

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 535.015

ОПТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА  
АППРОКСИМАНТОВ 1D И 2D  
АПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

© Авторы, 2014

**П. В. Короленко** — д.ф.-м.н., профессор, физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва. E-mail: pvkorolenko@rambler.ru

**П. А. Логачев** — студент, физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова.  
E-mail: pa.logachev@physics.msu.ru

**С. Б. Рыжиков** — к.ф.-м.н., доцент, физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова.  
E-mail: sbr@rambler.ru

**Ю. В. Рыжикова** — к.ф.-м.н., ст. науч. сотрудник, физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова. E-mail: ryzhikovaju@rambler.ru

**Аннотация**

Дано обоснование скейлинговым методам оптической диагностики аппроксимантов одномерных и двумерных структур квазикристаллического типа, представляющих собой аперiodические многослойные системы и дифракционные решетки. Оно опирается на наличие количественной связи между морфологическими особенностями структур аппроксимантов и скейлингом их оптических характеристик. Обнаруженная устойчивость скейлинговых параметров зондирующего излучения к изменению уровня генерации элементарных ячеек аппроксимантов и размеров исследуемых структур указывает на перспективность скейлинговых подходов к совершенствованию диагностики.

**Ключевые слова:** аппроксиманты, оптическая диагностика, аперiodические структуры, многослойные системы, квазикристаллические структуры, скейлинг, паттерный анализ

**Abstract**

Scaling methods for optical diagnostics of 1D and 2D approximants of quasicrystal type structures that represent aperiodic multilayer systems and gratings are explained. It is based on the presence of the quantitative relationship between the morphological features of the approximant structures and scaling optical characteristics. The detected scaling parameter stability of the probing radiation to changes in the level generation of approximant elementary cells and the total size of investigated structures indicates the prospect scaling approaches to improve diagnostics.

**Key words:** approximants, optical diagnostics, quasicrystalline structure, multilayer systems, aperiodic gratings, pattern analysis, scaling

**Введение**

Разработка новых типов оптических устройств и систем требует совершенствования методов диагностики используемой элементной базы. В частности, существует необходимость в разработке диагностических методов, учитывающих специфику оптических элементов с геометрией, характерной для аппроксимантов квазикристаллических структур. Аппроксиманты структур квазикристаллического типа занимают промежуточное место между аперiodическими и периодическими системами. В простейшем случае аппроксиманты вида  $A_l$  формируются на основе блочного метода [1–2] и представляются в виде последовательностей элементарных ячеек  $S_l$ :  $A_l = \{S_l\}^p$ , где  $l$  — уровень генерации, используемой аперiodической числовой последовательности,  $p$  — порядок аппроксиманта, определяемый числом элементарных ячеек.

Практическая и общенаучная значимость исследования оптических характеристик систем аппроксимантов, обладающих, в частности, фрактальными свойствами, обусловлена все возрастающими требованиями, предъявляемыми к современным методам идентификации структур

объектов на базе оптической диагностики и структурного анализа [3–4]. Цель настоящей работы состоит в обосновании скейлингового метода диагностики аппроксимантов аперiodических структур на основе количественной связи между скейлингом характеристик зондирующих световых пучков и структурными особенностями исследуемых объектов. В качестве последних рассматриваются аппроксиманты многослойных систем и двумерных аперiodических дифракционных решеток квазикристаллического типа [1]. Проводится проверка устойчивости найденных инвариантов скейлинговых параметров к изменению уровня генерации элементарных ячеек и общих размеров анализируемых структур. Проведенное исследование структурных особенностей аппроксимантов и их характеристик базируется на матричных преобразованиях с привлечением паттерного анализа и фрактальной параметризации [5–8].

### Оптические характеристики аппроксимантов квазикристаллических структур

Для построения систем аппроксимантов и моделирования их свойств использовались свойства известных числовых последовательностей Фибоначчи, Морса-Туэ, двойного периода и Кантора, описывающих структурные особенности объектов квазикристаллического типа с внутренней симметрией самоподобия и фрактальными признаками [2, 5].

