

© 2024 г.

М. В. Артемьева*, М. О. Корпусов*[†]

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ (1 + 1)-МЕРНОЙ ТЕПЛО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается тепло-электрическая (1 + 1)-мерная модель нагрева полупроводника в электрическом поле. Для соответствующей начально-краевой задачи доказано существование непродолжаемого во времени классического решения и получены достаточные условия разрушения решения за конечное время.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение решения, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10665>

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные радиоинформационные системы (РИС), решающие задачи мониторинга космического пространства, характеризуются большим числом плотно расположенной радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), непрерывным функционированием в течение длительного времени, а также высокими требованиями к надежности. При работе структурно сложной РИС в теплонапряженных режимах резко возрастает тепловыделение в РЭА за счет высокой токовой нагрузки. Повышение тепловыделения влечет за собой перегрев аппаратуры и, как следствие, снижение надежности изделия [1], а также увеличение вероятности отказов аппаратуры. Данные обстоятельства обуславливают необходимость исследования нелинейных тепловых процессов в полупроводнике, а также построения и изучения тепло-электрической модели полупроводника.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах [2]–[6]. В работе [6] была предложена тепло-электрическая модель разогрева полупроводника, которая сводилась к рассмотрению следующего неклассического уравнения третьего порядка:

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{4\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \phi + \varepsilon_0 \sigma \phi \right) - \sigma \Delta \phi = \frac{\varepsilon \gamma}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} |D_x \phi|^2. \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00056).

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: artemeva.mv14@physics.msu.ru, korpusov@gmail.com

[†]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

В работе [6] мы показали, что при $\sigma = 0$, т. е. в случае диэлектрика, тепловой разогрев не приводит к возникновению теплового или электрического пробоя, а решение задачи существует глобально во времени вне зависимости от величины начальных распределений электрического потенциала $\phi_0(x)$ и температуры $\psi_0(x)$.

В настоящей работе мы рассмотрели частный случай уравнения (1.1) при $\varepsilon_0 = 0$ в $(1 + 1)$ -мерном случае:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_{xx} + \frac{\gamma}{2} |\phi_x|^2 \right) + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \phi_{xx} = 0. \quad (1.2)$$

Для задачи на отрезке $x \in [0, L]$ с граничными условиями

$$\phi(0, t) = \mu_0(t), \quad \phi_x(0, t) = \mu_1(t), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (1.3)$$

мы получили результат о существовании непродолжаемого во времени классического решения, а также получили достаточные условия разрушения решений за конечное время, что с физической точки зрения означает возникновение электрического “пробоя”.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

В приближении квазистационарного электрического поля справедливы следующие уравнения (см. [7]):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, n – плотность свободных зарядов, причем в случае поверхностной односвязности границы Γ определен потенциал электрического поля ϕ

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi.$$

Поскольку полупроводник, очевидно, является проводящей средой, мы должны дополнить уравнения (2.1) уравнением для тока свободных зарядов, которое имеет следующий вид [7]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{J}$ – вектор тока свободных зарядов. При этом учтем тепловой разогрев полупроводника [8], [9]:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} - \gamma \nabla \psi, \quad \sigma \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (2.3)$$

где ψ – температура в полупроводнике. Для температуры ψ имеет место уравнение теплопроводности с тепловым нагревом за счет электрического поля $\mathbf{E}$ следующего вида [8]:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + (\mathbf{J}, \mathbf{E}), \quad (2.4)$$

где параметр $\varepsilon_0 > 0$ имеет вид

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 e^{-\alpha}, \quad (2.5)$$

число $\varepsilon_1 > 0$ фиксировано, а параметр $\alpha > 0$ достаточно велик. Из уравнений (2.1)–(2.5) вытекает следующая система уравнений:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi + \sigma \Delta \phi + \gamma \Delta \psi = 0, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + \sigma |D_x \phi|^2 + \gamma (D_x \phi, D_x \psi). \quad (2.7)$$

Мы рассмотрим $(1+1)$ -мерный случай системы уравнений (2.6), (2.7):

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{xx} + \sigma \phi_{xx} + \gamma \psi_{xx} = 0, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_{xx} + \sigma |\phi_x|^2 + \gamma \phi_x \psi_x. \quad (2.9)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать систему уравнений в прямоугольнике $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ с граничными условиями в точке $x = 0$ отрезка $[0, L]$:

$$\phi(0, t) = \mu_0(t), \quad \phi_x(0, t) = \mu_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.10)$$

$$\psi(0, t) = \nu_0(t), \quad \psi_x(0, t) = \nu_1(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

