МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА • ИНФОРМАТИКА

ПОТЕНЦИАЛ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ И УЧИТЕЛЕЙ №8·2023

SAPERE AUDE – ДЕРЗАЙ ЗНАТЬ!

История одного метода умножения

Решение физических задач посредством метода индукции

ISSN 1814-6422

12+

ДОРОГИЕ ЧИТАТЕЛИ!

Вы держите в руках журнал «Потенциал», ежемесячный физико-математический журнал для старшеклассников и учителей. Целью журнала является популяризация физико-математических наук, привлечение молодых людей к изучению физики, математики и информатики и повышение качества физико-математического образования. Мы верим, что интерес к точным наукам закладывается не только до школы, но и непосредственно во время процесса обучения, и целью школьного образования является развитие и удержание этого интереса. Материалы нашего журнала направлены на развитие знаний старшеклассников и на помощь учителям в подборе примеров и тем для уроков и дополнительных занятий. Журнал является площадкой для педагогов школ и преподавателей вузов, с помощью которой можно делиться своими знаниями с коллегами, старшеклассниками и заинтересованными наукой читателями.

Мы ждём новых авторов, которые поддерживают наш взгляд на образование, стремятся развиваться и развивать окружающих!

Вся переписка с редакцией осуществляется по адресу:
109544, г. Москва, ул. Рабочая, 84,
редакция журнала «Потенциал».
Тел.: 8 (495) 768-25-48, e-mai: editor@edu-potential.ru
Всю дополнительную информацию о журнале,
а также рекомендации для авторов
вы найдете на нашем сайте www.edu-potential.ru

МАТЕМАТИКА · ФИЗИКА · ИНФОРМАТИКА
ПОТЕНЦИАЛ
журнал для старшеклассников и учителей
АВГУСТ
№8 · 2023

В ЭТОМ НОМЕРЕ

Редакция журнала «Потенциал».
Адрес: 115184, г. Москва, Климентовский пер., д. 1
Тел. 8 (495) 768-25-48
E-mail: editor@edu-potential.ru
Подписано в печать 11.12.2023
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 5. Формат 70х100 $^{1}/_{16}$.
Тираж 1000 экз. Заказ №413.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами.
Полиграфическая компания «Экспресс», г. Москва

Журнал издаётся на средства выпускников технических вузов.

ISSN 1814-6422

Маца Елена Аркадьевна
Шеф-редактор портала The Vanderlust,
театральный и арт-обозреватель,
экс-преподаватель словесности

Величины: математики-учителя

Посвящается Году педагога и наставника

2023 год в нашей стране объявлен Годом педагога и наставника, и символично, что он ознаменован также рядом круглых памятных дат, связанных с именами видных математиков прошлого, занимавшихся не только наукой, но и просвещением и педагогической деятельностью. О некоторых из них хочется рассказать подробно, тем более что их биографии настолько незаурядны, что заслуживают каждая отдельного романа, не меньше.

Семен Кириллович Котельников 1723–1806

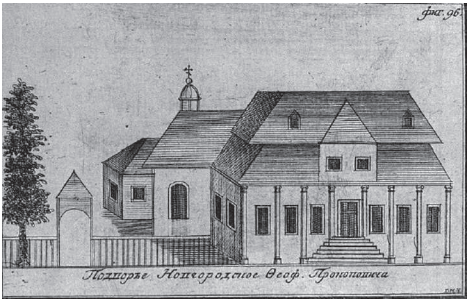
Первый российских ученый, создавший собственные самостоятельные труды по математике и механике, академик, автор научных пособий, полиглот, просветитель – кто бы мог подумать, что сын простого солдата-гвардейца достигнет таких высот!

Силуэт С. К. Котельникова работы Ф. Антинга. Архив Российской академии наук

Родился Семен Котельников в 1723 году в Санкт-Петербурге в семье рядового лейб-гвардии Преображенского полка и до 11 лет был на домашнем обучении – во всяком случае известно, что чтению и азам грамоты его обучил отец.

Когда же ему исполнилось 11, он поступил в школу Феофана Прокоповича, видного политического и духовного деятеля того времени, соратника Петра I, основавшего свое учебное заведение в первую очередь для сирот и детей из неимущих семей, из чего следует, что жилось семье Котельниковых, скорее всего, непросто.

Там Семену довелось проучиться около четырех лет, изучая арифметику, геометрию, географию, историю, грамматику, риторику, русский, латинский и греческий языки и другие предметы, после чего он был переведен в Александро-Невскую



Подворье Феофана Прокоповича, где находилась школа, в которой учился Семен Котельников

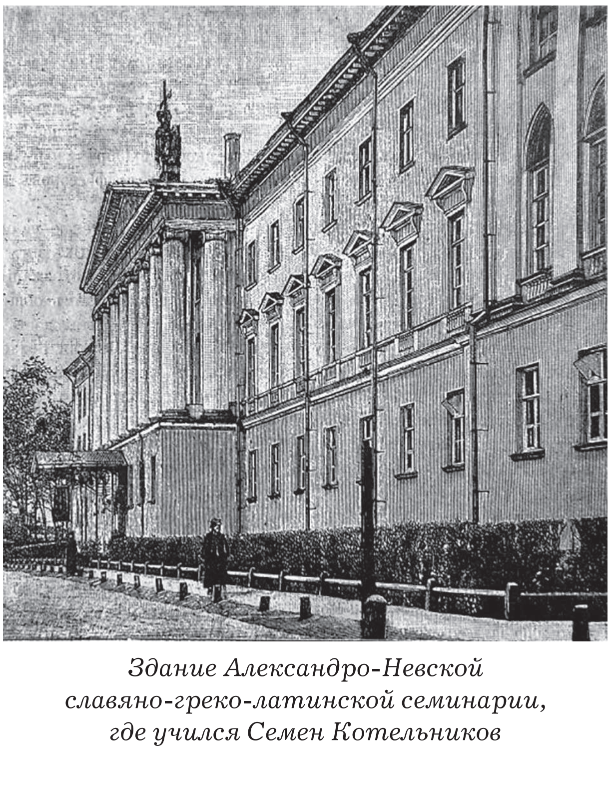
славяно-греко-латинскую семинарию, где пробыл на полном пансионе еще примерно три года, пока ему не исполнилось 18 лет.

Начальство семинарии, справедливо считавшее, что по достижении определенного возраста учащимся надлежит двигаться дальше в зависимости от способностей и наклонностей, активно помогало своим воспитанникам с последующим распределением.

Так юный Котельников оказался сначала в академической гимназии, а потом и в университете, где ему преподавали, в частности, Михайло Васильевич Ломоносов, с кем спустя годы – кто бы мог подумать! – они станут коллегами, – и Георг Вильгельм Рихман. Последний, кстати, очень скоро начал выделять Котельникова из числа других студентов. Сохранилось даже его сообщение в канцелярию Академии наук, где отмечалось, что «Котельников... настолько успел, что приступил уже к изучению высшей математики и в ее прикладной части, то есть к механике, гидростатике, гидравлике и аэрометрии, проявляет большое усердие».

Кстати, и профессор Христиан Крузиус, преподававший на кафедре «древностей и истории литеральной», также был очень доволен Котельниковым, преуспевавшим по части изучения латыни и античной литературы, что свидетельствовало о незаурядных лингвистических способностях старательного студента, впоследствии проявившихся еще нагляднее.

К моменту выхода из университета в 1750 году Семену Кирилловичу было уже около 30 лет. Тема его научной работы (диплома, как сказали бы сегодня) звучала так: «О спрямлении и квадратуре конхоиды при помощи касательной». О ней весьма высоко отозвался сам Лео-



Здание Александро-Невской славяно-греко-латинской семинарии, где учился Семен Котельников

Императорский университет в Санкт-Петербурге

нард Эйлер – выдающийся математик, академик, человек колоссальной широты интересов и поистине энциклопедических знаний, отметивший, что этот труд «свидетельствует о чрезвычайно тонком и весьма предрасположенном к математическим занятиям уме». За столь незаурядное успехи Котельникову присвоили звание адъюнкта, то есть помощника профессора, и решили «послать его в город Берлин к профессору Эйлеру при рекомендации».

На дорожку новоиспеченного адъюнкта снабдили инструкцией, где были изложены надлежащие указания. Строго предписывалось, например, вести «благочинное житие», способствовать укреплению репутации и чести российской Академии наук, уделять внимание изучению иностранных языков, особенно французского, заниматься переводами математических сочинений и старательно продолжать «обучаться высшей математике под предводительством профессора Эйлера и без его ведома ничего не предпринимать». Не обошлось и без угрозы наказать рублем в случае отступления от правил: «А ежели против предписанных в сей инструкции пунктов исполнения тобой чинено не будет, то ты за то в свое время по надлежащему штрафован быть имеешь».

Но сначала Котельников поехал в Лейпциг, где занялся изучением математики и физики под руководством профессоров Готфрида Гейнзиуса и Авраама Кестнера. Правда, прослушать полные курсы профессорских лекций ему не довелось из-за... материальных затруднений – у Котельникова просто не хватало средств, чтобы расплачиваться с учеными мужами за получаемые знания. Весной 1752 года он даже написал об этом в Академию наук, сообщив о своем положении, но получил ответ, что ему следует отправиться в Берлин, как и предполагалось ранее, и там «со всякою прилежностью п радением» продолжить погружение в науки уже под контролем профессора Эйлера.

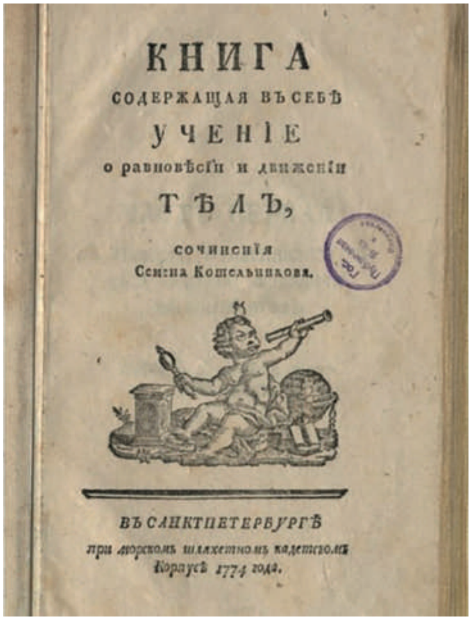
Леонард Эйлер, запомнивший Семена Кирилловича еще по Петербургу, встретил его тепло и приветливо, даже предложил разместиться у себя, чем тот с радостью воспользовался. Академии требовались регулярные отчеты о том, как движется процесс, и, нужно отдать должное Эйлеру, он не скупился на похвалы, исключительно высоко отзывался о Котельникове и однажды, сопоставляя его с немецкими коллегами, даже заявил, что по сравнению с некоторыми из них мог бы «с полным правом считать Котельникова Архимедом или Ньютоном» и предположил, что совсем скоро в Германии ему не будет равных.

В результате, когда Семен Кириллович вернулся в Россию, его избрали экстраординарным профессором высшей математики – соответствующее постановление вышло в самом конце 1756 года, причем интересно, что кандидатуру Котельникова поддержал в том числе сам Ломоносов, его бывший преподаватель. А через четыре года Котельников получил высший научный ранг, став ординарным профессором.

Деятельность его была необычайно широка и активна: он читал лекции студентам, выступал с научными докладами, инспектировал Академическую гимназию, заведовал Кунсткамерой и библиотекой, и это еще далеко не полный список его занятий.

По себе он оставил около 10 работ в области математики и смежных с ней наук, но самое главное – учебники, ощутимо повлиявшие на систему преподавания математики, механики и геодезии в России. Здесь стоит сказать, что учебников, написанных русскими учеными на родном языке, в XVII веке было наперечет, и всех, кто брался тогда за это сложное и важное дело, можно смело назвать настоящими подвижниками и первопроходцами.

Главным из пособий Котельникова по праву признается руководство по теоретической механике под названием «Книга, содержащая в себе учение о равновесии и движении тел», изданное в 1774 году, то есть 250 лет назад. Опираясь на работы Эйлера, Лейбница, Вольфа и других видных ученых, Семен Кириллович систематизировал и постарался максимально полно и доходчиво изложить законы статики и динамики и частично – теорию сопротивления материалов.



Титульный лист «Книги, содержащая в себе учение о равновесии и движении тел» С.К. Котельникова. 1774 г.

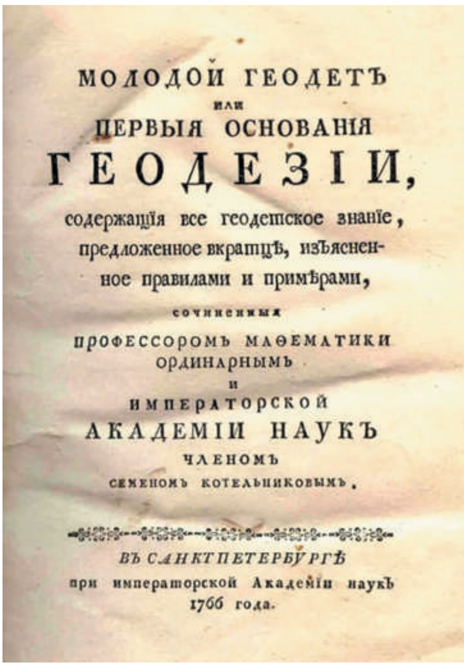
Знаковыми в истории российской учебной литературы и отечественного физико-математического образования стали и другие его труды, например «Молодой Геодет, или Первые основания геодезии», вышедший в 1766-м, и руководство по математическому анализу. Понимание, какими должны быть учебники, исходило из эмпирических знаний – в общей сложности Семен Кириллович занимался педагогической деятельностью около 40 лет!

Читать лекции в университете он начал с конца 1750-х годов. Вот как торжественно и обстоятельно звучали объявления о содержании его лекций в то время: «Семен Котельников, высшей математики экстраординарный профессор, слушателям своим… подавать будет наставление о дифференциальных и интегральных выкладках, продолжив наперед некоторые основания алгебры и кривых линий, кои могут служить вместо введения к помянутым выкладкам».

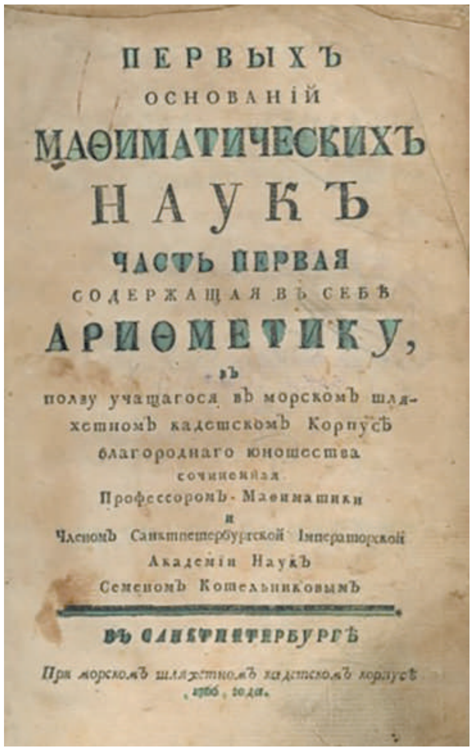
Давал он и публичные математические лекции для широкой публики, считая просвещение масс одной из важнейших своих миссий. Но и этим дело не ограничивалось – Котельникова не меньше волновало и школьное образование, и к разработке актуального проекта о расширении школьного дела в России он подошел, как ему это было свойственно, более чем серьезно и обстоятельно.

Особо стоит упомянуть о службе Котельникова инспектором Академической гимназии, первом общеобразовательном среднем учебном заведении Российской империи, которая была открыта в Петербурге при Академии наук в 1726 году и дольше четверти века оставалась единственной гимназией в стране.

В 1758 году ее ректором избрали Михайло Васильевича Ломоносова, и именно он, прекрасно знавший и высоко ценивший Котельникова, спустя три года рекомендовал его на должность инспектора. По мнению Ломоносова, это место должен был занимать, во-первых, «природный россиянин, для того чтобы имел о учащихся усердие, попечение, как о своих свойственниках или детях»; во-вторых, «чтобы главной команде больше имел повиновения и не всег-


МОЛОДОЙ ГЕОДЕТЪ
или
ПЕРВЫЯ ОСНОВАНІЯ
ГЕОДЕЗІИ,
содержащія все геодетское знаніе, предложенное вкратцѣ, изъясненное правилами и примѣрами,
сочиненныя
профессоромъ маѳематики ординарнымъ
и
императорской
академіи наукъ
членомъ
семеномъ котельниковымъ.
ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
при императорской Академіи наукъ
1766 года.

Титульный лист книги С.К. Котельникова «Молодой Геодет, или Первые основания геодезии». 1766 г.


ПЕРВЫХЪ
ОСНОВАНІЙ
МАѲИМАТИЧЕСКИХЪ
НАУКЪ
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
СОДЕРЖАЩАЯ ВЪ СЕБѢ
АРИѲМЕТИКУ,
въ
пользу учащагося въ морскомъ шляхетномъ кадетскомъ Корпусѣ благороднаго юношества
сочиненная
Профессоромъ Маѳиматики
и
Членомъ Санктпетербургской Императорской
Академіи Наукъ
Семеномъ Котельниковымъ
ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
При морскомъ шляхетномъ кадетскомъ корпусѣ
1766 года.

Титульный лист первой части «Первых оснований математических наук» книги С.К. Котельникова. 1766 г.

да бы чинил для малейших причин отговорки, ссылаясь на свой контракт и угрожая требованием абшида (То есть увольнения или отставки. – Прим. редакции.)»; в-третьих, «зная российский язык и обряды совершенно и быв сам здешним и в чужих краях студентом, знал бы с порученными ему поступать с умеренною строгостию».

Перечислив все пожелания в официальном представлении в канцелярию Академии наук, Ломоносов сделал безапелляционный вывод: «К сей должности никто не способен, кроме г. профессора Котельникова, которого честные поступки и трезвое и умеренное житье Канцелярии академической довольно известны».

Первое здание Академической гимназии в Санкт-Петербурге

Так весной 1761 года Семен Кириллович стал инспектором Академической гимназии и, не изменяя себе, отнесся к новому назначению максимально ответственно и ревностно. Для начала он озаботился тем, что гимназическое здание пребывало в довольно плачевном состоянии, а воспитанникам и даже преподавателям не хватало предметов первой необходимости, вплоть до бумаги и других письменных принадлежностей.

После этого стал внимательно присматриваться к учащимся и пришел к выводу, что необходим отсев – часть из них уже переросла гимназический возраст, но самое главное – некоторые из гимназистов не отличались ни прилежанием в поведении, ни рвением в учебе и, как было сформулировано в решении канцелярии, «надежд не подавали». Преподавательский состав, кстати, по настоянию Котельникова тоже пришлось проредить.

Одной из основных забот Семена Кирилловича было обеспечение гимназии книгами и учебниками, для чего он вместе с единомышленниками продумывал и придумывал энергоемкие и перспективные проекты: возникла, например, идея издавать в академической типографии тогдашних русских классиков и рассылать их не только в отечественные учебные заведения, но и за границу – с целью обмена на иностранные книги, необходимые для учебы.

Канцелярия, будучи, в общем-то, очень бюрократизированной и косной системой, таким планам совсем не радовалась. Дошло до того, что в самом начале 1761 года Котельников был отстранен от должности инспектора. Формальным предлогом стал довод, что он, как академик, был человеком занятым и не мог уделять гимназии «потребного времени», но на самом деле все понимали – причина, наоборот, заключалась в том, что его на все хватало и до всего было дело...

Отдельно хочется сказать еще об одной службе Семена Кирилловича Котельникова, к педагогической деятельности отношения не имеющей, но настолько неожиданной и интересной, что нужно о ней упомянуть: в 1770–1790-х он являлся «надсмотрителем», то есть директором, знаменитой петербургской Кунсткамеры, первого отечественного музея, возникшего по указу Петра I. Дух просветительства сопровождал Котельникова и на этом поприще, органично сочетаясь с основательным, грамотным и компетентным практическим подходом к делу.

Это по его инициативе Кунсткамера стала публичным музеем, доступным для широкого круга посетителей. Это он вовремя понял, что экспонаты, поступающие в коллекцию со всего света, нуждаются в тщательной обработке и в особых условиях хранения и распорядился обустроить для этого особые помещения. Это с его приходом стало уделяться пристальное внимание системной научной документации собраний, были введены особые правила нумерации предметов и начали вводиться экспликации, пояснявшие, что представляет собой тот или иной образец.

Широтой его интересов, умением глобально мыслить и одновременно реализовывать множество практических мер для осуществления задуманного просто невозможно не восхититься. И это мы еще умолчали о том, что Котельников был превосходным лингвистом, занимался изучением и изданием древних летописей и работал над анализом их словарного состава…

Неизвестный автор. Вид Кунсткамеры со стороны двора. Гравюра с рисунка художника школы О. Эллигера. 1730-е гг.

Семен Кириллович Котельников умер в 1806 году в возрасте 87 лет. По удивительному совпадению, родственным ему потомкам суждено было продолжить развивать российскую науку: спустя три года, в 1809-м, родился Петр Иванович Котельников, будущий математик, профессор, доктор философии. Его сын, Александр Петрович, появившийся на свет в 1865-м, тоже вырос в профессора и доктора технических наук, а внук, академик Владимир Александрович Котельников, стал крупным ученым в области радиофизики, электроники, информатики, радиотехники, криптографии и вошел в историю как один из основоположников советской секретной радио- и телефонной связи.

Список использованной литературы и литературы к самостоятельному изучению

1. Волков В.А., Куликова М.В. Московские профессора XVIII — начала XX веков. Естественные и технические науки. – М.: Янус-К, 2003
2. Прудников В.Е. Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. Пособие для учителей. – М., 1956
3. Педагогическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1965.
4. Русский биографический словарь под ред. Половцева А.А. Онлайн-версия
5. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона. — М.: Терра, 2001
6. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 г. – М., 1968

Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент,
организатор и руководитель
музея истории вычислительной техники
школы № 1530 «Школа Ломоносова» Москвы

История одного метода умножения

В средневековой Европе был широко распространен способ умножения многозначных чисел, известный как «умножение решёткой» или «метод жалюзи»[1].

Впервые он был описан в математическом труде итальянского математика Луки Пачоли «Сумма[2] арифметики, геометрии, отношений и пропорций» («Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità», изданном в 1494 году (см. рис. 1).

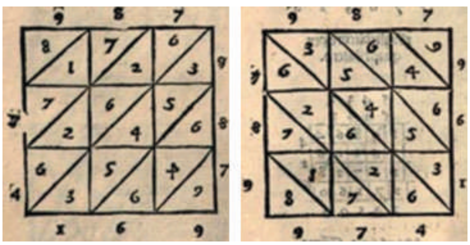


Рис. 1[3]

По-видимому, он был разработан в Индии, но имел применение и в других странах Востока [1]. В Национальной библиотеке Франции хранится арабская рукопись, фрагмент которой показан на рис. 2. На нём приведены расчёты методом решётки с использованиям старых арабских цифр.

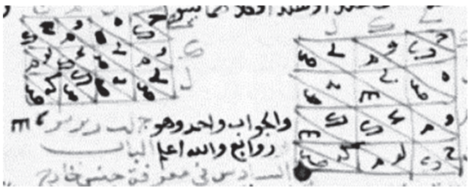


Рис. 2

Этот способ умножения легко уяснить на примере.

Пусть необходимо умножить 456 на 97.

Рисуется табличка из трёх столбцов (число 456 – трёхзначное) и двух строк (97 – двузначное чис-

[1] Почему «жалюзи» – читатель поймёт, ознакомившись далее с сутью метода (получающиеся при умножении изображения имели сходство со ставнями-жалюзи, которые закрывали от солнца окна домов).
[2] Имеется в виду «Всё о ...».
[3] В русскоязычной литературе изображения публикуются впервые.

ло), каждая клетка которой разделена диагональю так, как показано на рис. 3:

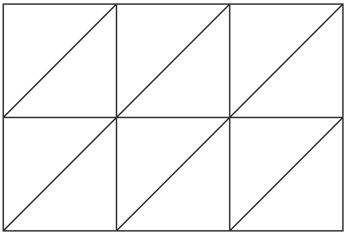


Рис. 3

Цифры чисел 456 и 97 записываются соответственно над табличкой и справа от неё (см. рис. 4).

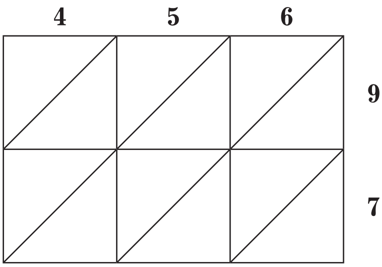


Рис. 4

После этого в каждую клетку записывается произведение цифры, стоящей в соответствующем столбце сверху, на цифру в соответствующей строке справа, причём десятки и единицы произведения разделяются упомянутой выше диагональю – рис. 5:

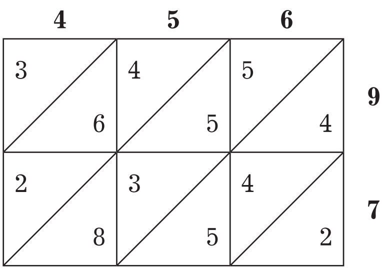


Рис. 5

Теперь можно определить результат умножения. Для этого необходимо просуммировать цифры по наклонным полоскам справа налево, при необходимости перенося в уме в соседнюю слева полоску единицу или двойку и записывая эти суммы так, как показано на рис. 6.

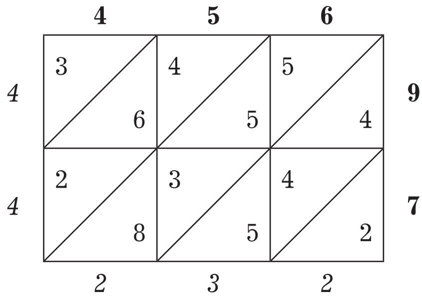


Рис. 6

Результат следует читать слева от таблички сверху вниз, а затем под табличкой слева направо – он равен 44 232. Красиво, не правда ли?