Аппроксиманты аперiodических структур формировались на основе блочного метода с использованием элементов двух типов  $A$  и  $B$ , порядок чередования которых удовлетворял используемым числовым последовательностям. Так, например, для системы Фибоначчи начальные блоки состоят из элементов:  $S_0 = A$ ,  $S_1 = AB$ ,  $S_3 = ABA$ . При переходе к более высокому структурному уровню используются следующие правила замещения:  $A \rightarrow AB$ ,  $B \rightarrow A$ . По сходному принципу осуществлялось построение структур двойного периода и Морса-Туэ [2]. Системы фрактального типа формировались на основе числовой последовательности Кантора с начальными уровнями:  $S_0 = A$ ;  $S_1 = ABA$  и т.д. Переход от более низкого уровня к более высокому производился с помощью замен элементов:  $A \rightarrow ABA$ ;  $B \rightarrow BBB$ . В многослойных системах чередование элементов исходных числовых последовательностей характеризует распределение слоев с высоким и низким показателем преломления.

Решетчатым структурам ставились в соответствие одномерные и двумерные матрицы, полученные на основе указанных последовательностей, однозначно определяющих положение рассеивающих центров и свободных вакансий. При построении двумерных систем использовался ранее предложенный математический подход, основанный на матричных преобразованиях [9]. Для примера на рис. 1 приведены элементарные ячейки аппроксимантов Фибоначчи многослойной системы и двумерных решеток, характеризующихся матрицами  $C_m$  и  $Q_m$  ( $m = n$ ) с большой и меньшей плотностью рассеивающих центров.

Расчет оптических характеристик аппроксимантов систем квазикристаллического типа основывался на нахождении фурье-образов структур аперiodических решеток и спектров отражения многослойных систем с использованием матричного метода [8] и логарифмического представления приведенного коэффициента отражения:  $r(\Omega) = -\ln(1 - R)$ , где  $R$  — коэффициент отражения по мощности,  $\Omega = \omega/\omega_0$  — нормированная частота, причем  $\omega_0$  соответствует фазовым набегам в слоях, равным  $\pi/2$  [10]. Таким образом, фазовые набег в слоях при распространении излучения через многослойные системы считались одинаковыми.

Спектры отражения многослойных систем с общим числом слоев  $J$  вычислялись в предположении, что элементу  $A$  ставится в соответствие слой с низким показателем преломления  $N_A = 2$ , а  $B$  — с высоким  $N_B = 3$ . При этом показатель преломления окружающей среды полагался  $N_C = 1$ .

На рис. 2 и 3 приведены картины эволюции спектров отражения  $r(\Omega)$ , соответствующие многослойным системам Фибоначчи и Морса-Туэ, а также их аппроксимантам разного порядка  $p$  с различным количеством элементов в элементарных ячейках  $n_i$ . Структурное соответствие величины и положения основных максимумов запрещенных зон приведенных спектров отражения показано с помощью буквенных обозначений  $a, b, c, d$ .

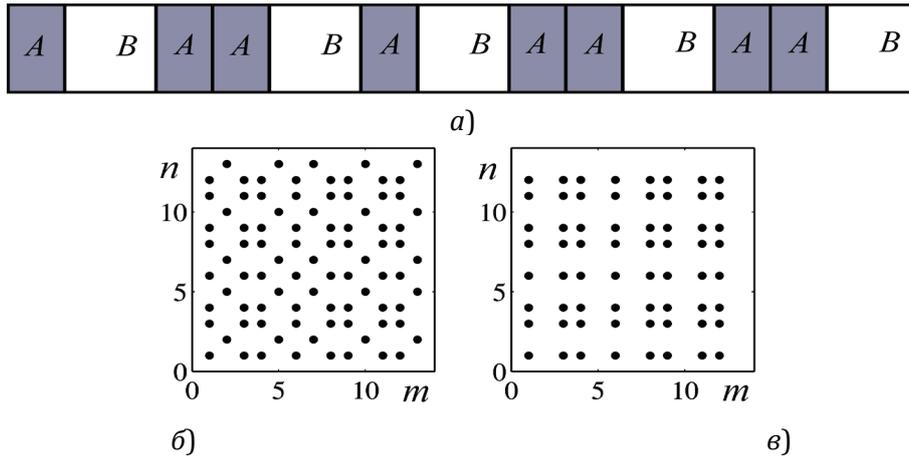


Рис. 1. Структура элементарных ячеек 5-го уровня генерации аппроксимантов Фибоначчи многослойной системы (а) и двумерных решетчатых структур, построенных на основе матриц  $C_{mn}$  (б) и  $Q_{mn}$  (в).