Проинтегрируем последовательно равенство (2.8) два раза по $x \in [0, L]$ и получим два равенства:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi_x + \sigma \phi_x + \gamma \psi_x = k_1(t), \quad (2.12)$$

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \sigma \phi + \gamma \psi = k_2(x, t), \quad (2.13)$$

$$k_1(t) := \frac{\varepsilon}{4\pi} \mu'_1(t) + \sigma \mu_1(t) + \gamma \nu_1(t), \quad (2.14)$$

$$k_2(x, t) := x k_1(t) + \frac{\varepsilon}{4\pi} \mu'_0(t) + \sigma \mu_0(t) + \gamma \nu_0(t). \quad (2.15)$$

Справедлива цепочка равенств

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_{xx} + (\sigma \phi_x + \gamma \psi_x) \phi_x, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_{xx} + k_1(t) \phi_x - \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_x)^2, \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \gamma \psi}{\partial t} = \gamma \psi_{xx} + \gamma k_1(t) \phi_x - \frac{\varepsilon \gamma}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_x)^2. \quad (2.18)$$

Положим в равенстве (2.18) параметр $\varepsilon_0 = 0$ и получим

$$\gamma \psi_{xx} + \gamma k_1(t) \phi_x - \frac{\varepsilon \gamma}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_x)^2 = 0. \quad (2.19)$$

Из (2.19) с учетом (2.8) получим искомое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_{xx} + \frac{\gamma}{2} (\phi_x)^2 \right) - \frac{4\pi \gamma}{\varepsilon} k_1(t) \phi_x + \frac{4\pi \sigma}{\varepsilon} \phi_{xx} = 0. \quad (2.20)$$

Ниже мы рассмотрим случай $k_1(t) = 0$, т.е. уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi_{xx} + \frac{\gamma}{2} (\phi_x)^2 \right) + \frac{4\pi \sigma}{\varepsilon} \phi_{xx} = 0. \quad (2.21)$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В дальнейшем мы будем изучать следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx} + (u_x)^2) + u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L]. \quad (3.3)$$

Дадим определение классического решения задачи (3.1)–(3.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Классическим решением задачи (3.1)–(3.3) называется функция $u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(2)}[0, L])$, которая поточечно удовлетворяет равенствам (3.1)–(3.3), причем в граничных точках производные понимаются в соответствующих односторонних смыслах.

В задаче (3.1)–(3.3) сделаем замену

$$v(x, t) = u_x(x, t). \quad (3.4)$$

Получим задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_x + (v)^2) + v_x = 0, \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T], \quad (3.5)$$

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.6)$$

$$v(x, 0) = u_{0x}(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.7)$$

причем

$$u(x, t) = \mu_0(t) + \int_0^x v(y, t) dy. \quad (3.8)$$

Функция (3.8) удовлетворяет начальному условию (3.3) тогда и только тогда, когда выполнено условие согласования

$$\mu_0(0) = u_0(0). \quad (3.9)$$

4. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Если $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L])$ – решение задачи (3.5)–(3.7), причем $u_0(x) \in C^{(2)}[0, L]$ и $\mu_1(t) \in C^{(1)}[0, T]$, то справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_x + v_x = -\frac{\partial}{\partial t} v^2, \quad (4.1)$$

$$e^{-t} \frac{\partial}{\partial t} (e^t v_x) = -\frac{\partial}{\partial t} v^2, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^t v_x) = -\frac{\partial}{\partial t} (e^t v^2) + e^t v^2. \quad (4.3)$$

Интегрируя равенство (4.3) по времени с учетом (3.7), получим

$$v_x(x, t) = [u_{0xx}(x) + (u_{0x}(x))^2]e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} v^2(x, \tau) d\tau - v^2(x, t). \quad (4.4)$$

Интегрируя по x равенство (4.4) с учетом (3.6), получим нелинейное интегральное уравнение Вольтерры

$$v(x, t) = \mu_1(t) + \left[u_{0x}(x) - u_{0x}(0) + \int_0^x (u_{0y}(y))^2 dy \right] e^{-t} - \int_0^x v^2(y, t) dy + \int_0^t \int_0^x e^{-(t-\tau)} v^2(y, \tau) dy d\tau. \quad (4.5)$$

Заметим, что если выполнено условие согласования

$$\mu_1(0) = u_{0x}(0), \quad u_0(x) \in C^{(2)}[0, L], \quad \mu_1(t) \in C^{(1)}[0, T], \quad (4.6)$$

то решение $v(x, t) \in C([0, T]; C[0, L])$ интегрального уравнения (4.5) принадлежит классу $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L])$ и удовлетворяет граничным условиям (3.6) и (3.7).