Чтобы оценить преимущества умножения решёткой, предлагаем читателям сравнить время, требующееся для получения произведения, скажем, чисел 53896 и 274 при использовании этого способа и обычного умножения в столбик. Интересно, получатся ли при этом результаты одинаковыми? 😆

Способ умножения решёткой был положен в основу счётного прибора, впервые описанного в книге «Рабдология» шотландского математика Джона Непера (кстати – изобретателя логарифмов), изданной в 1617 году уже после смерти ученого [2]. Это был первый прибор для умножения многозначных чисел. В дальнейшем он получил название «палочки Непера» «бруски Непера», «пластины Непера» и т.п.

Прибор представлял собой набор четырёхгранных брусков, на длинных гранях которых были изображены таблицы, аналогичные показанным на рис. 7.

Рис. 7

Нетрудно увидеть, что на брусках представлены таблицы умножения всех чисел от 0 до 9 на числа от 0 до 9, в которых результаты умножения изображены цифрами, разделёнными наклонной чертой.

На отдельном бруске две грани «относились» к некоторому двузначному числу, а две – к числу, являющемуся дополнением первого числа к 99 (например, 58 и 41 – см. развёртку одного из брусков на рис. 8).

Рис. 8[4]

Для умножения с помощью палочек Непера выбирались бруски, на гранях которого были указаны цифры множимого, и выкладывались в ряд так, чтобы цифры брусков составляли множимое. На рис. 9 показан пример умножения для числа 5619.

Слева прикладывали брусок для цифры 1 – своеобразный указатель строк (на рис. 9 он крайний слева), по которому выбирались и рассматривались строки, соответствующие разрядам множителя. Например, при умножении на 5 результат определялся следующим образом:

- последняя цифра произведения равна 5 (цифра под чертой в крайнем справа бруске);
- остальные цифры определялись суммированием цифр «по наклонной линии»: предпоследняя цифра равна 9 (5 + 4), следующая – 0 (0 + 0), вторая слева – 8 (5 + 3), первая – 2.

Итак, результат равен 28095.

Рис. 9

[4] Рисунок из книги [2]. В русскоязычной литературе также публикуется впервые.

Если сумма цифр «по наклонной линии» получалась больше 9, то единица переносилась в старший разряд, где учитывалась в соответствующей сумме. Так, при умножении 5619 на 6 произведение равно 33714.

Палочки Непера неоднократно усовершенствовали. Были разработаны различные варианты прибора, в том числе достаточно сложные, в которых таблицы умножения размещались на вращающихся кольцах, на цилиндрах и т.п. Немецким ученым Вильгельмом Шиккардом была разработана вычислительная машина, в основе работы которой лежали таблицы, аналогичные таблицам на палочках Непера (см. [1])[5].

Один из самых простых, но эффективных приборов предложил в 1890 году француз Прюво ле Гюэ. Он распространил идею Джона Непера на двузначные числа. Свой прибор он назвал «автоматический вычислитель» (фр. «calculateurs automatiques»).

Рис. 10

Рис. 11 [3]

Прибор состоял из 50 брусков прямоугольного сечения, на широких гранях которых были записаны произведения каждого из чисел от 0 до 99 на 1, 2, ..., 9. На одной стороне бруска изображались произведения для чётного числа, на другой – для следующего за ним нечётного (например, 18 и 19, 26 и 27 и т.п.). На рис. 10 показан брусок с гранью для числа 65.

Бруски, сгруппированные по десяткам чисел, размещались в ящичке, и для удобства поиска нужного бруска на их верхних торцах писались чётные числа, а на нижних – нечётные.

При расчётах отбирались бруски с двузначным числами (и при необходимости – с однозначными с начальным нулём), образующими множимое. Пример умножения числа 6567 показан на рис. 12.

Результат умножения в каждой строке определялся следующим образом.

Рис. 12 [3]

Количество сотен в числе на правом бруске складывалось с последней цифрой левого смежного бруска и являлось соответствующей цифрой результата. Например, произведение 6567 на 3 равно 19701 (5 + 2 = 7), на

5 Была ли вычислительная машина Шиккарда изготовлена хотя бы в одном экземпляре, неизвестно.

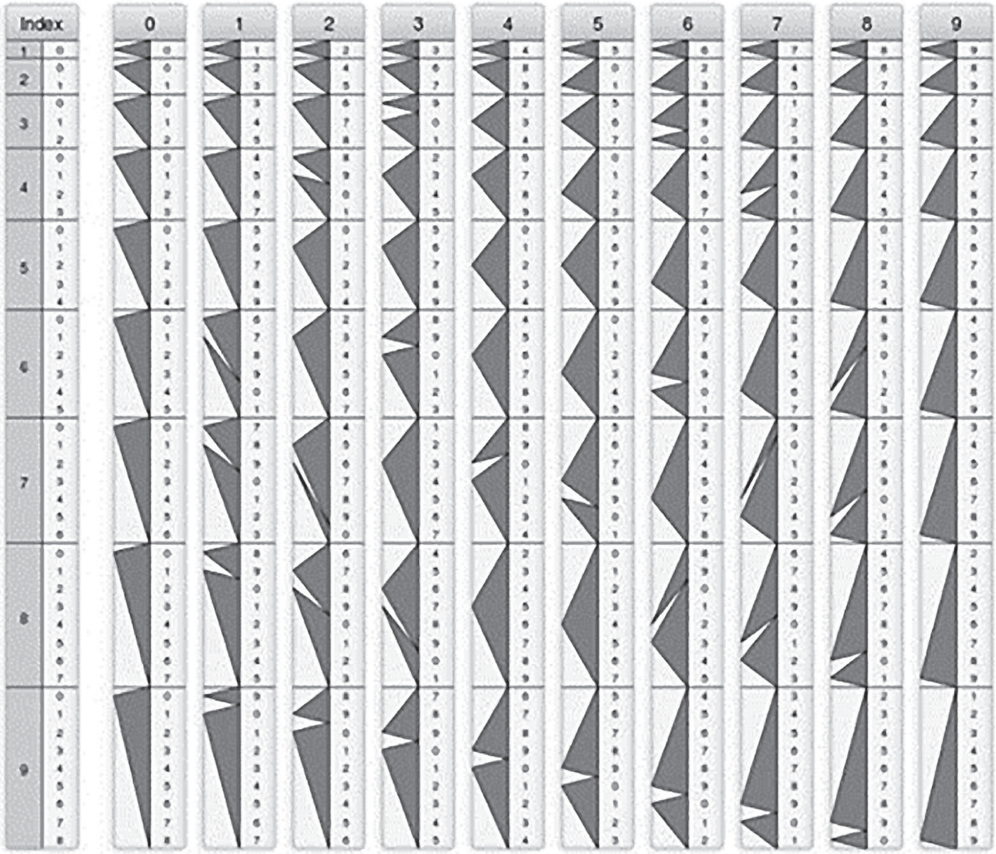


Рис. 13 [4]

7 – 45969 (5 + 4 = 9). Если при сложении получалась сумма, большая 9, то количество единиц в ней являлось очередной цифрой результата, а количество десятков – учитывалось в следующем старшем разряде. Например, при умножении числа 6567 на 9 результат равен 59103 (5 + 6 = 11; 8 + 1 = 9).

Можно отметить следующие преимущества счётного прибора Прюво ле Гюэ по сравнению с палочками Непера:

– меньшее число операций, проводимых при расчётах (в том числе в уме);
– бо́льшая наглядность представления результата.

При расчётах как с помощью палочек Непера, так с помощью прибора Прюво ле Гюэ приходилось складывать числа в уме, часто с учётом переноса из разряда справа, и для каждого разряда запоминать сумму, что, конечно, могло привести к ошибочному результату.

А можно ли учитывать значение переноса из разряда справа ав-

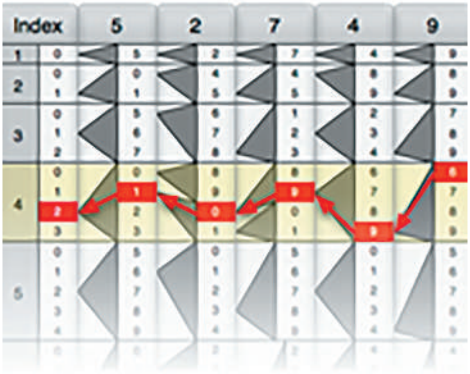


Рис. 14 [4]

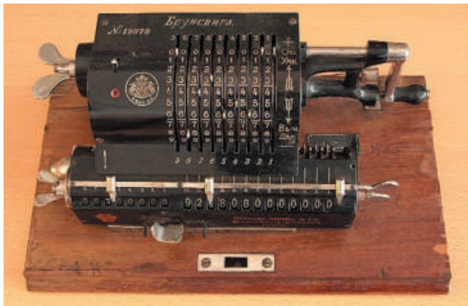


Рис. 15. Фотография арифмометра конца XIX века – экспоната музея истории вычислительной техники школы № 1530 «Школа Ломоносова» Москвы

томатически, а не проводить расчёты в уме. Оказывается – можно! В 80-х годах XIX века французский инженер Анри Женай предложил счётный прибор, в котором результат умножения получался непосредственно в виде цифр искомого произведения. Прибор, состоящий из брусков, на гранях которого были представлены изображения, показанные на рис. 13, получил название «Бруски Женая-Люка́»[6].

Пример для определения произведения числа 52749 на 4 приведён на рис. 14.

Последняя цифра произведения 6 (она выделена цветом) определялась в уме как результат умножения 9 на 4. От этой цифры тёмная стрелка на бруске указывает на цифру произведения в левом разряде (9) и т.д. Искомый результат равен 210996.

Подробное математическое обоснование устройства брусков Женая-Люка приведено в [5].

Популярность этих удобных для вычисления брусков была большой, но не долгой – в конце XIX века их заменили механические счётные приборы – арифмометры, на которых можно было достаточно быстро получать произведение двух многозначных чисел (даже, например, семизначных на семизначные) – см. рис. 15.

Так закончилась многовековая история «умножения решёткой». Как говорится, «технический прогресс не остановить» …

Список использованных источников

1. Апокин И.А., Майстров Л.Е. Развитие вычислительных машин. М.: Наука, 1974.
2. Neper, J. Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo. Edinburgh, 1617.
3. http://www.mechrech.info/exhibit/emulthilf/emulthilf1.html#emulthilf22
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Бруски_Женая_Люка
5. Дмитрий Златопольский. Вычислительные приборы Анри Женая. https://computer-museum.ru/articles/precomp/4222/

[6] Французский математик Эдуарда Люка́ предложил указывать в приборе числа и изображения на всех четырёх длинных гранях брусков.

Корнеев Валерий Трофимович
Почетный работник
высшего профессионального образования

О поле магнитном

Очередные заметки на полях – на полях магнитных. Любознательным можно прочитать о магнитном поле Земли в замечательных книгах Тарасова Л.В. [1,2], более подготовленным – в журнале «Успехи физических наук» [3], в книге [4]. В заметках на страницах журнала – лишь несколько моментов этой истории, которые могут послужить дополнением к главам учебника при изучении магнетизма.

Речь пойдет о людях и знаниях, о человеке в науке и науке для человека. Если говорить о профориентации, о выборе жизненного пути, то надо не только усвоить большой объем знаний, но и готовить себя к тернистому пути: у первопроходцев нет дорог – дороги они прокладывают сами. Но это – счастье: быть первопроходцем.

Магнетизм

Отчасти нас подводит семантика. Даже из дошкольных мультфильмов мы узнаем, что в глубокой древности в Китае изобрели компас. Если назвать компасом гадательное устройство, то – да. Если иметь в виду компас как прибор для определения направлений (так «в быту» его и воспринимают многие), то такой компас изобретен на 13-14 веков позднее. Разъясним сказанное.

Магнитные свойства некоторых веществ заметили давно, а первое описание «компаса» сделал в *III* веке до нашей эры китайский философ Хэнь Фэй-цзы.[1]

Устройство представляло собой разливательную ложку из магнетита, ручка которой всегда поворачивалась в одном направлении. Пластина из меди и дерева позволяла ложке вращаться достаточно свободно (рис. 1). Более тысячи лет это устройство использовалось для гаданий и обустройства домов в соответствии с геомантическими принципами.

Отметим: уже в древнем Китае складывается отношение к загадочному магнетизму не как к забаве,

---

1 Припомним, что Хэнь Фэй-цзы больше занимался вопросами государственного управления и отношений между людьми, а не вопросами ориентирования. В чем-то его повторяют с разных сторон более поздние западноевропейский «Государь» Макиавелли или русский «Домострой».

Рис. 1. https://история-вещей.рф/priboryi/istoriya-kompasa.html

а как к средству гадания, к регулятору жизни, даже как к основе для обоснования жизнеустройства и принципов управления.

Компасом это древнее китайское изобретение становится в средние века в том же Китае и в западных странах. Название, может быть, заимствовано из итальянского *compasso* – «циркуль». Циркуль указывает и на круговое вращение стрелки, и на измерение.

Таким образом, в древнем Китае было изобретено геомантическое, гадательное устройство на основе магнитных свойств материала, в средние века в том же Китае, в Европе, в арабских странах – в общем, на просторах Великого шелкового пути – рождается новое изобретение: компас для определения и измерения географических направлений.

Все знают, что у Земли есть географические полюса – северный и южный – и магнитные полюса. Через географические полюса проходит ось Земли, вокруг которой Земля вращается. С магнитными некоторые путаются: эти полюса не совпадают с географическими, постоянно движутся относительно географических. А еще северный магнитный полюс находится в южном полушарии вблизи южного географического полюса, а южный магнитный полюс – в северном полушарии Земли вблизи северного географического полюса. Северный конец стрелки магнита показывает на южный магнитный полюс, а южный конец – на северный. Из самых простых опытов мы видим, что разноименные магнитные полюса притягиваются, а одноименные отталкиваются, так и ведет себя магнитная стрелка компаса. Но заговорили и о третьем магнитном полюсе Земли!

Третий магнитный полюс

Магнитное поле можно характеризовать линиями поля. Стрелка компаса располагается вдоль этих линий. В средние века была распространена вера, что северный конец стрелки притягивает Полярная звезда, стрелка «смотрит на север».

14 сентября 1492 г., через неделю после отплытия экспедиции Колумба от Канарских островов, в судовом журнале “Санта Марии” появилась запись об отклонении магнитной стрелки от направления на астрономический север.

“...с этого времени, собственно говоря, и начинается наука о земном магнетизме” (Б.М. Яновский).

Такое отклонение замечали, по-видимому, и раньше. Есть мнение о том, что английский философ, ученый Роджер Бэкон знал о таких несовпадениях еще в 1266 г.

Разница между направлением на географический север и направлением, указанном стрелкой – магнитное склонение. Другой характеристикой может служить магнитное наклонение – угол, под которым магнитные линии расположены к поверхности земли. На очень упрощенной картинке земного магнитного поля (рис. 2) видно, что магнитное наклонение в разных точках Земли разное: у полюсов магнитные линии располагаются почти отвесно.

Гордин В.М. [4] пишет, что «с точки зрения условий эксперимента маршрут Колумба был далеко не оптимален. В центральной Атлантике аномалия склонения в *XV* веке не превосходила 15° (примерно 1.5 румба), тогда как в районе мыса Доброй Надежды, открытого в 1486 г. португальцем Бартоломео Диасом, она достигала 25°. При всем несовершенстве навигационной техники того времени трудно предположить, что опытнейшие португальские мореплаватели "не заметили" этого явления. Скорее всего, его сочли возможным (или необходимым) сохранить в тайне от конкурентов».

Отметим: мореплаватели эпохи великих географических открытий не были просто авантюристами, они годами настойчиво готовились к путешествиям, добывали средства, убеждая всех, кто мог содействовать организации экспедиции. А еще, важно, – они использовали все передовые достижения науки: добывали лучшие карты, осваивали владение компасом и другими приборами. И одновременно по разным конкурентным причинам в науке появля-

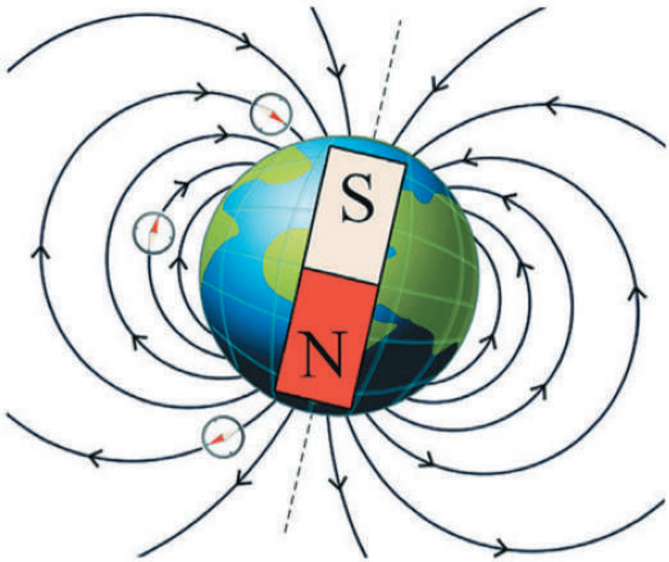


Рис. 2. Магнитное поле Земли (очень схематично)
https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.nkj.ru%2Farchive%2Farticles%2F41897%2F&psig=AOvVaw02lPZ4VHsQbAfQxdYCWHJ-&ust=1698124660108000&source=images&cd=vfe&ved=0CBEQjRxqFwoTCLCv9uu1i4IDFQAAAAAdAAAAABAK

лась секретность. Это – и тормозило науку, но и позволяло отобрать для занятий наукой наиболее посвященных, специально подготовленных (жрецы Древнего Египта или доверенные люди из команды капитана – все это «особые люди» науки).

Что же касается двух магнитных полюсов Земли...

В 1773 году, 250 лет назад, известный ученый-астроном академик Петр Борисович Иноходцев, руководя работами по определению географического положения городов центральной части Европейской России, обнаружил в районе Белгорода и Курска сильную аномалию земного магнетизма. Исследования были продолжены и через век. Так, в 1883 году, приват-доцент Харьковского университета Н. Д. Пильчиков обнаружил новые районы аномалии в Марьино и у Прохоровки (известной теперь по знаменитому сражению Великой Отечественной войны – именно там находится третье ратное поле России – Прохоровское поле). Пильчиков одним из первых указал на то, что причина аномалии – залежи железной руды, за это ему в 1884 году была присуждена серебряная медаль Русского географического общества.

Магнитное поле в районе курской аномалии земного магнетизма повело себя так, что многие заговорили об открытии третьего магнитного полюса!

Отметим: магнитное поле остается предметом изучения науки. Но оно становится и инструментом поиска полезных ископаемых: аномалии указывают на залежи руд.

Железная лихорадка

В 1898 году в Россию приглашен для исследования Курской магнитной аномалии директор Парижской геомагнитной лаборатории профессор Т. Муро. Уже через несколько дней исследований он телеграфировал в Париж, что полученные во время магнитных съемок результаты «переворачивают кверху дном всю теорию земного магнетизма». Конечно, многие зарубежные ученые-геологи, горные инженеры не поверили: этого не может быть! Черноземные равнины, не горы – какие тут могут быть аномалии, что может быть здесь магнитного?

К этому времени уже около полувека искателей удачи будоражит золотая лихорадка – в поисках быстрого личного обогащения они едут осваивать Калифорнию, Аляску...

Железо – это обогащение для целых стран. Ученые могут еще спорить. Да и Европа каким-то своим инстинктом отрицания одновременно и удивляется России, и не верит в Россию – «умом Россию не понять...». А предприниматели, промышленники уже начали скупать, перепродавать земельные участки в Курской губернии. Слухи о громадных залежах железной руды на территории Курской губернии породили настоящую «железорудную лихорадку».

Занятно, но и после широкого освоения месторождений «лихорадка», видимо, не закончилась. Автор этих заметок уже после распада Советского Союза от разных людей в Белгородской области (с 1954 года с новым территориальным делением Курская магнитная аномалия в значитель-

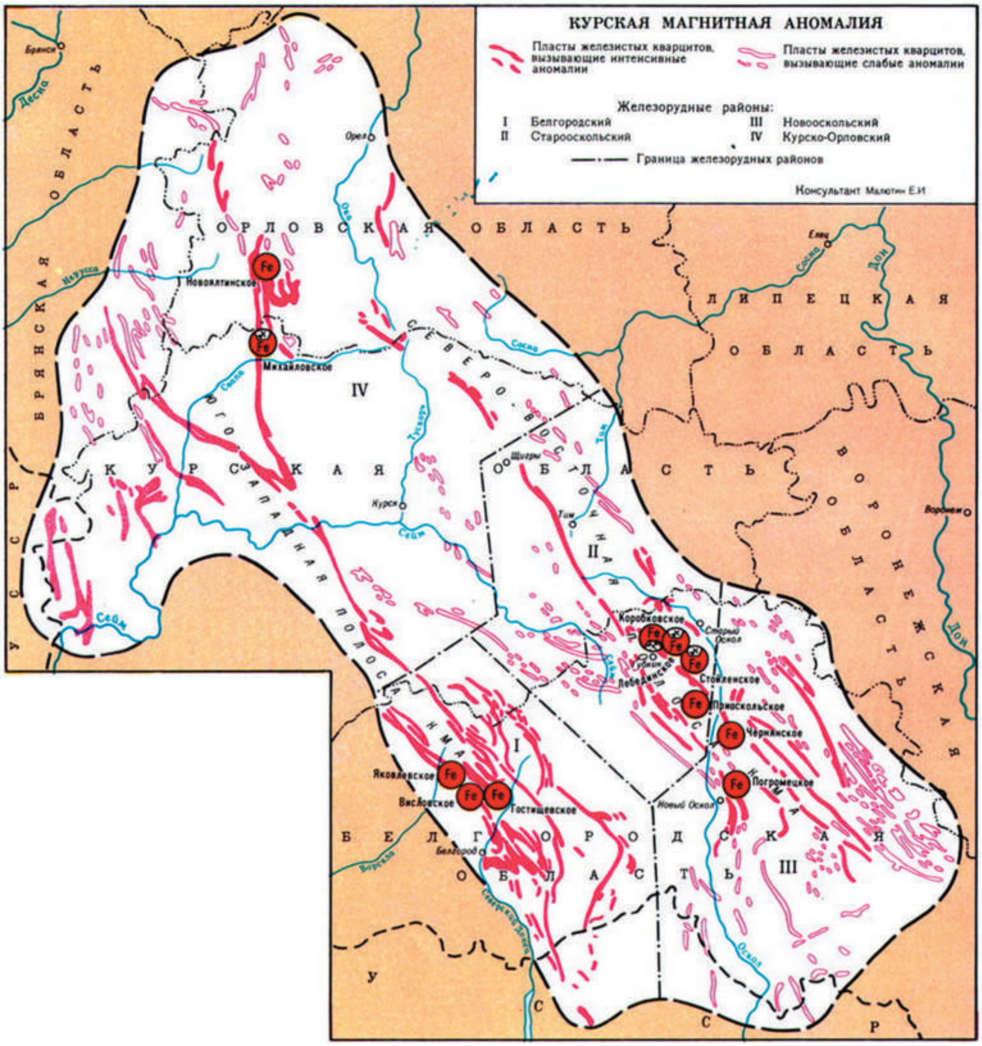


Рис. 3

http://www.mining-enc.ru/images/k/13/kurskaja_magnitnaja_anomalija_1.jpg

ной части оказалась на территории Белгородской области) слышал, что какие-то территории земель скуплены предпринимателями не ради плодородных черноземов, а ради залежей полезных ископаемых, спрятанных под ними. Может, и есть в этом доля правды: чтобы разрабатывать недра, нужно перекупить территорию, а за неё знающие люди могут ох, как дорого запросить...

Несколько вещей неизменно повторяются в истории: удивление перед Россией, недоверие к России – за рубежом. А еще «нет пророка в своем отечестве» в самой России, но всегда в ней находятся самоотверженные энтузиасты, которым «за державу обидно».

В исторических водокрутях

В экспедиции французского исследователя Муро сопровождает проф. Московского университета Э.Е. Лейст.

Рис. 4. Лейст Э.Е. 1852-1918
https://ru.wikipedia.org/wiki

Мы углубимся в историю, поэтому уместно вспомнить устаревшее название водокруть – круговое движение воды в месте слияния двух течений, при обтекании течением выступов берега, при резком расширении русла. А уж исторических водоворотов, водокрутей в начале двадцатого века хватало!

Имя Лейста даже не всегда упоминается среди имен, внесших выдающийся вклад в историю изучения земного магнетизма. Эрнест Егорович Лейст – российский геофизик, метеоролог, профессор Московского университета. Он твердо поверил, что магнитная аномалия связана с громадными залежами железной руды.

Деньги на покупку приборов для магнитных исследований, для бурения скважин – убедил – выделило курское земство. Оборудование закупили в Германии. Транспорт – гужевой: лошадка, повозка. На территории нынешней Белгородской области еще и до середины прошлого века дороги – проселочные. После дождей – не пройти, ни проехать. Помощников Лейст нанимал из местных. Но и с этим проблемы. Население очень настороженно относилось к экспедиции: что-то ищут, бурят, вынюхивают. А вдруг землю перемерят, да отнимать начнут? И преследовали группу искателей. Одними только угрозами не всегда обходилось, бывало и хуже. Помощников то и дело приходилось искать новых взамен сбежавших. Уговаривал, убеждал.

В течение 14 лет в июле-августе, во время летних отпусков Лейст проводил съёмки. Отдельные этапы своей работы он регулярно докладывал в Московском обществе испытателей природы, действительным членом которого был с 1894 года. Лично провел более 4500 «абсолютных» определений элементов земного магнетизма. Но... руды не нашел. Бурил землю до 200 метров в глубину. Когда в тех же местах проводили повторные бурения, оказалось, что до руды оставалось пройти всего несколько метров!

А история складывается (и повторяется) как-то горько по-российски.

