

УДК 1:001; 001.8

Радул Д.Н.

кандидат философских наук, доцент философского факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

«Методы математической физики» Куранта-Гильберта и волновая механика Шрёдингера

Данная статья является расширением третьей части «Гильберт и волновая механика Шрёдингера» статьи «Теоретико-множественная математика и квантовая механика (философские аспекты)»^{*}. Все приведённые в прошлогодней статье сноски получили конкретные иллюстрации на основе текста «Методов математической физики» Куранта-Гильберта.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математика, физика, математическая физика, квантовая механика, волновая механика, матричная механика, Гильберт, Шрёдингер, философский атомизм.

D.N. Radul

*CSc in Philosophy (PhD), Associate Professor, Faculty of Philosophy,
Lomonosov Moscow State University, Russia*

«Methods of mathematical physics» Courant-Hilbert and the wave mechanics of Schrodinger

This article is an extended and revised version of the third part of «Gilbert and wave mechanics Schrodinger» of the article «The set-theoretic mathematics and quantum mechanics (philosophical aspects)». All of the yesteryear article footnotes obtained concrete illustrations on the basis of Courant-Hilbert's «Methods of Mathematical Physics».

KEY WORDS: mathematics, physics, mathematical physics, quantum mechanics, wave mechanics, matrix mechanics, Hilbert, Schrodinger, philosophical atomism.

^{*} Радул Д.Н. Теоретико-множественная математика и квантовая механика (философские аспекты) // ФИЛОСОФСКИЕ ОПЫТЫ. Природа, общество, человек. Выпуск 7: Сборник научных трудов / Сост. и отв. ред. Н.В. Гоноцкая. М., 2014. С. 189–211.

Начнём с авторитетного утверждения известного советского специалиста по истории науки Л.С. Полака: «Существенным для блестящего продвижения Шрёдингера в его основных работах было и то, что в 1924 г. вышла в свет книга Р. Куранта и Д. Гильберта “Методы математической физики”, где была изложена математическая теория, необходимая для решения уравнений типа уравнения Шрёдингера» [1]. Как раз подробное рассмотрение математического аппарата волновой механики и будет являться основной целью данной работы. Следует сразу отметить, что количество ссылок на «Методы математической физики» в статьях Шрёдингера 1926–1928 годов очень велико. Оно значительно превосходит количество ссылок в примерно тот же период у Гейзенберга, Борна и Иордана. Думается, что это можно объяснить следующим образом. Гейзенберг, Борн и Иордан работали непосредственно под идейным руководством Давида Гильберта в Гёттингене. Поэтому влияние гёттингенской математической школы было очевидно. Как в шутку вспоминали современники, даже уличные мальчишки в Гёттингене владели математическими методами этой школы. Многие математические положения воспринимались как общепринятые и потому не требовали подкрепляющих ссылок. В отличие от основателей матричной механики Шрёдингер в это время преподавал в Цюрихе, где также преподавал его близкий друг Герман Вейль. Вейль являлся учеником Гильберта и представителем гёттингенской математической школы. Через Вейля Шрёдингер оказался под очень серьёзным влиянием математических методов этой школы. Этот факт обусловил наличие ссылок на «Методы математической физики» Куранта-Гильберта. А цюрихское окружение, где гёттингенские истины были не столь очевидны, определило столь значительное обилие непосредственных ссылок.

