ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 15. ВЫЧИСЛ. МАТЕМ. И КИБЕРН. 2025. № 1. С. 50–57
Lomonosov Computational Mathematics and Cybernetics Journal

УДК 512.643

Х. Д. Икрамов[1]

О НЕКОНГРУЭНТНОСТИ ПРЯМЫХ СУММ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЖОРДАНОВЫХ КЛЕТОК

Пусть A и B — матрицы порядка n, являющиеся прямыми суммами нильпотентных жордановых клеток. Показано, что если эти суммы различаются в наборе порядков клеток, а не только расположением клеток на главной диагонали, то A и B не могут быть конгруэнтны. Это по-новому доказывает единственность сингулярной части в канонической форме Сергейчука–Хорна вырожденной матрицы.

Ключевые слова: прямая сумма, жорданова клетка, конгруэнтное преобразование, линейная оболочка векторов.

DOI: 10.55959/MSU/0137–0782–15–2025–49–1–50–57

1. Введение. В теории комплексных квадратных матриц различают два типа конгруэнтных преобразований. Это, во-первых, T-конгруэнции, описываемые формулой

$$A \to P^\top AP, \tag{1}$$

и, во-вторых, *-конгруэнции (или эрмитовы конгруэнции)

$$A \to P^* AP. \tag{2}$$

В обеих формулах P — *произвольная* невырожденная матрица данного порядка n. Для *фиксированной* матрицы A *классом конгруэнтности* $\mathcal{K}_A$ этой матрицы называется множество всех матриц, получаемых из A по формуле (1) или (2). Это множество можно также описать как орбиту матрицы A при действии общей линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ на матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$ посредством конгруэнций.

Матрицу простейшего вида в данном классе конгруэнтности принято называть *канонической формой* этого класса. Вкусовые различия в том, что считать простейшим видом, являются причиной существования нескольких различных канонических форм. Исторически первой была форма, предложенная в 1961 г. в книге [1]. Мы же в этой статье будем работать с формой, найденной уже в нынешнем столетии В. Сергейчуком и Р. Хорном. Ее подробное обсуждение читатель найдет в [2].

Каноническая форма Сергейчука–Хорна представляет собой блочно-диагональную матрицу с диагональными блоками трех различных типов. Первый тип — это нильпотентные жордановы клетки. Прямая сумма таких клеток различных порядков образует *сингулярную часть* канонической формы. Диагональные блоки двух других типов суть невырожденные матрицы. В совокупности они составляют *регулярную часть* канонической формы, которая в этой статье не представляет для нас интереса.

Предметом нашего интереса является устройство сингулярной части, а именно, количество образующих ее жордановых клеток и их порядки. Однозначно ли определены эти характеристики для данного класса конгруэнтности?

Примем обычное соглашение, которое отождествляет блочно-диагональные матрицы, отличающиеся друг от друга только расположением одних и тех же блоков на главной диагонали. Тогда *основной вопрос*, рассматриваемый в статье, можно сформулировать следующим образом. Пусть A и B — матрицы порядка n, являющиеся прямыми суммами нильпотентных жордановых

[1] Факультет ВМК, проф., д.ф.-м.н., e-mail: ikramov@cs.msu.su

клеток, причем эти две суммы *различны* в указанном смысле. Могут ли тем не менее A и B быть конгруэнтны?

По существу речь идет о единственности сингулярной части канонической формы. В этом отношении известно следующее. Очевидными скалярными инвариантами конгруэнтных преобразований, производимых с $n \times n$-матрицей A, являются ее ранг r и дефект $d = n - r$. Два других инварианта — это *нормальный дефект* nd, определяемый как размерность общего ядра матриц A и $A^\top$ в случае T-конгруэнций или общего ядра A и A^* для *-конгруэнций, а также *анормальный дефект* $d - nd$. Сергейчук и Хорн предложили в [3] несколько алгоритмов для вычисления дополнительных скалярных инвариантов, позволяющих единственным образом установить порядки жордановых клеток в сингулярной части канонической формы. К сожалению, именно в обосновании единственности изложение в [3] содержит некоторые лакуны, что делает оправданным сформулированный выше основной вопрос.

Этот вопрос имеет смысл для обоих типов конгруэнтных преобразований. В данной статье мы рассмотрим его применительно к T-конгруэнциям.