Многолетняя напряженная работа без отпусков, в полевых условиях, порой с риском для жизни – подорвала здоровье Э.Е. Лейста. Советское правительство направило в 1918 году Лейста на лечение в Германию.

С собой Лейст захватил все материалы своих исследований, чтобы продолжить работать. Но в 1918 году, находясь в Наугеме, Э.Е. Лейст умер.

Германия захватила архив Лейста и начала предлагать советскому правительству выкупить труды российского ученого за огромную сумму.

В.И. Ленин обратился к ученым с вопросом, смогут ли они организовать новую магнитную съёмку в районе Курской аномалии. И работы были организованы – но это уже другая, новая история. А Лейст...

Отметим: Лейст действовал настойчиво, упрямо, самоотверженно.

Он неотступно работал над проблемой на протяжении полутора десятков лет. Он жертвовал своими отпусками. Все свободное время – в экспедициях. Он вкладывал свои средства. Он рисковал не только здоровьем, бывали угрозы и пожестче. Он настаивал на своем, вопреки мнениям многих авторитетных ученых. А ведь в университете и без всего этого у Лейста было вполне достойное положение. Достаточное для уважения и спокойной жизни.

Большая руда

До открытия железорудных залежей здесь пройдут еще годы. Ровно сто лет назад, в 1923 году из скважины, пробурённой под Щиграми, на глубине 167 метров были добыты первые образцы железной руды.

Отметим: порой и удача должна сопутствовать ученым: Лейст бурил вблизи от этих мест до глубин, метров на 20 больших. И – не повезло! Но ведь не отступил, верил в теоретические предпосылки, в свою идею.

И нужно еще верить в свой народ, в его предания, обычаи, предчувствия. Автор этих заметок не раз находил свидетельства того, что, даже вопреки мнениям «светил науки», догадки, которые складывались в народе, предвосхищали открытие истины.

Еще начиная с IV века на территории, известной ныне как Курская магнитная аномалия, в сыродутных печах получали металл. Использовался лимонит (болотная железная руда), представляющий собой разновидность бурого железняка, естественно отлагающуюся в болотах на корневищах болотных растений. Лимонит промывали и обжигали для обогащения, а затем засыпали в горн, добавляя в качестве флюса мел, мергель, известняк. Топливом служил дубовый уголь. На древних местных поселениях здесь часто встречаются куски металлургических шлаков.

В 1742 году белгородские купцы Иван Глинкин и его «компанейщики» обратились в Берг-коллегию с «Доношением», в котором просили опробовать «сыскные руды».

Но еще и в начале XX века светила мировой горной науки продолжа-

Рис. 5. Кадр из фильма «Большая руда» (1964 г.)

Рис. 6. Железорудный карьер КМА

ли не верить в Россию: не могут быть залежи руды на этих черноземных равнинах! (Но, main Gott! Почему же все-таки России все дается? Почему ей все дается не по правилам?!).

Фильм «Большая руда» (рис. 5) снимался на территории КМА (Белгородская область). Это – только начало разработок.

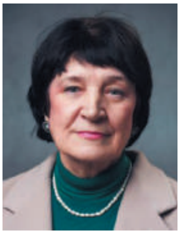
Первые пять тысяч тонн богатой железной руды отправлены для пробной плавки на металлургический завод г. Липецка в 1935 году. Война прервала разработки. А в 1960 году был открыт для промышленных разработок Михайловский рудник. Ныне здесь произошли изменения геологического масштаба: карьерные самосвалы, одно только колесо у которых размером больше самосвала из фильма, при взгляде с края карьера вниз, выглядят как какие-то маленькие коробочки. Карьер «Лебединского горно-обогатительного комбината (ГОК)» имеет максимальную ширину 5 км, максимальную глубину – 600 м. Таких карьеров здесь несколько.

Исследования магнитного поля позволили открыть самое мощное на Земле месторождение магнитных руд. В настоящее время разведаны границы залежей железных руд КМА, которые охватывают площадь размером свыше 160 тыс. км^2, захватывая территории девяти областей Центра и Юга России. Запасы богатых железных руд и железистых кварцитов уникального бассейна составляют миллиарды тонн.

А наше очень беглое путешествие в мир магнетизма продолжится в следующих заметках.

Литература

1. Тарасов Л. В. Земной магнетизм. /Издательство: ИД Интеллект, 2012 г.
2. Тарасов Л. В. Физика в природе /Издательство «Просвещение», 1988 г.
3. Малахов В.В. и др. Магнитное поле во внутреннем околоземном пространстве/Ж-л Успехи физических наук, том 193, №10, Октябрь 2023.
4. Гордин В.М. Очерки по истории геомагнитных измерений. – М.: ИФЗ РАН, 2004



Пиголкина Татьяна Сергеевна
Выпускница МФТИ.
Доцент, заслуженный работник высшей школы,
заслуженный преподаватель МФТИ,
лауреат премии Правительства в области образования (2020 г.)

Вариации на тему «задача Лэнгли»

Задача Лэнгли обсуждалась и решалась в статье А.А. Лукьянова (Потенциал № 6). Здесь, как и в классической задаче Лэнгли, рассматривается равнобедренный треугольник *ABC* с углом при вершине 20°, но проведен только один отрезок *AM* с условием, что отрезок *BM* равен основанию *AC*. Требуется определить величину угла *BAM* (рис. 1). Кажется, что надо предпочесть алгебраический способ решения, однако приведем простое геометрическое, и нам помогут свойства заданного треугольника, установленные при решении основной задачи.

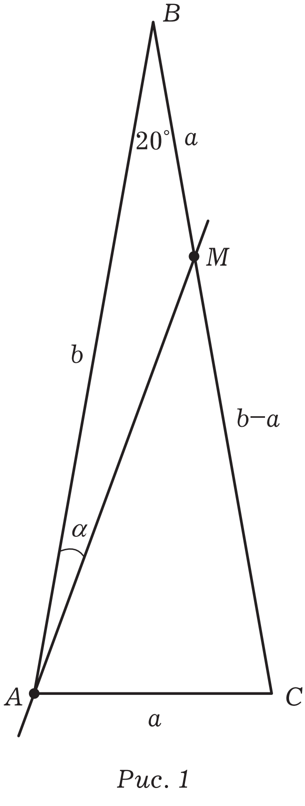


Рис. 1

1. Пусть основание $AC = a$, боковые стороны $AB = BC = b$. Проведём окружность радиуса a с центром в вершине A, точки пересечения со сторонами AB и BC обозначим D и E соответственно. Треугольник CAE равнобедренный, углы при основании CE по 80°, следовательно, $\angle CAE = 20^\circ$, а $\angle DAE = 60^\circ$. Треугольник DAE равнобедренный по построению, следовательно, он равносторонний, $BE = AD = DE = a$ (рис. 2).

Отметим на отрезке BE точку M такую, что $DM = DE = a$ (рис. 3). Угол DEM равен 40°, как легко подсчитать,

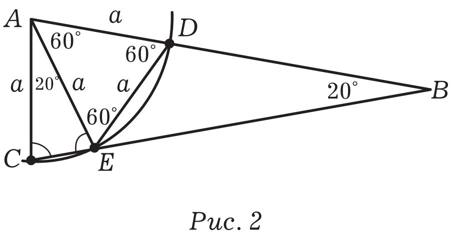


Рис. 2

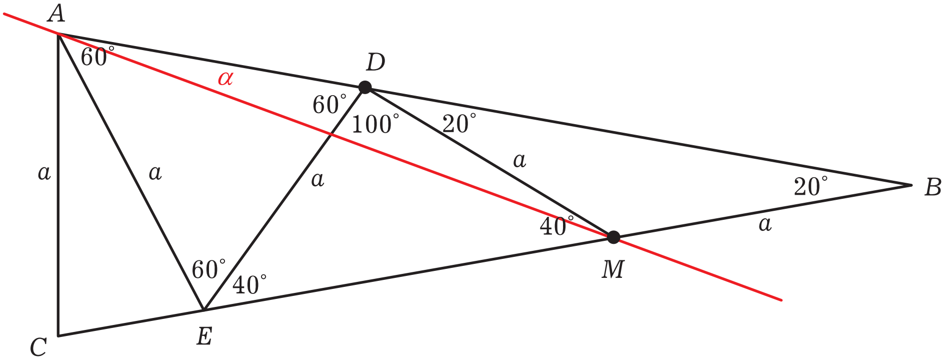


Рис. 3

треугольник DEM равнобедренный, поэтому $\angle DME = 40^\circ$, а $\angle EDM = 100^\circ$. Оказалось, что $\angle BDM = 20^\circ = \angle DBM$, треугольник DMB равнобедренный, $BM = a$ (рис. 3).

Переходим к задаче. На рисунке 3 проводим прямую AM. Надо определить величину угла BAM. Очевидно, $\angle BAM = \angle DAM$, а нами доказано, что $\angle DAM$ есть угол при основании AM равнобедренного треугольника ADM, $\angle DAM = \angle DMA = \alpha$. Сумма этих углов равна внешнему углу BDM и равна 20°. Итак, $\alpha = 10^\circ$.

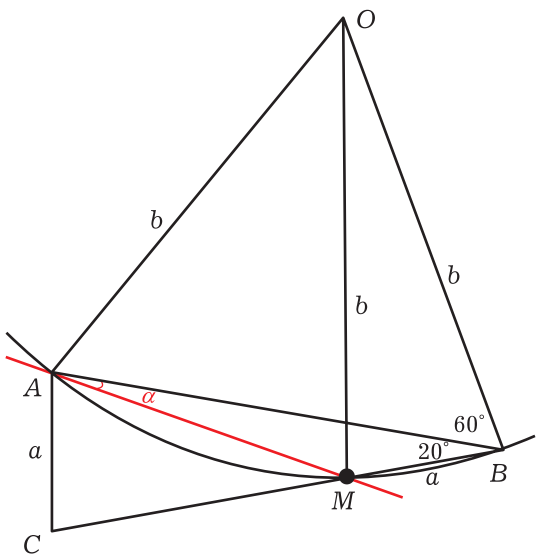


Рис. 4

2. Приведем еще один, тоже геометрический метод решения, основанный на совершенно других идеях.

Поскольку MB и AC равны, можно построить треугольник MOB, равный треугольнику ABC. В треугольнике MOB углы OMB и OBM по 80°, $MB = a$, $OB = OM = b$. Далее, $OB = AB = b$, а угол между ними равен 60°. Значит треугольник OBA равносторонний, $OA = OB$ и окружность с центром в точке O и радиусом OB проходит через точки B, M и A. Угол MOB – центральный, равен 20° и опирается на дугу BM, а угол MAB – вписанный и опирается на ту же дугу, следовательно, он равен половине угла MOB, то есть $\alpha = \angle MAB = 10^\circ$.

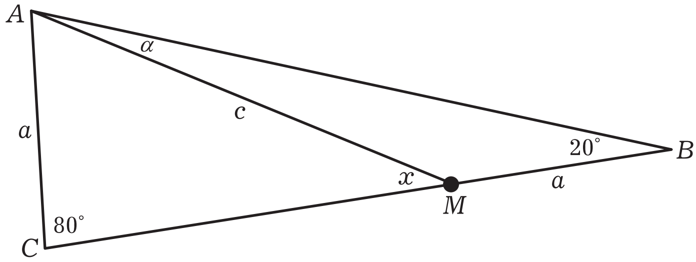


Рис. 5

3. Алгебраическое решение. Составим тригонометрическое уравнение не для искомого угла α (мы не знаем алгебраическую форму значений $\sin 10^\circ$ или $\cos 10^\circ$), а для угла $x = \angle AMC$, этот угол внешний для треугольника ABM, $x = \alpha + 20^\circ$ (рис. 20). Итак, имеем $\alpha = x - 20^\circ$, а общую сторону AM треугольников AMC и AMB обозначим c.

Применим теорему синусов к треугольникам AMC и AMB:

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{c}{\sin 80°} \text{ и } \frac{a}{\sin(x - 20°)} = \frac{c}{\sin 20°}.$$

Приравниваем отношение $\frac{a}{c}$:

$$\frac{\sin x}{\sin 80°} = \frac{\sin(x - 20°)}{\sin 20°},$$

получаем уравнение

$$\sin x \cdot \sin 20° = \sin(x - 20°) \cdot \sin 80°.$$

Далее применяем известные формулы: $\sin t = \cos(90^\circ - t)$, формулы синуса двойного угла и синуса разности двух углов, получаем

$$\sin x \cdot 2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ =$$
$$= (\sin x \cos 20^\circ - \cos x \sin 20^\circ) \cdot \cos 10^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \sin 20^\circ =$$
$$= \sin x(\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ). \qquad (*)$$

Преобразуем скобку:

$$\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ =$$
$$= (\cos 20^\circ - \sin 10^\circ) - \sin 10^\circ =$$
$$= (\sin 70^\circ - \sin 10^\circ) - \sin 10^\circ =$$
$$= 2\sin 30^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 10^\circ =$$
$$= 1 \cdot \sin 50^\circ - \sin 10^\circ =$$
$$= 2\sin 20^\circ \cdot \cos 30^\circ.$$

Результат преобразований подставляем в (*):

$$\cos x \cdot \sin 20^\circ = \sin x \cdot \sin 20^\circ \cdot 2\cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sin x \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x t \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 30^\circ$ (так как x – острый угол). Значит $\alpha = x - 20^\circ = 10^\circ$.

Возможно, кто-то из читателей захочет найти точное значение $\sin 10^\circ$. Можно предложить такой путь: выведем формулу синуса $3x$:

$$\sin 3x = \sin(x + 2x) =$$
$$= \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x =$$
$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\cos^2 x \cdot \sin x =$$
$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Положим $x = 10^\circ$, $\sin 10^\circ = t$, тогда $\sin 3t = \frac{1}{2}$. Придём к кубическому уравнению $4t^3 - 3t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^3 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} = 0.$$

К полученному уравнению применим алгоритм Кардано (или сразу формулу Кардано) и найдём точное значение $t = \sin 10^\circ$.

Мукушев Базарбек Агзашулы
профессор Казахского агротехнического университета им. С. Сейфуллина, доктор педагогических наук, г. Астана, Республика Казахстан

Решение физических задач посредством метода индукции

В научном и учебном познании окружающего мира широко используется метод, основанный на индуктивных рассуждениях. Этот метод называется методом индукции и относится к общенаучным методам исследования. Метод индукции успешно применяется в физических исследованиях, особенно в экспериментальной физике.

Статья посвящена раскрытию эвристических функций метода индукции в процессе решения учебных физических задач.

Введение

Термин «индукция» (лат. inductio) означает «наведение», а индуктивными называют выводы, сделанные на основе наблюдений и опытов, т.е. полученные путем рассмотрения частных случаев и последующего распространения замеченных закономерностей на общий случай.

Роль метода индукции особенно значительна в экспериментальной физике. Обобщая достаточно большое количество опытных данных, экспериментаторы делают научные выводы и утверждения. Этот этап в математической науке называется *базисом индукции* или *неполной индукцией*.

Неполная индукция, основанная на экспериментальных исследованиях и включающая теоретическое обоснование, способна давать достоверное заключение. По словам известного французского физика Луи де Бройля, индукция, поскольку она стремится раздвинуть уже существующие границы мысли, является истинным источником действительно научного прогресса. Великие открытия, скачки научной мысли вперед создаются, в конечном счете, индукцией – рискованным, но важным творческим методом [1]. Индукция рассматривается в общенаучном масштабе как метод познания, как совокупность последовательных мыслительных операций, в результате которых осуществляется мышление от менее общих утверждений к более общим.

Метод индукции оказывается полезным и при решении учебных физических задач. С помощью индуктивного рассуждения устанавливается некая закономерность или формула на основе обобщения результатов трех или более частных случаев. Нами отобран ряд задач, при решении которых индукция выступает как эвристический прием их решения. Не исключено, что эти задачи имеют и другие способы решения.

Задача 1. За какое время тело, свободно падающее без начальной скорости, проходит десятый метр своего пути?

Решение. Очевидно, длина десятого метра пути тела равна 1 метру. Значит, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 1$ м, $h_3 = 1$ м, ... , $h_{10} = 1$ м. Следовательно, $h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_{10} = 10$ м. Обозначим через t_1, t_2, t_3, ..., t_{10} численные значения времени, затраченные на прохождение телом этих участков.

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \text{ или } t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)$$

$h_2 = \upsilon_1 t_2 + \dfrac{gt_2^2}{2}$, где υ_1 начальная скорость тела, когда он проходит участок h_2: $\upsilon_1 = gt_1$.

Поскольку $h_1 = h_2$, напишем:

$$\frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \Rightarrow \frac{gt_1^2}{2} = gt_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = t_1\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right).$$

Для третьего участка:

$$h_3 = \upsilon_2 t_3 + \frac{gt_3^2}{2} \upsilon_2 = \upsilon_1 + gt_2 = g(t_1 + t_2).$$

Следовательно,

$$\frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_2 t_3 + \frac{gt_3^2}{2} \Rightarrow t_3^2 + 2(t_1 + t_2)t_3 - t_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

Анализируя выражения для t_1, t_2, t_3 и используя метод индукции напишем следующую формулу:

$$t_n = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

За это время свободно падающее тело проходит n-ый метр пути.

Следовательно,

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2}{9{,}8}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{9}\right) \approx 0{,}073 \text{ с.}$$

Задача 2. Небольшое упругое тело скользит со скоростью 10 м/с по горизонтальной плоскости, приближаясь к щели (рис. 1). Щель образована двумя отвесными параллельными стенками, находящимися на расстоянии d = 5 см друг от друга. Глубина щели H = 1 м. Определите, сколько раз ударится тело о стенки, прежде чем упадет на дно. Удары о стенки абсолютно упругие. Считать, что g=9,8 м/с^2.

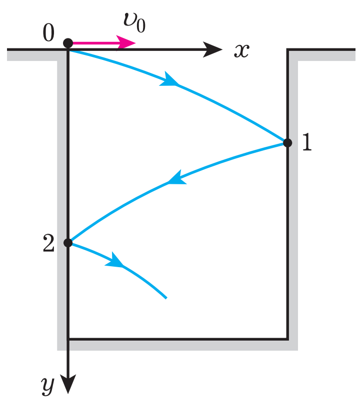


Рис. 1

Решение. При упругих ударах о стенки щели угол отражения равен углу падения, а время полета тела между стенками t постоянно и равно

$$t = \frac{d}{\upsilon_0}.$$

Первый удар произойдет на глубине $h_1 = \upsilon_1 t + \frac{gt^2}{2}$, второй – на глубине $h_2 = \upsilon_2 t + \frac{gt^2}{2}$ от точки первого удара, третий – на глубине $h_3 = \upsilon_3 t + \frac{gt^2}{2}$ от точки второго удара и т.д.

На основе индуктивного рассуждения напишем следующие значения вертикальных составляющих скорости тела: $\upsilon_1 = 0$, $\upsilon_2 = gt$, $\upsilon_3 = 2gt$, ..., $\upsilon_n = (n\text{-}1)gt$. Здесь n – номер удара.

Очевидно, что $h_1 + h_2 + ... + h_n = H$ или

$$(\upsilon_1 + \upsilon_2 + ... + \upsilon_n)t + n\frac{gt^2}{2} = H$$

Далее последовательно имеем

$$(g + 2gt + 3gt + ... + (n-1)gt)t + $$
$$+ n\frac{gt^2}{2} = H,$$
$$gt^2(1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) +$$
$$+ n\frac{gt^2}{2} = H, ...,$$
$$... , \frac{gt^2}{2}n(n-1) + n\frac{gt^2}{2} = H.$$

Отсюда получаем

$$n = \sqrt{\frac{2H}{gt^2}} = \frac{\upsilon_0}{d}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 90{,}3.$$

Так как n натуральное число, то $n = 90$. Тело ударится о стенки щели 90 раз.

Задача 3. Мяч свободно падает с высоты $h = 0{,}1$ м на наклонную доску, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Мяч, подпрыгивая, перемещается по доске (рис. 2). Найти расстояние между точками девятого и десятого удара мяча о доску. Соударения мяча с доской рассматривать как абсолютно упругие.

Решение. Нам нужно найти расстояния между точками первого и второго ($L_{1,2}$), второго и третьего

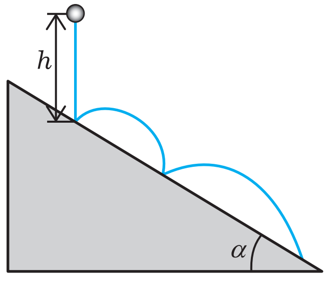


Рис. 2

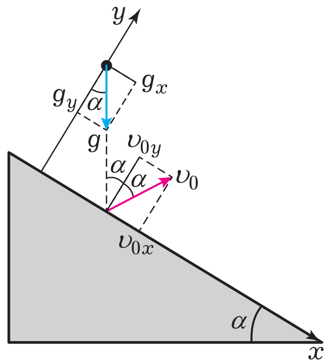


Рис. 3

($L_{2,3}$), третьего и четвертого удара ($L_{3,4}$). Для удобства решения задачи, оси координат направим вдоль доски и перпендикулярно к ней (рис. 3). В этом случае проекции ускорения мяча на оси x и y будут соответственно равны $a_x = g_x = g\sin\alpha$ $a_y = g_y = -g\cos\alpha$.

Скорость мяча в момент первого соударения с доской равна $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$. Начальная скорость мяча после первого соударения равна υ_0 и образует с осью угол α, а проекции скорости мяча равны:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha \text{ и } \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\alpha.$$

Расстояние между точками первого и второго соударений мяча с доской равно

$$L_{1,2} = (\upsilon_0 \sin\alpha)t_1 + \frac{(g\sin\alpha)t_1^2}{2},$$

где t_1 – время полета мяча. Это время определяется уравнением

$$(\upsilon_0 \cos\alpha)\, t_1 - \frac{(g\cos\alpha)t_1^2}{2} = 0.$$

Отсюда $t_1 = 2\upsilon_0/g$ и $L_{1,2} = 8h\sin\alpha$. Скорость мяча к моменту второго соударения определяется равенствами

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_{0x} + a_x t_1 = \upsilon_0 \sin\alpha + (g\sin\alpha)t_1 = $$
$$= 3\upsilon_0 \sin\alpha,$$
$$\upsilon_{1y} = \upsilon_{0y} + a_y t_1 = \upsilon_0 \cos\alpha - (g\cos\alpha)t_1 = $$
$$= -\upsilon_0 \cos\alpha,$$

После второго соударения эти скорости равны

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_{1x},\ \upsilon_{2y} = -\upsilon_{1y} = \upsilon_0 \cos\alpha = \upsilon_{0y}$$

Расстояние между точками второго и третьего соударений равно

$$L_{2,3} = (3\upsilon_0 \sin\alpha)\, t_2 + \frac{(g\sin\alpha)t_2^2}{2},$$

где t_2 – время полета. Так как начальная скорость вдоль оси y та же, что и при первом соударении, то $t_2 = t_1$. Поэтому $L_{2,3} = 16\ h\ \sin\alpha$. Аналогично можно показать, что $L_{3,4} = 24\ h\ \sin\alpha$. Опираясь на метод индукции, напишем

$$L_{n,\,n+1} = 8\ n\ h\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$L_{9,10} = 8 \cdot 9 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 30^\circ = 3{,}6 \text{ м}.$$

Задача 4. Поршневой насос при каждом качании захватывает объем V_0 воздуха (рис. 4). Когда поршень начинает движение слева направо, открывается клапан a, и часть массы воздуха окажется в цилиндре поршня. При движении справа налево, закрывается клапан a и открывается клапан b, через который

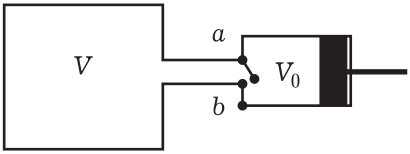


Рис. 4

газ и покидает систему. При откачке этим насосом воздуха из сосуда объема V насос совершил n качаний. Найти установившееся давление в сосуде. Начальное давление во внутри сосуда P_0. Процесс изотермический.

Решение. После одного качания давление в сосуде станет равным $P_1 = \frac{P_0 V}{V + V_0}$, после второго качания $P_1 V = P_2 (V + V_0)$ и, следовательно, $P_2 = \frac{P_0 V}{(V + V_0)^2}$, после третьего $P_3 = \frac{P_0 V}{(V + V_0)^3}$. После n качаний давление в сосуде станет:

$$P_n = \frac{P_0 V}{(V + V_0)^n}.$$

Задача 5. Имеются 20 клемм, каждая из них соединена со всеми остальными клеммами одинаковыми резисторами, сопротивление которых равно 10 Ом. Найти сопротивление между любыми двумя клеммами.

Решение. Вначале берем две клеммы, $n = 2$ (случай, одной клеммы не имеет физического смысла, рис. 5а). Сопротивление между ними $R_2 = R$. Берем три клеммы (рис. 5б). Сопротивление между клеммами 1 и 2

$$R_3 = \frac{2R}{3}.$$

Берем четыре клеммы (рис. 5в). Подключим источник тока к клеммам 1 и 2. Поскольку в точках 3 и 4 потенциалы одинаковы, через резистор соединяющий эти клеммы, ток не идет. Следовательно, можно его убрать. Таким образом, $R_4 = \frac{R}{2} = \frac{2R}{4}$.

Обобщая результаты $\left(R_2 = \frac{2R}{2};\ R_3 = \frac{2R}{3};\ R_4 = \frac{2R}{4}\right)$, находим общую формулу для сопротивления между любыми двумя клеммами: $R_n = \frac{2R}{n}$ $(n > 2)$.

Итак, $R_{20} = \frac{2 \cdot 10}{20} = 1$ Ом.