Теперь перейдем к конкретному изложению математического материала. Во втором сообщении «Квантование как задача о собственных значениях» после разбора кеплеровой задачи на движение электронов Шрёдингер рассматривает пример более простого одномерного планковского осциллятора. Дается вывод построения уравнения Шрёдингера для данного случая. Конкретные выражения для кинетической и потенциальной энергии вставляются в общее волновое уравнение. Получается следующее выражение:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - 2\pi^2\nu_0^2 q^2) \psi = 0$$

После этого приводится ряд элементарных упрощений и преобразований. Результатом становится хорошо известное

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{a}{x} - x^2\right) \psi = 0$$

математикам дифференциальное уравнение: Решение этого уравнения Шрёдингер находит у Гильберта, подкрепляя этим великим именем свой ещё малоизвестный на тот момент вывод. «Собственные значения и собственные функции этого уравнения известны. Собственные значения в используемых обозначениях равны

$$\frac{a}{4\nu} = 1, 3, 5, \dots, (2n + 1), \dots$$

Собственными функциями являются ортогональные функции Эрмита $e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ » [2]. На этой же странице при-

ведена ссылка на несколько разделов «Методов математической физики»: Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 9, S. 261, уравнение 43 и далее: Kap. 2, § 10, 4, S. 76» [3]. Во втором немецком издании первой части ссылки соответствует глава 5 «Проблемы колебаний и задачи о собственных значениях в математической физике» параграф 10 «Задачи штурм-лиувиллевого типа. Особые краевые точки» пункт 4 «Полиномы Эрмита и Лагерра». Второй части ссылки — глава 2 «Задача о разложении в ряд произвольных функций» параграф 9 «Примеры других ортогональных систем» пункт 4 «Полиномы Эрмита». После того, как Шрёдингер сделал необходимые ссылки, он в своих выводах свободно заимствует материал из данных разделов «Методов

математической физики». Так ортогональную функцию Эрмита $\varphi^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ (выражение 26 у Шрёдингера) мы находим у Куранта-Гильберта: «Аналогично определяются полиномы Эрмита $u = H_n(x)$ и

соответствующие эрмитовы ортогональные функции $v = \varphi^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, как решения следующих задач о собственных значениях» [4]. Следующие свои выражение для n-ого полинома Эрмита (27), (27'), (27'') [5] Шрёдингер взял из второй главы «Методов математической физики» [6]. Выражение (27) Шрёдингера совпадает с выражением (29) Куранта-Гильберта: $H_n(x) =$

$(\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$. Выражение (27') совпадает с формулой $H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{2!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{4!} (2x)^{n-4} + \dots$ Выражение

(27'') [7] соответствует следующему фрагменту «Первые полиномы Эрмита имеют

вид: $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x, H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ » [8]. Весь этот математический аппарат нужен Шрёдингеру, чтобы полу-

чить значение энергетических уровней планковского осциллятора. Причём энергетические уровни получаются из волнового уравнения Шрёдингера, но результаты совпадают, как это отдельно отмечается, с результатами Гейзенберга. «Рассматривая сначала собственные значения, согласно равен-

ствам (25) и (23) получаем $E_n = \frac{2n+1}{2} \hbar \nu_0, n = 0, 1, 2, \dots$ В качестве квантовых уровней получаются, таким образом, так называемые «полуцелые» кратные «энергетического кванта», характерного для осциллятора, т.е. нечётные кратные величины $\hbar \nu_0/2$. Расстояния между уровнями, определяющие излучение, получаются такими же, что и в существующей теории. Замечательным образом наши квантовые уровни точно равны уровням, полученным по теории Гейзенберга!» [9].

В своей следующей статье «Непрерывный переход от микро- к макро-механике» (1926) Шрёдингер делает очень широкое обобщение полученных ранее результатов. Проводится далеко идущая аналогия между хорошо известным процессом колебания струны и движением электронов как по эл-

липтическим орбитам в атоме, так и свободном движении по гиперболам и иным траекториям. Шрёдингер приводит следующий рисунок:

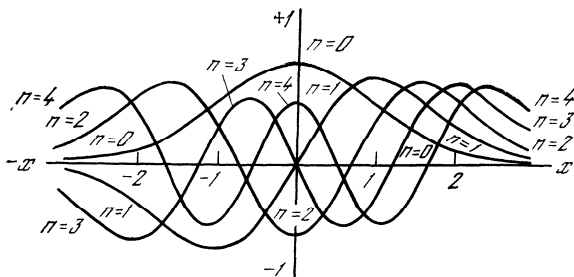


Рис. 1. Первые пять собственных колебаний планковского осциллятора согласно волновой механике

