $T S e^{\xi z} = e^{\xi z}$. Действие оператора на экспоненту при произвольном $n \in \mathbb{N}$ имеет такой вид:

$$S_\xi^n e^{\xi z} = \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{P^n(z)} \exp \left(\frac{z(\xi - b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right))}{\lambda^n} \right). \quad (21)$$

При значениях $|\lambda| \leq 1$ верно соотношение $S_\xi^n e^{\xi z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в множестве Y , так как для любых $z \in Y$ в силу (21) верно равенство

$$p_m(S_\xi^n e^{\xi z}) = \frac{|\lambda|^{\frac{n(n-1)}{2}}}{|P(z)|^n} \exp \left(- \operatorname{Re} \left(z b \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \right) \right) \right) \exp \left(\widetilde{\varphi}_m \left(\frac{\xi}{\lambda^n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Также справедливо условие 3) теоремы В: $T_\xi \circ S_\xi e^{\xi z} = \frac{P(z)}{P(z)} e^{z\xi} = e^{z\xi}$.

Поскольку выполнены все условия теоремы Гефнера-Шапиро, то в случае $|\lambda| \leq 1$ T — гиперциклический оператор в $\mathcal{F}_\varphi$. $\square$

Лемма 6. Пусть для семейства φ выполнено дополнительное условие

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \exists l = l_{m,k} \in \mathbb{N}, r = r_{m,k} > 0 : \forall z, t \in \mathbb{C}^n \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r, \quad (22)$$

а S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi$. Тогда при любых $f \in \mathcal{F}_\varphi$ функция $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ целая в $\mathbb{C}^n$ и $M_S[f]$ — коммутирующий оператор с операторами частного дифференцирования.

Доказательство. По требованию i_4) $\mathcal{F}_\varphi$ будет инвариантным относительно сдвига. Ввиду этого оператор свертки M_S определен всюду на $\mathcal{F}_\varphi$ и также для всех $f \in \mathcal{F}_\varphi$ функция $M_S[f]$ определена всюду в $\mathbb{C}^n$.

Докажем, что из условия $f \in \mathcal{F}_\varphi$ следует голоморфность функции $M_S[f]$ в $\mathbb{C}^n$. Возьмем любую точку $z_0 \in \mathbb{C}^n$ и произвольное число $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ такое, что

$|h| < 1$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} M_S[f](z_0 + h) - M_S[f](z_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](z_0) h_j = \\ = S_t \left(f(z_0 + h + t) - f(z_0 + t) - \sum_{j=1}^n (D_j f)(z_0 + t) h_j \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Также для всех $m \in \mathbb{N}$ и некоторых чисел $C_m > 0$ верна оценка

$$|S(f)| \leq C_m p_m(f), \quad f \in \mathcal{F}_\varphi. \quad (24)$$

Из формул (23) и (24) вытекает соотношение

$$|M_S[f](z_0 + h) - M_S[f](z_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](z_0) h_j| \leq C_m p_m(g_{z_0, h}), \quad (25)$$

где $g_{z_0, h}(t) = f(z_0 + h + t) - f(z_0 + t) - \sum_{j=1}^n (D_j f)(z_0 + t) h_j, \quad t \in \mathbb{C}^n$.

Теперь для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с помощью формулы Тейлора для вещественной и мнимой части функции $D^\beta g_{z_0, h}$ получается формула

$$|(D^\beta g_{z_0, h})(t)| \leq 2n^2 \|h\|^2 \max_{\substack{\xi \in [z_0 + t, z_0 + t + h], \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha|=2}} |(D^{\alpha+\beta} f)(\xi)|, \quad (26)$$

где $[z_0 + t, z_0 + t + h]$ — отрезок, соединяющий точки $z_0 + t$ и $z_0 + t + h$. Применяя требование (22), найдем число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k \geq m + 2$, и константу $C = C(z_0) > 0$, для которых выполняется оценка $\varphi_k(\xi) \leq \varphi_m(t) + C$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию $\|\xi - t\| \leq \|z_0\| + 1$. Значит, при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| \leq m$ верно неравенство

$$\max_{\substack{\xi \in [z_0 + t, z_0 + t + h], \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha|=2}} |(D^{\alpha+\beta} f)(\xi)| \leq e^C p_k(f) e^{\varphi_m(t)}, \quad t \in \mathbb{C}^n. \quad (27)$$