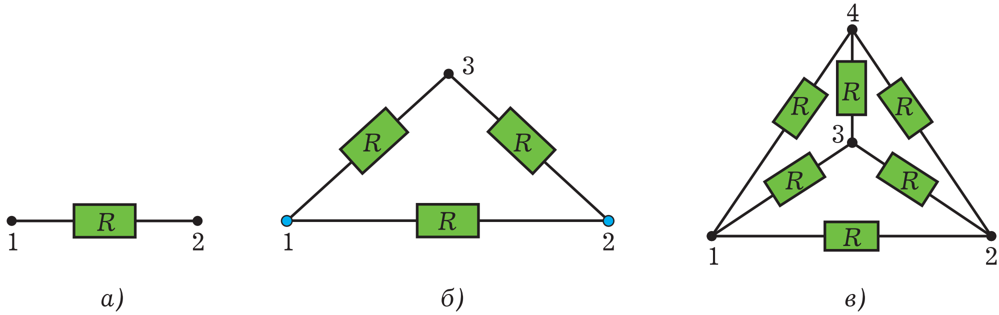


Рис. 5

Задача 6. Имеется электрическая цепь, содержащая 10 контактов. Каждая пара этих контактов соединена конденсатором электроемкостью 10 мкФ. Какая электроемкость будет обнаружена при измерении между двумя любыми контактами.

Решение. Задача решается аналогично задаче 5. Читатель может решать задачу самостоятельно.

Ответ: $C_n = \frac{nC}{2}$ $(n > 2)$.

Итак, $C_{10} = \frac{10 \cdot 2}{2} =$ 10 мкФ.

Задача 7. Конденсатор емкости C_0 = 20 мкФ заряжают до разности потенциалов U_0 = 400 В и подключают к конденсатору емкости C = = 1 мкФ, в результате чего последний заряжается. Отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор той же емкости (C = 1 мкФ), третий и т.д. Затем конденсаторы соединяют последовательно. Какую максимальную разность потенциалов можно получить таким образом?

Решение. Начальный заряд конденсатора $q_0 = C_0U_0$. После подключения первого конденсатора заряд q_0 распределится между C_0 и C. После отсоединения C от C_0 на обоих конденсаторах установится разность потенциалов равная

$$U_1 = \frac{q_0}{C_0 + C} = \frac{C_0U_0}{C_0 + C}.$$

Оставшийся заряд на конденсаторе C_0 равен: $q_1 = C_0U_1 = \frac{C_0^2U_0}{C_0 + C}$.

При зарядке второго конденсатора напряжение на обоих конденсаторах (C_0 и C) становится равным

$$U_2 = \frac{q_1}{C_0 + C} = U_0\left(\frac{C_0}{C_0 + C}\right)^2,$$

а после подключения третьего конденсатора $U_3 = U_0\left(\frac{C_0}{C_0 + C}\right)^3$.

Очевидно, $U_n = U_0\left(\frac{C_0}{C_0 + C}\right)^n$. Далее напишем формулу максимальной разности потенциалов в виде бесконечного числового ряда, образованного из членов убывающей геометрической прогрессии:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n =$$

$$= U_0\left(\frac{C_0}{C_0 + C} + \left(\frac{C_0}{C_0 + C}\right)^2 + \left(\frac{C_0}{C_0 + C}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{C_0}{C_0 + C}\right)^n\right).$$

Просуммировав эту геометрическую прогрессию, получим:

$$U = \frac{C_0U_0}{C} = 8000 \text{ В}.$$

Задача 8. Интенсивность звука (шума) за стеной составляет 10 Вт/м^2 (порог болевого ощущения). Стена сооружена из звукопоглощающего материала. Какая должна быть толщина стены, чтобы в помещении сохранилась допустимая норма интенсивности звука (10^{-10}Вт/м^2), если интенсивность звука через каждый 1 мм материала убывает на 10%?

Решение. Мысленно разделим стену на слои толщиной 1 мм. После прохождения первого слоя интенсивность звука составляет $I_1 = I_0(1 - \beta)$, где $I_0 = 10$ Вт/м^2; $\beta = 0{,}1$. Аналогично, после прохождения второго слоя $I_2 = I_1(1 - \beta) = I_0(1 - \beta)^2$, после прохождения третьего слоя $I_3 = I_2(1 - \beta) = I_0(1 - \beta)^3$. Тогда для n-го слоя $I_n = I_0(1 - \beta)^n$. Отсюда

$$n = \frac{\lg \frac{I_n}{I_0}}{\lg(1-\beta)} = \frac{\lg 10^{-11}}{\lg(1-0{,}1)} \approx 240.$$

Таким образом, искомая толщина стены равна 240 мм.

Литература

1. Карпенков С.Х. Концепции современного естествознания. Учебник для вузов.- М.: Высш. шк.,. 2014.- 488 с.
2. Рымкевич А.П., Рымкевич П.А. Сборник задач по физике. М.: Просвещение, 2002. -192 с.
3. Сборник задач по физике / Под ред. С.М.Козела. М.: Наука, 1983. – 306 с.
4. Буховцев Б.Б. и др. Сборник задач по физике. М.: Наука, 1974. -416 с.
5. Мукушев Б.А. Движение упругого тела с отскоком // Квант. – 2022. – №7. – С.34-41.

НОВОСТИ

Студенты МФТИ стали абсолютными чемпионами Всероссийской студенческой олимпиады по теоретической механике

На базе Уфимского государственного нефтяного технического университета 20–24 ноября прошла Всероссийская студенческая олимпиада по теоретической механике.

Физтех представили две команды, в которые вошли студенты первого курса Роман Бурцев и Всеволод Доля и студенты второго курса Вадим Ерин и Олег Калашников. Обе команды с двукратным отрывом от ближайших соперников показали лучшие результаты в решении задач по теоретической механике и стали абсолютными победителями олимпиады.

Второе место по итогам олимпиады получили команды НГУ, ИТМО и ТГУ им. Махтумкули (Туркменистан), третье поделили между собой команды ГЭИТ, СПбГУ и УГНТУ.

За звание лучших состязались 115 студентов из 33 команд, представляющих вузы России и Туркменистана.

Участникам нужно было выполнить восемь заданий по основным разделам теоретической механики, чтобы показать свои возможности в решении сложных и нестандартных задач. Результаты оценивались в личном и командном зачетах. Для желающих проводился компьютерный конкурс.

Подготовкой сборной Физтеха к участию во Всероссийской студенческой олимпиаде по теоретической механике занималась преподаватель кафедры теоретической механики МФТИ Ульяна Монахова. Под ее руководством студенты МФТИ уже не в первый раз выигрывают соревнования.

Поздравляем ребят и их преподавателей с блестящей победой!

Источник: https://mipt.ru/news/

Попов Владислав Сергеевич
Старший преподаватель кафедры
«Информационные системы и телекоммуникации»
МГТУ им. Н.Э. Баумана

Вычисление количества итераций цикла исполнителя Чертёжник в задании № 12 ЕГЭ по информатике

В задании № 12 ЕГЭ по информатике в последние годы чаще всего встречаются задачи на анализ результатов работы исполнителя Редактор (см. «Переводим псевдокод, или Решение задачи № 12 ЕГЭ по информатике на обработку строк», Потенциал: Математика, Физика, Информатика, № 2, февраль 2022), однако ранее в задании присутствовали алгоритмы для исполнителей Робот и Чертёжник. Например, задача, содержащая алгоритм для исполнителя Чертёжник, появлялась в демонстрационных версиях ЕГЭ 2015 и 2018 и в досрочных вариантах ЕГЭ 2015 и 2019 г. С учётом практики использования старых заданий на ЕГЭ по информатике и обновления задания № 6, полезно повторить метод решения задач на нахождение количества итераций цикла для исполнителя Чертёжник. В данной статье рассмотрены аналитическое решение и метод проверки задания на анализ алгоритма для исполнителя Чертёжник.

Пример задания

Приведём задание демонстрационной версии ЕГЭ по информатике 2018 года:

Исполнитель Чертёжник перемещается на координатной плоскости, оставляя след в виде линии. Чертёжник может выполнять команду сместиться на (a, b), где a, b – целые числа. Эта команда перемещает Чертёжника из точки с координатами (x, y) в точку с координатами $(x + a, y + b)$. Например, если Чертёжник находится в точке с координатами (4, 2), то команда сместиться на (2, -3) переместит Чертёжника в точку (6, -1).

Цикл
ПОВТОРИ число РАЗ
    последовательность команд
КОНЕЦ ПОВТОРИ

означает, что последовательность команд будет выполнена указанное число раз (число должно быть натуральным).

Чертёжнику был дан для исполнения следующий алгоритм (число повторений и величины смещения в первой из повторяемых команд неизвестны):

```
НАЧАЛО
    сместиться на (4, 6)
    ПОВТОРИ … РАЗ
        сместиться на (…, …)
        сместиться на (4, -6)
    КОНЕЦ ПОВТОРИ
    сместиться на (-28, -22)
КОНЕЦ
```

В результате выполнения этого алгоритма Чертёжник возвращается в исходную точку. Какое наибольшее число повторений могло быть указано в конструкции «ПОВТОРИ … РАЗ»?

Аналитическое решение

Обозначим переменными n, a, b количество итераций цикла и смещение в первой команде тела цикла:

```
НАЧАЛО
    сместиться на (4, 6)
    ПОВТОРИ n РАЗ
        сместиться на (a, b)
        сместиться на (4, -6)
    КОНЕЦ ПОВТОРИ
    сместиться на (-28, -22)
КОНЕЦ
```

Для аналитического решения представленной задачи составим систему уравнений, описывающих изменения позиции Чертёжника по осям x и y, равные 0, поскольку исполнитель возвращается в исходную точку:

$$\begin{cases} 4+n(a+4)-28=0 \\ 6+n(b-6)-22=0 \end{cases}$$

Запишем уравнения системы в виде:

$$\begin{cases} n(a+4)=24 \\ n(b-6)=16 \end{cases}$$

Полученная система уравнений совместна и не определена, т.е. имеет бесконечно много решений. Для целых n, a, b наибольшим значением n является наибольший общий делитель чисел 24 и 16, который равен 8. Ответ: 8.

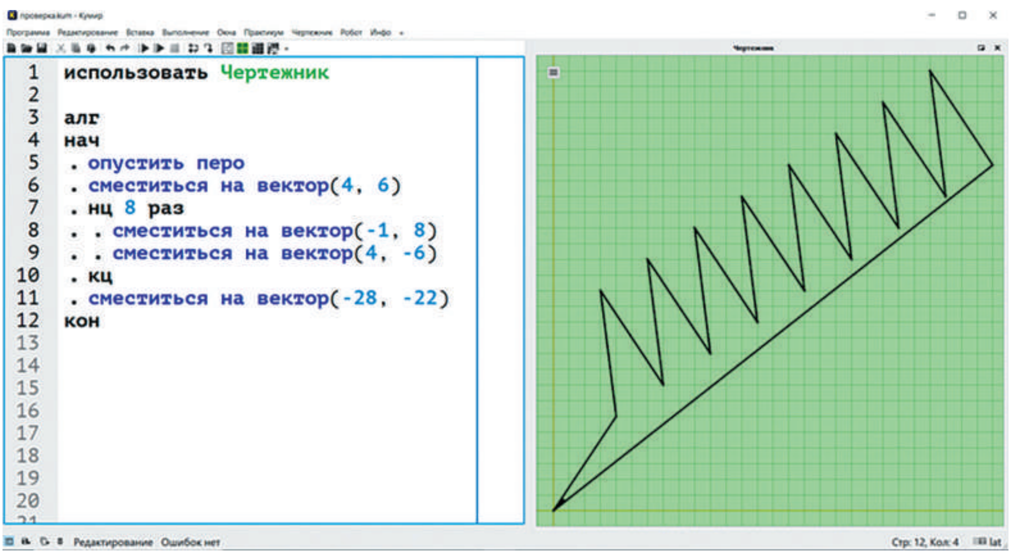


Рис. 1

Проверка в среде Кумир

Для проверки решения в среде Кумир, во-первых, следует вычислить значения переменных a, b для найденного значения $n = 8$: $a = -1$, $b = 8$. Во-вторых, следует записать приведённый в задании алгоритм в среде Кумир с вычисленными значениями переменных n, a, b. Если Чертёжник возвращается в исходную точку и при вычислении максимального количества итераций цикла был корректно вычислен наибольший общий делитель, то был получен правильный ответ (рис. 1).

Дополнительные задания для самостоятельного решения

1. (Демовариант ЕГЭ-2015)

Чертёжнику был дан для исполнения следующий алгоритм (буквами n, a, b обозначены неизвестные целые числа, при этом $n > 1$):

```
НАЧАЛО
    сместиться на (–3, –3)
    ПОВТОРИ n РАЗ
        сместиться на (a, b)
        сместиться на (27, 12)
    КОНЕЦ ПОВТОРИ
    сместиться на (–22, -7)
КОНЕЦ
```

Укажите наименьшее возможное значение числа n, для которого найдутся такие значения чисел a и b, что после выполнения программы Чертёжник возвратится в исходную точку.

Ответ: 5.

2*. Чертёжнику был дан для исполнения следующий алгоритм (на месте многоточий указаны неизвестные целые числа):

```
НАЧАЛО
сместиться на (10000, 4100)
    ПОВТОРИ … РАЗ
        сместиться на (…, 1)
        сместиться на (2, …)
    КОНЕЦ ПОВТОРИ
    сместиться на (85, -66)
КОНЕЦ
```

В результате выполнения этого алгоритма Чертёжник возвращается в исходную точку. Какое наибольшее число повторений могло быть указано в конструкции «ПОВТОРИ … РАЗ»?

Ответ: 2017.

3*. Чертёжнику был дан для исполнения следующий алгоритм (буквами n, a, b обозначены неизвестные целые числа, при этом $n > 1$):

```
НАЧАЛО
    ПОВТОРИ n РАЗ
        сместиться на (a, b)
        сместиться на (1, 2)
    КОНЕЦ ПОВТОРИ
    сместиться на (10, 20)
    ПОВТОРИ n РАЗ
        сместиться на (-2, -4)
        сместиться на (-a, -b)
    КОНЕЦ ПОВТОРИ
КОНЕЦ
```

Укажите возможное значение числа n, для которого найдутся такие значения чисел a, b, что после выполнения программы Чертёжник возвратится в исходную точку.

Ответ: 10.

Вовк Елена Тимофеевна
Зам. директора Учебного центра
факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Способы уплотнения и растягивания текста в текстовом редакторе

Текст не поместился в отведенное ему место? Текст оказался короче, чем предполагалось? Существует два принципиально разных подхода к решению этой проблемы. Их отличие заключается в том, изменится ли в результате общее число строк на странице или в колонке.

Методы, описанные в данной статье, используются в любом офисном пакете: будь то MS Office, Мой офис, Р7-офис, LibreOffice Writer. Текст статьи подготовлен на основе MS Office.

Если цель переверстки – разместить на листе дополнительную информацию и количество строк изменять допускается, попробуйте «поиграть» с межстрочными интервалами и уменьшить расстояние между строк или отступы до или после абзаца. Эти изменения можно вносить как для отдельных строк и/или абзацев полосы, так и для всех вместе.

Если же уменьшать общее количество строк никак недопустимо, попробуйте «втянуть» непоместившуюся информацию. Далее приводится описание доступных способов.. Но первое, что рекомендуется сделать, это проверить, нет ли в тексте абзацев, последняя строк которых заполнена совсем немного. С большой степенью вероятности именно этот «хвостик» можно втащить в абзац.

Изменение расстояния между символами

Рассмотрим приемы изменения расстояния между символами, уплотняя текст.

Пусть имеется абзац, последняя строка которого гораздо короче, чем ширина абзаца.

1. Выделите абзац целиком или его фрагмент.
2. Выполните команду *Главная → Шрифт* и перейдите на вкладку *Интервал*.
3. Из раскрывающегося списка *Интервал* выберите вариант *Уплотнить*.

4. В соседнем поле *на*: введите числовое значение, определяющее степень уплотнения. По умолчанию там высвечивается число 1. Это очень большое значение для обычных текстов. Для начала выберите 0,1 (рис. 1).

На рис. 2 показан абзац до изменения интервалов и после.

Изменение ширины символов

В той же вкладке *Интервалы* (рис. 1) в поле *Масштаб* можно задать ширину символов в процентах.

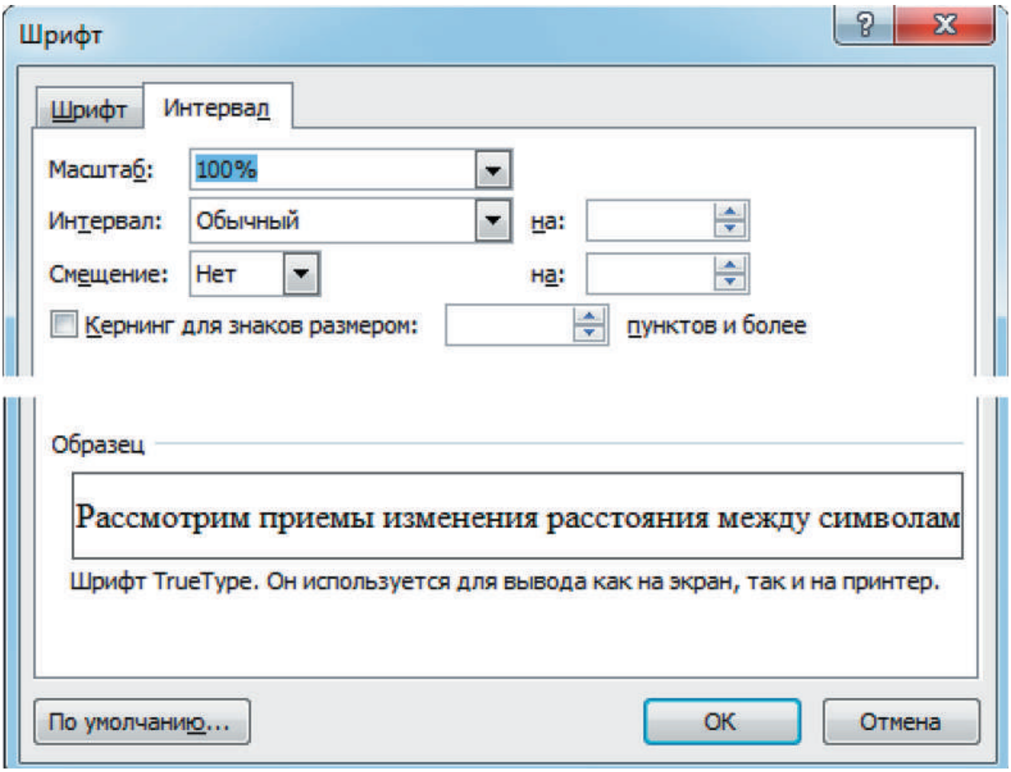
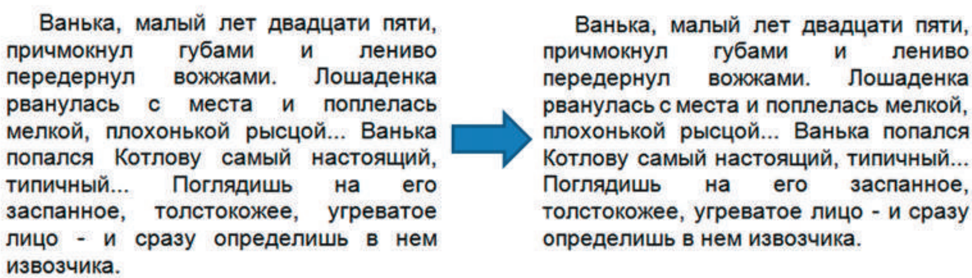


Рис. 1


Ванька, малый лет двадцати пяти, причмокнул губами и лениво передернул вожжами. Лошаденка рванулась с места и поплелась мелкой, плохонькой рысцой... Ванька попался Котлову самый настоящий, типичный... Поглядишь на его заспанное, толстокожее, угреватое лицо - и сразу определишь в нем извозчика.

Ванька, малый лет двадцати пяти, причмокнул губами и лениво передернул вожжами. Лошаденка рванулась с места и поплелась мелкой, плохонькой рысцой... Ванька попался Котлову самый настоящий, типичный... Поглядишь на его заспанное, толстокожее, угреватое лицо - и сразу определишь в нем извозчика.

Рис. 2

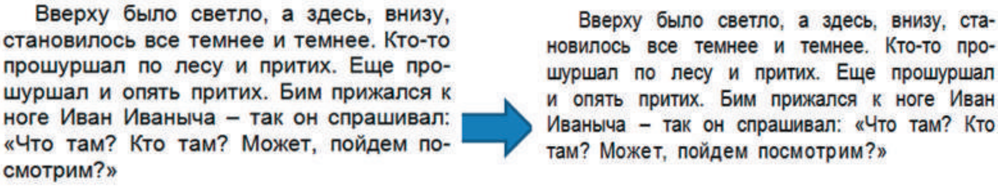


Рис. 3

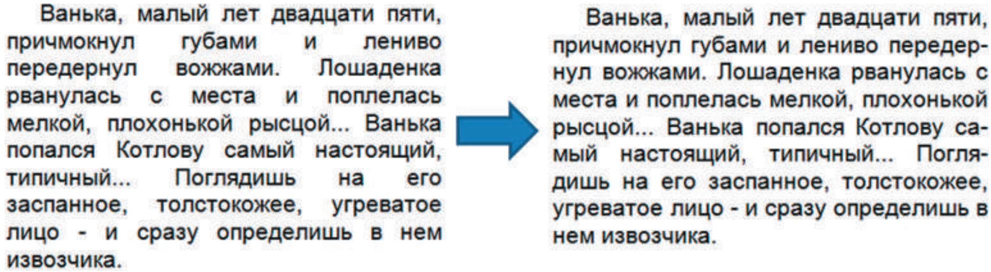


Рис. 4

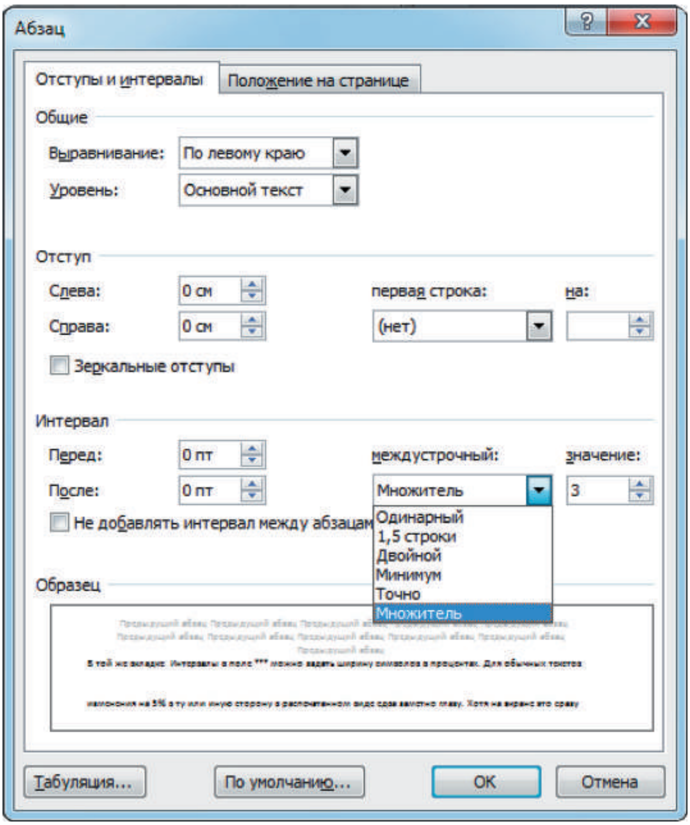


Рис. 5

Для обычных текстов изменения на 5% в ту или иную сторону в распечатанном виде едва заметно глазу. Хотя на экране это сразу бросается в глаза (рис. 3).

Установка режима с переносами

Если разрешить переносы слов со строки на строку, уменьшится расстояние между словами. Это также может сократить количество строк абзаца (рис. 4).

Изменение расстояния между строками

Уменьшая расстояние между строками на странице или в колонке, вы можете разместить большее количество строк.

1. Выделите строки, расстояние между которыми хотите изменить. Это может быть один или несколько абзацев, фрагмент текста.
2. Выполните команду *Главная →Абзац*.
3. На вкладке *Отступы и интервалы* из раскрывающегося списка поля *Междустрочный* (рис. 5) выберите значение *Множитель*. В соседнем поле введите значение расстояния между строками. Для небольшого изменения обычного текста это значение должно быть дробным, например, 1.3.

Мы рассмотрели случай, когда текст надо уплотнить. А если текст занимает меньше места, чем ему отведено? Единственное, что вы должны сделать в описанных приемах работы, – это заменить любое уменьшение на увеличение.

Специализированные издательские системы располагают более широкими возможностями, чтобы сделать текст более плотным или свободным. Но и работая в текстовом редакторе типа MS Word, вы можете управлять тонкими настройками расположения текста на странице документа.

ЮМОР

— Почему ваши дети все время ссорятся?

— Конфликт версий, — отвечает программист.

* * *

Любителям выкатывать обновления в интерфейсе хотелось бы пожелать, чтобы, садясь в машину, они обнаруживали, что рычаг теперь работает по-новому, а педали поменялись местами.

* * *

Сидит программист глубоко в отладке.

Подходит сынишка:

— Папа, почему солнышко каждый день встает на востоке, а садится на западе?

— Ты это проверял?

— Проверял.

— Хорошо проверял?

— Хорошо.

— Работает?

— Работает.

— Каждый день работает?

— Да, каждый день.

— Тогда ради бога, сынок, ничего не трогай, ничего не меняй.

Барашков Игорь Сергеевич
к.ф.-м.н, с.н.с. лаборатории математической физики
факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова,
Microsoft CERTIFIED Professional по базам данных, MCPID# 3132306

Использование функции ВПР в Excel для точного поиска

Название функции ВПР категории «Ссылки и массивы» расшифровывается, как «функция вертикального просмотра». Функция офисного пакета Excel ВПР позволяет найти искомые данные в указанной справочной таблице из указанного столбца этой таблицы и вернуть эти данные как результат. Данная функция может быть очень полезной при сопоставлении данных из разных таблиц или при сведении информации в какой-то единый массив для дальнейшего анализа. В английском варианте функция называется VLOOKUP. Эта функция является одной из самых востребованных в Excel. Она позволяет, к примеру, легко отыскать и сопоставить телефонные данные человека или организации из справочной таблицы по его имени. Можно сопоставить цену товаров по их наименованиям. Эти и многие другие возможности предоставит для Вас функция ВПР. Пользоваться ей достаточно просто.