После чего делается заключение: «Сходство с хорошо известной картиной колебаний струны выступает достаточно отчетливо. Намерение описывать с помощью таких собственных колебаний процесс, который, как считалось до сих пор, относится к механике точки, кажется на первый взгляд довольно странной причудой» [10]. Теория колебания струны, стержня, мембраны и пластины с точки зрения теории собственных значений была уже прекрасно разработана в 5 главе «Проблемы колебаний и задачи о собственных значениях в математической физике» книги «Методы математической физики». Соответственно этому посвящены параграф 3 («Колебания струны») [11], параграф 4 («Колебания стержня») [12], параграф 5 («Колебания мембраны») [13], параграф 6 («Колебание пластины») [14]. Таким образом, математический аппарат полностью готов. Главное, что он прекрасно знаком Шрёдингеру, который ссылаются на 5 главу «Методов математической физики» в предыдущей статье. Но рассмотрим подробнее, как Шрёдингер приходит к этой «довольно странной причуде». Вышеприведенный рисунок соответствует собственным колебаниям планковского осциллятора. В новой статье повторяются математические выводы предыдущей статьи, касающиеся представления волновой функции планковского осциллятора через математический аппарат эрмитовых полиномов. «... Волновая функция ψ представима в виде суперпозиции следующих соб-

ственных колебаний $\psi_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) e^{i\pi n \nu_p x}$; $u_n = \frac{2n+1}{2} \nu_p$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, где

H_n представляет собой полином Эрмита. Результат их умножения на $e^{-\frac{x^2}{2}}$ и на «нормирующий множитель» $1/(2^n n!)^{\frac{1}{2}}$ будет называться в дальнейшем эрмитовыми ортогональными функциями. Они, стало быть, являются амплитудами собственных колебаний» [15]. Тут же дана ссылка: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag,

1924. Кар. 2, § 10, 4, S. 76 [16]. Ссылка переключалась в новую статью из предыдущей. Получается, что гильбертовский математический аппарат собственных значений и собственных функций привел Шрёдингера к фундаментальному квантовомеханическому выводу о волновом характере движения электронов.

Следующая ссылка на «Методы математической физики» встречается в статье «Об отношении квантовой механики Гейзенберга-Борна-Иордана к моей». Целью данной работы Шрёдингера является установления соответствия между матрицами Гейзенберга и операторами его волновой механики. Во втором параграфе «Сопоставление оператора и матрицы надлежащим образом упорядоченному функциональному символу и установление правила для произведения» [17] дан достаточно длинный вывод соответствия операции произведения матриц и операторов. Это достаточно сложное доказательство занимает несколько страниц. Практически в конце доказательства у Шрёдингера возникает необходимость доказать полноту возникшей ортогональной системы. Для этого он пользуется хорошо известным «условием

полноты»

Гильберта.

$$\sum_i F_{il}^{*} G^{lm} = \sum_i \int u_l(x) [F, \rho(x) u_k(x)] dx \int \rho(x) u_l(x) [G, u_m(x)] dx = [F, \rho(x) u_k(x)] [G, u_m(x)] dx$$

«Последнее уравнение представляет собой не что иное, как так называемое «условие полноты» нашей ортогональной системы применительно к «ко-

эффициентам разложения» функций $[G, u_m(x)]$ и $\frac{1}{\rho(x)} [F, \rho(x) u_k(x)]$ »