Из формул (26) и (27) следует, что для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| \leq m$

$$|(D^\beta g_{z_0, h})(t)| \leq 2n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f) e^{\varphi_m(t)}, \quad t \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда можно оценить норму функции

$$p_m(g_{z_0, h}) \leq 2n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f). \quad (28)$$

Из неравенств (25) и (28) вытекает соотношение

$$|M_S[f](z_0 + h) - M_S[f](z_0) - \sum_{j=1}^n M_S[D_j f](z_0) h_j| \leq C_m 2n^2 e^C \|h\|^2 p_k(f).$$

Следовательно, функция $M_S[f]$ дифференцируема в данной точке $z_0 \in \mathbb{C}^n$, а также получается $D_j(M_S[f])(z_0) = M_S[D_j f](z_0)$. Поскольку z_0 — произвольная точка, то $M_S[f]$ будет дифференцируема во всем $\mathbb{C}^n$ и выполняется $D_j(M_S[f]) = M_S[D_j f]$, $j = 1, \dots, n$. В силу последней формулы и инвариантности пространства $\mathcal{F}_\varphi$ относительно дифференцирования следует, что функция $M_S[f]$ целая в $\mathbb{C}^n$. $\square$

Лемма 7. Пусть для семейства φ выполнено дополнительное условие

$$\forall m, k \in \mathbb{N} \exists l = l_{m,k} \in \mathbb{N}, r = r_{m,k} > 0 : \forall z, t \in \mathbb{C}^n \varphi_l(z+t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r \quad (29)$$

и S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi$. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ отображает $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\varphi$, а также он линеен и непрерывен.

Доказательство. Из Теоремы 4 следует инвариантность $\mathcal{F}_\varphi$ относительно сдвига. Тогда оператор M_S определен всюду на $\mathcal{F}_\varphi$. Очевидно, он линейный. Поскольку функционал S линейный и непрерывный на $\mathcal{F}_\varphi$, то существуют величины $k \in \mathbb{N}$ и $C_k > 0$, для которых $|S(f)| \leq C_k p_k(f)$, где $f \in \mathcal{F}_\varphi$. Таким образом, для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и для любых $f \in \mathcal{F}_\varphi$ получим оценку

$$|M_S[f](z)| \leq C_k p_k(T_z f) = C_k \sup_{t \in \mathbb{C}^n, |\alpha| \leq k} \frac{|(D^\alpha f)(z+t)|}{\exp(\varphi_k(t))}.$$

Возьмем любое число $m \in \mathbb{N}$, а число $l \in \mathbb{N}$ из условия (29). Ввиду условий $l \geq k$ и $f \in \mathcal{F}_\varphi$ выполняется соотношение

$$|M_S[f](z)| \leq C_k p_l(f) \sup_{t \in \mathbb{C}^n} \frac{\exp(\varphi_l(z+t))}{\exp(\varphi_k(t))}. \quad (30)$$

Из требования (29) и формулы (30) следует неравенство

$$|M_S[f](z)| \leq C_k e^{r_{m,k}} p_l(f) \exp(\varphi_m(z)).$$

Тогда оценка нормы функции имеет вид $p_m(M_S[f]) \leq C_k e^{r_{m,k}} p_l(f)$, $f \in \mathcal{F}_\varphi$.

Следовательно, линейный оператор M_S отображает $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\varphi$ и он непрерывен. $\square$