Перепишем интегральное уравнение (4.5) в следующем абстрактном виде:

$$v(x, t) + G(v^2)(x, t) = h(x, t) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} G(v^2)(x, \tau) d\tau, \quad (4.7)$$

$$h(x, t) := \mu_1(t) + \left[u_{0x}(x) - u_{0x}(0) + \int_0^x (u_{0y}(y))^2 dy \right] e^{-t}, \quad (4.8)$$

$$G(v)(x) := \int_0^x v(y) dy. \quad (4.9)$$

Рассмотрим банахово пространство $C[0, L]$ относительно нормы

$$\|v\|_C := \sup_{x \in [0, L]} |v(x)| \quad (4.10)$$

и банахово пространство $\mathcal{L}(C[0, L], C[0, L])$ относительно операторной нормы

$$\|G(v)\|_{C \mapsto C} := \sup_{\|v\|_C=1} \|G(v)\|_C. \quad (4.11)$$

В частности, для оператора

$$G : C[0, L] \rightarrow C[0, L], \quad (4.12)$$

определенного равенством (4.9), справедлива оценка

$$\|G\|_{C \mapsto C} \leq L. \quad (4.13)$$

Рассмотрим также оператор

$$Q_1(z)(x) = z^2(x), \quad Q_1 : C[0, L] \rightarrow C[0, L]. \quad (4.14)$$

Очевидно, что

$$Q'_{1f}(z) \cdot g = 2z(x)g(x). \quad (4.15)$$

Поэтому имеем

$$Q_2(v) := G(v^2) = G(Q_1(v)), \quad (4.16)$$

$$Q'_{2f}(v) \cdot g = G(Q'_{1f}(v) \cdot g) = 2 \int_0^x v(y)g(y) dy. \quad (4.17)$$

ЛЕММА 1. *Справедливо неравенство*

$$\|[Q'_{2f}(v)]^m\|_{C \rightarrow C} \leq \frac{(2L)^m}{m!} \|v\|_C^m. \quad (4.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что справедливо неравенство

$$|[Q'_{2f}(v)]^m h(x)| \leq \frac{(2x)^m}{m!} \|v\|_C^m \|h\|_C. \quad (4.19)$$

Действительно, при $m = 1$ неравенство (4.19) очевидно. Предположим, что выполнено неравенство

$$|[Q'_{2f}(v)]^{m-1} h(x)| \leq \frac{(2x)^{m-1}}{(m-1)!} \|v\|_C^{m-1} \|h\|_C. \quad (4.20)$$

Тогда справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} |[Q'_{2f}(v)]^m h(x)| &= |[Q'_{2f}(v)]([Q'_{2f}(v)]^{m-1} h)| \leq \\ &\leq 2\|v\|_C \|v\|_C^{m-1} \|h\|_C \int_0^x \frac{(2y)^{m-1}}{(m-1)!} dy = \|v\|_C^m \|h\|_C \frac{(2x)^m}{m!}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Теперь из неравенства (4.19) легко получаем оценку

$$\|[Q'_{2f}(v)]^m h(x)\|_C \leq \frac{(2L)^m}{m!} \|v\|_C^m \|h\|_C, \quad (4.22)$$

из которой получаем искомую оценку

$$\|[Q'_{2f}(v)]^m\|_{C \rightarrow C} \leq \frac{(2L)^m}{m!} \|v\|_C^m. \quad (4.23)$$

Рассмотрим оператор

$$P(v) := v + Q_2(v), \quad (4.24)$$

который является непрерывно дифференцируемым на любой окрестности

$$O(v_0; R_0) \subset C[0, L] \quad \text{при} \quad R_0 > 0.$$

При этом оператор

$$P'_f(v_0) := I + Q'_{2f}(v_0) \quad (4.25)$$

в силу оценки (4.23) обратим, причем

$$[P'_f(v_0)]^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m [Q'_{2f}(v_0)]^m, \quad (4.26)$$

$$\|[P'_f(v_0)]^{-1}\|_{C \rightarrow C} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2L)^m}{m!} \|v_0\|_C^m. \quad (4.27)$$

Поэтому оператор $P'_f(v_0)$ взаимно однозначно отображает банахово пространство $C[0, L]$ на $C[0, L]$.

