И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Е.Д. Писаренкова
МГУ имени М. В. Ломоносова

УДК 517.955+517.958

ФОРМУЛА КОВАЛЕВСКОЙ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, задача Коши, формула Ковалевской, целые функции экспоненциального типа.*

Обсуждается важная формула С. В. Ковалевской, выражающая аналитические решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Указаны условия применимости данной формулы. Основной результат сформулирован в терминах экспоненциального роста функций, выбираемых для начального условия. Отмечены некоторые исторические подробности, связанные с тематикой нашего сообщения.

Одномерное уравнение теплопроводности является одним из знаковых в математической физике (см. [1], [2]). Для такого уравнения *задача Коши* имеет вид

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x). \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x)$ – заданная начальная функция. Функция $u(x,t)$ считается искомой (неизвестной). Вещественная переменная x играет роль пространственной координаты, а переменная t – роль времени. Область изменения (x,t) каждый раз будем указывать отдельно. Числовой коэффициент $a^2 > 0$ предполагаем фиксированным.

Наиболее известной для задачи (1) является *интегральная формула Пуассона*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s)\, ds. \tag{2}$$

При заданной ограниченной функции $\varphi \in C(\boldsymbol{R})$ формула (2) дает классическое решение $u \in C^{2,1}(\boldsymbol{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\boldsymbol{R} \times [0, +\infty))$ задачи (1) в полуплоскости $\boldsymbol{R} \times [0, +\infty)$. При $t = 0$ значения $u(x, 0) = \varphi(x)$ получаются из (2) с помощью предельного перехода (см. [3, гл. III, § 3]). При $t < 0$ формула (2) очевидно не применима.

Менее известна другая формула

$$u(x,t) = \varphi(x) + \frac{t}{1!} a^2 \varphi^{(2)}(x) + \frac{t^2}{2!} a^4 \varphi^{(4)}(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^{2n} \varphi^{(2n)}(x), \tag{3}$$

выражающая формальное решение задачи (1) для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$.

Формула (3) сыграла особую роль при подготовке знаменитой диссертации С.В. Ковалевской "Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen" (Inaugural Dissertation, 1874; см. [4]). До этой работы бытовало мнение, что всякий степенной ряд, формально удовлетворяющий «разумному» дифференциальному уравнению, определяет должную аналитическую функцию, выражающую истинное решение. Однако, как выяснено в [4], этот принцип не работает в случае задачи Коши (1).

Наглядный пример Ковалевской (см. [4, с. 36-37]) показывает, что при выборе функции $\varphi(x) = 1/(1-x)$ на интервале $x \in (-1, 1)$ ряд вида (3) расходится при $t \neq 0$ в любой точке $x \in \boldsymbol{R}$.

Более того, как отмечает С. В. Ковалевская (см. [4, с. 39]), похожий эффект наблюдается и для целой функции

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^{1/3}}, \qquad x \in \boldsymbol{R}, \tag{4}$$

не имеющей особенностей на вещественной оси. Точнее, при выборе начального условия (4) формула (3) также не дает аналитического продолжения для $u(x,t)$ при $t \neq 0$. Несложно проверить, например, что ряд из формулы (3) расходится в точке $x = 0$ при любом $t \neq 0$.

Обнаруженное свойство произвело сильное впечатление на Карла Вейерштрасса, наставника юной С. В. Ковалевской. В частном письме к ней он выразился так: "Du siehst, teuerste Sonia, wie Deine – Dir so einfach erscheinende – Bemerkung über die Eigentümlichkeit partieller Differentialgleichungen, daß eine unendliche Reihe, welche einer solche [Diff.] Gl. *formell* genügen kann, ohne doch für irgend welche Wertsysteme ihre Veränderlichen zu konvergieren, für mich der Ausgang von Untersuchungen, die viel Interessantes haben und manche Aufklärung verschaffen, geworden ist. Ich wünsche, daß meine Schülerin auf diese Weise fortfahren möge, Ihrem Lehrer und Freund Ihren Dank zu betätigen" (см. [5, с. 38], письмо от 06 мая 1874 года).

