

МЕТОД ГАРАНТИРУЮЩЕГО ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СБОЕВ В ИЗБЫТОЧНОМ БЛОКЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. И. Матасов¹, Е. В. Шестакова²

Предложен алгоритм определения сбоев для избыточного блока инерциальных датчиков при помощи метода гарантирующего оценивания. Эффективность алгоритма подтверждена численным тестированием.

¹ *Матасов Александр Иванович* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. лаб. управления и навигации мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexander.matasov@gmail.com.

Matasov Alexander Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lead Research Scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Control and Navigation.

² *Шестакова Ева Владимировна* — студ. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: eva.shestakova@math.msu.ru.

Shestakova Eva Vladimirovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

Ключевые слова: блок инерциальных датчиков, детектирование сбоев, гарантирующий подход.

An algorithm is proposed to determine failures for an redundant inertial sensor unit by means of the guaranteeing estimation method. The numerical testing confirms the efficiency of the proposed algorithm.

Key words: inertial sensor unit, detecting failures, guaranteeing approach.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-5-11

1. Введение. Для повышения надежности навигационной системы применяются избыточные блоки инерциальных сенсоров — датчиков угловой скорости и ньютонометров. Вместо трех взаимно ортогональных чувствительных элементов (в каждом блоке) используется шесть датчиков. Предполагается, что в один момент времени во всех каналах каждого блока может происходить не более двух сбоев. Необходимо детектировать возможные сбои в каналах измерений блоков. Иными словами, необходимо определить наличие сбоя и установить, в каком канале он произошел.

Для детектирования сбоев природа аномальных ошибок в показаниях датчиков несущественна. Действия по установлению и локализации сбоев идентичны для обоих блоков чувствительных элементов. Поэтому в настоящей работе рассматривается только блок датчиков угловой скорости.

Предложен гарантирующий подход для определения сбоев, достоинство которого состоит в том, что задача детектирования сбоев ставится как оптимальная задача оценивания. Кроме того, удается вычислить и оптимальную гарантированную ошибку определения соответствующих параметров.

2. Постановка исходной задачи. Пусть измерения, доставляемые блоком датчиков угловой скорости, имеют вид (в один заданный момент времени):

$$z = Gq + \varrho, \quad (1)$$

где $z = (z_1, \dots, z_6)^T \in \mathbb{R}^6$ — вектор, составленный из показаний блока датчиков угловой скорости; $q \in \mathbb{R}^3$ — вектор оцениваемых компонент угловой скорости в проекциях на приборный трехгранник; $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_6)^T \in \mathbb{R}^6$ — вектор, составленный из помех измерений.

Матрица G задается соотношением

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi - \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \\ -\cos \varphi & \frac{1}{2} \sin \varphi & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \\ \cos \varphi & \frac{1}{2} \sin \varphi & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

где угол φ определен равенствами $\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Исходная задача состоит в том, чтобы установить наличие сбоя (сбоев) и определить, где это произошло.

3. Задача гарантирующего оценивания. Сначала рассмотрим вспомогательную задачу гарантирующего оценивания параметров [1–6] при наличии двух сбоев в ошибках измерений.

Пусть по-прежнему измерения задаются формулой (1). Требуется оценить скалярную величину $l = a^T q$, где $a \in \mathbb{R}^3$ — заданный вектор.

Пусть в ошибках измерений допускаются два сбоя. Тогда модель ошибок измерений имеет вид

$$\varrho \in \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}(\omega),$$

$$\mathcal{P}(\omega) = \{ \varrho \in \mathbb{R}^6 \mid |\varrho_i| \leq \sigma, \quad i = 1, \dots, 6, \quad i \notin \omega \},$$

где Ω есть множество всех пар $\omega = \{i_1, i_2\}$ ($i_1 < i_2$) из набора $\{1, \dots, 6\}$, а σ — заданная положительная величина, характеризующая максимальную ошибку измерений при отсутствии сбоев.

Отметим, что множество $\mathcal{P}$ невыпукло и не ограничено, в отличие от классических постановок задач гарантирующего оценивания параметров, где $|\varrho_i| \leq \sigma$. Это множество, например, для случая трех измерений и одного сбоя представляет собой сумму взаимно ортогональных брусков в $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим все возможные оценщики $\hat{l} = s(z)$ для $l = l(q)$. Введем также множество параметров $q \in \mathbf{R}^3$, совместимых с заданным вектором z :

$$Q(z) = \{q \in \mathbf{R}^3 \mid Gq = z - \varrho, \quad \varrho \in \mathcal{P}\}.$$

Отметим, что множество $Q(z)$ может быть несвязным, т.е. состоять из изолированных частей.