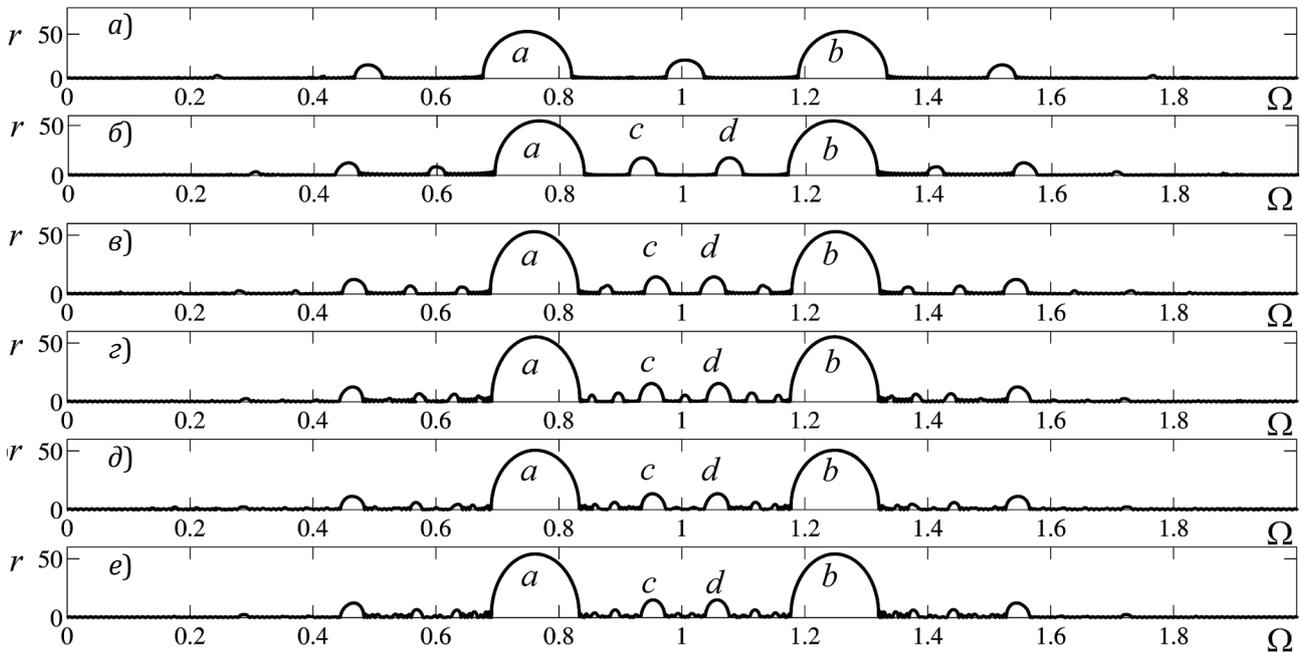
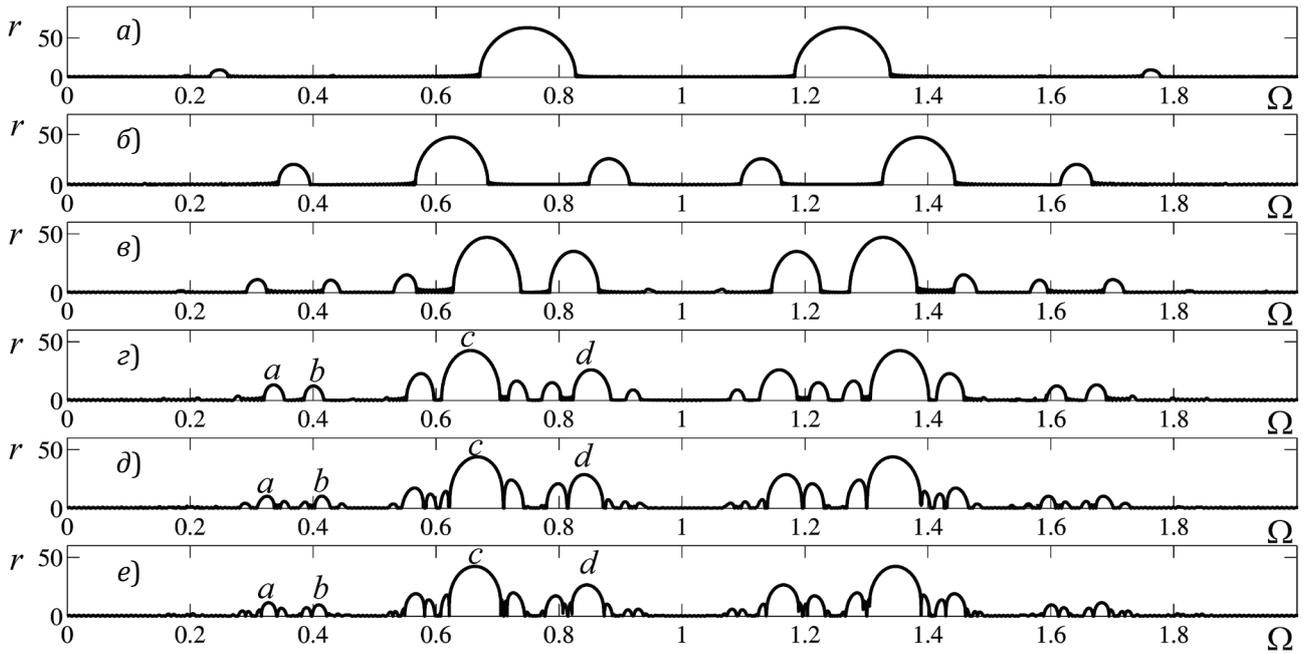