[18]. Шрёдингер делает следующую ссылку: «См., например: R. Courant, D. Hilbert. Methoden der Mathematischen Physik. Bd. 1, S. 36. При этом важно помнить, что условие полноты для «коэффициентов разложения» выполняется в любом случае, в том числе и тогда, когда само разложение не сходится. В случае его сходимости соотношение (8) является непосредственно очевидным» [19]. Вопросы полноты системы различных функций рассматриваются Курантом и Гильбертом многократно. В наиболее простой форме это дано в самом начале книги в первом же параграфе. При описании процесса ортогонализации векторов сразу затрагивается вопрос о полноте получившейся ортогональной системы [20]. Вышеуказанная ссылка Шрёдингера относится же ко второй главе «Задача о разложении в ряд произвольных функций» параграфу 1 «Ортогональные системы функций» пункту 3 «Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем». В этом пункте как раз мы находим «условие полноты», о котором говорит Шрёдингер. «На основании предыдущих рассуждений коэффициенты разложения $c_l = (f, \varphi_l)$ любой функции f удовлетворяют соотношению $\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 = Nf$, которое мы будем называть “условием полноты”» [21]. Таким образом, без гильбертова «условия полноты» Шрёдингер не смог бы корректно провести доказательство идентичности матриц и операторов. Не было бы того замечательного результата, который так поразил его

современников. «Методы математической физики» упоминаются и в следующем параграфе статьи «Об отношении квантовой механики Гейзенберга-Борна-Иордана к моей». Этот параграф называется «Квантовое условие Гейзенберга и правила для частного дифференцирования» [22]. Шрёдингер показывает, что его операторы также можно дифференцировать по частным производным, как это делается в матричной механике Гейзенберга. Вот формула (уравнение 15) для частного дифференцирования операторов, ко-

торую получает Шрёдингер в результате своих выкладок: $\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}, \hat{F} \right] = \frac{1}{i\hbar} [F \hat{q}_i - \hat{q}_i F]$ [23]. А затем ставится вопрос об однозначности соответствия матриц и операторов. «Доказанные для операторов уравнения (14) и (15), естественно, остаются справедливыми и для матриц, соответствующих левой и правой части этих уравнений, поскольку согласно (6) одному линейному оператору соответствует одна и только одна матрица (конечно, при условии предварительного выбора конкретного вида системы функций $u_i(x)$)» [24]. Затем уже в ссылке проводится дополнительное доказательство для однозначной определённости разложения коэффициентом. При этом используется «условие полноты» и ортогональность. После чего делается общий вывод со ссылкой на «Методы математической физики»: «Таким образом, все коэффициенты разложения этой функции являются однозначно определёнными, а вместе с ними также и сама функция (R. Courant, D. Hilbert, s. 37)» [25]. В работе Куранта-Гильберта это место принадлежит все тому же пункту 3 «Неравенство Бесселя. Условие полноты системы. Аппроксимирование в среднем». Здесь мы находим следующее положение, на которое и ссылается в своём доказательстве Шрёдингер. «Далее, приводим теорему: кусочно-непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами разложения по заданной полной ортогональной системе, то есть две кусочно-непрерывные функции тождественны между собой, если их коэффициенты разложения соответственно равны» [26].

В третьем сообщении Шрёдингера «Квантование как задача о собственных значениях» основное внимание уделено теории возмущения и её частному применению к штарк-эффекту в линиях Бальмера. Естественно, что теория возмущения рассматривается с точки зрения теории собственных значений и собственных функций, как они понимаются в гёттингенской математической школе. «Надо иметь в виду, что собственные значения и собственные функции могут быть найдены приближённым способом для крайних задач, достаточно близких к непосредственно разрешимым проблемам. Мы будем такой подход по аналогии с механикой называть теорией возмущений для задачи собственных значений. Эта теория основана на важном свойстве непрерывности собственных значений и собственных функций, причём для нас основную роль играет их непрерывная зависимость от коэффициентов дифференциального уравнения» [27]. Тут же даётся ссылка на соответствующий раздел «Методов математической физики»: «Courant R.,

Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 6, § 2, 4, S. 337» [28]. Во втором немецком издании «Методов математической физики» раздел, на который ссылается Шрёдингер, содержится в шестой главе «Применение вариационного исчисления к задачам о собственных значениях» параграфе 2 «Общие следствия из экстремальных свойств собственных значений» пункте 6 «Свойства непрерывности собственных значений» [29]. Это очень большой по объёму пункт работы. Приведём теоремы, которые Курант и Гильберт доказали относительно непрерывности собственных значений. «Теорема 8. n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda \rho u = 0$ для всех рассматриваемых граничных условий изменяется непрерывно при непрерывном изменении коэффициентов дифференциального уравнения. Теорема 9. n -е собственное значение изменяется непрерывно при непрерывном изменении содержащейся в граничном условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ функции σ » [30]. «Теорема 10. Если область G деформируется непрерывным образом в только что определённом смысле, то n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda \rho u = 0$ для какого угодно из рассматриваемых граничных условий изменяется при этом также непрерывным образом» [31]. «Теорема 11. В случае граничного условия $u = 0$ n -е собственное значение дифференциального уравнения $L[u] + \lambda \rho u = 0$ является непрерывной функцией области G и в том случае, если при непрерывной деформации области не соблюдается требования непрерывного изменения направления нормали» [32]. Далее Шрёдингер соотносит теорию возмущений для задачи собственных значений с колебательными процессами, происходящими в неоднородной струне. Эта общая установка волновой механики заключается в том, чтобы представить движение электронов как процессы колебаний. В начале 20-х годов Шрёдингер написал ряд работ по акустике колебательных процессов в воздухе, поэтому был хорошо знаком с работами лорда Рэлея в этой области. «Метод в самом существенном был применён ещё в «Theory of sound» лорда Рэлея (V. 1, 2th ed. London, 1894, p. 115–118) для того, чтобы исследовать колебания струны с малыми неоднородностями». Здесь же Шрёдингер делает ссылку на «Методы математической физики»: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 5, 2, S. 241» [33]. Это указание на главу 5 «Проблемы колебаний и задача о собственных значениях в математической физике» параграфе 3 «Колебания струны» пункте 3 «Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля» [34]. Именно в этом пункте Курант даёт описание теории неоднородной струны. Вот уравнение, которое описывает колебательные процессы в этом случае: «Рассмотрим теперь общий случай неоднородной струны $(\rho(x))_{xx} = p(x)$, где $p(x)$ — модуль упругости, помноженный на площадь поперечного сечения, а $\rho(x)$ означает массу, отнесённую к единице длины» [35].

После ссылки на пункт 3 «Общий случай неоднородной струны и задача Штурм-Лиувилля» Шрёдингер начинает построение своей квантовой меха-

нической теории возмущения для случая одной переменной в полной аналогии со случаем колебания неоднородной струны. Но для полного решения задачи для собственных значений в случае колебания неоднородной струны Гильберт и Курант обращались к задачам типа Штурм-Лиувилля. Это особенно ясно следует из самого названия пункта 3. Вот общее описание этого типа задач, данное в третьем пункте: «Формулированная таким образом задача о собственных значениях носит название задачи Штурм-Лиувилля, по имени её первых и плодотворнейших исследователей. Её можно ещё несколько обобщить, рассматривая вместо уравнения (18) дифференциальное уравнение: $(pv')' - qv + \lambda pv = 0$, где q — заданная непрерывная функция» [36]. Поэтому и Шрёдингер начинает в своём построении двигаться в том же направлении. «Пусть теперь $\rho(x)$ — некоторая другая непрерывная функция, неотрицательная и, вообще говоря, не обращающаяся в нуль. Рассмотрим задачу Штурм—Лиувилля о собственных значениях $E(y) + Epy = 0$ (2). Она состоит, во-первых, в отыскании всех таких значений константы E («собственных значений»), для которых уравнение (2) имеет решения $y(x)$, непрерывные внутри заданной области, не равные тождественно нулю и удовлетворяющие в граничных точках определённым краевым условиям; и, во-вторых, в нахождении этих решений («собственных функций»). В случаях, рассматриваемых в атомной механике, область, в которой существуют решения, и краевые условия устанавливаются сами: первая, например, есть интервал от 0 до ∞ , если x означает радиус-вектор или некоторую величину той же природы, взятую по положительной параболической координате, а краевые условия должны выражаться конечными величинами. Если x означает азимут, то область решения есть интервал $0 — 2\pi$, а краевые условия — возвращение к начальным значениям y и y' на концах интервала («периодичность»)» [37]. Здесь же даётся необходимая ссылка, подтверждающая, откуда взять материал данного раздела: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 5, 1, S. 238» [38].