Из Лемм 6 и 7 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть для семейства функций φ выполняется условие (29), а S определен как линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi$, преобразование Фурье-Лапласа которого $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не является константой. Тогда оператор свертки $M_S[f](z) = S_t(f(z+t))$ гиперцикличесен в $\mathcal{F}_\varphi$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложим кратко полученные в работе результаты. В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ оператор частного дифференцирования $T = \frac{\partial}{\partial z_j}$ для любого $j = 1, \dots, n$ гиперциклический и его образ лежит в $\mathcal{F}_\varphi$. Если в $\mathcal{F}_\varphi$ задан некоторый полином с постоянными коэффициентами $\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha z^\alpha$, $z \in \mathbb{C}^n$, отличный от константы, то оператор $T : f \in \mathcal{F}_\varphi \longrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha D_z^\alpha f$ — гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$. В случае, когда задана $\Phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha$ — непостоянная целая функция в $\mathcal{F}_\varphi$, определим оператор $T : f \in \mathcal{F}_\varphi \xrightarrow{\Phi(D)} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \geq 0} c_\alpha D_z^\alpha f$. Тогда если $\Phi(z)$ — функция экспоненциального типа, то оператор T гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ определим оператор сдвига T_a в виде $T_a : f(z) \in \mathcal{F}_\varphi \longrightarrow f(z + a)$, где $a \in \mathbb{C}^n$, причем $a \neq (0, 0, \dots, 0, 0)$, тогда T гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$. Положим, что линейный непрерывный оператор T в $\mathcal{F}_\varphi$ коммутирует с операторами частного дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T — гиперциклический оператор в $\mathcal{F}_\varphi$.

Когда в $\mathcal{F}_\varphi$ задана обобщенная функция S с компактным носителем, причем ее преобразование Фурье-Лапласа $\hat{S}(z) = S_\xi(e^{\langle \xi, z \rangle})$ не является константой, то оператор свертки вида $M_S[f](z) = S_t(f(z + t))$ гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$. Оператор вида $Tf(z) = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial}{\partial z_j} (f(\lambda z + b))$, где все числа $\lambda \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^n$ и $c_j \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1; n\}$ фиксированные, гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$ при условии $|\lambda| \leq 1$.

Если для семейства функций φ при любых $m, k \in \mathbb{N}$ можно найти числа $l = l_{m,k} \in \mathbb{N}$, $r = r_{m,k} > 0$ такие, что всех $z, t \in \mathbb{C}^n$ $\varphi_l(z + t) \leq \varphi_m(z) + \varphi_k(t) + r$, а S определен как линейный непрерывный функционал на $\mathcal{F}_\varphi$, то оператор свертки $M_S[f]$ гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. BIRKHOFF, G. D. (1929) Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres. *C.R. Acad. Sci.* 189 (Paris). p. 473–475.
2. MACLANE, G. R. (1952) Sequences of derivatives and normal families. *J. Analyse Math.* 2. p. 72–87.
3. Ким, В. Э. Полнота систем производных функций Эйри и гиперциклические операторы // Уфимский математический журнал. — 2010, Т. 2, № 4. — С. 52–57.

- KIM, V. E. (2010) Completeness of Airy derivative systems and hypercyclic operators. *Ufa Mathematical Journal*. 2 (4). p. 52–57.
4. ARON, R. & MARKOSE, D. (2004) On universal functions. *J. Korean Math. Soc.* 41(1). p. 65–76.
 5. BES, J. & PERIS, A. (1999) Hereditarily hypercyclic operators. *Journal of Functional Analysis*. 167. p. 94–112.
 6. BETANCOR, J. J. & SIFI, M. & TRIMECHE, K. (2005) Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with Dunkl operators on $\mathbb{C}$. *Acta Math. Hungar.* 106 (1–2). p. 101–116.
 7. GROSSE-ERDMANN, K.-G. (1999) Universal families and hypercyclic operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* 36. p. 345–381.
 8. PETERSSON, H. (2006) Supercyclic and hypercyclic non-convolution operators. *J. Operator Theory*. 55 (1). p. 133–151.
 9. GODEFROY, G. & SHAPIRO, J. H. (1991) Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.* 98. p. 229–269.
 10. GETHNER, R. M. & SHAPIRO, J. (1987) Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 100 (2). p. 281–288.
 11. KITAI, C. (1982) *Invariant Closed Sets for Linear Operators*. Ph.D Thesis. Toronto: University of Toronto.
 12. BONET, J. (2009) Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions. *Math. Z.* 261. p. 649–657.
 13. BONET, J. & BONILLA, A. (2013) Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions. *Complex Anal. Oper. Theory*. 7. p. 33–42.
 14. BEL'TRAN, M. J. (2014) Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions. *Studia Mathematica*. 221. p. 35–60.
 15. EHRENPREIS, L. (1970) *Fourier analysis in several complex variables*. New York: Wiley-Interscience publishers. 506.
 16. Паламодов, В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Наука, 1967. — 488 с.
PALAMODOV, V. P. (1967) *Linear differential operators with constant coefficients*. Moscow: Nauka. 488.