Наш ответ на основной вопрос отрицателен, т.е. прямые суммы A и B не могут быть конгруэнтны. Обоснование этого вывода несколько различается для четных и нечетных n. В п. 5 мы приводим соответствующие рассуждения для $n = 8$, а в п. 6 — для $n = 9$. Аналогичные рассуждения применимы для произвольного n, четного или нечетного. Известные факты, используемые в этих рассуждениях, изложены в пп. 2 и 3. Небольшое предварительное замечание относительно нормального дефекта сделано в п. 4.

2. CS-разложение квадратной матрицы. Всякую квадратную матрицу A можно представить в виде

$$A = C_A + S_A, \tag{3}$$

где $C_A = C_A^\top$, $S_A = -S_A^\top$.

Представление (3) будем называть CS-разложением матрицы A. Оно определено единственным образом, а именно:

$$C_A = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right), \qquad S_A = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right).$$

Пусть A и B — конгруэнтные $n \times n$-матрицы: $B = Q^\top A Q$. Подставляя сюда CS-разложения обеих матриц, приходим к соотношениям

$$C_B = Q^\top C_A Q, \qquad S_B = Q^\top S_A Q. \tag{4}$$

Таким образом, конгруэнтность симметричных компонент C_A и C_B, а также конгруэнтность кососимметричных матриц S_A и S_B являются необходимыми условиями конгруэнтности самих матриц A и B. Это добавляет к числу скалярных инвариантов конгруэнции матрицы A еще два инварианта, а именно ранги компонент C_A и S_A.

Предположим, что в первом соотношении (4) C_A и C_B — невырожденные матрицы. Тогда

$$C_B^{-1} = Q^{-1} C_A^{-1} Q^{-\top}.$$

Перемножая это равенство со вторым соотношением (4), получаем

$$C_B^{-1} S_B = Q^{-1}(C_A^{-1} S_A) Q.$$

Тем самым матрицы $C_A^{-1} S_A$ и $C_B^{-1} S_B$ должны быть *подобны*. Это еще одно необходимое условие конгруэнтности между A и B.

Для жордановой клетки J_n порядка n матрицы CS-разложения имеют трехдиагональный вид:

$$C_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это естественным образом подводит нас к теме следующего раздела.

3. Трехдиагональные теплицевы матрицы и их определители. Пусть $T_n{=}T_n(a,b,c)$ — трехдиагональная теплицева матрица порядка n с числом a на главной диагонали и числами b и c на двух соседних с ней диагоналях. Потребуем, чтобы

$$a^2 - 4bc \neq 0. \tag{5}$$

Тогда $D_n = \det T_n$ выражается формулой

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{a^2-4bc}}\left(\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^{n+1}\right). \tag{6}$$

Для матриц C_n и S_n условие (5) очевидно выполнено. Формула (6) дает

$$\det C_n = \frac{i^n}{2^{n+2}}\left(1-(-1)^{n+1}\right).$$

Если $n = 2k$ — четное число, то $\det C_n = \frac{(-1)^k}{2^{n+1}}$, т.е. C_n — невырожденная матрица. При нечетном n определитель матрицы C_n равен нулю. Так как минор, расположенный в строках $1, 2, \ldots, n-1$ и столбцах $2, 3, \ldots, n$, равен 1, то $\operatorname{rank} C_n = n-1$ и, следовательно, ядро одномерно. Нетрудно проверить, что в качестве его базисного вектора можно взять

$$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots, (-1)^m)^\top, \tag{7}$$

если n — число вида $4k+m$, $m \in \{1, 3\}$.

Для матрицы S_n формула (6) принимает вид

$$\det S_n = \frac{1}{2^{n+2}}\left(1-(-1)^{n+1}\right).$$

Как и для всякой кососимметричной матрицы нечетного порядка, $\det S_n = 0$ при нечетном n. Ядро матрицы S_n одномерно, и базисным может служить вектор

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1)^\top. \tag{8}$$

При четном n имеем $\det S_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Пусть n — четное число. Нам понадобится в дальнейшем информация о собственных значениях и собственных векторах матрицы

$$R_n = C_n^{-1} S_n. \tag{9}$$

Характеристический многочлен $f(\lambda)$ отличается лишь скалярным множителем $(\det C_n)^{-1}$ от трехдиагонального определителя

$$g(\lambda) = \det(S_n - \lambda C_n).$$

Применяя к $g(\lambda)$ формулу (6), получаем

$$g(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2} \right)^n,$$

учитывая четность n. Отсюда следует, что собственными значениями матрицы R_n являются числа 1 и -1. Ввиду полного их равноправия алгебраическая кратность каждого из них равна $n/2$.