С одной стороны, в классе $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L])$ продифференцируем равенство (4.7) по времени и получим в абстрактном смысле равенство

$$(I + Q'_{2f}(v)) \frac{dv}{dt} = \frac{dh}{dt}(t) + Q_2(v)(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} Q_2(v)(\tau) d\tau. \quad (4.28)$$

С другой стороны, в силу доказанной уже обратимости оператора $I + Q'_{2f}(v)$ соотношение (4.28) эквивалентно следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= (I + Q'_{2f}(v))^{-1} \frac{dh}{dt}(t) + (I + Q'_{2f}(v))^{-1} Q_2(v)(t) - \\ &- (I + Q'_{2f}(v))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)} Q_2(v)(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.29)$$

которое, в свою очередь, эквивалентно следующему абстрактному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} v(t) &= Q(v)(t), \quad Q(v)(t) := u_{0x}(x) + \int_0^t (I + Q'_{2f}(v)(\tau))^{-1} \frac{dh}{d\tau}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t (I + Q'_{2f}(v)(\tau))^{-1} Q_2(v)(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^t \int_0^\tau e^{-(\tau-\sigma)} (I + Q'_{2f}(v)(\tau))^{-1} Q_2(v)(\sigma) d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Заметим, что справедливо равенство (см. [10], лемма 1, гл. 7):

$$\begin{aligned} (I + Q'_{2f}(v_1))^{-1} - (I + Q'_{2f}(v_2))^{-1} &= \\ = (I + Q'_{2f}(v_2))^{-1} \sum_{m=1}^{+\infty} [(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]^m. \end{aligned} \quad (4.31)$$

При этом в силу (4.27) имеем

$$\|(I + Q'_{2f}(v_k))^{-1}\|_{C \mapsto C} \leq J_k := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2L)^m}{m!} \|v_k\|_C^m = e^{2L\|v_k\|_C} \quad (4.32)$$

при $k = 1, 2$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Имеет место оценка*

$$\|[(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]^m\|_{C \mapsto C} \leq \frac{(2L)^m}{m!} \|v_2 - v_1\|_C^m J_2^m. \quad (4.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем по индукции оценку

$$\|[(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]^m f\| \leq \frac{(2x)^m}{m!} \|v_2 - v_1\|_C^m J_2^m \|f\|_C. \quad (4.34)$$

Докажем справедливость неравенства (4.34) при $m = 1$. Действительно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} & |[(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]f| = \\ & = \left| (Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1)) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [Q'_{2f}(v_2)]^n f \right|, \\ & Q'_{2f}(v_2)f = 2 \int_0^x v_2(y)f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Заметим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [Q'_{2f}(v_2)]^n f \right| \leq \\ & \leq \|f\|_C \left[1 + 2\|v_2\|_C x + \|v_2\|_C^2 \frac{(2x)^2}{2!} + \dots + \|v_2\|_C^n \frac{(2x)^n}{n!} + \dots \right] \leq \\ & \leq \|f\|_C \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2L)^n}{n!} \|v_2\|_C^n = J_2 \|f\|_C. \end{aligned} \quad (4.36)$$

С учетом (4.36) из (4.35) получаем оценку

$$|(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}f| \leq 2x\|v_1 - v_2\|_C J_2 \|f\|_C. \quad (4.37)$$

Предположим, что неравенство (4.34) выполнено. Докажем неравенство

$$\begin{aligned} & |[(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]^{m+1}f| \leq \\ & \leq \frac{(2x)^{m+1}}{(m+1)!} \|v_2 - v_1\|_C^{m+1} J_2^{m+1} \|f\|_C. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Действительно, справедливо равенство

$$\begin{aligned} & |[(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]^{m+1}f| = \\ & = |[(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]\phi_m|, \\ & \phi_m = [(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}]^m f. \end{aligned} \quad (4.39)$$

В силу предположения индукции справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}\phi_m| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} [Q'_{2f}(|v_2|)]^n |\phi_m| \leq \\ & \leq \|v_2 - v_1\|_C^m J_2^m \|f\|_C \sum_{n=0}^{+\infty} [Q'_{2f}(|v_2|)]^n \frac{(2x)^m}{m!} \leq \\ & \leq \|v_2 - v_1\|_C^m J_2^m \|f\|_C \left[\frac{(2x)^m}{m!} + \|v_2\|_C \frac{(2x)^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{\|v_2\|_C^n}{n!} \frac{(2x)^{m+n}}{(m+n)!} + \dots \right] \leq \\ & \leq \frac{(2x)^m}{m!} \|v_2 - v_1\|_C^m J_2^m \|f\|_C \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2L\|v_2\|_C)^n}{n!} = \\ & = \frac{(2x)^m}{m!} \|v_2 - v_1\|_C^m J_2^{m+1} \|f\|_C. \end{aligned} \quad (4.40)$$