Функция ВПР может выполнить либо точный поиск, либо приблизительный поиск. Рассмотрим подробнее точный поиск. Исходные данные для функции ВПР находятся в так называемой справочной таблице. Фрагмент этой таблицы изображён на Рис. 1.

В первом столбце этой таблицы указывается цена автомобиля в тысячах долларов США. Во втором столбце – фирма производитель автомобиля. В третьем столбце – модель автомобиля. Таблица расположена в диапазоне ячеек L6:N141. Функция ВПР ведет поиск искомого значения в крайнем левом столбце справочной таблицы и производит возврат значения в той же строке справочной таблицы из указанного столбца.

	L	M	N
6	car price	auto manufacturers производители автомобилей	automobile model
7	28.20	Acura	Integra
8	32.60	Acura	TL
9	35.50	Acura	RL
10	30.00	Audi	A4
11	34.00	Audi	A6
12	37.10	Audi	A8
13	32.10	BMW	323i
14	33.90	BMW	328i

Рис. 1. Фрагмент таблицы про автомобили

	A	B	C	D	E	F	G
5							
6	house number	date of birth дата рождения	years at this address	house price in thousands USD цена дома в тысячах долларов США	car purchase Дата покупки автомобиля	car price	automobile model
7	86	10.08.1979	1	50.00	31.07.2019	24.20	
8	192	21.04.1975	28	50.00	11.04.2013	25.50	
9	541	06.02.1974	5	50.00	27.01.2013	26.10	
10	35	06.12.1973	16	50.00	30.11.1999	24.80	
11	481	17.02.1973	7	50.00	08.02.2011	25.20	
12	502	23.01.1970	17	50.00	17.01.1995	24.80	
13	308	02.01.1970	13	50.00	23.12.2008	25.50	

Рис. 2.Фрагмент таблицы про людей

Используя эту справочную таблицу, надо ввести недостающие данные про модели автомобилей в другую бóльшую таблицу про людей. Трудность заключается в том, что в справочной таблице автомобилей этих моделей не 3 и не 5, а много. В таблице 135 моделей. Поэтому вручную без помощи функции ВПР работу никак не выполнить. Фрагмент таблицы про людей изображён на Рис. 2.

В этой таблице есть данные о том, насколько человек состоятелен: цена его дома в тысячах долларов США, цена его автомобиля в тысячах долларов США, а также дата покупки автомобиля, по которой можно определить, на новой машине человек ездит или на старой. Кроме того, приводятся ещё некоторые данные, но модель автомобиля в таблице пока не указана. Заполнить столбец G про модель автомобиля поможет функция ВПР.

Определить модель автомобиля для первого человека в ячейке G7 можно по цене этого автомобиля в ячейке F7.

Для этого надо позиционироваться в ячейке G7 и щёлкнуть мышкой кнопку «Вставить функцию» слева в строке формул. В появившемся окне «Мастер функций – шаг 1 из 2», показанном на Рис. 3, в раскрывающемся списке «Категория» надо указать категорию «Ссылки и массивы», а в поле «Выберите функцию» надо выбрать функцию ВПР и нажать кнопку ОК.

В результате попадаем в следующее окно «Аргументы функции», которое показано на Рис. 4, В качестве первого параметра при обращении к функции ВПР указывается искомое значение. Поэтому для решаемой за-

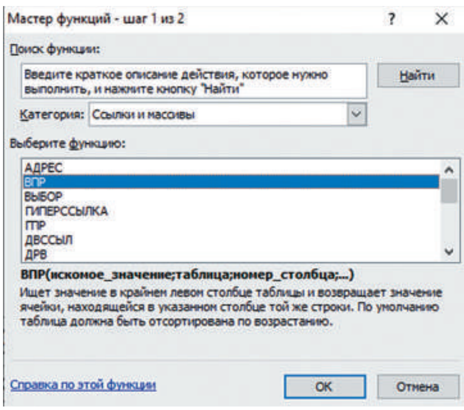


Рис. 3. Окно «Мастер функций – шаг 1 из 2»

дачи в первом поле «Искомое_значение» надо указать ссылку на ячейку F7, в которой приводится цена автомобиля, модель которого определит функция ВПР по этой цене. Ссылку надо сделать относительную, поскольку предстоит определить не одну модель автомобиля, а все модели автомобилей в таблице про людей. Построим сначала одну формулу со ссылкой на ячейку F7, а потом с помощью автозаполнения получим все формулы в столбце G, ссылающиеся на соответствующие ячейки столбца F с ценами на автомобили.

Вторым параметром при обращении к функции ВПР указывается именно та справочная таблица (или диапазон ячеек), в которой следует произвести поиск. Причём искомое значение должно содержаться в первом столбце этой справочной таблицы. Поэтому во втором поле «Таблица» надо указать ссылку на диапазон ячеек $L$6:$N$141, в котором находится справочная таблица про автомобили, в которой следует произвести поиск. Эту ссылку надо сделать абсолютной, поскольку при автозаполнении ссылка на этот диапазон не должна меняться.

Третий параметр при обращении к функции ВПР – номер столбца. Третий параметр должен включать столбец справочной таблицы для ответа. Этот столбец должен содержать возвращаемое функцией ВПР значение. Этот столбец должен находиться в справочной таблице правее от столбца с искомым значением. Поэтому в третьем поле «Номер_столбца» для решаемой задачи надо указать число 3, поскольку именно в третьем столбце справочной таблицы про автомобили перечислены модели автомобилей. Этот столбец должен содержать возвращаемое функцией ВПР значение.

В четвёртом поле «Интервальный_просмотр» надо указать 0, что означает точный поиск (совпадения при просмотре сверху вниз).

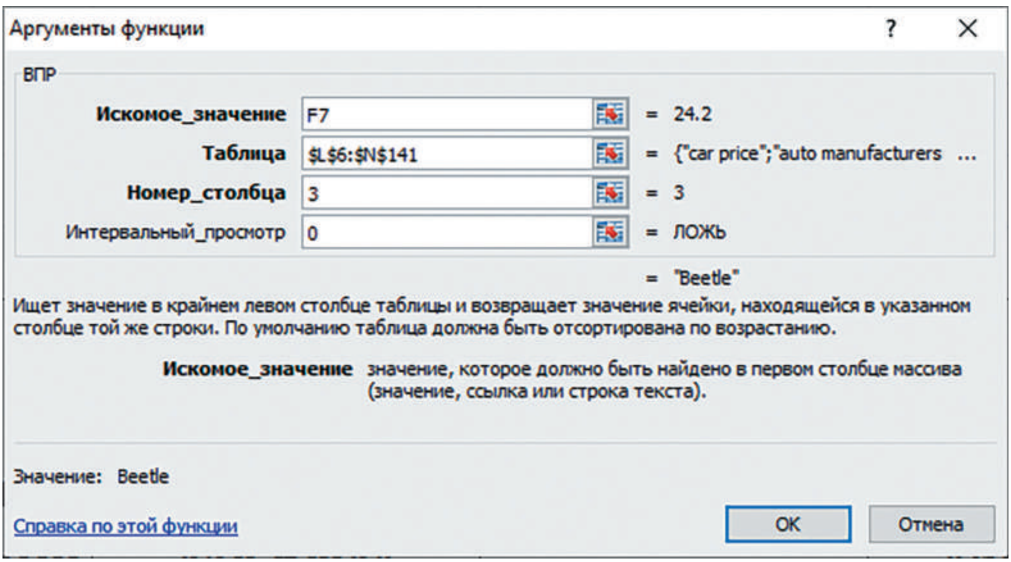


Рис. 4. Окно «Аргументы функции»

	F	G	H	I	J
6	car price	automobile model	education	marital status семейное положение	people living in the house
7	24.20	Beetle	Some college	m	1
8	25.50		Did not complete	m	1
9	26.10		Did not complete	m	1
10	24.80		College degree	m	1

Рис. 5. Результат работы функции ВПР в ячейке G7

	F	G	H	I	J
6	car price	automobile model	education	marital status семейное положение	people living in the house
7	24.20	Beetle	Some college	m	1
8	25.50	GTI	Did not complete	m	1
9	26.10	Ram Van	Did not complete	m	1
10	24.80	Cougar	College degree	m	1
11	25.20	Dakota	Did not complete	m	1
12	24.80	Cougar	High school degr	m	1
13	25.50	GTI	Did not complete	m	1
14	26.60	Sable	Did not complete	m	1
15	24.40	Mystique	College degree	m	1
16	25.50	GTI	Did not complete	m	1
17	25.90	Cutlass	Did not complete	m	1
18	25.40	Galant	Some college	m	1
19	26.10	Ram Van	Some college	m	1

Рис. 6. С помощью автозаполнения получены в столбце G модели автомобилей для всех людей

Замечание. Последний аргумент – интервальный просмотр, здесь может быть 2 значения: 0 – ЛОЖЬ (точный поиск), 1 – ИСТИНА (приблизительный поиск). Последний аргумент отвечает за точный поиск (совпадения при просмотре сверху вниз). Если при значении этого аргумента 0 (точный поиск) функция ВПР ничего не находит, то возвращается сообщение об ошибке Н/Д (нет данных), 1 – приблизительный поиск.

Затем надо нажать кнопку ОК для получения результата. На Рис. 5. показан результат работы функции ВПР. В результате для первого человека в ячейке G7 функция ВПР определила модель автомобиля Beetle, а в строке формул появилась формула:

=ВПР(F7;$L$6:$N$141;3;0)

Наконец, с помощью автозаполнения получим в столбце G модели автомобилей для всех людей (рис. 6).

Шмитов Максим Олегович
преподаватель Учебного центра ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова

Никонов Максим Викторович
Аналитик ООО «ВКонтакте»,
Департамент AI, контентов и рекомендательных систем

Загадочные простые числа

В данной статье рассматриваются простые числа — ключевые элементы арифметики, не имеющие делителей, кроме единицы и самих себя. Исследование охватывает историческое значение, математические свойства и центральную роль простых чисел в современной криптографии. Работа начинается с основных теоретических аспектов простых чисел, затем переходит к их распределению и влиянию на теорию чисел, включая обсуждение гипотезы Римана.

Особое внимание уделяется использованию простых чисел в криптографии и связанным с этим трудностям факторизации, что поднимает вопросы безопасности в эпоху квантовых вычислений. Рассматриваются методы определения простоты чисел, включая вероятностные и детерминированные тесты, а также особые классы простых чисел, такие как числа Мерсенна и Ферма.

1. Основы и значение простых чисел

Возможно, нет чисел в математике, которые были бы одновременно так просты и так загадочны, как простые числа. Благодаря уникальным свойствам они становятся строительными блоками арифметики, основой для теорем и важнейшим инструментом в современной криптографии. В этой работе мы погрузимся в их тайны и откроем, почему простые числа считаются одной из самых фундаментальных и волнующих тем в математике.

Простые числа — это те натуральные числа, которые больше единицы и не имеют других делителей, кроме себя и единицы. Самое маленькое простое число — это 2, единственное четное простое число. Следующее за ним — 3, затем 5, 7 и так далее. На первый взгляд, кажется, что они распределены случайно, но на самом деле в их расположении скрыта удивительная закономерность, которую ученые пытаются понять уже тысячелетия.

История простых чисел начинается еще с древних времен. Древнегреческий математик Евклид в своем фундаментальном труде "Начала" доказал бесконечность простых чисел, предложив элегантное доказательство, которое легло в основу теории чисел. С тех пор простые числа привлекали внимание многих математиков, от Ферма и Гаусса до современных исследователей, каждый из которых внес свой вклад в разгадку их тайн.

Теория чисел — это ветвь математики, изучающая свойства и отношения чисел, особенно целых. Простые числа играют в ней ключевую роль, поскольку являются основой для понимания более сложных структур. Рассмотрим теорему о простых числах, которая описывает распределение простых чисел, и изучим, как именно она помогает математикам предсказывать, где в числовом ряду появится следующее простое число.

Простые числа, как и атомы в физике, являются фундаментальными строительными блоками в математике. Основная теорема арифметики — это утверждение, которое по праву может считаться одним из краеугольных камней математики. Она гласит, что каждое целое число больше единицы либо является простым, либо может быть разложено на простые числа, которые называются его простыми множителями. И самое удивительное, что такое разложение уникально; нет другого набора простых чисел, который мог бы дать нам то же самое произведение.

Эта уникальность делает простые числа поистине особыми. Рассмотрим, например, число 30. Оно разлагается на простые множители как $2 \times 3 \times 5$. Нельзя составить число 30 из произведения других простых чисел. Это свойство также дает нам понимание делимости чисел: если простое число делит произведение двух чисел, то оно должно делить хотя бы одно из этих чисел. Это простое, но мощное наблюдение лежит в основе таких понятий, как Наибольший Общий Делитель (НОД) и Наименьшее Общее Кратное (НОК).

Делимость — это способность одного числа делить другое без остатка. Например, 15 делится на 3 и 5 без остатка, поэтому 3 и 5 — делители числа 15. Простые числа играют ключевую роль в понимании делимости, потому что они являются самыми "базовыми" делителями. Если вы знаете разложение числа на простые множители, вы можете сказать многое о том, как оно делится.

Наибольший общий делитель (НОД) двух чисел — это наибольшее число, на которое оба числа могут быть разделены без остатка. Используя простые числа, мы можем легко находить НОД двух чисел, разложив каждое число на простые множители и выбрав общие множители. Аналогичным образом, наименьшее общее кратное (НОК) двух чисел — это наименьшее число, которое оба числа могут делить без остатка. Оно может быть найдено путем объединения простых множителей обоих чисел в одно число с учетом самых высоких степеней каждого простого числа, встречающегося в разложениях.

Понимание простых чисел и их свойств открывает двери к более глубокому пониманию структуры чисел. Например, рассмотрим алгоритм Евклида, который является одним из старейших алгоритмов в математике, используемых для нахождения НОД. Его простота и элегантность показывают, как древние идеи продолжают быть актуальными и в современной математике.

Алгоритм Евклида основан на повторяющемся процессе вычитания или деления, чтобы найти НОД. Например, чтобы найти НОД чисел 207 и 81, мы можем отнять меньшее число от большего:

$$207 - 81 = 126,$$
$$126 - 81 = 45,$$
$$81 - 45 = 36,$$
$$45 - 36 = 9,$$
$$36 - 9 = 27,$$
$$27 - 9 = 18,$$
$$18 - 9 = 9.$$

Здесь мы видим, что дальнейшее вычитание приведет нас к числу 9, которое больше не изменяется, что указывает на то, что 9 — это НОД для 207 и 81.

Применяя алгоритм Евклида, мы используем простые числа и их свойства, чтобы найти наибольший общий делитель, что в свою очередь помогает нам понять связи между числами на более глубоком уровне.

2. Теоретические аспекты и распределение

Теперь, перейдем к еще одному важному аспекту простых чисел — их распределению. Вопрос о том, как часто мы встречаем простые числа по мере продвижения вперед по числовой прямой, волновал математиков на протяжении веков. В 19 веке, математики начали замечать, что частота простых чисел уменьшается по мере увеличения чисел, но это уменьшение следует определенной тенденции.

Эта тенденция была формализована в законе распределения простых чисел, который утверждает, что вероятность того, что случайно выбранное большое число n будет простым, обратно пропорциональ-

на его логарифму, то есть приблизительно 1 / $\ln(n)$, где ln обозначает натуральный логарифм. Это означает, что простые числа становятся все более редкими по мере того, как мы идем вверх по числовой шкале, но они делают это по предсказуемому и понимаемому нами образцу. Также невероятно интересно то, что распределение простых чисел тесно связано с одной из самых знаменитых и нерешенных проблем в математике — с гипотезой Римана. Гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана имеют вещественную часть, равную 1/2. Это предположение имеет глубокие последствия для теории чисел и особенно для распределения простых чисел. Если гипотеза Римана верна, это бы дало нам еще более точное понимание того, как простые числа распределяются среди натуральных чисел.

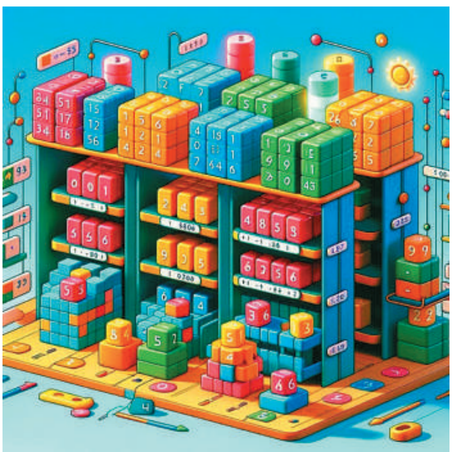
3. Простые числа в криптографии

Простые числа играют не менее важную роль в современной криптографии. Системы шифрования, которые защищают наши онлайн-транзакции и конфиденциальную информацию, часто опираются на сложность разложения больших чисел на простые множители. Это принцип, лежащий в основе таких публичных ключевых систем, как RSA.

В криптографии RSA мы выбираем два больших простых числа и умножаем их вместе, чтобы получить очень большое составное число. Это произведение становится частью публичного ключа, используемого для шифрования сообщений. Хотя произведение этих двух простых чисел легко вычислить, обратная операция — разложение составного числа обратно на исходные простые множители — с учетом текущих технологий и знаний, является чрезвычайно сложной задачей. Это асимметрия между легкостью умножения и трудностью факторизации лежит в основе безопасности RSA и многих других криптосистем.

Секретность ключа в RSA и других подобных системах шифрования основана на том, что в то время как владелец ключа знает исходные простые числа (или может их легко вычислить), любому, кто видит только их произведение, будет чрезвычайно трудно восстановить исходные простые числа без знания каких-либо дополнительных секретов. Это одностороннее или "ловушечное" свойство является критическим для безопасности.

Дополнительно, простые числа также используются в генерации псевдослучайных чисел, в тестах на простоту и в криптографических хэш-функциях. Таким образом, они



неотъемлемо связаны с поддержанием целостности и безопасности цифрового мира.

Сложность факторизации больших чисел также поднимает вопросы о будущем криптографии, особенно с учетом развития квантовых компьютеров, которые, как предполагается, смогут решать такие задачи гораздо быстрее, чем современные классические компьютеры. Это вынуждает исследователей искать новые направления и методы защиты информации, такие как квантовая криптография или разработка новых алгоритмов, устойчивых к квантовым вычислениям.

Теперь, когда мы понимаем значение простых чисел для криптографии, давайте взглянем на методы, с помощью которых математики определяют простые числа среди всех целых чисел. Для маленьких чисел, это можно сделать путем простого перебора возможных делителей. Однако, когда дело доходит до очень больших чисел, такой подход становится неосуществимым из-за огромного количества потенциальных делителей.

4. Методы определения и специальные классы простых чисел

Именно поэтому были разработаны специализированные алгоритмы, такие как тест простоты Миллера-Рабина, который является вероятностным тестом. Этот тест может быстро определить, что число составное, но он только предполагает, что число простое, с некоторой вероятностью ошибки. Для большинства практических приложений вероятность ошибки может быть сделана настолько маленькой, что ею можно пренебречь.

С другой стороны, существуют также детерминированные тесты, такие как тест простоты АКС, который всегда точно определит, является ли число простым, но он требует значительно больше времени на выполнение по сравнению с вероятностными тестами, особенно для очень больших чисел.

Тест АКС является результатом продолжительных исследований в области вычислительной теории чисел и демонстрирует прекрасное сочетание математической глубины и вычислительной практичности. Он основан на сложных концепциях, таких как многочлены и теория Галуа, и был первым опубликованным тестом простоты, который одновременно является полиномиальным, детерминированным и общим.

Но вернемся к нашей главной теме и рассмотрим, как простые числа проявляют себя в других областях математики и науки. Простые числа имеют удивительные свойства, которые делают их незаменимыми

в теории чисел и математике в целом. Одним из таких свойств является их участие в формировании последовательностей простых чисел, таких как простые числа-близнецы, которые представляют собой пары простых чисел, различающихся на 2 (например, 11 и 13).

Есть и другие интересные классы простых чисел, такие как простые числа Мерсенна, которые определяются как простые числа вида $2^n - 1$, и простые числа Ферма, имеющие форму $2^{2^n} + 1$. Исследования таких простых чисел приводят к глубокому пониманию их природы и вносят вклад в развитие теории чисел.

Простые числа Мерсенна особенно интересны, потому что они связаны с совершенными числами — числами, которые равны сумме своих делителей, за исключением самого числа. Евклид обнаружил, что каждое совершенное число связано с простым числом Мерсенна, и это открытие было одним из первых примеров глубокой связи между различными областями математики.

Простые числа Ферма, которые были названы в честь французского математика Пьера Ферма, также имеют уникальное свойство: если число Ферма является простым, то его можно использовать для построения правильного многоугольника с компасом и линейкой. Это связывает простые числа с геометрией и показывает, как далеко может зайти их влияние.

5. Междисциплинарное влияние и будущее исследований

Конечно, простые числа не только укрепляют основы математики, но и появляются в самых неожиданных местах, например, в биологии, где некоторые исследования показывают, что некоторые животные, возможно, используют простые числа для повышения выживаемости своих видов, как показано на примере цикад, которые появляются на поверхности земли через промежутки времени, равные простым числам.

Возможно, самое удивительное в простых числах — это то, как они продолжают участвовать в новейших открытиях и продолжают ставить перед нами вопросы, ответы на которые мы ещё не нашли. Один из таких вопросов — это знаменитая гипотеза о простых числах-близнецах, которая утверждает, что существует бесконечно много пар простых чисел, разница между которыми составляет всего два (например, 17 и 19). Несмотря на значительные усилия, эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута, но она продолжает интриговать и мотивировать исследователей.

Также простые числа имеют значение в изучении квантовых вы-

числений. Интересно, что алгоритм Шора, который представляет собой квантовый алгоритм для факторизации чисел, использует простые числа как ключевой элемент. Это открытие показало, что если квантовые компьютеры станут широко доступны, то большинство современных методов шифрования могут быть разрушены, что подчеркивает необходимость разработки новых криптографических протоколов.

Простые числа также играют роль в вычислительной математике и алгоритмах, например, в методах хеширования и проверки целостности данных, которые являются основой для безопасности данных и цифровой подписи. Простые числа используются для создания хеш-функций, которые превращают входные данные произвольного размера в короткий фиксированный хеш. Если данные изменяются даже незначительно, то хеш также изменится, что позволяет обнаружить любые изменения или повреждения данных.

Кроме того, простые числа находят применение в таких областях, как сетевые технологии, например, в алгоритмах маршрутизации и распределенных вычислениях. Они используются для устранения коллизий в хеш-таблицах и для распределения данных в кластерах серверов таким образом, чтобы оптимизировать хранение и доступ к информации.

Все это лишь подчеркивает, как далеко от своих скромных начал в теории чисел дошли простые числа. Они оказались в самом сердце современных технологий и продолжают быть предметом глубоких теоретических исследований. Простые числа, эти, казалось бы, простые и понятные элементы, окружены аурой загадочности, простирающейся от древних текстов до квантовых вычислений и даже до загадок природы. Именно это делает их одной из самых захватывающих тем для изучения, как для начинающих, так и для опытных математиков.

В заключение, можно сказать, что простые числа не просто кирпичики математики, они — её живая плоть, бьющееся сердце, которое продолжает вдохновлять и вызывать удивление среди всех, кто сталкивается с их неисчерпаемыми загадками и возможностями. Мы можем удивляться, как такие простые объекты, как простые числа, могут играть столь важную роль в столь разнообразных и сложных системах, от алгоритмов, лежащих в основе интернет-безопасности, до построения гармоничных музыкальных композиций.

Изучение простых чисел также проливает свет на вечную игру между порядком и хаосом в математике. С одной стороны, последовательность простых чисел кажется непредсказуемой и случайной, но с другой — подчиняется строгим математическим законам, таким как Закон распределения простых чисел или гипотетические утверждения, вроде Гипотезы Римана. Это напоминает нам, что в самом сердце математики лежит неожиданность, возможность открытий, которые могут полностью изменить наше восприятие мира.

Мы также видим, что вопросы, связанные с простыми числами, часто встают на границе нашего понимания. Простые числа-близнецы, простые числа Мерсенна и Ферма — все они представляют собой вехи, которые стоят на перекрестках важнейших математических идей и крупнейших нерешенных проблем.

Наконец, исследование простых чисел неизбежно приводит нас к философским размышлениям о природе знаний и методах научного поиска. Они напоминают нам, что каждое новое открытие или доказанная теорема может открыть дверь к целому новому миру вопросов и тайн. Простые числа — это не просто объекты для пассивного изучения; они — активные участники в диалоге между человеческим интеллектом и абстрактным миром идей.

И в этом диалоге, который продолжается уже тысячелетия, каждый новый математик, взаимодействующий с простыми числами, не просто узнает что-то новое о числах, но и вносит свой вклад в долгую цепь человеческого знания, простирающуюся в прошлое и устремляющуюся в будущее, к новым открытиям, которые, без сомнения, изменят наш мир.

Таким образом, простые числа остаются одним из самых великих побудителей к размышлению и изучению в математике, предлагая бесконечное поле для исследования и открытия, стимулируя как интеллектуальное любопытство, так и практическое применение в мире, где математика является основой всего, от кибербезопасности до понимания самых глубинных законов природы.