Продолжая построение теории возмущения методами теории собственных значений, Шрёдингер переходит от решению однородного уравнения типа Штурма-Лиувилля к неоднородному. Это соответствует случаю действия внешних сил. При этом энергетические уровни (собственные значения) невозмущённого и возмущённого уравнений оказываются связанными. «Известно (и это теперь основной отправной пункт всей теории возмущения), что неоднородное уравнение для некоторого собственного значения однородного уравнения, вообще говоря, имеет тогда и только тогда решение, когда его правая часть ортогональна соответствующей собственной функции (а в случае кратных собственных значений — ортогональна всем собственным функциям, принадлежащим данному собственному значению)» [39]. В данной цитате рассмотрен случай с кратными собственными значениями. И здесь Шрёдингер делает отсылку к подробному рассмотре-

нию данного случая в «Методах математической физики»: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 10, 2, S. 277» [40]. Во втором немецком издании об этом подробно написано в главе 5 «Проблемы колебаний и задача о собственных значениях в математической физике» параграфе 13 «Теория возмущения» пункте 2 «Кратные собственные значения» [41]. Вот на какой фрагмент из «Методов математической физики» опирался Шрёдингер: «Усложнение, которое имеет здесь место, покоится на том факте, что в случае кратного собственного значения фундаментальные функции определены лишь с точностью до ортогонального преобразования и что при возмущении возможно ожидать непрерывного продолжения собственных функций лишь при надлежащем выборе системы этих функций, принадлежащих кратному собственному значению» [42]. В целом построение теории возмущения Шрёдингера идёт в русле построения этой теории, данного в «Методах математической физики» в вышеупомянутом 13 параграфе. Шрёдингер, продолжая своё построение, упоминает и физический смысл соответствия возмущённого и невозмущённого уравнения. При совпадении собственных значений возникает явление квантовомеханического резонанса. «В качестве физической интерпретации можно рассмотреть колебание струны; тогда эта математическая теорема означает следующее. Если сила находится в резонансе с собственным колебанием, она должна быть распределена по струне совершенно особым образом, а именно так, чтобы не производилось никакой работы на указанном собственном колебании; иначе амплитуда превысит все границы, и стационарное состояние станет невозможным» [43]. В этом фрагменте возмущённое движение понимается как сила, а невозмущённое — как собственное колебание. Явление резонанса также рассматривается Курантом и Гильбертом. Вот одна из цитат, описывающая понимание резонанса в «Методах математической физики»: «В том случае, если $\omega^2 \neq n^2$, функции $q_n(t)$ составляются аддитивно из чисто периодической функции частоты ω и такой же функции частоты n , при наличии же резонанса $\omega^2 = n^2$ функция $q_n(t)$ является неограниченной» [44].