Перевод: «Ты видишь, дорогая Соня, что Твое (кажущееся Тебе таким простым) замечание о своеобразии дифференциальных уравнений в частных производных, а именно, что бесконечный ряд *формально* удовлетворяет такому дифференциальному уравнению и тем не менее не сходится ни при какой системе значений переменных, явилось для меня исходной точкой для интересных и многое разъясняющих исследований. Я желал бы, чтобы моя ученица и впредь таким же образом выражала благодарность своему учителю и другу» (см. [5, с. 177-178]).

Известно, что Вейерштрасс неоднократно подчеркивал значимость этого достижения своей ученицы в переписке и с другими своими корреспондентами – ведущими математиками того времени.

Казалось бы, указанные примеры ставят под сомнение формулу (3), делая ее проблемной для прямого использования. Но такое впечатление обманчиво, и практическая ценность формулы (3) весьма высока. Надо только знать границы ее применимости и использовать (3) строго по назначению. Следующий результат привлек внимание авторов после работы над предыдущей заметкой [6], подготовленной для СКМП–2024.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(x)$*, определенная при* $x \in \boldsymbol{R}$*, допускает аналитическое продолжение до целой функции* $\varphi(z)$*, удовлетворяющей оценке*

$$|\varphi(z)| \le D\exp(\sigma|z|), \qquad z \in \boldsymbol{C}, \tag{5}$$

с константами $D > 0$ *и* $\sigma > 0$*. Тогда ряд* (3) *сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в плоскости* $(x,t) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$*. Определенная так функция* $u(x,t)$ *принадлежит классу* $C^\infty(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$ *и дает решение задачи Коши* (1) *при всех* $(x,t) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$*. Более того, функция* $u(x,t)$ *является аналитической по* $x \in \boldsymbol{R}$ *и по* $t \in \boldsymbol{R}$*, а также по совокупности этих переменных.*

В оценке (5) нет ограничений сверху на конечное значение $\sigma > 0$. Согласно принятой терминологии (см., например, [7, гл. IV, с. 174-176]), подобные целые функции $\varphi(z)$ называются *целыми функциями экспоненциального типа.* Это весьма обширный класс функций, удобный для многих аналитических приложений.

Между прочим, функция из формулы (4) при аналитическом продолжении на плоскость $\boldsymbol{C}$ дает целую функцию $\varphi(z)$ порядка $\rho = 3$, что легко проверяется при помощи стандартной формулы (см. [8, с. 12]). Такая $\varphi(z)$ заведомо не будет функцией экспоненциального типа, т. е. теорема 1 к ней неприменима. Более того, согласно С. В. Ковалевской (см. [4, с. 39]), функциональный ряд (3) для функции (4) имеет точки расходимости на прямой $x \in \boldsymbol{R}$ при любом $t \ne 0$.

Для обоснования теоремы 1 комплексифицируем ситуацию. Заменим переменную $x \in \boldsymbol{R}$ переменной $z \in \boldsymbol{C}$, а переменную $t \in \boldsymbol{R}$ переменной $\zeta \in \boldsymbol{C}$. Разложение (3) примет вид

$$u(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} a^{2n} \varphi^{(2n)}(z). \tag{6}$$

Теорема 1 получается как следствие такого результата.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(z)$ *– целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая оценке* (5) *с константами* $D > 0$ *и* $\sigma > 0$*. Тогда комплексный ряд* (6) *сходится абсолютно и равномерно на любом* *компакте множества* $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$. *Указанный ряд* (6) *допускает почленное дифференцирование по каждой из переменных* z *и* ζ *(а также по любым сочетаниям этих переменных) произвольное конечное число раз.*

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме работы [6] на основе следующей леммы из теории целых функций.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(z)$ *– целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая оценке* (5) *с константами* $D>0$ *и* $\sigma>0$. *Тогда при всех* $m\in\boldsymbol{N}$ *для производных* $\varphi^{(m)}(z)$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{m!}\,|\varphi^{(m)}(z)|\;\le D\left(\frac{\sigma e}{m}\right)^{m}\exp(\sigma|z|),\qquad z\in\boldsymbol{C}. \tag{7}$$