Картинки авторские, специально сгенерированы автором и нейросетью DALL-E 3 для статьи

Литература

1. Апостол, Т. М. (1976). "Введение в аналитическую теорию чисел". Springer-Verlag.
3. Гарднер, М. (1984). "Простые числа, играющие важную роль в элементарной математике". ScientificAmerican.
5. Харди, Г. Х., Райт, Э. М. (1979). "Введение в теорию чисел". Оксфордский университетский пресс.
7. Кнут, Д. (1997). "Искусство программирования, Том 2: Полу численные алгоритмы". Addison-Wesley.
9. Рибенбойм, П. (2000). "Новая книга о простых числах". Springer.
11. Роуз, К. (1995). "Курс теории чисел и криптографии". Springer-Verlag.
13. Силверман, Дж. Х. (1986). "Дружественные введение в теорию чисел". Прентис Холл.
15. Стюарт, И. (1997). "Природа чисел: Простые числа и их свойства". DoverPublications.
17. Вайсштайн, Э. В. "Математическая энциклопедия Вольфрама: Простые числа".
19. Загиер, Д. (1997). "Новая гипотеза о распределении простых чисел". Анналы Математики.

Шишов Егор Алексеевич
Выпускник физического факультета МГУ.
Младший научный сотрудник
Института физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН.
Преподаватель курсов олимпиадной школы МФТИ.
Учитель физики в ГБОУ «Школа 1501»

Количество дроби в пластилине

7 класс

Лабораторная работа №6

Перед вами набор оборудования, который поможет выполнить шестую лабораторную работу из сборника «Экспериментальная и олимпиадная физика. 7 класс». В представленной памятке изложено описание соответствующей работы с небольшими исправлениями относительно сборника. Обратите внимание на фотографии – они помогут вам правильно выполнить самые ответственные действия.

Материалы и оборудование: пластилин, дробь, весы электронные , мерный стакан, пластиковый стакан, два медицинских шприца разного объема, пластиковая бутылка.

Это одна из самых сложных задач по теме «плотность». Она показывает, как важно для физика в совершенстве владеть математическим аппаратом, пусть и на уровне 6-7 класса. Измерения в этой работе должны проводиться очень аккуратно и с большой точностью, иначе полученный результат будет очень далек от правильного ответа.

Постановка задачи отсылает нас к легенде об Архимеде, которому нужно было определить, есть ли в золотой короне примесь серебра. Только вместо золота у нас будет пластилин, а вместо серебра – свинцовая дробь. Нужно не просто узнать, есть ли дробь в пластилине, но и вычислить ее точную массу (рис. 1).

		
Возьмите горсть дробинок и вдавите их в плоские куски пластилина. Вы не должны знать точное число дробинок.	*Закройте дробинки сверху другими кусками пластилина и хорошо промните. Внутри не должно остаться воздушных пустот.*	*Скатайте шарик. Не страшно, если некоторые дробинки будут проступать на поверхности.*

Рис. 1

Для измерений нам предоставлен пластилиновый шарик с дробью внутри (рис. 2). Плотности свинца и пластилина можно взять из прошлых измерений. Общая масса исследуемого тела складывается из масс пластилина и массы дроби: $m_{общ} = m_{пл} + m_{др}$, а общий объем – из суммы их объемов:

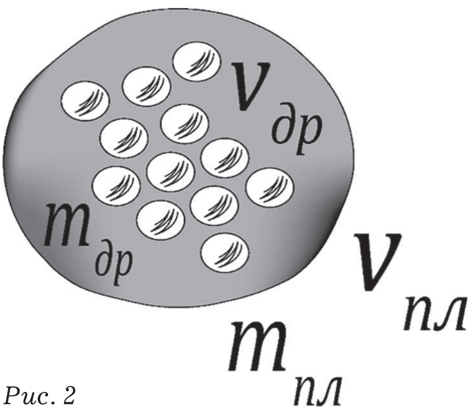


Рис. 2

$$V_{общ} = V_{пл} + V_{др}.$$

Кроме того, массы и объемы «свинцовой» и «пластилиновой» части шарика связаны между собой через формулы плотности $\rho_{пл} = \dfrac{m_{пл}}{V_{пл}}$ и $\rho_{др} = \dfrac{m_{др}}{V_{др}}$. Объединим эти четыре выражения в одну систему:

$$\begin{cases} m_{общ} = m_{пл} + m_{др} \\ V_{общ} = V_{пл} + V_{др} \\ \rho_{др} = \dfrac{m_{др}}{V_{др}} \\ \rho_{пл} = \dfrac{m_{пл}}{V_{пл}} \end{cases}$$

Вот и все. Физика на этом шаге заканчивается. Мы получили четыре уравнения с четырьмя неизвестными: $m_{пл}$, $m_{др}$, $V_{пл}$, $V_{др}$. Масса шарика $m_{общ}$, его объем $V_{общ}$, а также плотности $\rho_{пл}$ и $\rho_{др}$ могут быть найдены из эксперимента.

Вообще говоря, после того как мы составили корректную систему уравнений, физическую задачу можно считать решенной. Остальное, как говорится, дело техники. Правда, этой техникой еще нужно овладеть.

Настал черед алгебры. Выразим объемы через плотности и массы: $V_{др} = \dfrac{m_{др}}{\rho_{др}}$, $V_{пл} = \dfrac{m_{пл}}{\rho_{пл}}$. Учтем, что $m_{пл} = m_{общ} - m_{др}$. Подставим полученные объемы в выражение для $V_{общ}$: $V_{общ} = \dfrac{m_{др}}{\rho_{др}} + \dfrac{m_{общ} - m_{др}}{\rho_{пл}}$.

У нас получилось объединить все четыре формулы в одну, причем только с одной неизвестной $m_{др}$. Осталось ее выразить. Для начала избавимся от дробей, умножив обе части уравнения на $\rho_{др}$. Получим $V_{общ}\rho_{др}\rho_{пл} = m_{др}\rho_{пл} + m_{общ}\rho_{др} - m_{др}\rho_{др}$. Перенесем слагаемые, содержащие неизвестную $m_{др}$ в левую сторону уравнения, а все остальное соберем справа: $m_{др}\rho_{др} - m_{др}\rho_{пл} = m_{общ}\rho_{др} - V_{общ}\rho_{др}\rho_{пл}$. Вынесем $m_{др}$ и $\rho_{др}$ за скобки: $m_{др}\left(\rho_{др} - \rho_{пл}\right) = \rho_{др}\left(m_{общ}\rho_{др} - V_{общ}\rho_{пл}\right)$. Наконец, разделим обе части уравнения на $\rho_{др} - \rho_{пл}$:

$$m_{др} = \frac{\rho_{др}\left(m_{общ} - \rho_{пл}V_{общ}\right)}{\rho_{др} - \rho_{пл}}.$$

Теперь можно приступить к измерениям (рис. 3 и 4). Объем пластилина с дробью и плотность пластилина без дроби определяется методом, описанным в упражнении 5.3. (см. «Экспериментальная и олимпиадная физика» 7 класс). Масса $m_{общ}$ находится взвешиванием на весах. В упражнениях 4.3 и 5.2 показано, как можно измерить плотность и объем свинцовой дроби $\rho_{др}$. Все данные заносятся в таблицу, затем производятся вычисления.

Результаты измерений:

$V_{общ}$, см^3	
$m_{общ}$, г	
$\rho_{др}$, см^3	
$\rho_{пл}$, см^3	

Расчетная формула:

$$m_{др} = \frac{\rho_{др}\left(m_{общ} - \rho_{пл}V_{общ}\right)}{\rho_{др} - \rho_{пл}}.$$

Если дополнительно измерить методом рядов массу $m_{1др}$ одной дробинки, то можно вычислить общее число дробинок внутри пластилинового шарика: $N = \dfrac{m_{др}}{m_{1др}}$. Полученное число N нужно округлить до целых. После дополнительной проверки можно вскрыть пластилин и узнать, сколько дроби было внутри на самом деле.

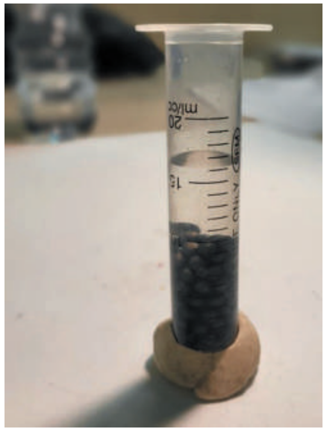
		
Чтобы дробь не скатывалась с весов, можно поместить ее в стаканчик. Не забудьте вычесть из результата массу пустого стаканчика.	*Для определения объема дроби можно сделать мензурку из шприца. Закупорьте носик шприца пластилином. Убедитесь, что вода не протекает.*	*В шприц нужно засыпать ровно то же количество дроби, которое было взвешено на весах.*

Рис. 3

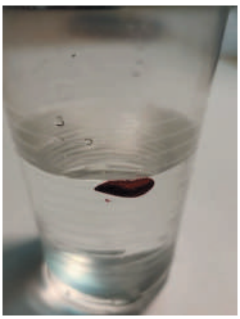
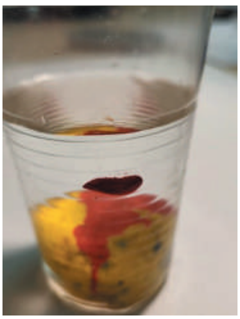
			
Налейте в стакан некоторое количество воды и отметьте уровень карандашом или маленьким кусочком пластилина	*Погрузите в воду кусок пластилина с дробью. Уровень воды поднимется относительно отметки*	*Используя шприц, откачайте воду до прежнего уровня. По шкале шприца определите, какой объем жидкости для этого потребовался. Это и будет объемом тела.*	*При включении весов убедитесь, что те выставились на ноль. Только после этого приступайте к взвешиванию. Объем и масса чистого пластилина (без дроби) находятся теми же методами.*

Рис. 4

Дополнительные задания

1. Как изменится точность измерений, если вместо свинцовых дробинок в пластилин завернуть стальные шарики или пластиковые бусины?

2. Решите обратную задачу. В куске пластилина массой 50 г спрятано несколько дробинок общей массой 40 г. Какова будет средняя плотность такого тела? Плотность пластилина 1,5 г/см^3, плотность свинца – 11,34 г/см^3. Ответ: 2,9 г/см^3.

3. Стальной кубик с воздушной полостью внутри имеет среднюю плотность 6,24 г/см^3. Ребро кубика равно 4 см, а плотность чистой стали 7,8 г/см^3. Найдите объем воздушной полости внутри кубика. Ответ: 12,8 г/см^3.

4. Бронзовая медаль олимпийских игр имеет массу $M = 300$ г и плотность $\rho = 8{,}6$ г/см^3. Известно, что бронза является сплавом меди и олова. Определить массу олова в медали, если плотность олова равна $\rho_о = 7{,}3$ г/см^3, а плотность меди — $\rho_м = 8{,}9$ г/см^3. Ответ выразить в граммах, округлив до целых. (Олимпиада Физтех-лицея. 2015 г. 7, 8 кл.)

5. Сплав состоит из 100 г золота и 100 см^3 меди. Определите плотность этого сплава. Плотность золота равна 19,3 г/см^3, плотность меди — 8,9 г/см^3. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по физике. 2013 г. 7 кл.)

7. Археологи обнаружили кусок льда с вмёрзшей в него костью мамонта. Найти объём кости, если объём льда с костью равен $V = 440$ л, масса $M = 500$ кг. Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, а плотность кости $\rho_к = 2000$ кг/м^3. Ответ выразите в дм^3, округлив до целых. (Олимпиада Физтех-лицея. 2015 г. 7 кл)

8. Школьник Вася решил измерить среднюю плотность кубика льда. Он взвесил кубик, измерил длину его ребра, вычислил объём кубика и разделил его массу на объём. Результат очень удивил Васю: средняя плотность ледяного кубика оказалась равна 0,5 г/см^3, хотя в справочнике было написано, что плотность льда 0,9 г/см^3. Тогда Вася предположил, что в ледяном кубике находится полость, наполненная воздухом. Найдите объём полости, если длина ребра кубика составляет 3,0 см. (Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по физике. 2015 г. 7 кл.)

9. В мастерской изготовили из алюминия плотности $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3 куб с ребром $a = 10$ см. Внутри куба осталась полость, которую потом залили свинцом плотности $\rho_2 = 11{,}3$ г/см^3. В результате измерений

неопытный лаборант подумал, что перед ним кубик из латуни плотности $\rho = 8{,}72$ г/см^3. Определите объём полости в кубе. (Региональный этап Всероссийской олимпиады по физике. 2009 г. 7 кл.)

10. В одной стране геолог нашёл чёрный метеорит с вкраплениями золота. Плотность чёрного метеоритного вещества оказалась $\rho_ч = 5\,000$ кг/м^3. Плотность золота $\rho_з = 19\,800$ кг/м^3. Масса всего метеорита $m = 2{,}0$ кг, а его средняя плотность $\rho = 6\,000$ кг/м^3. На чёрном рынке геологу за чёрный метеорит с ходу предложили 6 000$, и геолог согласился на сделку. Во сколько раз (и в какую сторону) эта сумма отличается от реальной стоимости золота, содержащегося в этом метеорите? В то время тройская унция золота стоила 1 700 $ а одна тройская унция равна 31,1 г. (Олимпиада «Максвелл». 2013 г. 7 кл.)

11. Для изготовления ювелирного сплава взяли серебро ($\rho_{Ag} = 10{,}5$ г/см^3), золото ($\rho_{Au} = 19{,}5$ г/см^3) и платину ($\rho_{Pt} = 21{,}5$ г/см^3). В сплаве отношение объёмов серебра и платины равно 6, объём использованного золота $V_{Au} = 1{,}5$ см^3, а средняя плотность сплава $\rho_x = 14{,}3$ г/см^3. Найдите массу платины m_{Pt} и серебра m_{Ag} в сплаве. Считайте, что объём сплава равен сумме объёмов его составных частей. (Олимпиада «Максвелл». 2012 г. 8 кл.)

НОВОСТИ

МФТИ занял первое место в рейтинге вузов по качеству подготовки специалистов в области ИИ

Московский физико-технический институт занял лидирующую позицию в первом в России рейтинге вузов по качеству подготовки специалистов в области искусственного интеллекта. Первое место он разделил с НИУ ИТМО и НИУ «Высшая школа экономики».

Рейтинг был подготовлен Альянсом в сфере искусственного интеллекта по поручению Президента РФ и при поддержке Правительства РФ.

В основу методологии оценки была заложена математическая модель, построенная на фактических данных: официальных сайтов вузов, олимпиад и конференций, открытой базы данных OpenAlex, а также данных, полученных от Минобрнауки России, Альянса в сфере ИИ и данных опросов. В общей сложности экспертами, которые представляют российские промышленные и технологические гиганты, было определено 13 критериев, объединенных в четыре направления:

- Востребованность выпускников в найме.
- Актуальность процесса обучения в сфере ИИ.
- Образовательная среда.
- Активность по развитию школьного образования.

В ведущем техническом вузе России уделяют большое внимание подготовке кадров в области искусственного интеллекта. Соответствующие специальные программы обучения на Физтехе реализуются для студентов бакалавриата и специалитета, а также магистратуры. Для массового вовлечения молодежи в технологии искусственного интеллекта и машинного обучения в вузе проводятся олимпиады, открытые лекции, конференции, поддерживаются студенческие стартапы.

Источник: https://mipt.ru/news/

Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент,
организатор и руководитель
музея истории вычислительной техники
школы № 1530 «Школа Ломоносова» Москвы

Проект «Помоги бедному торговцу»

Учащимся старших классов предлагается выполнить проект, связанный с одной старинной задачей. Описываются основные вопросы проекта, для выполнения которого необходимы определенные знания математики и навыки программирования. Представлена также информация исторического характера. При описании компьютерных программ, которые должны быть разработаны, логика действий в них описывается на школьном алгоритмическом языке (система программирования КуМир). Русский синтаксис этого языка и большое число комментариев к программам делает приводимые методику и программы максимально понятными, и читатель сможет разработать аналогичные программы на языке программирования, которым владеет.

***

Представьте себе, юный читатель, что вы живете в XVI веке, пришли в лавку к одному бедному торговцу и увидели, что у него вместо гирь – камни, всего – четыре, все разной массы. Однако с помощью этих камней он на рычажных чашечных весах совершенно правильно отвешивал товары массой 1, 2, ..., 40 кг. Как вы думаете, какой массы были камни?[1]

Прежде чем приводить ответ на вопрос, обсудим другую, более простую задачу: «Есть пружинные весы,

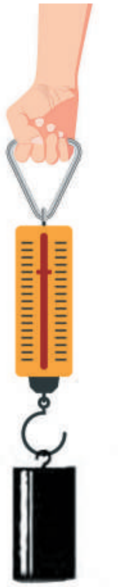
[1] Обычно аналогичную старинную задачу называют «задачей Баше на взвешивание», потому что она была упомянута в книге французского математика Клода Гаспара Баше «Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres» (фр. «Приятные и восхитительные задачи, решаемые с помощью чисел»), опубликованной в 1612 году. Баше так формулировал задачу: «Если мы хотим взвесить некоторый груз весом 1 до 40 фунтов включительно, то какой минимальный набор гирь необходимо для того использовать?». Эту задачу развил французский математик М. Лабонн, доработавший книгу Баше к третьему изданию. В общем виде он описал ее так: «Найдите минимальный набор гирь, с помощью которого мы можем проводить взвешивания всех целых значений веса от 1 до суммы весов всех гирь». За 400 лет до Баше аналогичную задачу сформулировал в своей книге «Liber abaci» («Книга абака» или «Книга вычислений») знаменитый итальянский математик XIII века Леонардо Пизано (Фибоначчи), который одним из первых ввел в европейскую математику десятичную систему счисления с использованием арабских цифр. Этой задачей интересовался знаменитый химик Дмитрий Иванович Менделеев в бытность свою управляющим Главной палатой мер и весов в Санкт-Петербурге.

которые нужно отградуировать. Каким должен быть набор гирь-разновесов, который можно использовать для градуировки весов на интервал масс 1, 2, ..., 31 кг, чтобы число гирь в наборе было минимальным?».

Здесь рассуждения такие.

1. Десятичное число 31 в двоичной системе счисления выглядит так: 11111, а все числа, меньшие, 31, в этой системе состоят (естественно) из единиц и нулей.

2. Любое двоичное число от 1 до 11111 можно получить, складывая двоичные числа 1, 10, 100, 1000 и 10000 (убедитесь в этом!). Эти числа есть двойка в степени 0, 1, 2, 3 и 4, то есть десятичные числа 1, 2, 4, 8 и 16.



Значит, минимальный набор гирь-разновесов, который можно использовать для градуировки весов на интервал масс 1–31 кг, это гири массой 1, 2, 4, 8 и 16 кг. Например, чтобы отградуировать весы на 3 кг ($3_{10} = 11_2$), можно использовать гири массой 1 и 2 кг (этим значениям соответствуют двоичные числа 1 и 10), на 13 кг ($13_{10} = 1101_2$) – гири массой 1, 4 и 8 кг (1_2, 100_2 и 1000_2).

Вернемся к задаче о камнях. На рычажных чашечных весах при отвешивании товара камни можно размещать на обеих чашках – и на свободной, и вместе с грузом. Следовательно, в нашей задаче надо найти такой набор чисел, которые можно не только складывать, но и вычитать. Если здесь также рассматривать представление десятичных чисел 1, 2, ..., 40 в двоичной системе счисления, то выяснится, что для отвешивания понадобится шесть разных камней – массой 1, 2, 4, 8, 16 и 32 кг (убедитесь, что с их помощью можно определить все нужные значения!). В условии же задачи говорится только о четырех камнях. Значит, надо попробовать использовать другие системы счисления. Чтобы найти, какую именно, рассмотрим более простую задачу: «С помощью какого минимального набора камней разной массы можно взвешивать предметы массой 1, 2, 3 и 4 кг?». Ответ здесь такой: с помощью двух камней – массой 1 и 3 кг. Это должно навести на мысль о том, что нужно использовать троичную систему счисления. Действительно, любое троичное число от 1 до 1111 ($1111_3 = 40_{10}$) можно получить, складывая или вычитая числа 1_3, 10_3, 100_3, и 1000_3 (убедитесь в этом!). Эти числа есть тройка в степени 0, 1, 2 и 3, то есть десятичные числа 1, 3, 9 и 27, – именно такой массы и были камни в лавке бедного торговца.

Несколько отвлекаясь, заметим, что о том, что целые числа могут быть представлены в виде суммы или/и разности (как говорят в математике, – «в виде алгебраической суммы») чисел, являющихся степенью тройки, было известно в древности. На рис. 1 приведен фрагмент из книги «Arithmmetica Integra» немецкого монаха Михаэля Штифеля, выпущенной в 1545 году.

Но как определить, какие камни надо класть вместе с некоторым грузом, а какие – на свободную чашку, чтобы весы были в равновесии (то

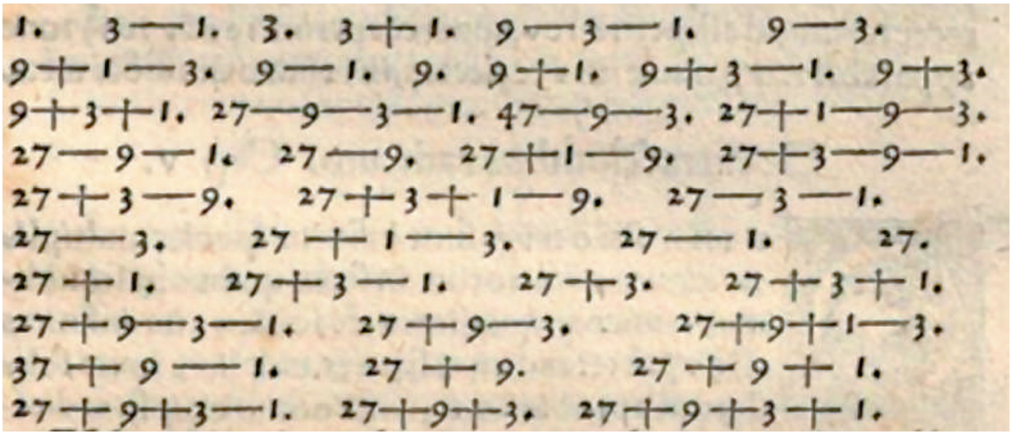

1. 3 — 1. 3. 3 + 1. 9 — 3 — 1. 9 — 3.
9 + 1 — 3. 9 — 1. 9. 9 + 1. 9 + 3 — 1. 9 + 3.
9 + 3 + 1. 27 — 9 — 3 — 1. 47 — 9 — 3. 27 + 1 — 9 — 3.
27 — 9 — 1. 27 — 9. 27 + 1 — 9. 27 + 3 — 9 — 1.
27 + 3 — 9. 27 + 3 + 1 — 9. 27 — 3 — 1.
27 — 3. 27 + 1 — 3. 27 — 1. 27.
27 + 1. 27 + 3 — 1. 27 + 3. 27 + 3 + 1.
27 + 9 — 3 — 1. 27 + 9 — 3. 27 + 9 + 1 — 3.
37 + 9 — 1. 27 + 9. 27 + 9 + 1.
27 + 9 + 3 — 1. 27 + 9 + 3. 27 + 9 + 3 + 1.

Рис. 1

есть чтобы отвесить груз нужной массой А кг)?

Ответ на этот вопрос помогает дать необычная система счисления – так называемая «уравновешенная троичная система счисления».

Уравновешенной, или симметричной, троичной системой называется система счисления с основанием 3, использующая для записи чисел цифры 0, 1 и -1[2]. В 1840 году ее предложил французский математик и изобретатель механических устройств для вычислений Леон Лаланн.

Обсудим связь «обычной» троичной системы и уравновешенной.

Некоторое десятичное число А можно представить в троичной системе как:

$$A = (a_n a_n - 1 \ldots a_1 a_0)_3,$$

то есть (в развернутой форме записи):

$$A = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 3 + a_0,$$

где цифры $a_0, a_1, \ldots, a_n$ могут принимать значения 0, 1 или 2.

Можно доказать, что $2 \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m$. Введем «отрицательную цифру» 1 и обозначим ее $\bar{1}$. Тогда последнее равенство можно записать в виде: $2 \cdot 3^m = 3^{m+1} + \bar{1} \cdot 3^m$. А это означает, что любое целое число A можно изобразить в троичной системе счисления с помощью цифр 0, 1 и $\bar{1}$ (заменив в его развернутой записи цифры 2 на соответствующую разность):

$$A = b_m \cdot 3^m + b_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 3 + b_0,$$

где каждый из коэффициентов b_m, $b_{m-1}, \ldots, b_0$ может быть равным 0, 1 или $\bar{1}$.

Иными словами, для преобразования обычной троичной записи в запись в уравновешенной троичной системе нужно для каждой двойки выполнить следующие действия:

1) заменить ее на цифру $\bar{1}$;

[2] Почему систему называют «симметричной», понятно — значения ее цифр (−1, 0 и 1) на числовой оси расположены симметрично относительно нуля. А почему «уравновешенной» — см. далее решение задачи о камнях.

2) в соседнем слева разряде добавить 1 (если в этом разряде в результате получается 2, то для него указанные действия повторяются).

Например, число 100, которое обычным образом записывается в троичной системе как 10201, во втором варианте будет иметь вид $11\bar{1}01$ ($3^4 + 3^3 - 3^2 + 1 = 100$).

Но причем тут камни? – А вот причем.

Чтобы уравновесить груз в A кг нужно положить его на первую чашку весов, а камень в 1 кг поставить на вторую чашу, если $b_0 = 1$, и на первую чашку, если $b_0 = \bar{1}$ (если $b_0 = 0$, то камень в 1 кг вообще не используется); далее, камень массой в 3 кг ставится на вторую чашу, если $b_1 = 1$, и на первую, если $b_1 = \bar{1}$, и т.д. Легко понять, что, расставив камни по такому принципу, мы уравновесим груз в A кг.

Поясним сказанное на условном, несколько сложном, примере, в котором будут фигурировать не килограммы, а граммы[3]. Предположим, что нужно отвесить 200 граммов груза. Переведя 200 в троичную систему счисления, например, методом последовательного деления на основание 3 (вспомните его), мы получим:

200	3				
198	66	3			
2	66	22	3		
	0	21	7	3	
		1	6	2	3
			1	0	0
				2	

Следовательно, $200_{10} = 21102_3$, или с использованием цифры $\bar{1}$ – $1\bar{1}111\bar{1}$, то есть:

$$200 = 243 - 81 + 27 + 9 + 3 - 1.$$

Таким образом, чтобы уравновесить груз в 200 граммов, положенный на чашку весов, нужно на ту же чашку положить гири в 1 грамм и 81 грамм, а на противоположную – гири в 3, 9, 27 и 243 грамма.