С учетом (4.40) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| [(Q'_{2f}(v_2) - Q'_{2f}(v_1))(I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}] \phi_m \right| \leq \\ & \leq 2 \|v_1 - v_2\|_C^{m+1} J_2^{m+1} \|f\|_C \int_0^x \frac{(2y)^m}{m!} dy = \\ & = \frac{(2x)^{m+1}}{(m+1)!} \|v_2 - v_1\|_C^{m+1} J_2^{m+1} \|f\|_C. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Таким образом, оценка (4.38) доказана. Осталось сделать элементарные преобразования и получить из (4.34) оценку (4.33).

Из равенства (4.31) с учетом (4.32) и (4.33) получим

$$\begin{aligned} & \|(I + Q'_{2f}(v_1))^{-1} - (I + Q'_{2f}(v_2))^{-1}\|_{C \rightarrow C} \leq \\ & \leq J_2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2LJ_2)^m}{m!} \|v_1 - v_2\|_C^m = J_2 [\exp(2LJ_2 \|v_1 - v_2\|_C) - 1] \leq \\ & \leq 2LJ_2^2 \exp(2LJ_2 \|v_1 - v_2\|_C) \|v_1 - v_2\|_C. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Справедлива очевидная оценка

$$\|Q_2(v_2) - Q_2(v_1)\|_C \leq 2L \max\{\|v_1\|_C, \|v_2\|_C\} \|v_1 - v_2\|_C. \quad (4.43)$$

Справедлив следующий результат.

ЛЕММА 3. *Для любой функции $v(x, t) \in C([0, T]; C[0, L])$ операторы действуют следующим образом:*

$$(I + Q'_{2f}(v)(t))^{-1} : C([0, T]; C[0, L]) \rightarrow C([0, T]; C[0, L]), \quad (4.44)$$

$$Q_2(\cdot) : C([0, T]; C[0, L]) \rightarrow C([0, T]; C[0, L]). \quad (4.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат (4.45) – очевидное следствие оценки (4.43). Для доказательства (4.44) заметим, что для функции

$$h(t) := (I + Q'_{2f}(v)(t))^{-1} f(t), \quad f(t) \in C([0, T]; C[0, L]),$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} h(t_1) - h(t_2) &= [(I + Q'_{2f}(v)(t_1))^{-1} - (I + Q'_{2f}(v)(t_2))^{-1}] f(t_1) + \\ &+ (I + Q'_{2f}(v)(t_2))^{-1} [f(t_1) - f(t_2)]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Осталось воспользоваться оценками (4.32) и (4.42).

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} J(\tau, \sigma) &:= (I + Q'_{2f}(v_1)(\tau))^{-1} Q_2(v_1)(\sigma) - (I + Q'_{2f}(v_2)(\tau))^{-1} Q_2(v_2)(\sigma) = \\ &= [(I + Q'_{2f}(v_1)(\tau))^{-1} - (I + Q'_{2f}(v_2)(\tau))^{-1}] Q_2(v_1)(\sigma) + \\ &+ (I + Q'_{2f}(v_2)(\tau))^{-1} [Q_2(v_1)(\sigma) - Q_2(v_2)(\sigma)], \end{aligned} \quad (4.47)$$

из которого с учетом (4.42) и (4.43) получим оценку

$$\begin{aligned} \|J(\tau, \sigma)\|_C &\leq 2L\|v_1(\sigma)\|_C^2 J_2(\tau) [\exp(2LJ_2(\tau)\|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_C) - 1] + \\ &\quad + J_2(\tau) 2L \max\{\|v_1(\sigma)\|_C, \|v_2(\sigma)\|_C\} \|v_1(\sigma) - v_2(\sigma)\|_C \leq \\ &\leq 4L^2\|v_1(\sigma)\|_C^2 J_2^2(\tau) \exp(2LJ_2(\tau)\|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_C) \|v_1(\tau) - v_2(\tau)\|_C + \\ &\quad + J_2(\tau) 2L \max\{\|v_1(\sigma)\|_C, \|v_2(\sigma)\|_C\} \|v_1(\sigma) - v_2(\sigma)\|_C, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где $J_2(\tau) := e^{2L\|v_2(\tau)\|_C}$.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} Q(v_1)(t) - Q(v_2)(t) &= \int_0^t [(I + Q'_{2f}(v_1)(\tau))^{-1} - (I + Q'_{2f}(v_2)(\tau))^{-1}] \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau + \\ &\quad + \int_0^t J(\tau, \tau) d\tau - \int_0^t \int_0^\tau e^{-(\tau-\sigma)} J(\tau, \sigma) d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Пусть теперь $v_1(t), v_2(t) \in B_R$, где