Рис. 2. Эволюция спектров отражения систем Фибоначчи. Спектры отражения аппроксимантов  $A_4 = \{S_4\}^{29}$  ( $J = 232$ ) (а),  $A_5 = \{S_5\}^{18}$  ( $J = 234$ ) (б);  $A_6 = \{S_6\}^{11}$  ( $J = 231$ ) (в);  $A_7 = \{S_7\}^7$  ( $J = 238$ ) (г);  $A_8 = \{S_8\}^4$  ( $J = 220$ ) (д) и многослойной системы Фибоначчи ( $J = 233$  слоя) (е).

Из представленных на рис. 2 результатов видно, что, несмотря на некоторый разброс количества слоев, форма спектров отражения и расположение наиболее интенсивных спектральных максимумов ( $a, b, c, d$ ) многослойной системы и ее аппроксимантов оказываются близкими, начиная с уровня генерации элементарных ячеек  $l = 5$ . При этом коэффициент скейлинга (пространственной инвариантности)  $\varsigma$  оптических характеристик аппроксимантов, определяемый отношением самоподобных элементов  $ab$  и  $cd$ :  $\varsigma = ab / cd \approx 1.6$ , соответствует ранее полученным коэффициентам скейлинга спектра отражения многослойной системы и структуры Фибоначчи [10].

Из рис. 3 видно, что для аппроксимантов многослойной системы Морса-Туэ также характерна высокая степень устойчивости в положении и форме основных пиков ( $a, b, c, d$ ) в спектрах отражения, если  $l \geq 6$ . Причем коэффициент скейлинга  $\varsigma$  в спектрах отражения аппроксимантов ( $l \geq 6$ ):  $\varsigma = cd / ab$  близок к значениям этого коэффициента для спектра отражения многослойной системы Морса-Туэ и ее структуры  $\varsigma = 2$ .