17. TAYLOR, B. A. (1971) On weighted polynomial approximation of entire functions. *Pacific Journal of Mathematics*. 36 (2). p. 523–539.
18. HASLINGER, F. (1986) Weighted spaces of entire functions. *Indiana University Mathematics Journal*. 35 (1). p. 193–208.
19. Напалков, В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. — М.: Наука, 1982. — 240 с.
NAPALKOV, V. V. (1982) *Convolution equations in multidimensional spaces*. Moscow: Nauka. 240.
20. Абанин, А. В., Тиен, Ф. Ч. Классические операторы в весовых банаховых пространствах голоморфных функций // Итоги науки и техники. Серия Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2017, № 142. — С. 3–13.
ABANIN, A. V. & TIEN, F. Ch. (2017) Classical operators in weighted Banach spaces of holomorphic functions. *Results of science and technology. The series Modern Mathematics and its applications. Thematic reviews*. 142. p. 3–13.
21. Попенов, С. В. О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^m$ // Матем. заметки. — 1986, Т. 40, № 3. — С. 374–384.
POPENOV, S. V. (1986) Weighted space of functions analytic in an unbounded convex domain in $\mathbb{C}^m$. *Math. Notes*. 40 (3). p. 720–725.
22. Ахтямов, Н. Т., Мусин, И. Х. О существовании базиса в весовом пространстве целых функций // Уфимский математический журнал. — 2009, Т. 1, № 1. — С. 3–15.
AKHTYAMOV, N. T. & MUSIN, I. Kh. (2009) On the existence of a basis in the weighted space of entire functions. *Ufa Mathematical Journal*. 1 (1). p. 3–15.

Chilin V. I., Zakirova G. B. Linear Isometries of Banach-Kantorovich L_p -spaces / V. I. Chilin, G. B. Zakirova // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 1 (56). — С. 7–18.

УДК: 517.98 (УДК 517.98)

Пусть B произвольная полная булева алгебра, $Q(B)$ стоуновский компакт, соответствующий B , и пусть $C_\infty(Q(B))$ алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$. Рассматриваются пространства Банаха-Канторовича $L_p(B, m) \subset C_\infty(Q(B))$, ассоциированные с мерой m , заданной на B и принимающей значения в алгебре всех измеримых действительных функций. Показано, что в случае, когда мера m имеет свойство Магарам, для любой линейной изометрии $U : L_p(B, m) \rightarrow L_p(B, m)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, существует инъективный нормальный гомоморфизм $T : C_\infty(Q(B)) \rightarrow C_\infty(Q(B))$ и элемент $y \in L_p(B, m)$ такие, что $U(x) = y \cdot T(x)$ для всех $x \in L_p(B, m)$.

Ключевые слова: пространство Банаха-Канторовича, мера Магарам, векторное интегрирование, линейная изометрия.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S. A New approach to optimal solutions of noncooperative games: accounting for Savage–Niehans risk / V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, Y. S. Mukhina // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 1 (56). — С. 42–61.

УДК: 517.577.1

Представленный в статье новый подход к оптимальному решению некооперативной игры заключается в том, что каждый игрок стремится не только увеличить выигрыш, но и уменьшить свой риск. Вводится понятие сильно гарантированного равновесия Нэша и доказывается его существование в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: риск по Сэвиджу–Нихансу, минимаксное сожаление, неопределенность, некооперативная игра, оптимальное решение.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S. A new approach to guaranteed solutions of multicriteria choice problems: Pareto consideration of Savage–Niehans risk and outcomes / V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, Y. S. Mukhina // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 1 (56). — С. 42–61.

УДК: 519.810

Здесь предлагается два новых подхода к решению "привычных" задач для многокритериальной задачи бескоалиционной игры. Оба подхода основываются на паретовском объединении принципов гарантированного результата (по Вальду) и минимаксного сожаления (по Сэвиджу–Нихансу). Причем первый подход обеспечивает возможное увеличение связанного с этим риска (по Сэвиджу–Нихансу).