Разбирая более сложный случай теории возмущений нескольких переменных, Шрёдингер сталкивается с рядом проблем. «Вычислить константы α_i естественно, в общем случае нельзя, так как это вычисление связано с решением алгебраического уравнения степени α . В худшем случае имеются рациональные методы, с помощью которых можно получить произвольное приближение» [45]. Тут же даётся ссылка на «Методы математической физики»: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 1, § 3, 3, S. 14» [46]. Наиболее известный пример подобного приближения связан с уравнением векового возмущения. Именно об этом уравнении и говорится в главе 1 «Алгебра линейных преобразований и квадратичных форм» параграфе 3 «Преобразование к главным осям квадратичных и эрмитовых форм» параграфе 2 «Характеристиче-

ские числа и собственные значения» [47]. Вот этот фрагмент «Уравнение (30)» обыкновенно называют «уравнением вековых возмущений, так как оно встречается в задаче вековых планетных возмущений» [48]. Уравнение (30) показано ниже в виде матрицы:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \chi & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \chi & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - \chi \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

Следует также отметить, что Курант посвятил целый большой раздел пятой главы «Проблемы колебаний и задача о собственных значениях в математической физике» рассмотрению асимптотических методов решения штурм-лиувиллевских дифференциальных уравнений. Это параграф 11 «Об асимптотическом поведении решений штурм-лиувиллевских дифференциальных уравнений» [49]. Но этот очень сложный математический аппарат Шрёдингер не использует.

В первой части третьей статьи «Квантование как задача о собственных значениях» Шрёдингер выстраивает теорию возмущения на основе общей теории собственных значений и собственных функций в изложении Куранта-Гильберта. Во второй части этой статьи даются практические применения вновь построенной квантовомеханической теории возмущения волновой механики. И первым пробным камнем для новой теории возмущения становится объяснение штарк-эффекта атома водорода. Эта была очень известная проблема, поэтому её решение было бы очень значительным успехом волновой механики. Итак, посмотрим, как Шрёдингер решает её. «Для того чтобы получить волновое уравнение штарк-эффекта атома водорода,

нужно прибавить к уравнению $\Delta\psi + \frac{8\pi^2m(\alpha + e^2\alpha r^2)\psi}{h^2} = 0$ (волновому уравнению задачи Кеплера) потенциальную энергию $+eFz$, которая соответствует действию электрического поля силы F на отрицательный электрон с электрическим зарядом e в положительном направлении оси z . Мы получаем

уравнение $\Delta\psi + \frac{8\pi^2m(\alpha + \frac{e^2}{F} - eFz)\psi}{h^2} = 0$, которое является основой последующего изложения» [50]. Затем он преобразовывает это уравнение, приведя его к самосопряжённой форме. После чего даётся следующий комментарий: «Самые простые расчёты по (32'), так же как вообще при решении волнового уравнения в некоторой специальной системе координат, можно провести, решая не само уравнение, а соответствующую ему вариационную задачу (см. первое сообщение, с. 19–20). Волновое уравнение получается тогда, как вариационное уравнение Эйлера. Таким образом, мы избегаем трудных вычислений вторых производных» [51]. И тут же даётся ссылка на Куранта-Гильберта: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen

Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 4, § 7, S. 193» [52]. Сразу следует сказать, что в «Методах математической физики» уравнение Эйлера используется постоянно. В четвертой главе «Основные понятия вариационного исчисления» уравнению Эйлера прямо посвящены три параграфа: «§3. Уравнения Эйлера» [53], «§4. Замечания относительно интегрирования дифференциального уравнения Эйлера. Примеры» [54], «§8. Инвариантный характер дифференциальных уравнений Эйлера» [55]. Но вернёмся к конкретной математической проблеме, о которой упоминает Шрёдингер. Действительно, в «Методах математической физики» можно найти обоснование того факта, что решение вариационного уравнения Эйлера позволяет избежать трудностей вычисления вторых производных. Сначала представим уравнение Эйлера, как оно дано у Куранта-Гильберта. «-

$[F]_y = \frac{\partial}{\partial x} F_y - F_x = 0$ или в раскрытом виде:

$y'' F_{yy} + y' F_{xy} + F_{xx} - F_x = 0$. Это и есть дифференциальное уравнение Эйлера; уравнение этого типа многократно встречаются в анализе и его приложениях. Уравнение Эйлера является необходимым условием экстремума» [56]. Важность уравнения Эйлера заключается в том, что с его помощью вычисляются стационарные функции или, иначе говоря, стационарные кривые и траектории движения. Вспомним о проблеме стационарных траекторий в квантовой механике. Теперь вернёмся к проблеме вторых производных. Уравнения Эйлера позволяют показать существование и непрерывность вторых производных без их непосредственного вычисления. «Из обращения в нуль первой вариации само собой вытекает, таким образом, существование и непрерывность второй производной, удовлетворяющей при этом дифференциальному уравнению Эйлера» [57].