Задача (апостериорного, т.е. при заданном z) гарантирующего оценивания состоит в нахождении оценщика $s^0(z)$, такого, что для всех других оценщиков $s(z)$

$$\max_{q \in Q(z)} |l(q) - s^0(z)| \leq \max_{q \in Q(z)} |l(q) - s(z)|.$$

Минимальные и максимальные допустимые значения l определяются решением следующих экстремальных проблем:

$$l_{\min} = \min_{q \in Q(z)} a^\top q, \quad l_{\max} = \max_{q \in Q(z)} a^\top q.$$

Очевидно, что оптимальный гарантирующий *апостериорный* оценщик имеет вид

$$s^0(z) = \frac{1}{2} (l_{\max} + l_{\min}), \quad (2)$$

а *апостериорная* оптимальная гарантирующая ошибка оценки определяется формулой

$$\delta^0(z) = \max_{q \in Q(z)} |l(q) - s^0(z)| = \frac{1}{2} (l_{\max} - l_{\min}). \quad (3)$$

Обсудим процедуру вычислений $l_{\min}$ и $l_{\max}$. При сбоях в измерениях с номерами из ω введем множество векторов $q \in \mathbf{R}^3$, которые совместимы с вектором z :

$$Q_\omega(z) = \{q \in \mathbf{R}^3 \mid |z_i - G_i q| \leq \sigma, \quad i = 1, \dots, 6, \quad i \notin \omega\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q(z) &= \bigcup_{\omega \in \Omega} Q_\omega(z), \quad l_{\max} = \max_{\omega \in \Omega} l_\omega(z), \quad l_{\min} = \min_{\omega \in \Omega} J_\omega(z), \\ I_\omega(z) &= \max_{q \in Q_\omega(z)} a^\top q, \quad J_\omega(z) = \min_{q \in Q_\omega(z)} a^\top q. \end{aligned} \quad (4)$$

Двойственные задачи [6, 7] к задачам (4) имеют вид

$$I_\omega(z) = \min_{X_\omega} f(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^6 (\sigma |x_i| + z_i x_i), \quad (5)$$

$$J_\omega(z) = -\min_{X_\omega} g(x), \quad g(x) = \sum_{i=1}^6 (\sigma |x_i| - z_i x_i), \quad (6)$$

$$X_\omega = \left\{x \in \mathbf{R}^6 \mid \sum_{i=1}^6 G_i^\top x_i = a, \quad x_j = 0, \quad j \in \omega\right\}. \quad (7)$$

Тогда оптимальный оценщик $s^0(z)$ и оптимальная ошибка оценки $\delta^0(z)$ определяются формулами (2), (3).

Нетрудно показать, что задачи (5)–(7) эквивалентны задачам линейного программирования, если x_i заменить на $u_i - v_i$, а $|x_i|$ — на $u_i + v_i$, $u_i, v_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 6$. Поэтому они могут быть эффективно решены, например, симплекс-методом [7] или методом внутренней точки [8].

Для вычисления $l_{\max}$ и $l_{\min}$ необходимо решить не более $2 \cdot C_6^2 = 30$ задач линейного программирования.

4. Сведение задачи определения сбоев к задаче оценивания. Для решения задачи определения сбоев рассмотрим ее как задачу оценивания. Для оценки компонент вектора ошибки измерений ϱ_i , $i = 1, \dots, 6$, предлагается решить 6 задач оптимального гарантирующего оценивания для параметра $l = a^T q$ при $a = G_i$, где G_i — строки матрицы G . Затем, получив оценку для $G_i q$, оценки ошибки измерений ϱ_i найдем по формулам (см. (2), (3)):

$$\hat{\varrho}_i = z_i - s_0^i(z), \quad \text{где } s_0^i(z) = s_0(z) \text{ при } a = G_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (8)$$

а ошибки оценки равны

$$\widehat{\delta \varrho}_i = \delta_0^i(z), \quad \text{где } \delta_0^i(z) = \delta_0(z) \text{ при } a = G_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (9)$$

Затем проверяется условие

$$|\widehat{\varrho}_i \pm \widehat{\delta \varrho}_i| \geq \Delta, \quad \text{где } \Delta — \text{заданный порог.} \quad (10)$$

Из неравенства (10) устанавливается факт наличия сбоя и номер сбойного канала. Таким образом, задача определения двух сбоев сводится к решению не более $30 \cdot 6 = 180$ задач линейного программирования.

При численном решении вариационных задач (5)–(7) в силу их малой размерности соответствующая вычислительная нагрузка весьма умеренна. В любом случае сформулированная здесь задача оптимального гарантирующего оценивания может служить эталоном для оценки качества функционирования других более просто реализуемых (бортовых) алгоритмов. Подчеркнем, что гарантирующий подход позволяет получить еще и оптимальную ошибку оценивания.