Из леммы 1 аналогично работе [6] выводим следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(z)$ *– целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая оценке* (5) *с константами* $D>0$ *и* $\sigma>0$. *Тогда при любом выборе конечного значения* $q>\sigma^2>0$ *найдется числовой коэффициент* $K=K(D,\sigma,q)\ge D>0$, *такой, что*

$$|\varphi^{(2n)}(z)|\;\le K(D,\sigma,q)\,q^n\exp(\sigma|z|)\qquad z\in\boldsymbol{C},\qquad n\in\boldsymbol{N}. \tag{8}$$

В частности, в любом круге $|z|\;\le R$ *радиуса* $R>0$ *имеем*

$$|\varphi^{(2n)}(z)|\;\le K(D,\sigma,q)\,q^n\exp(\sigma R),\qquad n\in\boldsymbol{N}. \tag{9}$$

Полученная оценка (9), основанная на (8) и (7), используется далее применительно к ряду (6). Для того чтобы оценить в (6) дробь $\zeta^n/n!$, рассмотрим круг $|\zeta|\;\le R$ радиуса $R>0$ и при любом $r>0$ запишем

$$\frac{|\zeta^n|}{n!}\le\frac{R^n}{n!}=\frac{1}{r^n}\,\frac{(rR)^n}{n!}<\frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(rR)^k}{k!}=\frac{1}{r^n}\exp(rR),\qquad n\in\boldsymbol{N}. \tag{10}$$

Зафиксируем выбор $r>a^2q$, где $q>\sigma^2>0$. Комбинируя (9) и (10), получаем итоговую оценку сверху

$$\left|\frac{\zeta^n}{n!}a^{2n}\varphi^{(2n)}(z)\right|\le K(D,\sigma,q)\exp((r+\sigma)R)\left(\frac{a^2q}{r}\right)^{n},\qquad n\in\boldsymbol{N},$$

действующую в бикруге $|z|\;\le R$, $|\zeta|\;\le R$.

В силу выбора $r>a^2q$ числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2q}{r}\right)^{n}=\frac{r}{r-a^2q}$$

сходится. Он с точностью до множителя $K(D,\sigma,q)\exp((r+\sigma)R)$, не зависящего от индекса n, мажорирует функциональный ряд (6) во всяком бикруге вида $|z|\;\le R$, $|\zeta|\;\le R$. Как следствие, изучаемый ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте множества $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$.

Пусть $u(z,\zeta)$ – сумма ряда (6), определенная на множестве $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$.

Стандартные принципы теории аналитических функций (см. [9, с. 50]) показывают, что функция $u(z,\zeta)$ является целой по $z \in \boldsymbol{C}$ и по $\zeta \in \boldsymbol{C}$, причем производные по этим переменным можно (в любых сочетаниях) вычислять почленным дифференцированием. Сказанное дает теорему 2.

Теорема 1 есть прямое следствие теоремы 2, так как последняя гарантирует существование всех нужных производных от функции (3) с возможностью вычислять их почленным дифференцированием. Проверка соотношений (1) выполняется для ряда (3) непосредственно.

Область применения теоремы 1 весьма широка – она охватывает все функции $\varphi(x)$, имеющие вид полиномов, квазиполиномов, финитных преобразований Фурье–Стильтьеса, Лапласа–Стильтьеса и других близких к ним конструкций. Ряд подобных примеров, относящихся к нелокальным задачам для уравнения теплопроводности, см. в работе [6]. Представленные там образцы легко переносятся на случай ряда (3). Дадим сейчас ещё одну, чуть более сложную, чем в [6], иллюстрацию.