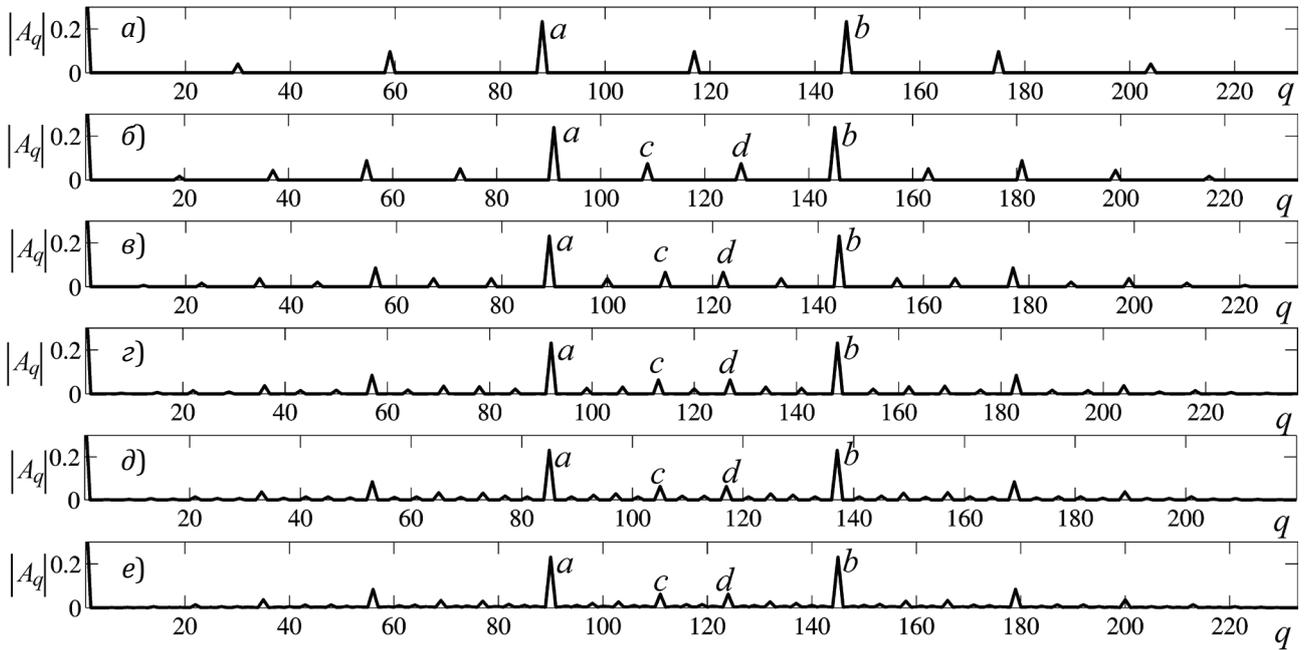
**Рис. 3.** Эволюция спектров отражения систем Морса-Туэ ( $J = 256$  слоев). Спектры отражения аппроксимантов  $A_3 = \{S_3\}^{32}$  (а),  $A_4 = \{S_4\}^{16}$  (б);  $A_5 = \{S_5\}^8$  (в);  $A_6 = \{S_6\}^4$  (г);  $A_7 = \{S_7\}^2$  (д) и многослойной системы Морса-Туэ (е).

Результаты исследования систем других типов указывают на то, что наибольшая степень устойчивости в положении основных спектральных максимумов проявляется у систем двойного периода, если  $l \geq 2$  [11]. При этом коэффициент скейлинга спектров отражения аппроксимантов таких структур совпадает с коэффициентами скейлинга аппроксимантов Морса-Туэ  $\varsigma = 2$ . Оценка устойчивости положения и формы основных экстремумов спектров отражения аппроксимантов фрактальной структуры Кантора для уровней генерации их элементарных ячеек имеет вид:  $l \geq 3$ . В этом случае найденный инвариант пространственного масштабирования (коэффициент скейлинга)  $\varsigma$  оказался равен внутреннему коэффициенту скейлинга всей аperiodической многослойной структуры Кантора и соответствующего ей спектра многослойной системы  $\varsigma \approx 3$  [5]. Также, следует отметить, что уменьшение размеров элементарных ячеек (уровня генерации  $l$ ) аппроксимантов приводит к заметному изменению спектров отражения рассматриваемых структур квазикристаллического типа.