Найдем собственные векторы матрицы R_n. Для $\lambda = 1$ они определяются из системы линейных уравнений

$$(C_n^{-1} S_n)x = x,$$

или

$$S_n x = C_n x,$$

или

$$(C_n - S_n)x = 0. \tag{10}$$

Но $C_n - S_n$ есть не что иное, как матрица $J_n^\top$, ядром которой являются векторы, коллинеарные единичному вектору e_n. Тем самым в жордановой форме матрицы $R_n = C_n^{-1} S_n$ собственному значению 1 соответствует единственная жорданова клетка порядка $n/2$.

К аналогичному выводу приходим для $\lambda = -1$. Вместо (10) имеем теперь систему

$$(C_n + S_n)x = 0.$$

Но $C_n + S_n = J_n$, так что решениями являются векторы, коллинеарные единичному вектору e_1.

Итак, жорданова форма матрицы R_n есть прямая сумма двух жордановых клеток порядка $n/2$, соответствующих собственным значениям 1 и -1.

4. Замечание о нормальном дефекте. Предположим, что матрицы A и $A^\top$ имеют нетривиальное общее ядро. Покажем, как от такой матрицы A перейти к матрице с нормальным дефектом nd, равным нулю. Для этого можно воспользоваться следующим простым алгоритмом.

1. Найти базис $x_1, x_2, \ldots, x_c$ общего ядра матриц A и $A^\top$, решая совместно системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ и $A^\top x = 0$.

2. Построить невырожденную $n \times n$-матрицу Q, в которой векторы $x_1, \ldots, x_c$ были бы последними c столбцами. Для этого дополнить систему $x_1, \ldots, x_c$ векторами $z_1, z_2, \ldots, z_{n-c}$ до базиса пространства $\mathbf{C}_n$.

3. Выполнить конгруэнцию

$$A \to \tilde{A} = Q^\top A Q.$$

Матрица $\tilde{A}$ есть прямая сумма $\tilde{A} = B \oplus 0$, где 0 — это нулевой блок порядка c, а B — искомая матрица с $nd = 0$.

В двух последующих разделах мы предполагаем, что ко всем рассматриваемым там матрицам описанный алгоритм был уже применен, так что нормальный дефект этих матриц равен нулю.

5. Случай $n = 8$. Составим возможные 8×8 прямые суммы нильпотентных жордановых клеток, учитывая значение дефекта и соглашение о нормальном дефекте, принятое в предыдущем разделе.

Значению $d = 1$ соответствует единственная матрица J_8. Зато при $d = 2$ имеем три различные прямые суммы

$$\begin{aligned} A &= J_6 \oplus J_2, \\ B &= J_4 \oplus J_4, \\ D &= J_5 \oplus J_3. \end{aligned}$$

При $d = 3$ получаем две суммы

$$\begin{aligned} F &= J_4 \oplus J_2 \oplus J_2, \\ G &= J_3 \oplus J_3 \oplus J_2. \end{aligned}$$

Наконец, для $d = 4$ находим единственную матрицу $J_2 \oplus J_2 \oplus J_2 \oplus J_2$.

Ясно, что конгруэнтные прямые суммы следует искать только в группах матриц с одинаковым значением дефекта. Покажем, что никакие две из матриц A, B, D не могут быть конгруэнтны. Это легко следует из результатов пп. 2, 3. Действительно, симметричная компонента C_D матрицы D имеет ранг 6, тогда как C_A и C_B — невырожденные матрицы. Поэтому D не конгруэнтна ни A, ни B. Но и между собой A и B не конгруэнтны, правда, по другой причине. Жорданова форма матрицы $C_B^{-1}S_B$ есть прямая сумма четырех клеток второго порядка, в то время как жорданова форма матрицы $C_A^{-1}S_A$ включает в себя две клетки порядка 3, одну для $\lambda = 1$ и другую для $\lambda = -1$. Такие матрицы $C_A^{-1}S_A$ и $C_B^{-1}S_B$ не могут быть подобны, а потому A и B не конгруэнтны.

Перейдем к матрицам с $d = 3$. Если бы F и G были конгруэнтны, то должны были бы быть конгруэнтны прямые суммы $F_1 = J_4 \oplus J_2$ и $G_1 = J_3 \oplus J_3$. Но последнее невозможно по той же причине, что и выше: симметричная компонента C_{G_1} матрицы G_1 имеет ранг 4, тогда как C_{F_1} — невырожденная матрица порядка 6.