Пусть $\varphi(x) = J_1(x)$ – функция Бесселя индекса $\nu = 1$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, \exp(ixs)\, ds. \qquad (11)$$

Последнее выражение в (11) это так называемое *интегральное представление Пуассона* (см. [10, с. 65]). Дифференцируя его по правилу Лейбница и используя идеи «четности-нечетности», получаем, что

$$\varphi^{(2n)}(x) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^1 s^{2n-1} \sqrt{1-s^2}\, \big(xs \cos(xs) + 2n \sin(xs)\big)\, ds. \qquad (12)$$

После подстановки (12) в (3) и элементарных преобразований приходим к окончательному выражению

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-s^2}\, \big(x \cos(xs) - 2a^2 t s \sin(xs)\big) \exp(-a^2 t s^2)\, ds. \qquad (13)$$

Формула (13) всюду на плоскости $(x,t) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ дает ответ для задачи Коши (1) с функцией $\varphi(x) = J_1(x)$.

Аналогично можно разобрать пример $\varphi(x) = J_m(x)$ с функцией Бесселя произвольного индекса $\nu = m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Здесь

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} = \frac{2^m m!}{(2m)!} \frac{x^m}{\pi} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{(2m-1)/2} \exp(ixs)\, ds. \quad (14)$$

Вторая часть формулы (14) по-прежнему соответствует интегральному представлению Пуассона (см. [10, с. 65]). Правило дифференцирования Лейбница после применения к (14) позволяет элементарно вычислить значение $\varphi^{(2n)}(x)$. В его подынтегральном выражении будет содержаться скобка, состоящая из $m+1$ слагаемого. Аналогично изменится вид функции $u(x,t)$ – вместо (13) возникнет более сложная комбинация. Извлекать такие ответы из стандартной формулы (2) представляется крайне затруднительным.

Понятно, что теорема 1 дает удобный *достаточный признак* сходимости функционального ряда (3) для всех значений $(x,t)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. Вопрос о сходимости того же ряда при выборе $\varphi(x)$ за пределами класса функций экспоненциального типа требует особого изучения.

Так, например, для функции $\varphi(x)=\exp(x^2)$, продолжаемой до целой функции $\varphi(z)=\exp(z^2)$ порядка $\rho=2$, можно установить сходимость ряда (3) к точному решению

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-4a^2t}}\exp\left(\frac{x^2}{1-4a^2t}\right) \tag{15}$$

всюду в полосе $x\in\boldsymbol{R}$, $|t| < (2a)^{-2}$, а не на плоскости $(x,t)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. То же решение, но уже лишь при $0<t<(2a)^{-2}$, получается для $\varphi(x)=\exp(x^2)$ через формулу Пуассона (2). При этом сама функция (15) очевидно определена в полуплоскости $(x,t)\in\boldsymbol{R}\times\left(-\infty,(2a)^{-2}\right)$, удовлетворяя поставленной задаче (1) всюду на этом множестве.

Полезно ещё рассмотреть пример $\varphi(x)=\mathrm{ch}(x^3)$, где возникающая целая функция $\varphi(z)=\mathrm{ch}(z^3)$ имеет порядок $\rho=3$. Можно показать, что для такой $\varphi(x)$ ряд (3) будет расходиться во всех точках $x\in\boldsymbol{R}$ при любом значении $t\neq 0$.

Для близкого примера $\varphi(x)=\mathrm{sh}(x^3)$ получим «обособленную» сходимость ряда (3) в точке $x=0$ для всех значений $t\neq 0$. Но эта сходимость будет случайным обстоятельством из-за нечетности выбранной функции $\varphi(x)=\mathrm{sh}(x^3)$. Здесь также невозможно использовать формулу (3) для получения решения задачи (1) в какой-либо области на плоскости $(x,t)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$.

Перейдем к заключительным замечаниям. Не следует думать, что формула (3) совсем забыта и не отражена в литературе. Так, например, она имеется в справочнике [11, с. 24], правда, с неверным утверждением, что формула применима для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$. Эта же формула (3) упоминается в трактате Э. Гурса с несколькими короткими комментариями (см. [12, с. 49]). В учебнике А. В. Бицадзе [13, с. 27] имеется аналог формулы (3) для многомерного уравнения теплопроводности с указанием на то, что применение таких формул требует равномерной сходимости возникающих рядов с возможностью их почленного дифференцирования. Аналогичный фрагмент воспроизводится в монографии [14, с. 52-53], где приведено несколько подобных формул, причем отдельно отмечается: « *О том, что эти формулы могут дать сколь-нибудь общие решения, конечно, утверждать нельзя* ». Данное суждение в свете нашей теоремы 1 представляется как минимум спорным. Наиболее содержательный материал представлен в специализированной монографии Д. Уиддера (см. [1, с. 44-46 и 53-58]), однако и там нет того простого, наглядного утверждения, что получено нами в теореме 1.