Ключевые слова: риск по Сэвиджу–Нихансу, минимаксное сожаление, неопределенность, многокритериальный выбор, паретовское объединение.

Макаров О. О. Анализ метаэвристик для задач многоагентной маршрутизации / О. О. Макаров // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 1 (56). — С. 62–87.

УДК: 004.023; 519.16

В статье представлен численный эксперимент, посвященный решению задачи коммивояжера (TSP) с использованием различных метаэвристик на наборе данных из библиотеки TSPLIB. Основная цель эксперимента заключалась в определении наиболее эффективных и точных методов для нахождения маршрутов.

Проведенный эксперимент показал, что все примененные метаэвристики способны находить приближенные или оптимальные решения задачи коммивояжера на различных наборах данных. Однако, в зависимости от характеристик задачи, некоторые методы проявили себя более эффективными и точными, чем другие. В заключительной таблице приведен список лучших алгоритмов, а также указано количество раз, когда каждый из алгоритмов показал лучшее решение среди остальных.

На основе полученных данных планируется создание зависимости метаданных графа от результатов и разработка интеллектуальной системы для подбора оптимальных метаэвристик. Рекомендуется выбирать метаэвристику в зависимости от особенностей задачи маршрутизации коммивояжера, таких как количество городов, географические характеристики, требования к точности решения и время выполнения.

Комбинирование различных метаэвристик также может привести к достижению более оптимальных результатов.

Ключевые слова: задача коммивояжера, задача нескольких коммивояжеров, иерархическая кластеризация, алгоритм решения нескольких задач коммивояжера, метаданные графа, метаэвристики, метрические характеристики графа.

Рахимова А. И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций / А. И. Рахимова // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 1 (56). — С. 88 – 110.

УДК: 517.547, 517.555

В данной работе изучаются гиперциклические операторы в инвариантном относительно дифференцирования весовом пространстве Фреше–Шварца целых функций $\mathcal{F}_\varphi$. Доказана гиперциклическость в этом пространстве нетривиальных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами конечного порядка и дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами бесконечного порядка, характеристическая функция которых есть целая функция экспоненциального типа. Доказано, что линейный непрерывный оператор в этом пространстве, отличный от кратного тождественному оператору и коммутирующий с операторами частного дифференцирования, является гиперциклическим.

Аналогичные утверждения выполняются для конечной и бесконечной сумм сдвигов, а также конечной суммы композиций сдвига и дифференциального оператора. Приведены теоремы о гиперциклическости оператора свертки в этом пространстве.

Ключевые слова: гиперциклический оператор, весовое пространство, оператор частного дифференцирования, оператор сдвига, оператор свертки, целая функция.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

***Жуковская Лидия
Владиславовна***

к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник Центрального экономико-математического института РАН,
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

***Жуковская Лидия
Владиславовна***

к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник Центрального экономико-математического института РАН,
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

***Жуковский Владислав
Иосифович***

д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета,
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

***Жуковский Владислав
Иосифович***

д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета,
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

***Закирова Гавхар
Ботировна***

базовый докторант кафедры высшей математики Ташкентского государственного транспортного университета, г.Ташкент, Республика Узбекистан,
e-mail: zg1090@list.ru

***Макаров Олег
Олегович***

аспирант кафедры информатики Физико-технического института Крымского федерального университета, г. Симферополь, РФ
e-mail: fantom2.00@mail.ru

***Мухина Юлия
Сергеевна***

студент кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: js.mukhina@mail.ru

**Мухина Юлия
Сергеевна**

студент кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация

e-mail: js.mukhina@mail.ru

**Рахимова Алсу
Ильдаровна**

аспирант кафедры математического анализа факультета математики и информационных технологий Уфимского университета науки и технологий, г. Уфа, РФ

e-mail: alsu1405@mail.ru

**Чилин Владимир
Иванович**

д. ф.-м. н, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики Академии Наук Республики Узбекистан, г.Ташкент, Республика Узбекистан,

e-mail: vladimirchil@gmail.com

Подписано к печати 4.08.2023. Формат 38х30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж 50 экз.

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.

Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7