$$B_R := \left\{ v(t) \in C([0, T]; C[0, L]) : \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_C \leq R \right\}, \quad R > 0.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\sup_{\tau, \sigma \in [0, T]} \|J(\tau, \sigma)\|_C \leq a_1(R) \sup_{t \in [0, T]} \|v_1(t) - v_2(t)\|_C, \quad (4.50)$$

$$a_1(R) := 4L^2 R^2 \exp(4LR + 4LRe^{2LR}) + 2LRe^{2LR}, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|(I + Q'_{2f}(v_1)(t))^{-1} - (I + Q'_{2f}(v_2)(t))^{-1}\|_{C \rightarrow C} &\leq \\ &\leq a_2(R) \sup_{t \in [0, T]} \|v_1(t) - v_2(t)\|_C, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$a_2(R) := 2L \exp(4LR + 4LRe^{2LR}). \quad (4.53)$$

Из равенства (4.49) с учетом оценок (4.50)–(4.53) получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|Q(v_1)(t) - Q(v_2)(t)\|_C &\leq \\ &\leq T \left[a_2(R) \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{dh(t)}{dt} \right\|_C + a_1(R)(1 + T) \right] \sup_{t \in [0, T]} \|v_1(t) - v_2(t)\|_C. \end{aligned} \quad (4.54)$$

При этом справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|Q(v)(t)\|_C &\leq \\ &\leq \|u_{0x}\|_C + T \left[a_2(R) \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{dh(t)}{dt} \right\|_C + a_1(R)(1 + T) \right] R. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Применяя принцип сжимающих отображений к уравнению (4.30) с учетом оценок (4.54) и (4.55), получим, что для любой функции $u_0(x) \in C^{(1)}[0, L]$ найдется достаточно малое $T > 0$ такое, что существует единственное решение $v(t) \in C([0, T]; C[0, L])$ интегрального уравнения (4.30). Теперь нужно применить стандартный алгоритм продолжения во времени (см. [11]) и получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых функций $u_0(x) \in C^{(1)}[0, L]$ и $\mu_1(t) \in C[0, +\infty)$ найдется такое максимальное значение $T_0 = T_0(u_0, \mu_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $v(x, t) \in C([0, T]; C[0, L])$ интегрального уравнения (4.30), причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$. В последнем случае имеем*

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_C = +\infty. \quad (4.56)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы доказать, что на самом деле решение интегрального уравнения (4.30) для любых функций $u_0(x) \in C^{(2)}[0, L]$ и $\mu_1(t) \in C^{(1)}[0, +\infty)$ обладает большей гладкостью, а именно

$$v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L]) \quad \text{для всех } T \in (0, T_0).$$

Справедлив следующий результат в этом направлении.

ЛЕММА 4. *Оператор $Q_2(\cdot)$, определенный в (4.16), действует как*

$$Q_2(\cdot) : C([0, T]; C[0, L]) \rightarrow C([0, T]; C^{(1)}[0, L]), \quad (4.57)$$

а для любой функции $v(t) \in C([0, T]; C[0, L])$ линейный оператор действует как

$$(I + Q'_{2f}(v)(t))^{-1} : C([0, T]; C^{(1)}[0, L]) \rightarrow C([0, T]; C^{(1)}[0, L]). \quad (4.58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство (4.57) очевидно. Доказательство (4.58) основано на представлениях (4.27) и (4.31).

Справедлива следующая

ЛЕММА 5. *Оператор $Q(\cdot)$, определенный уравнением (4.30), действует как*

$$Q(\cdot) : C([0, T]; C[0, L]) \rightarrow C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L]). \quad (4.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение является очевидным следствием явного вида оператора $Q(\cdot)$ и леммы 4.