Проведенный анализ Фурье рассматриваемых аperiodических объектов показал наличие фрактальных и скейлинговых свойств Фурье-образов двумерных решеток и их аппроксимантов, сформированных на основе структурных матриц, отличающихся плотностью рассеивающих центров (рис. 1). Так, на рис. 4 показана трансформация проекций графического представления фурье-образа двумерной структуры решетки Фибоначчи и ее аппроксимантов на поперечную ось распределений амплитуды светового поля в дальней зоне  $A_q(x_c, y)$ , где  $q$  — нормированная пространственная частота,  $(x, y)$  — поперечные координаты распределения,  $x_c$  — фиксированное значение поперечной координаты, соответствующее положению наиболее интенсивных пиков распределения поля. Аппроксиманты сформированы на основе матриц  $Q_{mn}$  [9].

Из рис. 4 видно, что 2D аperiodические объекты Фибоначчи характеризуются близкими по структуре Фурье-образами даже при различных уровнях генерации элементарных ячеек  $l$  и не одинаковых размерах анализируемых систем. Следует также отметить высокую степень устойчивости по форме скелетона представленных амплитудных распределений, если  $l \geq 5$ . Аналогичные результаты были получены и для 2D Фурье-образов аperiodических объектов иной конфигурации, причем оценка степени стабильности скелетона распределений  $A_q$ , сформированного наиболее интенсивными рефлексами, удовлетворяет неравенствам  $l \geq 6$  (системы двойного периода,

Морса-Туэ) и  $l \geq 3$  (системы Кантора). Сходные результаты были получены и для объектов, образованных на основе структурных матриц  $C_{mn}$ . При этом имеет место практически полная корреляция положения основных максимумов распределений  $A_q$ , соответствующих различным матрицам.



**Рис. 4.** Эволюция проекций фурье-образа двумерных аппроксимантов Фибоначчи на основе матриц  $Q_{mn}$ . Распределение амплитуды фурье-спектров  $A_q(x_c, y)$  аппроксимантов

$A_{44} = \{S_{44}\}^{29}, x_c = 88$  (a),  $A_{55} = \{S_{55}\}^{18}, x_c = 91$  (б),  $A_{66} = \{S_{66}\}^{11}, x_c = 89$  (в);  
 $A_{77} = \{S_{77}\}^7, x_c = 92$  (г);  $A_{88} = \{S_{88}\}^4, x_c = 85$  (д) и решетки Фибоначчи с размерами  $233 \times 233$ ,  
 $x_c = 90$  (е). В качестве локальных паттернов выбрана система пиков на интервале  $ab$ .

Проведенное исследование показало, что структура оптических характеристик рассмотренных аперриодических систем и их аппроксимантов (многослойных систем и дифракционных решеток) характеризуется наличием сходных по форме отдельных фрагментов — паттернов, сформированных с использованием свойств одной и той же аперриодической числовой последовательности для систем разной физической природы. Так, на рис. 2 и рис. 4 показаны схожие по структуре и скейлинговым характеристикам локальные паттерны на интервале  $ab$ . На рис. 3 паттерные образования, соответствующие структуре Морса-Туэ, рассматриваются на интервалах  $ab$ ,  $cd$  и  $ad$ .

Таким образом, результаты численного моделирования указывают на возможность идентификации аппроксимантов, обладающих разной внутренней симметрией самоподобия, с помощью фиксации локальных паттернов в структурах оптических характеристик картин дифракции или интерференции в пределах выделенной области скейлинга. Следует также отметить, что значения коэффициентов скейлинга  $\zeta$  Фурье-образов аппроксимантов исследуемых структур совпадают с соответствующими коэффициентами скейлинга  $\zeta$ , полученными для многослойных систем и их аппроксимантов, сформированных по схожим правилам построения. Это дает возможность использовать параметры  $\zeta$  в качестве инвариантов, устанавливающих взаимно однозначное соответствие между морфологическими особенностями анализируемых структур и их оптическими характеристиками.

### Заключение

Выполненные расчеты показали, что скейлинговыми свойствами обладают все рассмотренные спектральные характеристики, как объектов с фрактальной (по Кантору), так и с фракталоподобной структурой (Фибоначчи, двойного периода, Морса-Туэ). При этом было установлено, что,

несмотря на значительные внешние структурные отличия, аппроксиманты с разными уровнями генерации элементарных ячеек, принадлежащие к одному классу внутренней симметрии самоподобия, характеризуются одинаковой формой паттернов и одинаковыми значениями коэффициентов скейлинга.