В связи с обсуждаемой тематикой отметим обширную литературу на русском языке, посвященную Софье Васильевне Ковалевской, Карлу Вейерштрассу и всем математикам их круга (помимо упоминавшихся книг [4], [5] см., например, [15]–[22]). Большую роль в популяризации личности и научных достижений Софьи Ковалевской сыграла Пелагея Яковлевна Кочина (Полубаринова-Кочина), академик, крупнейший специалист по механике грунтов, многолетний председатель комиссии АН СССР по научному наследию Софьи Ковалевской. Можно рекомендовать, в частности, ее публикации [17], [18] как великолепные образцы научно-биографической литературы.

Литература

1. Widder D. V. The heat equation. N. Y.: Academic Press, 1975. xv+267 p.

2. Cannon J. R. The one-dimensional heat equation (Encyclopedia of mathematics and its applications. Vol. 23). Menlo Park, California: Addison–Wesley, 1984. xxvi+483 p.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.

4. Ковалевская С. В. К теории уравнений в частных производных. // Научные работы / ред. и коммент. чл.-корр. АН СССР П. Я. Полубариновой-Кочиной. М.: АН СССР, 1948. С. 7-50.

5. Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской / отв. ред. и составитель акад. П. Я. Кочина-Полубаринова. М.: Наука, 1973. 312 с.

6. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Писаренкова Е. Д. Представление решений нелокальных задач теплопроводности в виде рядов по полиномам Бернулли и Эйлера // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2024. Вып. 25. С. 292-301.

7. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / изд. 2-е, перераб. и дополн. М.: Наука, 1965. 408 с.

8. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 176 с.

9. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М.: ГИФМЛ, 1962. 420 с.

10. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции / изд. 2-е, перераб. и дополн. Л.–М.: ОНТИ, 1935. 244 с.

11. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998. 368 с.

12. Гурса Э. Курс математического анализа. Том третий. Часть I. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными / пер. с четвертого франц. изд. под ред. проф. В. В. Степанова. М.–Л.: ГТТИ, 1933. 276 с.

13. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.

14. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
15. Полубаринова-Кочина П. Я. Научные работы С. В Ковалевской (к столетию со дня рождения) // УМН. 1950. Т. 5. Вып. 4. С. 3–14.
16. Полубаринова-Кочина П. Я. Из переписки С. В. Ковалевской // УМН. 1952. Т. 7. Вып. 4. С. 103–125.
17. Полубаринова-Кочина П. Я. Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (к 150-летию со дня рождения) // УМН. 1966. Т. 21. Вып. 3. С. 213–224.
18. Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981. 312 с.
19. Письма С. В. Ковалевской от иностранных корреспондентов / публикация П. Я. Кочиной. Препринт №121. М.: ИПМ и ИИЕТ АН СССР, 1979. 66 с.
20. Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера (Научное наследство, т. 7). М.: Наука, 1984. 312 с.
21. Голубев В. В. Талант без почвы. Ижевск: ИПРИМ, 1999. 120 с.
22. Леффлер А. Ш. Софья Ковалевская. Ижевск: УГУ, 2000. 140 с.

I.V. Tikhonov, V.B. Sherstyukov, E.D. Pisarenkova
MSU

SOFIA KOVALEVSKAYA'S FORMULA IN CAUCHY PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

Keywords: *heat equation, Cauchy problem, formula of Sofia Kovalevskaya, entire function of exponential type.*

Abstract. *We discuss an important formula of Sofia Kovalevskaya which expresses analytical solutions of Cauchy problem for the one-dimensional heat equation. The conditions for the applicability of this formula are pointed out. The main result is formulated in terms of exponential growth of functions from the initial conditions. Some historical details related to the subject of our report are mentioned.*