С учетом леммы 5 продифференцируем по $t \in [0, T]$ уравнение (4.30) и получим (4.29). Из равенства (4.29) вытекает (4.28). Из (4.28) с учетом условий согласования (4.6) получим равенство (4.7). Из (4.7) получаем равенство (4.4), из которого получаем уравнение (4.1). Заметим, что при выполнении условий согласования (4.6) из равенства (4.7) получаем, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (3.6) и (3.7). Таким образом, с учетом теоремы 1 приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Для любых функций $u_0(x) \in C^{(2)}[0, L]$ и $\mu_1(t) \in C^{(1)}[0, +\infty)$ при выполнении условий согласования (4.6) найдется такое максимальное значение $T_0 = T_0(u_0, \mu_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L])$ задачи (3.5)–(3.7), причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$. В последнем случае имеем

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_C = +\infty. \quad (4.60)$$

С учетом этой теоремы приходим к основному результату работы.

ТЕОРЕМА 3. Для любых функций $u_0(x) \in C^{(2)}[0, L]$ и $\mu_0(t), \mu_1(t) \in C^{(1)}[0, +\infty)$ при выполнении условий согласования

$$u_0(0) = \mu_0(0), \quad u_{0x}(0) = \mu_1(0) \quad (4.61)$$

найдется такое максимальное значение $T_0 = T_0(u_0, \mu_1) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное классическое решение $u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(2)}[0, L])$ задачи (3.1)–(3.3), причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$. В последнем случае имеем

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \in [0, L]} |u_x(x, t)| = +\infty. \quad (4.62)$$

5. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L])$ при $T > 0$ и $L > 0$. При $n \geq 3$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^L (L-x)^n v_x(x, t) dx &= (L-x)^n v(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} + n \int_0^L (L-x)^{n-1} v(x, t) dx = \\ &= -L^n \mu_1(t) + n \int_0^L (L-x)^{n-1} v(x, t) dx, \\ n \int_0^L (L-x)^{n-1} v(x, t) dx + \int_0^L (L-x)^n v^2(x, t) dx &= \\ &= \int_0^L (L-x)^{n-1} [(L-x)v^2 + nv] dx, \\ (L-x)v^2 + nv &= \left((L-x)^{1/2} v(x, t) + \frac{n}{2(L-x)^{1/2}} \right)^2 - \frac{n^2}{4(L-x)} = \\ &= w^2 - \frac{n^2}{4(L-x)}, \\ w &= (L-x)^{1/2} v(x, t) + \frac{n}{2(L-x)^{1/2}}, \\ \int_0^L (L-x)^N [v_x + v^2] dx &= -L^n \mu_1(t) + \int_0^L (L-x)^{n-1} w^2 dx - \frac{n^2}{4} \frac{L^{n-1}}{n-1}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Умножим уравнение (3.5) в классе $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(1)}[0, L])$ на функцию $(L-x)^N$ и проинтегрируем по частям по $x \in [0, L]$. Тогда с учетом граничного

условия (3.6) и равенств (5.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_1 - L^n \mu'_1(t) - L^n \mu_1(t) + n J_2 &= 0, \\ J_1 &= \int_0^L (L-x)^{n-1} w^2 dx, \\ J_2 &= \int_0^L (L-x)^{n-1} v dx = \\ &= \int_0^L (L-x)^{n-3/2} \left[(L-x)^{1/2} v + \frac{n}{2(L-x)^{1/2}} \right] dx - \frac{n}{2} \int_0^L (L-x)^{n-2} dx = \\ &= \int_0^L (L-x)^{n-3/2} w dx - \frac{n}{2} \frac{L^{n-1}}{n-1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L (L-x)^{n-3/2} w dx \right| &\leq \int_0^L (L-x)^{(n-1)/2} |w| (L-x)^{(n-2)/2} dx \leq \\ &\leq \left(\int_0^L (L-x)^{n-1} w^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L (L-x)^{n-2} dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{L^{n-1}}{n-1} \right)^{1/2} J_1^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Итак, с учетом (5.2), (5.3) получаем

$$\frac{dJ_1(t)}{dt} \leq L^n (\mu'_1(t) + \mu_1(t)) + \frac{n^2}{2} \frac{L^{n-1}}{n-1} + n \left(\frac{L^{n-1}}{n-1} \right)^{1/2} J_1^{1/2}, \quad (5.4)$$

откуда, воспользовавшись очевидным неравенством

$$ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2,$$

получим

$$\frac{dJ_1(t)}{dt} \leq A(t) + J_1(t), \quad A(t) = L^n (\mu'_1(t) + \mu_1(t)) + \frac{3n^2}{4} \frac{L^{n-1}}{n-1}. \quad (5.5)$$