6. Случай $n = 9$. Как и в п. 5, начнем с составления списка всевозможных матриц 9-го порядка, являющихся прямыми суммами нильпотентных жордановых клеток. При $d = 1$ имеем единственную матрицу J_9. Значению $d = 2$ соответствуют три различные прямые суммы

$$\begin{aligned} A &= J_7 \oplus J_2, \\ B &= J_6 \oplus J_3, \\ D &= J_5 \oplus J_4. \end{aligned}$$

При $d = 3$ получаем две суммы

$$\begin{aligned} F &= J_5 \oplus J_2 \oplus J_2, \\ G &= J_4 \oplus J_3 \oplus J_2. \end{aligned}$$

В случае $d = 4$ находим единственную матрицу $J_3 \oplus J_2 \oplus J_2 \oplus J_2$.

В этот раз мы начнем со случая $d = 3$ и покажем, что матрицы $F_1 = J_5 \oplus J_2$ и $G_1 = J_4 \oplus J_3$ не конгруэнтны, откуда будет следовать неконгруэнтность F и G.

Предположим, напротив, что G_1 и F_1 конгруэнтны, т.е.

$$G_1 = P^\top F_1 P \tag{11}$$

для некоторой невырожденной 7×7-матрицы P, и приведем это предположение к противоречию.

Из (11) выводим

$$G_1 P^{-1} = P^\top F_1. \tag{12}$$

Ядром матрицы F_1 является линейная оболочка векторов e_1 и e_6:

$$\ker F_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_6\}.$$

Для матрицы G_1 имеем

$$\ker G_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_5\}.$$

Подставляя в (12) векторы e_1 и e_6, находим

$$G_1(P^{-1}e_1) = P^\top F_1 e_1 = 0,$$
$$G_1(P^{-1}e_6) = P^\top F_1 e_6 = 0,$$

откуда следует, что

$$P^{-1}e_1, P^{-1}e_6 \in \operatorname{span}\{e_1, e_5\}. \tag{13}$$

Следствиями формулы (11) являются соотношения

$$C_{G_1} = P^\top C_{F_1} P,$$
$$S_{G_1} = P^\top S_{F_1} P,$$

которые мы перепишем по аналогии с (12):

$$C_{G_1} P^{-1} = P^\top C_{F_1}, \tag{14}$$
$$S_{G_1} P^{-1} = P^\top S_{F_1}. \tag{15}$$

Матрицы $C_{F_1}, S_{F_1}, C_{G_1}$ и S_{G_1} имеют одномерные ядра, известные нам из формул (7) и (8):

$$\ker C_{F_1} = \operatorname{span}\{e_1 - e_3 + e_5\}, \qquad \ker S_{F_1} = \operatorname{span}\{e_1 + e_3 + e_5\},$$
$$\ker C_{G_1} = \operatorname{span}\{e_5 - e_7\}, \qquad \ker S_{G_1} = \operatorname{span}\{e_5 + e_7\}.$$

Из (14) и (15) выводим

$$P^{-1}(e_1 - e_3 + e_5) \in \operatorname{span}\{e_5 - e_7\},$$
$$P^{-1}(e_1 + e_3 + e_5) \in \operatorname{span}\{e_5 + e_7\},$$

откуда следует, что

$$P^{-1}(e_1 + e_5) \in \operatorname{span}\{e_5, e_7\}, \tag{16}$$
$$P^{-1}(e_3) \in \operatorname{span}\{e_5, e_7\}. \tag{17}$$

Соотношения (13), (16) и (17) вместе означают, что

$$P^{-1}\operatorname{span}\{e_1, e_3, e_5, e_6\} \subset \operatorname{span}\{e_1, e_5, e_7\}.$$

Таким образом, *невырожденная* матрица P^{-1} переводит четырехмерное линейное подпространство, натянутое на векторы e_1, e_3, e_5 и e_6, в трехмерную линейную оболочку векторов e_1, e_5 и e_7. Это противоречие доказывает неконгруэнтность матриц G_1 и F_1.

Перейдем к обсуждению тройки матриц A, B, D. Покажем, что матрицы A и B не конгруэнтны, пользуясь тем же приемом, что и для матриц G_1 и F_1, но уже не входя в столь подробные объяснения.