Таким образом, проведенное исследование, подтверждающее наличие устойчивой количественной взаимосвязи между структурными особенностями аппроксимантов систем разной физической природы и их спектральными характеристиками, дает развернутое обоснование методам оптической диагностики, основанным на определении скейлинговых параметров и привлечении паттерного анализа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант № 14–22–01086 офн\_м).

#### Список литературы

1. *Negro, L.D.* Optics of Aperiodic Structures — Fundamentals and Device Applications. / CRC Press Taylor & Francis Group, 2014. 509 p.
2. *Albuquerque, E. L., Cottam, M. G.* Theory of Elementary Excitation in Quasiperiodic Structures. // *Phys. Rep.* 2003. V. 376. P. 225–337.
3. *Илюшин А. С., Орешко А. П.* Дифракционный структурный анализ. / М.: физический факультет МГУ, ООО Издательский дом «Крепостновъ», 2013. 616 с.
4. *Iacovella, Ch.R., Keys, A.S., and Glotzer, Sh.C.* Self-Assembly of Soft-Matter Quasicrystals and Their Approximants. // *PNAS.* 2011. V. 108. No. 52. P. 20935–20940.
5. *Korolenko, P.V., Ryzhikov, S.B., and Ryzhikova, Yu.V.* Pattern Stability in Diffraction of Light From Structures with Self-Similarity Symmetry. // *Phys. Wave Phenom.* 2013. V. 21 (4). P. 256–260.
6. *Рыжикова Ю. В., Короленко П. В., Логачев П. А.* Оптические свойства 1D и 2D аппроксимантов квазикристаллических структур. // Ученые записки физического факультета МГУ. 2014. № 4. 144330.
7. *Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Шапкина Н. Е.* Оптическая дифракция на фрактальных решетках. // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 2008. № 2. С. 7–10.
8. *Путилин Э. С.* Оптические покрытия. Учебное пособие. / СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 227 с.
9. *Зотов А. М., Ким Е. Г., Короленко П. В., Рыжикова Ю. В.* Моделирование аперiodических структур со скейлинговыми оптическими характеристиками. // *Электромагнитные волны и электронные системы.* 2013. Т. 18. № 12. С. 10–15.
10. *Короленко П. В., Мишин А. Ю., Рыжикова Ю. В.* Скейлинг в характеристиках аперiodических многослойных структур. // *Оптический журнал.* 2012. Т. 79 (12). С. 11–16.
11. *Короленко П. В., Логачев П. А., Мишин А. Ю., Рыжиков С. Б., Рыжикова Ю. В.* Квазикристаллические модели аппроксимантов 1D и 2D структур. // В сборнике трудов Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. 7-я Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (ARMIMP-2014). 2014. С. 38–41.

*Поступила 17 сентября 2014 г.*

## OPTICAL APPROXIMANT DIAGNOSTICS OF 1D AND 2D APERIODIC STRUCTURES

P. V. KOROLENKO, P. A. LOGACHEV, S. B. RYZHIKOV, AND YU. V. RYZHIKOVA

When making an optical diagnostics of a variety of structures and analyzing processes with a complex spatiotemporal structure it often becomes necessary to study scaling in the structure of the recorded signals. Practical and general scientific significance of the optical characteristic approximant research of the aperiodic systems with fractal properties is related to the increased requirements to modern methods of object structure identification on the basis of optical diagnostics and structural analysis. The investigation purpose is to establish the scaling method for approximant diagnostics of analyzed structures based on the quantitative relationship between the scaling characteristics of the probing light beams and structural characteristics of the objects. Approximants of multilayer systems and two-dimensional aperiodic grating of quasicrystal type are considered as such objects.

Verification stability found invariants of scaling parameters to changes in the level generation of elementary cells and the analyzed structure sizes is conducted. The research of structural and scaling approximant characteristics is based on matrix transformations with the involvement of patterns and fractal analysis.