Это неравенство легко интегрируется, и мы приходим к следующим оценкам:

$$0 \leq J_1(t) \leq \left(J_1(0) + \int_0^t e^{-\tau} A(\tau) d\tau \right) e^t. \quad (5.6)$$

Предположим, что найдутся такие функции $u_0(x) \in C^{(2)}[0, L]$ и $\mu_1(t) \in C^{(1)}[0, +\infty)$, что для некоторого $t_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^L (L-x)^{n-1} \left[(L-x)^{1/2} u_{0x}(x) + \frac{n}{2(L-x)^{1/2}} \right]^2 dx &= J_1(0) < \\ < - \int_0^t e^{-\tau} A(\tau) d\tau = -L^n \int_0^{t_0} e^{-\tau} [\mu'_1(\tau) + \mu_1(\tau)] d\tau - \frac{3n^2}{4} \frac{L^{n-1}}{n-1} [1 - e^{-t_0}], \end{aligned} \quad (5.7)$$

тогда при $t = t_0$ неравенства (5.6) окажутся противоречивыми. Приведем простой пример такой ситуации. Пусть $u_0(x) \in C^{(1)}[0, L]$ – произвольная фиксированная

функция, а функция $\mu_1(t)$ имеет вид

$$\mu_1(t) = -a_1 e^t, \quad a_1 > 0. \quad (5.8)$$

Тогда при достаточно большом $t = t_0 > 0$ будет выполнено неравенство

$$J_1(0) + \frac{3n^2}{4} \frac{L^{n-1}}{n-1} [1 - e^{-t_0}] - 2L^n a_1 t_0 < 0. \quad (5.9)$$

С другой стороны, существует широкий набор функций $\mu_1(t)$ граничного режима, для которых из неравенства (5.6) вытекает глобальная во времени априорная оценка, например при

$$\mu'_1(t) + \mu_1(t) \geq 0, \quad \mu_1(t) \in C^{(1)}[0, +\infty). \quad (5.10)$$

Таким образом, с учетом теоремы 3 справедлива

ТЕОРЕМА 4. Если для функций $u_0(x) \in C^{(2)}[0, L]$ и $\mu_0(t), \mu_1(t) \in C^{(1)}[0, +\infty)$ выполнено неравенство (5.7), то при выполнении условий согласования (4.61) для времени существования решения $T_0 > 0$ задачи (3.1)–(3.3) выполнено неравенство $T_0 < +\infty$ и поэтому выполнено предельное свойство (4.62), т.е. решение $u(x, t)$ класса $C^{(1)}([0, T]; C^{(2)}[0, L])$ (для любого $T \in (0, T_0)$) разрушается за конечное время $T_0 > 0$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А. В. Тимошенко, Д. В. Калеев, А. Ю. Перлов и др., “Сравнительный анализ аналитических и эмпирических методик оценки текущих параметров надежности радиолокационных комплексов мониторинга”, *Изв. вузов. Электроника*, **25**:3 (2020), 244–254.
- [2] М. О. Корпусов, “О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби”, *Матем. заметки*, **93**:1 (2013), 81–95.
- [3] М. О. Корпусов, “О разрушении решения нелокального уравнения с градиентной нелинейностью”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, вып. 11, 2012, №5(264), 43–53.
- [4] М. О. Корпусов, А. А. Панин, А. Е. Шишков, “О критическом показателе ‘мгновенное разрушение’ versus ‘локальная разрешимость’ в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **85**:1 (2021), 118–153.
- [5] М. О. Корпусов, А. Ю. Перлов, А. В. Тимошенко, Р. С. Шафир, “О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений тепло-электрической модели”, *Матем. заметки*, **114**:5 (2023), 759–772.
- [6] М. О. Корпусов, А. Ю. Перлов, А. В. Тимошенко, Р. С. Шафир, “О глобальной во времени разрешимости одной нелинейной системы уравнений тепло-электрической модели с квадратичной нелинейностью”, *ТМФ*, **217**:2 (2023), 378–390.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VIII: *Электродинамика сплошных сред*, Физматлит, М., 2005.
- [8] Ф. Г. Басс, В. С. Бочков, Ю. С. Гуревич, *Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках*, Наука, М., 1984.
- [9] В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, *Физика полупроводников*, Наука, М., 1990.
- [10] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [11] А. А. Панин, “О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра”, *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884–903.

Поступила в редакцию 26.12.2023,
после доработки 26.12.2023,
принята к публикации 21.01.2024