5. Численное тестирование алгоритма. В работе проведено тестирование предложенного алгоритма определения сбоев для измерений, полученных при помощи программы-имитатора.

Пороговое значение выбиралось равным $\Delta = 10 \frac{\circ}{\text{час}}$. Оценки ошибок измерений ϱ_i , абсолютное значение которых больше Δ , считались аномальными. Везде далее в качестве единицы измерения используется $\frac{\circ}{\text{час}}$.

При тестировании задавалось следующее значение вектора параметров q :

$$q = (-172.82, 604.19, -1284.63)^T.$$

Верхняя граница абсолютных значений для регулярной (несбойной) флуктуационной ошибки измерений σ при моделировании бралась равной $1 \frac{\circ}{\text{час}}$.

Значения флуктуационных ошибок имеют вид

$$\varrho^f = (0.50, 0.10, -0.80, -0.01, -0.02, 0.30)^T.$$

Пусть одновременно произошли сбои во втором и третьем измерениях: $\varrho_2 = 20 + \varrho_2^f$ и $\varrho_3 = -50 + \varrho_3^f$, т.е. сбои равны 20 и -50 соответственно. С учетом введенных величин q и ϱ вычисленные по формуле (1) измерения имеют вид

$$z = (-393.04, 1085.35, -612.73, -593.11, 1254.79, 761.19)^T.$$

Задачи линейного программирования (5)–(7) решались в среде MATLAB при помощи функции `linprog`, которая реализует метод внутренней точки [8].

Например, при решении задач (5)–(7) для второго канала получено, что для всех значений ω , содержащих хотя бы один номер сбойного канала, значения функционалов $I_\omega(z)$ и $J_\omega(z)$ соответственно равны $-\infty$ и ∞ . Это отвечает случаю, когда соответствующее множество $Q_\omega(z)$ пусто. Функционалы принимали конечные значения для единственной пары $\omega = (2, 3)$, содержащей номера сбойных каналов измерений. Значения $l_{\min}$ и $l_{\max}$ равны 1051.72 и 1057.20 соответственно. Аналогичные вычисления проделаны и для остальных каналов измерений.

Оценки невязок, полученные по формулам (8), имеют вид

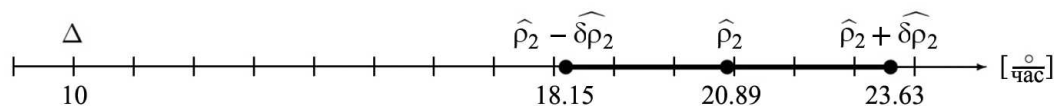
$$\hat{\varrho} = (-0.00, 20.89, -51.35, -0.00, -0.00, -0.00)^T.$$

Соответствующие ошибки оценивания, полученные по формулам (9), определяются равенством

$$\widehat{\delta \varrho} = (1.00, 2.74, 2.74, 1.00, 1.00, 1.00)^T.$$

После проверки условия (10) установлено, что во втором и третьем каналах измерений зафиксированы сбои.

На рисунке представлены результаты вычислений для второго канала. Как можно заметить, весь отрезок лежит правее порога, при этом условие (10) выполняется и сбой детектируется.



Оценка ошибки для второго канала

Для третьего канала соответствующий рисунок аналогичен приведенному, гарантированный доверительный интервал также полностью лежит за величиной порога Δ . Для остальных несбойных каналов соответствующие доверительные интервалы лежат левее порога.

Заметим, что применение методов выявления сбоев, основанных на классических методах оценивания (метод наименьших квадратов, метод наименьших модулей) при столь малом количестве измерений (равном 6), не дает преимуществ по сравнению с методом гарантирующего оценивания. С помощью численного моделирования было установлено, что метод наименьших квадратов не идентифицирует даже один сбой, а метод наименьших модулей определяет один сбой, но не идентифицирует два сбоя. Кроме того, в отличие от гарантирующего подхода использование традиционных методов не позволяет получить гарантированные доверительные интервалы для оценок.

6. Заключение. В работе решена задача определения сбоев в избыточном блоке инерциальных датчиков при помощи метода гарантирующего оценивания. Предложенный алгоритм позволяет не только установить наличие двух одновременных сбоев, но и получить гарантированные доверительные интервалы для оценки сбоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Witsenhausen H.S.* Sets of possible states of linear systems given perturbed observations // *IEEE Trans. Automatic Control*. 1968. **AC-13**. 556–558.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и оценивание в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазовых состояний динамических систем. М.: Наука, 1988.
4. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // *Космич. исследования*. 1964. **2**, № 5. 713–718.
5. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. Препринт № 71 ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2010.
6. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
7. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
8. *Boyd S., Vandenberghe L.* *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

Поступила в редакцию
18.03.2024