Предположим, что A и B конгруэнтны, т.е. $B = P^\top AP$, или

$$BP^{-1} = P^\top A \tag{18}$$

для некоторой невырожденной матрицы P. Из равенства (18) выводим

$$P^{-1}e_1, P^{-1}e_8 \in \operatorname{span}\{e_1, e_7\}. \tag{19}$$

Переходя к CS-разложениям матриц A и B, имеем

$$\ker C_A = \operatorname{span}\{e_1 - e_3 + e_5 - e_7\}, \tag{20}$$
$$\ker S_A = \operatorname{span}\{e_1 + e_3 + e_5 + e_7\}, \tag{21}$$
$$\ker C_B = \operatorname{span}\{e_7 - e_9\}, \qquad \ker S_B = \operatorname{span}\{e_7 + e_9\}.$$

Отсюда следует, что

$$P^{-1}(e_1 - e_3 + e_5 - e_7) \in \operatorname{span}\{e_7, e_9\},$$
$$P^{-1}(e_1 + e_3 + e_5 + e_7) \in \operatorname{span}\{e_7, e_9\}.$$

Из полученных включений находим

$$P^{-1}(e_1 + e_5) \in \operatorname{span}\{e_7, e_9\},$$
$$P^{-1}(e_3 + e_7) \in \operatorname{span}\{e_7, e_9\}.$$

Вместе с (19) это означает, что

$$P^{-1} \operatorname{span}\{e_1, e_3 + e_7, e_5, e_8\} \subset \operatorname{span}\{e_1, e_7, e_9\}.$$

Полученное противоречие опровергает существование матрицы P, переводящей A в B посредством конгруэнции.

Для анализа матриц A и D мы немного усложним предыдущие рассуждения. Пусть существует невырожденная матрица Q, такая, что $D = Q^\top AQ$. Тогда и $D^\top = Q^\top A^\top Q$. Переписывая эти равенства в виде

$$DQ^{-1} = Q^\top A, \qquad D^\top Q^{-1} = Q^\top A^\top,$$

прежним образом приходим к включениям

$$Q^{-1}e_1, Q^{-1}e_8 \in \operatorname{span}\{e_1, e_6\}, \tag{22}$$
$$Q^{-1}e_7, Q^{-1}e_9 \in \operatorname{span}\{e_5, e_9\}. \tag{23}$$

Теперь используем CS-разложения матриц A и D. Ядра матриц C_A и S_A даны формулами (20) и (21). Для матрицы D имеем

$$\ker C_D = \operatorname{span}\{e_1 - e_3 + e_5\},$$
$$\ker S_D = \operatorname{span}\{e_1 + e_3 + e_5\}.$$

Отсюда выводим

$$Q^{-1}(e_1 - e_3 + e_5 - e_7) \in \operatorname{span}\{e_1 + e_5, e_3\},$$
$$Q^{-1}(e_1 + e_3 + e_5 + e_7) \in \operatorname{span}\{e_1 + e_5, e_3\}.$$

Следовательно,

$$Q^{-1}(e_1 + e_5) \in \operatorname{span}\{e_1, e_3, e_5\},$$
$$Q^{-1}(e_3 + e_7) \in \operatorname{span}\{e_1, e_3, e_5\}. \tag{24}$$

Первое из этих включений означает, что

$$Q^{-1}e_5 \in \operatorname{span}\{e_1, e_3, e_5\}. \tag{25}$$

Объединяя соотношения (22)–(25), заключаем, что матрица Q^{-1} переводит шестимерное линейное подпространство, натянутое на векторы e_1, e_3, e_5, e_7, e_8 и e_9, в пятимерную линейную оболочку векторов e_1, e_3, e_5, e_6 и e_9. Это опровергает существование матрицы Q, т.е. A и D не конгруэнтны.

Остается обсудить пару матриц B и D. Предположим, что существует невырожденная матрица S, такая, что $B = S^\top DS$ и $B^\top = S^\top D^\top S$. Отсюда прежним образом выводим включения

$$S^{-1}e_1, S^{-1}e_6 \in \operatorname{span}\{e_1, e_7\}, \tag{26}$$

$$S^{-1}e_5, S^{-1}e_9 \in \operatorname{span}\{e_6, e_9\}. \tag{27}$$

Используя CS-разложения матриц B и D, добавим к этим включениям еще одно:

$$S^{-1}e_3 \in \operatorname{span}\{e_7, e_9\}. \tag{28}$$

Вместе соотношения (26)–(28) означают, что пятимерное линейное подпространство, натянутое на векторы e_1, e_3, e_5, e_6 и e_9, переводится матрицей S^{-1} в четырехмерную линейную оболочку векторов e_1, e_6, e_7 и e_9, что невозможно. Таким образом, матрицы B и D не конгруэнтны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turnbull H.W., Aitken A.C. An Introduction to the Theory of Canonical Matrices. New York: Dover, 1961.
2. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013).
3. Horn R.A., Sergeichuk V.V. A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms // Linear Algebra Appl. 2006. **412**, P. 380–395.

Поступила в редакцию 09.01.24
Одобрена после рецензирования 12.06.24
Принята к публикации 12.06.24