Это все хорошо, но бедный торговец математику не изучал (😆) и проводить расчеты не может. Хорошо бы составить для него таблицу, в которой будет указано, какие камни нужно использовать для взвешивания товара массой A кг и как при этом размещать их на чашках весов. Разработка такой таблицы является целью описываемого проекта.

Чтобы получить соответствующую таблицу, следует разработать программу.

Опишем методику разработки программы. Основные этапы ее работы:

1. Ввод значения A.
2. Перевод значения A в «обычную» троичную систему.
3. Преобразование значения в уравновешенную троичную систему.
4. Вывод на экран указаний по размещению камней на чашках весов.

На этапе 2 также применим метод последовательного деления на основание 3.

В приведенном ниже соответствующем фрагменте программы, кроме переменной A, использованы также следующие переменные величины:

[3] Ясно, что суть от этого не меняется.

– *цифры* – массив с данными целого типа, в котором будут храниться цифры троичного числа. Размер этого массива примем равным 5, имея в виду, что взвешиваться будут грузы массой от 1 до 40 кг, то есть троичная запись не будет содержать более пяти цифр;

– *кол_цифр* – фактическое количество цифр в троичной записи числа.

Соответствующий фрагмент:

```
ввод A
кол_цифр := 0
нц пока A > 0
  | Увеличиваем значение кол_цифр
  кол_цифр := кол_цифр + 1
  | Определяем очередную цифру и записываем ее в массив
  цифры[кол_цифр] := mod(A, 3)
  | Определяем целочисленное частное
  A := div(A, 3)
кц
```

где *mod* – функция, возвращающая остаток от деления своего первого аргумента на второй, *div* – функция, определяющая целочисленное частное от деления (в других языках программирования для этого используются не функции, а специальные операции).

Обратим внимание на то, что в массив цифры записываются, начиная с последней цифры новой записи. Например, число A = 38 в троичной системе счисления выглядит так: 1102, а в массиве цифры эти цифры будут записаны в следующем порядке 2, 0, 1, 1. Но именно такой порядок нужен нам для преобразования этой записи в уравновешенную троичную систему, поэтому менять его не будем.

Для преобразования пройдем по массиву и при необходимости изменим цифры согласно описанной ранее методике. При уточнении значений цифр в каждом i-м разряде будем учитывать возможный перенос из предыдущего разряда.

Соответствующий фрагмент:

```
перенос := 0 | В последнем разряде (1-й элемент массива)
 переноса нет
нц для i от 1 до кол_цифр
  если цифры[i] + перенос = 2
    то
      | Уточняем цифру
      цифры[i] := -1
      | Новое значение переноса
      перенос := 1
    иначе
      если цифры[i] + перенос = 3
        то
          цифры[i] := 0
          перенос := 1
        иначе  | Сумма значений цифры[i] и перенос равна 1 или 0
          цифры[i] := цифры[i] + перенос
          перенос := 0
      все
  все
кц
```

Так мы обработаем все цифры «обычной» троичной записи. Ясно, что возможно появление еще одной цифры (это произойдет, когда первая цифра равна 2). Этот факт можно зафиксировать после окончания работы оператора цикла по условию *перенос* = 1 и при необходимости добавить в массив *цифры* еще одно значение:

```
если перенос = 1
  то
    | В записи числа в массиве добавилась одна цифра
    кол_цифр := кол_цифр + 1
    | Ее значение
    цифры[кол_цифр] := 1
все
```

Итак, представление числа A в уравновешенной троичной системе получено. Если первому элементу массива *цифры* сопоставить массу 1 кг, второму – 3, третьему – 9 и т.д., то можно вывести на экран указания по размещению камней для отвешивания заданного груза согласно методике, описанной выше (в зависимости от значения той или иной цифры в массиве). Переменную со значениями массы камней обозначим *масса*.

Удобно «объединить» вывод информации о камнях, размещаемых на каждой из чашек, пройдя по массиву дважды:

```
 | Вывод на экран указаний по размещению камней на чашках весов
| Камни, размещаемые на чашке с товаром
вывод нс, "Вместе с товаром "
масса := 1   | Начальное значение массы камня
нц для i от 1 до кол_цифр
  если цифры[i] = -1
    то
      вывод масса, " "
  все
   | Новое значение массы
  вес := вес * 3
кц
| Камни, размещаемые на другой чашке
вывод "На другой чашке весов: "
масса := 1
нц для i от 1 до кол_цифр
  если цифры[i] = 1
   то
      вывод масса, " "
  все
  масса := масса * 3
кц
```

Полностью всю программу на языке программирования, которым владеете, соберите самостоятельно и проверьте правильность ее работы.

Далее, так как все описанные действия относились к одному конкретному значению массы груза, а торговцу взвешивать придется грузы массой от 1 до 40 кг, то изменим программу так, чтобы на экран были выведены 40 строк вида:

```
…
14 кг: Вместе с товаром: 1 3 9  На другой чашке весов: 27
15 кг: Вместе с товаром: 3 9  На другой чашке весов: 27
…
```

Для этого удобно оформить ее в виде процедуры с аргументом *масса_товара*:

```
алг Распределение_камней(арг цел масса_товара)
нач цел A, кол_цифр, перенос, масса, i, цел таб цифры[1 : 5]
  A := масса_товара
  нц пока A > 0
    …
  | Вывод на экран указаний по размещению камней на чашках весов
  вывод нс, масса_товара, " кг: Вместе с товаром: "
  масса := 1    | Начальное значение массы камня
  …
кон
```

а в основной части программы использовать оператор цикла с параметром:

```
алг
нач цел масса_товара
  нц для масса_товара от 1 до 40
    Распределение_камней(масса_товара)
  кц
кон
```

В заключение заметим, что впервые полная «подсказка» для торговцев по размещению гирь для взвешивания того или иного груза была опубликована в 1876 году немецким математиком Феликсом Мюллером (см. рис. 2).

В особенностях использования приведенной на рис. 2 таблицы разберитесь самостоятельно (обратите внимание на то, что в ней некоторый числа оформлены «жирным» начертанием). Конечно, таблица, которую подготовите вы, – гораздо удобнее…

Успехов!

I.				II.				III.				IV.				V.			
1	32	62	92	2	32	61	93	5	35	64	93	14	35	55	102	41	62	82	102
2	34	64	94	3	33	65	94	6	36	65	94	15	36	56	103	42	63	83	103
4	35	65	95	4	34	66	95	7	37	66	95	16	37	57	104	43	64	84	104
5	37	67	97	5	38	67	96	8	38	67	96	17	38	58	105	44	65	85	105
7	38	68	98	6	39	68	97	9	39	68	97	18	39	59	106	45	66	86	106
8	40	70	100	7	40	69	101	10	40	69	98	19	40	60	107	46	67	87	107
10	41	71	101	11	41	70	102	11	41	70	99	20	41	61	108	47	68	88	108
11	43	73	103	12	42	74	103	12	42	71	100	21	42	62	109	48	69	89	109
13	44	74	104	13	43	75	104	13	43	72	101	22	43	63	110	49	70	90	110
14	46	76	106	14	47	76	105	14	44	73	102	23	44	64	111	50	71	91	111
16	47	77	107	15	48	77	106	15	45	74	103	24	45	65	112	51	72	92	112
17	49	79	109	16	49	78	110	16	46	75	113	25	46	66	113	52	73	93	113
19	50	80	110	20	50	79	111	17	47	76	114	26	47	67	114	53	74	94	114
20	52	82	112	21	51	83	112	18	48	86	115	27	48	95	115	54	75	95	115
22	53	83	113	22	52	84	113	19	49	87	116	28	49	96	116	55	76	96	116
23	55	85	115	23	56	85	114	20	59	88	117	29	50	97	117	56	77	97	117
25	56	86	116	24	57	86	115	21	60	89	118	30	51	98	118	57	78	98	118
26	58	88	118	25	58	87	119	22	61	90	119	31	52	99	119	58	79	99	119
28	59	89	119	29	59	88	120	32	62	91	120	32	53	100	120	59	80	100	120
29	61	91	121	30	60	92	121	33	63	92	121	33	54	101	121	60	81	101	121
31				31				34				34				61			

Рис. 2

Дополнение

С помощью четырех камней массой 1, 3, 9 и 27 кг можно определять также массу некоторого груза.

Установите, за какое минимально возможное количество взвешиваний можно определить массу любого груза, если известно, что она равна целому значению из диапазона:

а) от 3 до 9 кг включительно;

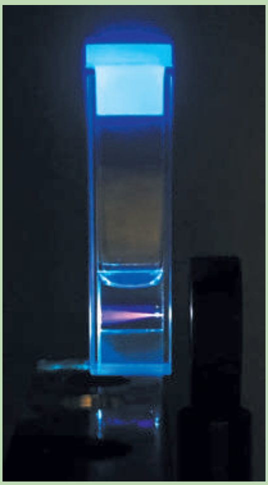
б) от 9 до 27 кг включительно.

Как и при решении задач на выявление фальшивых монет и подобных, при определении минимально возможного количества взвешиваний должны быть учтены наихудшие варианты, а не вариант типа «А вдруг повезет!». При этом подразумевается, что взвешивающий действует лучшим образом. Так, при определении массы груза из диапазона от 1 до 4 кг включительно минимальное количество взвешиваний равно не 1 и не 3, а 2 (какие это взвешивания, – установите самостоятельно).

Литература

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2005.
2. Златопольский Д.М. Об уравновешенной троичной системе счисления / Потенциал: Математике, физика, информатика, 2016, № 10.
3. Фомин С. В. Системы счисления. М.: Наука, 1987.

ЗАГАДКИ



Какой процесс запечатлен на этой фотографии?

1) Измерение спектра
2) Лазерный синтез квантовых точек
3) Излучение Вавилова-Черенкова
4) Сонолюминесценция

На фото – кювета с раствором лизина, в которой происходит лазерный синтез квантовых точек. На фото видно остросфокусированный пучок и яркую точку – место, в которое пучок сфокусирован. В этом самом месте за счет фотохимических реакций синтезируются из лизина квантовые точки.

А теперь давайте посмотрим остальные варианты и разберем, почему они не подходят☟

- Измерение спектра – как правило для спектрометрии используется параллельный пучок, там нет такой острой фокусировки).
- Излучение Вавилова-Черенкова – это излучение от ионизирующего излучения в жидкости. Там не может быть пучка.
- Сонолюминесценция – явление возникновения вспышки света при схлопывании кавитационных пузырьков, рождённых в жидкости мощной ультразвуковой волной. При сонолюминесценции не может наблюдаться сфокусированный пучок света.

Материал предоставлен некоммерческой организацией «Благотворительный Фонд «Развитие химической физики»

XXX юбилейная Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

XXX юбилейная Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон», организованная Международным Интеллект-клубом «Глюон», была проведена с 3 по 10 ноября 2023 г. в городе Протвино на базе Института физики высоких энергий при участии и поддержке Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова, Московского физико-технического института, журналов «Квант», «Потенциал», «Физика в школе» и «Физика для школьников». Особо отмечаем поддержку Турнира Институтом физики высоких энергий в течение более, чем четверти века. В подготовке Турнира активно участвовали заместитель директора ИФВЭ Ольга Владиславовна Бажинова и Ученый секретарь института Николай Николаевич Прокопенко. Большую помощь в организации Олимпиады оказал Ректор МИФИ Владимир Игоревич Шевченко. Оргкомитет турнира также выражает благодарность спонсорам Олимпиады Вячеславу Сергеевичу Ушенину и Герману Александровичу Четину за помощь в подготовке Олимпиады и поддержку одаренных школьников и талантливых студентов.

Открытие проходило в большом конференц-зале Теоретического корпуса ИФВЭ. В адрес Турнира поступили приветственные и поздравительные адреса из Испании, Германии, Казахстана и других стран, а также из ведущих центров науки и образования России: МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, ИПИО РАО, Академии информатизации и многих других, из Региональных центров МИК "Глюон" (Ростов-на-Дону, Тольятти) и других общественных, государственных и муниципальных организаций. Много впечатлений на участников Олимпиады произвели доклады Ректора МИФИ Шевченко В.И. по фундаментальным проблемам теоретической физики и Директора ИФВЭ, академика Иванова С.В., а также экскурсия на ускорительный комплекс У-70.

В программу Международной олимпиады «Интеллектуальный марафон» входили соревнования по истории научных идей и открытий по физике и математике, командные и индивидуальные туры по физике и математике.

Закрытие олимпиады проходило в неформальной дружеской атмосфере.

На церемонии закрытия организаторы и члены жюри поблагодарили участников за интересную совместную работу, сказали теплые слова всем, кто помогал в организации и проведении этого мероприятия. Всем участникам вручили сертификаты и памятные подарки олимпиады, а лучшие участники в индивидуальных и командных зачетах по всем номинациям были награждены дипломами и медалями.

В командных соревнованиях победу в туре по истории научных идей и открытий завоевала команда Классического лицея № 1 из Ростова-на-Дону. Также эта команда стала бронзовым призером в командном туре по математике. Победителем туров по математике и физике и абсолютным победителем по итогам трех командных туров стала команда Лицея № 1511 из Москвы, второе место завоевала команда московского Лицея № 1523, третье место у команды Классического лицея № 1 из Ростова-на-Дону.

Абсолютным победителем XXX юбилейной Международной олимпиады «Интеллектуальный марафон» стал Даниил Дрокин (Классический лицея № 1, г. Ростов-на-Дону). Он также стал победителем в индивидуальных турах по физике и математике. Вторым призером в общем зачете стал Андрей Бедняк (Лицея № 1511, г. Москва). Андрей также стал вторым призером в индивидуальных турах по математике и физике. Третье место в общем разделили Виктория Шароборо и Александр Панов, представлявшие Лицей 1523 из Москвы. Они также стали бронзовыми призерами тура по физике.

Традиционный приз ИПИО РАО (г. Новосибирск) «Берестяная тарелка» был вручен Полине Бакай (Лицей № 1511, г. Москва) и Радмиру Мударшову (Лицей № 2 г. Альметьевск, Татарстан)

Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

Международный Интеллект - Клуб «Глюон» приглашает Региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в 31-м Международной олимпиады «Интеллектуальный марафон». Заявки на участие присылать по адресу: МИК «Глюон» г. Москва, 115522, Пролетарский пр., 15/2, тел. (925)517 80 14, e-mail: gluon@yandex.ru, для информации см. www.gluon.ru

Авторы: Альминдеров В.В., Кравцов А.В., Марковичев А.С., Крыштоп В.Г.

XXX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

История научных идей и открытий

Физика

1. Нобелевская премия по физике в 1923 году была присуждена за работы по определению элементарного электрического заряда и по фотоэлектрическому эффекту. Опыт ученого по определению заряда электрона путем наблюдения движения заряженных капель масла в воздухе при наложении электрического поля в современной литературе называется его именем. Его тщательно выполненные работы по фотоэффекту полностью подтвердили трактовку этого явления, предложенную Эйнштейном. Однако сам ученый долгое время считал фотонную теорию теоретически необоснованной, а уравнение Эйнштейна для фотоэффекта – только хорошей расчетной моделью. Был сторонником эфирной теории электромагнитного поля.

<u>Назовите:</u>

1. Кто этот ученый?
2. В какой стране он работал?

<u>Ответ</u>:

1. Роберт Эндрюс Милликен.
2. Соединенные Штаты Америки.

2. В III веке до н. э. был проведен выдающийся эксперимент – впервые в истории человечества был измерен радиус Земли. В мерах длины, принятых в то время, когда были проведены измерения, он составил 252 тысячи стадиев. К сожалению, автор исследования не указал, пользовался ли он греческим стадием или стадием, принятым для измерений в стране, где он родился и работал. В зависимости от этого погрешность измерения по современным оценкам составила или 1,5%, или 10% (меньшее значение погрешности получается в предположении, что ученый пользовался "родным" для него стадием).

Назовите:

1. Имя ученого, первым в истории человечества измерившим радиус Земли.
2. В каком государстве жил и работал этот ученый?
3. В каких городах этот ученый проводил измерения, и какая особенность географического положения этих городов позволила провести этот изящный эксперимент?

Ответ:

1. Эратосфен Киренский – до 3 баллов.
2. Египет – 1 балл.
3. Александрия и Сиена (по одному баллу). Эти города лежат на одном меридиане (2 балла), а Сиена лежит на Северном тропике, он же тропик Рака (2 балла).

3. В III в. до н.э. был открыт очень важный закон гидростатики. Открытию закона предшествовала большая работа по выяснению, целиком ли из золота сделана царская корона, или ювелиры подмешали в корону серебро. История сохранила имя не только автора открытия, но и заказчика работы – царя (а если быть точным в титулах – тирана, тогда это слово не несло негативной окраски) Гиерона. Было обнаружено серебро в короне или нет – точных данных нет. Да и для истории науки это не так важно.

Назовите:

1. Имя ученого и сформулируйте закон, получивший его имя
2. Назовите город и территорию, где происходили описанные события
3. Оцените абсолютную погрешность измерений. Мог ли ученый, пользуясь измерительными средствами того времени получить достоверный результат?

Ответ:

1. Архимед (1 балл), закон Архимеда (3 балла)
2. Сиракузы в Сицилии (2 балла)
3. Общая масса короны составляет единицы килограммов, что соответствует объемам в сотни миллилитров. Если доля серебра в короне составляет первые десятки процентов, то разница объемов при одинаковой массе короны из чистого золота и из сплава составляет десятки миллилитров. Это вполне измеримый объем. (4 балла)

4. Известна история о том, что итальянский ученый, живший и работавший в XVI – XVII в.в., для доказательства гипотезы о независимости скорости свободно падающего тела от его массы бросал шары с Пизанской башни. Однако и он сам, и мы сейчас понимаем, что этот эксперимент имеет ограниченную точность. Ученый поставил серию более тонких экспериментов и получил экспериментальное доказательство этой гипотезы. Он также сформулировал принцип, на котором базируется вся классическая механика.

Назовите:

1. Кто этот ученый?

2. Какие эксперименты он поставил для доказательства гипотезы?
3. Сформулируйте указанный в условии принцип.

Ответ:

1. Галилео Галилей (2 балла)
2. Скатывание шаров по наклонной плоскости (5 баллов)
3. Принцип относительности Галилея (3 балла)

5. В 1818 г. на одном из заседаний Французской Академии рассматривалась работа о дифракции света. Один из членов Академии, известный ученый, усомнился в правомерности считать свет волновым процессом. Председатель заседания предложил провести опыт и предсказал парадоксальный результат, который однозначно свидетельствовал бы в пользу волновой теории света. Опыт был поставлен. Была получена предсказанная дифракционная картина, которую назвали именем усомнившегося оппонента.

Назовите:

а) Кто был автором работы?
б) Какой результат был получен?
в) Чьим именем был назван результат?
г) Кто председательствовал на собрании Академии?

Ответ:

а) Автором исследований по дифракции света был О. Френель. (2 балла)
б) При дифракции света на круглом отверстии при определенном расстоянии от отверстия до экрана, на котором наблюдается дифракционная картина, в центре образуется темное пятно (4 балла)
в) Это пятно было названо "пятно Пуассона". Усомнившимся оппонентом был знаменитый французский физик и математик С. Пуассон (2 балла)
г) Председателем собрания был Ф.Д. Араго, выдающийся физик и общественный деятель Франции первой половины 19 века (2 балла)

Математика

1. Числовые системы древних греков ограничивались натуральными числами и их отношениями (дробями, рациональными числами). Однако ещё пифагорейцы обнаружили, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, то есть отношение их длин не может быть представлено рациональным числом. Стало понятно, что пифагорейская арифметика должна быть каким-то образом расширена с тем, чтобы включать все результаты измерений. Это и сделал древнегреческий математик, по преданию изложивший свою теорию измерения величин в книге под названием «Начала». Его книга до нас не дошла, но сама теория дошла до нас в изложении Евклида (Начала, книга V). Кто этот математик?

Ответ. Этот математик — Евдо́кс Кни́дский (в части источников: Эвдокс, ок. 408 год до н. э. — ок. 355 год до н. э.) — древнегреческий математик, механик и астроном. Занимался также врачеванием, философией и музыкой; был известен как оратор и законовед.

В дополнение к числам Евдокс ввёл более широкое понятие геометрической величины, то есть длины отрезка, площади или объёма. С современной точки зрения, число при таком подходе есть отношение двух однородных величин — например, исследуемой и единичного эталона. Этот подход снимает проблему несоизмеримости. По существу, теория отношений Евдокса — это геометрическая модель вещественных чисел.

В начале своего построения Евдокс дал аксиоматику для сравнения величин. Все однородные величины сравнимы между собой, и для них определены две операции: отделение части и соединение (взятие кратного). Однородность величин сформулирована в виде аксиомы, известной также как аксиома Архимеда: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга». Сам Архимед при изложении этой аксиомы сослался на Евдокса.

С помощью метода исчерпывания Евдокс строго доказал ряд уже известных в те годы открытий (площадь круга, объём пирамиды и конуса).

Наиболее плодотворным этот метод стал в руках выдающегося последователя Евдокса, Архимеда, который смог его значительно усовершенствовать и виртуозно применял для многих новых открытий. В средние века европейские математики также применяли метод исчерпывания, пока он не был вытеснен сначала более мощным и технологичным методом неделимых, а затем — математическим анализом.

2. В древнем Египте представляли дроби в виде суммы различных долей (то есть дробей вида $\frac{1}{n}$). В папирусе Ахмеса имелись даже таблицы таких представлений для дробей вида $\frac{2}{n}$ при $5 \le n \le 99$.

Представьте в виде суммы разных долей дроби $\frac{2}{19}$ и $\frac{7}{19}$.

Ответ. $\frac{2}{19}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}$, $\frac{7}{19}=\frac{2}{19}+\frac{5}{19}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}+\frac{1}{4}+\frac{1}{76}$. Возможны и другие представления. Например, $\frac{2}{19}=\frac{1}{19}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{19}+\frac{1}{38}+\frac{1}{57}+\frac{1}{114}$.

3. В древнегреческой математике *золотым сечением* именовалось деление отрезка AB точкой C на две части так, что *большая часть отрезка относится к меньшей так, как весь отрезок к большей*. Число, равное отношениям $\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{BC}$, принято обозначать буквой ϕ (прописная буква «фи» греческого алфавита) в честь древнегреческого скульптора и архитектора Фидия, и называть *золотым числом*.

Вычислите золотое число и обратное к нему.

Докажите, что в правильной пятиконечной звезде каждый отрезок делится другим отрезком, пересекающим его, в золотом сечении.

Решение. Введём обозначения, как показано на рисунке 1, x – сторона большого пятиугольника, z – малого. Угол ABL равен разности углов

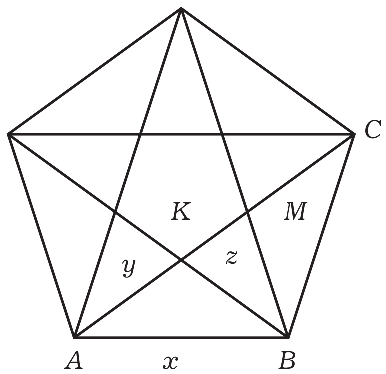


Рис. 1

ABL и ABC и равен 108 − 36=72 градуса,

$\angle ABL = \angle ABC - \angle LBC = 108^\circ - 36^\circ$,

$\angle ALB = 180^\circ - \angle LAB - \angle ABL = 72^\circ =$ $= \angle ABL$, поэтому треугольник ALB – равнобедренный, $AL = AB$, и $x = y + z$. Треугольники ABC и AKB подобны по трём углам, отношения соответствующих сторон этих треугольников равны: $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AC}{AB}$, то есть $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{x} = 1 + \dfrac{y}{x}$. Это означает, что точка K делит отрезок AB на два отрезка так, что отношение длины большего отрезка к длине меньшего равно отношению длины всего отрезка к длине большей части. Это отношение, обозначаемое буквой ϕ (прописная буква «фи» греческого алфавита) удовлетворяет равенству $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$,

откуда $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. Французский математик монах Марин Мерсенн (1588 – 1648) состоял в переписке с крупнейшими математиками своего времени (Ферма, Паскалем, Декартом и др.). Его переписка исполняла роль своего рода математического журнала. Сам Мерсенн изучал, среди прочего, совершенные числа, то есть числа, равные сумме своих делителей, отличных от самого числа. Как было известно уже Евклиду, всякое чётное совершенное число имеет вид $2^{p-1}(2^p - 1)$, если число $2^p - 1$ является простым. Простое число, имеющее вид $2^p - 1$, называется числом Мерсенна. Докажите, что если $2^n - 1$ — простое число, то и n простое.

Воспользуемся тождеством $x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\right)$, справедливым для всех натуральных n. Предположим, что $2^n - 1$ — простое число, а n — составное, например, $n = rs$, где $r > 1$, $s > 1$. Тогда число

$$2^n - 1 = \left(2^r\right)^s - 1 =$$

$$= \left(2^r - 1\right)\left(\left(2^r\right)^{s-1} + \left(2^r\right)^{s-2} + \ldots + 2^r + 1\right)$$

является составным, вопреки условию.

5. До середины XVII века в теории вероятностей не было не только цельной математической теории, но даже никакого общего метода решения задач. В середине XVII века Б. Паскаль, П. Ферма и Х. Гюйгенс разработали методы решения вероятностных задач, похожих на предлагаемую вам задачу: *что более вероятно – выиграть у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?*

Ответ. Три партии из четырёх.

Решение. Если в серии из n одинаковых опытов событие S в каждом опыте может произойти с вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$, то вероятность того, что в этой серии событие S произойдёт ровно k раз, равна $C_n^k p^k q^{n-k}$ (формула Бернулли). Для понимания этого можно посмотреть на следующую формулу:

$$1 = (p+q)^n = p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \\ + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + q^n.$$

В нашей задаче $p = q = \dfrac{1}{2}$. В случае $n = 4$ и $k = 3$ искомая вероятность равна $4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

При $n = 8$ и $k = 5$ искомая вероятность равна

$$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{1}{256} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{256} =$$

$$= \frac{7}{32} < \frac{1}{4}.$$

Математика

Командный тур

1. Можно ли на плоскости уложить семь белых квадратов и один красный так, чтобы никакие два белых квадрата не имели общих внутренних точек, а красный квадрат имел с каждым белым по общей внутренней точке? Размеры всех квадратов одинаковы.

2. Если к смеси двух веществ A и B добавить 5 кг вещества A, то его процентное содержание увеличится втрое. Если же к исходной смеси добавить 5 кг вещества B, то процентное содержание A уменьшится вдвое. Определите процентное содержание A в смеси.

3. К окружности проведены две различные касательные в точках A и B, расстояние от точки M на окружности до этих касательных равны, соответственно, p и q. Найдите расстояние от M до прямой AB.

4. Пусть функция f определена на всех действительных числах и для любого x выполняются равенства $f(x + 3) = f(3 - x)$, $f(x + 9) = f(9 - x)$. Докажите, что функция f – периодическая и найдите какой-то её период.

5. Всякий ли треугольник площади 1 можно разрезать на 1000 таких частей, из которых удастся сложить квадрат со стороной 1?

6. Решите уравнение $x^x = 1 + \ln x$.

7. Какое наименьшее значение имеет сумма

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|?$$

8. Будет ли простым число $2023^4 + + 2023^2 + 1$?

9. Как с помощью четырёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить среди 12 монет фальшивую, если неизвестно – легче или тяжелее эта монета?

10. Из двухсот последовательных натуральных чисел 1, 2, 3, ..., 200 выбрали 101 число. Верно ли, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое?

Указания и решения

1. Можно. Например, так, как показано на рисунке 2.

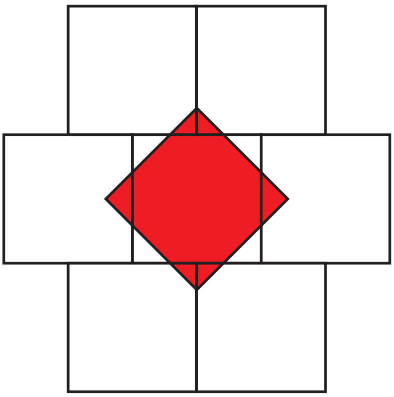


Рис. 2

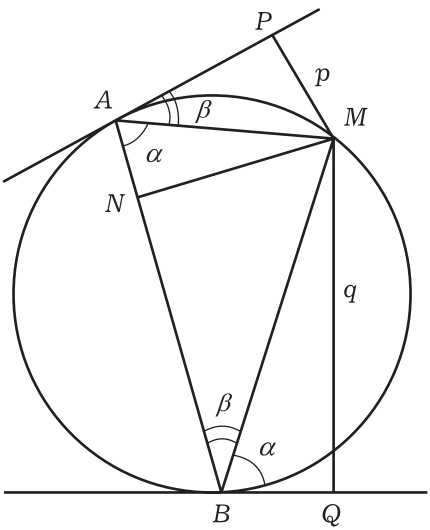


Рис. 3

2. Первое условие означает, что $\frac{A+5}{A+B+5} = 3 \cdot \frac{A}{A+B}$, второе условие означает, что $\frac{A}{A+B+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{A+B}$. Деление первого соотношения на второе, даёт равенство $\frac{A+5}{A} = 6$, откуда $A = 1$. Подставив это значение A в первое соотношение, найдём, что $B = 4$, $\frac{A}{A+B} = \frac{1}{5}$.

Ответ: 20 процентов.

3. Опустим из M перпендикуляры MP, MQ, MN на касательные и прямую AB (рис. 3). Углы MAB и MBQ равны, углы MBA и MAP равны, так как угол между хордой и касательной, проведённой к концу этой хорды, измеряется половиной дуги, заключающей хорду. Следовательно, прямоугольные треугольники MAN и MBQ подобны, а также подобны треугольники MBN и MAP. Отсюда $\frac{MN}{AM} = \frac{MQ}{BM}$ и $\frac{MN}{BM} = \frac{MP}{AM}$. Перемножив полученные отношения и избавившись от знаменателей, получим, что $MN^2 = MP \cdot MQ$.

Ответ: $\sqrt{pq}$.

4. По условию, для произвольного действительного x выполняются равенства $f(x)=f((x-3)+3) = f(3-(x-3)) = f(6-x)$, то есть $f(x) = f(6-x)$. Аналогично, $f(x) = f(18-x)$. Поэтому

$$f(x)=f(6-x)=f(18-(6-x))= \\ =f(x+12),$$

то есть 12 – период данной функции. Речь, разумеется, не идёт о наименьшем периоде. Например, легко придумать пример функции с наименьшим периодом 1, удовлетворяющей условиям задачи.

Ответ: Одним из периодов данной функции является число 12.

5. Рассмотрим треугольник со стороной 1500 и площадью 1. Разрезав его на 1000 частей, получим хотя в одной из них две точки, расстояние между которыми не меньше 1,5 (лежащие на этой стороне). Но в квадрате площади 1 расстояние между наиболее удалёнными точками равно длине диагонали, меньшей 1,5.

6. Нетрудно угадать, что 1 является одним из корней уравнения. Чтобы установить отсутствие других корней уравнения, рассмотрим две функции: $f(x) = x^x - x$ и $g(x) = x - \ln x - 1$. Косвенной подсказкой, почему взяты такие разности, служит замечание: прямая $y = x$ является касательной к графику функции $y = \ln x + 1$, проведённой в точке (1; 1). Производная $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ при $0 < x < 1$ положительна, при $x > 1$ производная отрицательна, функция $g(x)=x-\ln x-1$ при $x = 1$ достигает наибольшего значения, равного 0, и при $x \neq 1$ выполняется неравенство

$$x > \ln x + 1.$$

Чтобы продифференцировать x^x воспользуемся правилом дифференцирования композиции функций $(\ln h(x))' = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$, откуда $h'(x) = h(x)\cdot(\ln h(x))'$, $\left(x^x\right)' = x^x \cdot (x\ln x)' = x^x\cdot(\ln x+1)$.

Производная $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1) - 1$ при $0 < x < 1$ отрицательна (вычитаемое есть произведение числа, меньшего 1, на число, меньшее 1), при $x > 1$ производная положительна, функция $f(x) = x^x - x$ при $x = 1$ достигает наименьшего значения, равного 0, и при $x \neq 1$ выполняется неравенство

$$x^x > x.$$

Полученные неравенства показывают, что других корней, кроме 1, уравнение не имеет.

7. Модуль разности $|x-a|$ равен расстоянию от точки числовой прямой, изображающей число x, до точки числовой прямой, изображающей число a.

Для любой точки промежутка [1; 4] сумма $|x-1|+|x-4|$ равна сумме расстояний от точки x до точек 1 и 4 и равна 3 – длине этого промежутка. Для точек вне промежутка [1; 4] сумма $|x-1|+|x-4| > 3$. Для любой точки промежутка [2; 3] сумма

$|x-2|+|x-3|$, лежащего в промежутке [1; 4], равна 1 – длине промежутка [2; 3]. Для точек x вне промежутка [2; 3] сумма $|x-2|+|x-3|>1$. Таким образом, наименьшее значение данной суммы достигается для всех точек промежутка [2; 3] и равно 4.

Задачу также можно решить, построив график функции

$$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|.$$

8. Справедливы следующие равенства

$$n^4+n^2+1=\left(n^2+1\right)^2-n^2=$$
$$=\left(n^2+1-n\right)\left(n^2+1+n\right).$$

Ответ: $2023^4 + 2023^2 + 1 = (2023^2 - 2023 + 1)(2023^2 + 2023 + 1)$ является составным числом.

9. Разложим монеты на четыре кучки по три монеты и взвесим две любые кучки. Если они равновесны, то все монеты в них правильные, и сравнив любую из этих кучек с любой из оставшихся, определим, в какой из кучек находится фальшивая монета. Если же при первом взвешивании кучки оказались не равновесны, то сравнив вторым взвешиванием любую из этих кучек с одной из оставшихся правильных кучек, опять определим, в какой из кучек находится фальшивая монета. Взяв любые две монеты из «фальшивой» кучки, в случае их равенства получим, что фальшивой является третья монета (в этом случае четвёртого взвешивания не требуется). Если же взятые две монеты различны, то сравним четвёртым взвешиванием любую из них с оставшейся правильной.

Можно найти фальшивую монету иначе, разделив монеты на три кучки по четыре монеты.

В любом случае для решения достаточно научиться определять за два взвешивания на чашечных весах без гирь, какая из а) трёх б) четырёх монет фальшивая, если неизвестно, легче или тяжелее эта монета.

10. Выберем произвольно 101 число из данных двухсот. Разделим каждое из них на наибольшую, содержащуюся в нём в качестве множителя, степень двойки. Получим 101 нечётное число. Но среди чисел от 1 до 200 имеется только 100 нечётных чисел, поэтому среди полученных нечётных чисел имеются хотя бы два совпадающих. Посмотрим, какое из них подверглось сокращению на большую степень двойки - именно оно (до сокращения), очевидно, делится на второе (также до сокращения). Поскольку все исходные 200 чисел различны, совпадение отобранных чисел исключается.

Ответ. Верно.

Индивидуальный тур

1. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}.$$

2. Натуральные числа от 1 до 1000 выписываются подряд в обратном порядке. Получается ряд цифр

1000999998 ... 321. Определите, какая цифра стоит в этом ряду на 2023-м месте.

3. На плоскости дан отрезок AB и на нём произвольная точка M. На отрезках AM и MB как на сторонах построены квадраты $AMCD$ и $MBEF$, лежащие по одну сторону от AB, и N – точка пересечения прямых AF и BC. Докажите, что при любом положении точки M на отрезке AB каждая прямая MN проходит через некоторую точку S, общую для всех таких прямых.

4. Параболы P и S являются графиками функций $y = kx^2$ и $y = kx^2 + b$, $b > 0$, соответственно. Докажите, что любая хорда параболы P, касающаяся параболы S, делится точкой касания на два равных отрезка.

5. На плоскости расположено конечное множество кругов так, что любые два из них можно накрыть кругом диаметра 10. Докажите, что все эти круги можно накрыть квадратом со стороной 10.

6. Даны 10 чисел: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$.

а) Какое из двух чисел:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \text{ или } \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}}{10} \text{ больше?}$$

б) Какое из двух чисел:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} \text{ или } \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9}{9} \text{ больше?}$$

7. Три мотоциклиста A, B и C выехали из одной точки кольцевой дороги с постоянными скоростями в одном направлении. Через некоторое время они снова оказались в одной точке. Сколько раз мотоциклист A обгонял C, если A обгонял B 3 раза, а B обгонял C 4 раза?

Указания и решения

1. Подкоренное выражение $2x - 1$ должно быть неотрицательным, поэтому x, входящий в область определения уравнения, должен быть не меньше $\frac{1}{2}$. Произведение «больших» подкоренных выражений

$$\left(x+\sqrt{2x-1}\right)\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=(x-1)^2 \geq 0,$$

и областью определения уравнения является весь промежуток $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. Возведя данное уравнение в квадрат, в области определения получим уравнение, эквивалентное исходному:

$$2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2 \leftrightarrow 1-x=|1-x|.$$

Таким образом, $1 - x \geq 0$, и $x \leq 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

2. Найдём, какая цифра стоит в ряду 999998 ... 321 на 2019-м месте. Поскольку $2019 = 673 \cdot 3$, определим, какое трёхзначное число стоит на

673-м месте в последовательности 999, 998, 997, … . Это число 327.

Ответ: на 2023-м месте стоит цифра 7.

3. Треугольники AMF и CMB равны по двум прямым углам и двум парам катетов. Более того, второй треугольник получается из первого поворотом на 90 градусов относительно точки M по часовой стрелке, следовательно, их гипотенузы AF и BC перпендикулярны. Значит, точка N лежит на окружности с диаметром AB. Кроме того, угол FNB, равный углу ANB, тоже прямой, следовательно, точка N лежит на описанной окружности квадрата $MBEF$. Отсюда в случае, когда точка M ближе к B, получаем, что угол FNM равен углу FEM как вписанный, опирающийся на одну хорду FM, и имеет величину 45 градусов. В случае, когда точка M ближе к A, угол BNM равен углу BEM как вписанный, опирающийся на одну хорду FM, и имеет величину 45 градусов. В обоих случаях прямая MN является биссектрисой прямого угла ANB и проходит через середину дуги окружности с диаметром AB, не содержащей точку N и не зависящей от выбора M.

4. Пусть хорда AB параболы P касается параболы S в точке M с координатами $\left(x_0; kx_0^2+b\right)$. Выпишем уравнение прямой AB:

$$y = 2kx_0\left(x - x_0\right) + \left(kx_0^2 + b\right) = \\ = 2kx_0x - kx_0^2 + b.$$

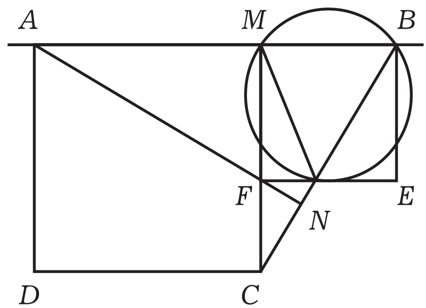


Рис. 4

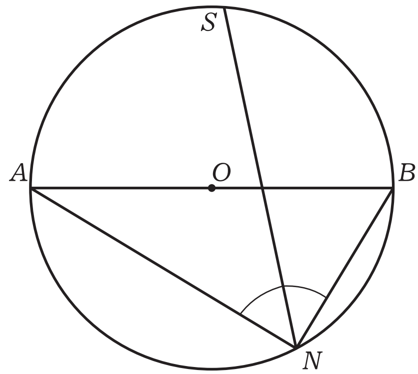


Рис. 5

Абсциссы x_A и x_B точек A и B пересечения касательной с параболой P являются решениями уравнения $kx^2 = 2kx_0x - kx_0^2 + b$, то есть квадратного уравнения

$$kx^2 - 2kx_0x + kx_0^2 - b = 0.$$

По теореме Виета сумма корней этого уравнения $x_A + x_B = -\frac{-2kx_0}{k} = 2x_0$. Следовательно, середина отрезка AB имеет абсциссу $\frac{x_A + x_B}{2} = x_0$ и совпадает с абсциссой точки M.

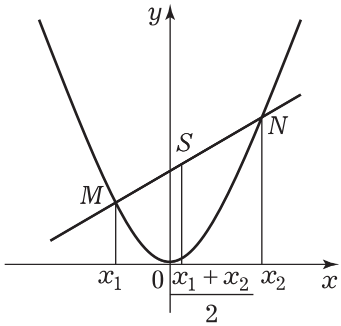


Рис. 6

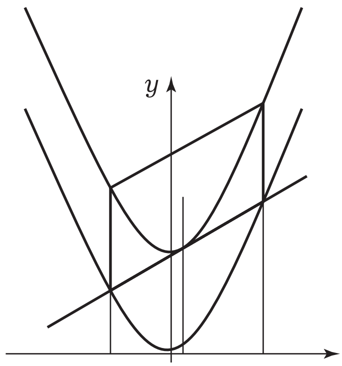
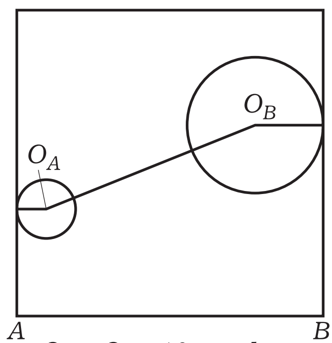


Рис. 7

Можно решить задачу, не используя понятие производной. Касательной к параболе назовём прямую, имеющую с параболой одну общую точку (называемую точкой касания), и не параллельную оси параболы. Легко доказать, что середины хорд параболы, параллельные данной прямой, лежат на прямой, пересекающей параболу в точке касания.

5. Спроектируем круги на ось абсцисс, получим конечное множество отрезков, выберем в нём самую левую точку A и самую правую точку B, докажем, что расстояние между ними не превосходит 10. Действительно, рассмотрим произвольную пару кругов, проекция одного из которых содержит A, а другого — B, радиусы их примем, соответственно, за a и b , центры — за O_A и O_B. Накрыв эту пару кругом диаметра 10, увидим, что хорда этого круга, проходящая через точки O_A и O_B, имеет длину не больше 10, значит, длина отрезка O_AO_B не больше $10 - a - b$. Тогда и горизонтальная проекция отрезка O_AO_B имеет длину не больше $10 - a - b$, поэтому длина отрезка AB не больше $O_AO_B + a + b \le 10$. Аналогично, расстояние между самой верхней и самой нижней точками вертикальных проекций множества кругов не больше 10. Следовательно, вся система кругов помещается в прямоугольнике с горизонтальными и вертикальными сторонами длины не больше 10, который, очевидно, накрывается квадратом со стороной 10.



$$O_A - O_B < 10 - a - b$$
$$AB < 10 - a - b + a + b = 10$$

Рис. 8

6. б) Обозначим $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ через A_1, $\frac{a_4+a_5+a_6}{3}$ через A_2, $\frac{a_7+a_8+a_9}{3}$ через A_3. Тогда $A_1 < A_2 < A_3$, $\frac{A_1+A_2}{2} < A_3 \leftrightarrow \frac{A_1+A_2}{6} < \frac{A_3}{3}$. Следовательно, $\frac{A_1+A_2}{2} < A_3$,

$$\frac{A_1+A_2}{3}+\frac{A_1+A_2}{6} < \frac{A_1+A_2}{3}+\frac{A_3}{3},$$

и требуемое неравенство установлено.

Приведём универсальное решение подобных задач. Докажем, например, что

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} < \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9}{9}.$$

Обозначим $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}$ через A. Тогда

$a_1 = A+\delta_1$, $a_2 = A+\delta_2$, ..., $a_5 = A+\delta_5$, $a_6 = A+\delta_6$, ..., $a_9 = A+\delta_9$, причём $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_5 < \delta_6 < \ldots < \delta_9$ и $\delta_1+\delta_2+$ $+\delta_3+\delta_4+\delta_5 = 0$. Если $\delta_6 \le 0$, то числа δ_1, $\delta_2,\ldots$, δ_5 – отрицательны, и, вопреки равенству нулю, сумма $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_5$ тоже должна быть отрицательной. Следовательно, $\delta_6 > 0$, и также положительны числа δ_7, δ_8, δ_9. Таким образом,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9}{9} = \frac{9A+\delta_6+\delta_7+\delta_8+\delta_9}{9} > A.$$

7. При заданном движении каждый обгон означает, что обгоняющий прошел за время с предыдущего обгона ровно на 1 круг больше обгоняемого.

Пусть v_A, v_B, v_C – скорости мотоциклистов, t– время, по прошествии которого они оказались в одной точке, l – длина дороги. Тогда, $v_At - v_Bt = 4l$, $v_Bt - v_Ct = 5l$. Сложив почленно эти равенства, получим: $v_At - v_Ct = 9l$. Значит, A прошел на 9 кругов больше, чем C, и, следовательно, обгонял его 8 раз.

В следующем номере будут опубликованы: письменный и устный тур олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика

МУДРЫЕ МЫСЛИ

Если тебе тяжело, значит ты поднимаешься в гору. Если тебе легко, значит ты летишь в пропасть.

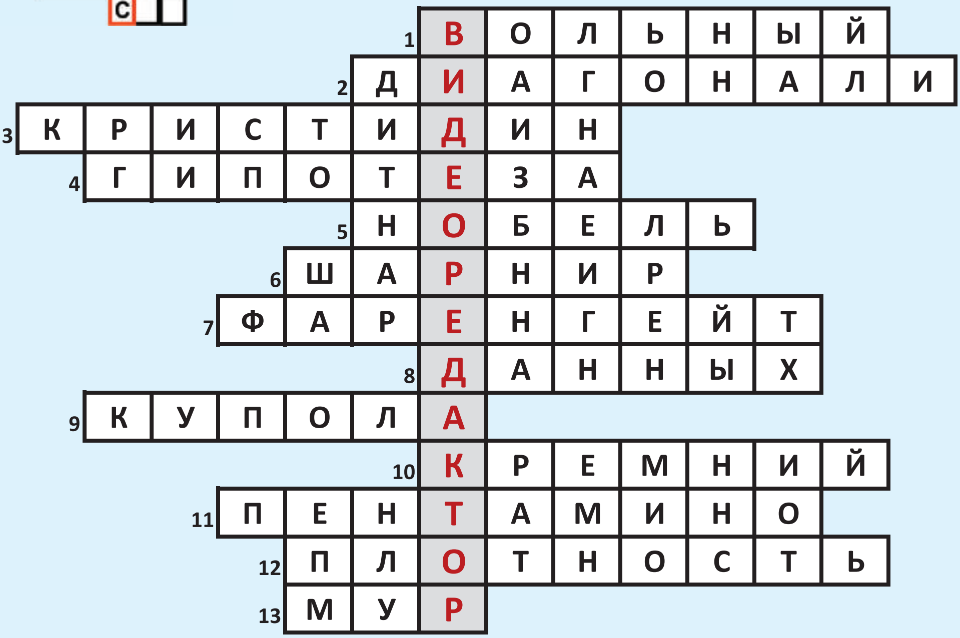
Генри Форд

Наши сомнения — это наши предатели. Они заставляют нас терять то, что мы, возможно, могли бы выиграть, если бы не боялись попробовать.

У. Шекспир

КОНКУРС!

Ответы на кроссворд, опубликованный в № 7, 2023



1	Вольный	№6, стр. 7
2	Диагонали	№5, стр. 20
3	Кристидин	№5, стр. 12
4	Гипотеза	№6, стр. 26
5	Нобель	№6, стр. 4
6	Шарнир	№5, стр. 33
7	Фаренгейт	№6, стр. 17
8	Данных	№6, стр. 32
9	Купола	№5, стр. 59-60
10	Кремний	№5, стр. 53
11	Пентамино	№6, стр. 52
12	Плотность	№6, стр. 53
13	Мур	№6, стр. 48
Выделенный столбец	Видеоредактор	№6, стр. 45

Как подписаться на «Потенциал. Математика. Физика. Информатика»?

1. По квитанции через банк. Подписка оплачивается из расчёта:

Печатная подписка 2023

2 400 ₽ – 12 месяцев
1 200 ₽ – 6 месяцев
200 ₽ – 1 месяц

Электронная подписка

Стоимость любого номера в pdf-формате составляет 50 рублей
Вся информация на сайтах
www.edu-potential.ru
www.karand.ru

2. В редакции журнала

115184, г. Москва, Климентовский пер., д. 1, стр. 1
(м. «Третьяковская», «Новокузнецкая»), тел. +7(985) 768-25-48.

Реквизиты

ООО «Карандаш»
ИНН 7718873526 / КПП 771901001
Расч. счёт 40702810700030003695
БИК 044525201
Кор. счёт 30101810000000000201
ПАО АКБ «Авангард»

Теперь вы можете читать журнал со своего планшета!

Где можно приобрести журнал?

1. В редакции журнала - см. адрес выше;
2. В книжном магазине МФТИ
г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 (новый корпус МФТИ, 1 этаж), тел. (495) 408-73-55;
3. В интернет-магазине Карандаш (www.karand.ru);
4. В интернет-магазине Пресса.ру (www.pressa.ru).

Учебный центр «Физтех - Потенциал»

Подготовительные курсы 2023 – 2024

В 2023 – 2024 учебном году при МФТИ продолжают работать подготовительные курсы в очном и заочном формате по предметам:

- математика
- геометрия
- олимпиадная математика
- информатика
- программирование
- русский язык
- химия
- физика
- олимпиадная физика
- компьютерная физика
- экспериментальная физика

На курсах осуществляется подготовка учащихся 2 - 11 классов к сдаче ОГЭ, ЕГЭ и олимпиадам.

Занятия проводят лучшие преподаватели МФТИ, знающие программы и требования при проведении ОГЭ, ЕГЭ и олимпиад, имеющие большой стаж работы со школьниками.

На курсах ребята восполнят пробелы в знаниях, ознакомятся с форматом экзамена и получат уверенность в своей подготовке к успешной сдаче экзамена.

В летний период можно принять участие в **летней школе** и **курсах онлайн**.

Занятия проводятся в Московском корпусе МФТИ.

Климентовский пер., д. 1, стр. 1
Телефоны: (495) 542-65-62, (495) 743-29-02
www.edu-mipt.ru

В СЛЕДУЮЩЕМ НОМЕРЕ

- Часы Лейбница. *Златопольский Д.М.*
- Методика выполнения задания 27 демонстрационного варианта ЕГЭ по информатике 2024 года. *Златопольский Д.М.*
- Использование функции ВПР в Excel для точного поиска. Часть 2. *И.С. Барашков*

ПРОГРАММА СПОНСОРСКОЙ ПОМОЩИ ЖУРНАЛУ «ПОТЕНЦИАЛ»

Физико-математический журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал» выпускается на средства выпускников технических вузов и поэтому нуждается в спонсорской поддержке. В журнале действует Программа спонсорской помощи. Программа допускает поступление финансовой, материальной, информационной и иной помощи журналу. Координирует работу Программы Спонсорский совет, являющийся структурным подразделением журнала. Спонсорами могут быть физические или юридические лица. Спонсорская помощь осуществляется одноразово или на постоянной основе. В последнем случае спонсор входит в Спонсорский совет журнала. Имена спонсоров текущего номера журнала печатаются (при согласии спонсора) в этом же номере. По вопросам оказания спонсорской помощи обращаться в редакцию.

Тел. (495) 743-29-02
E-mail: editor@edu-potential.ru

9 771814 642007

НАШИ СПОНСОРЫ