В третьей части «Математическое приложение» третьего сообщения «Квантование как задача о собственных значениях» Шрёдингер отдельно выписывает методы вычисления, которые он использовал в этой статье. И в самом начале этого математического приложения мы встречаем полиномы Лагерра: «Как известно, k -й полином Лагерра $L_k(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy'' + (1-x)y' + ky = 0$ » [58]. Следом идёт ссылка на Куранта-Гильберта: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 2, § 11, 5, S. 78 уравнение 72» [59]. Во втором немецком издании это уравнение 36: «...к однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ для полинома Лагерра $L_n(x)$ » [60]. Это фрагмент из главы 2 «Задача о разложении в ряд произвольных функций» параграфа 9 «Примеры других ортогональных систем» пункт 5 «Полиномы Лагерра» [61]. Но вернёмся к математическим выкладкам Шрёдингера. Он обосновывает, что полином Лагерра имеет только дискретный спектр, а предположение о наличии непрерывного спектра ведёт к противоречию. То есть значение энергии E непрерывного спектра не может соответствовать собственным значениям

полинома Лагерра. Вот цитата Шрёдингера: «Эти положительные значения E не могут соответствовать никаким собственным значениям k уравнения (103); это вытекает из того, что соответствующие значения k , в согласии с (110), были бы комплексными, что по общим теоремам невозможно. Каждое действительное собственное значение уравнения (103) дает согласно (110) отрицательные собственные значения уравнения (108). Далее известно, что уравнение (108) не имеет никаких других отрицательных собственных значений (ср. первое сообщение), кроме точно тех, которые можно получить с помощью числового множества (107) из (110). Остаётся ещё только одна возможность: в ряде чисел (107) отсутствуют некоторые отрицательные k , которые возникают при решении уравнения (110) относительно k из-за двузначности корня. Однако и это невозможно, так как соответ-

ствующие значения меньше, чем $-\frac{n+1}{2}$ и поэтому согласно общим предложениям не могут быть собственными значениями уравнения (103) [62]. Здесь даны две ссылки на Куранта-Гильберта: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 3, § 4, 2, S. 115» и ссылка «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 5, 1, S. 240» [63]. Первая ссылка касается комплексных значений, вторая — положительных значений. К сожалению, первую ссылку не удалось идентифицировать по второму немецкому изданию. Но вторая ссылка содержательно исчерпывает вопрос о комплексных значениях, постулируя только положительные значения (что исключает комплексность). Вот поясняющее место из Куранта-Гильберта о собственных значениях полинома Лагерра: «Соответствующими собственными значениями являются положительные целые числа $\lambda = n$ » [64] (Глава 5 «Проблемы колебаний и задачи о собственных значениях в математической физике» §10 «Задачи штурм-лиувиллевского типа. Особые точки» пункт 4. «Полиномы Эрмита и Лагерра» [65]). И теперь о последнем упоминании Шрёдингером полиномов Лагерра со ссылкой на «Методы математической физики». «Полиномы Лагерра могут быть связаны следующим соотношением (как коэффициенты разложения в ряд так называемой производящей функции вспомогательной переменной t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-xt}}{1-t}$$

» [66]. Здесь дана ссылка на следующий фрагмент из Куранта-Гильберта: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 2, § 11, 5, S. 78 уравнение 68» [67]. Вот цитата из второго немецкого издания «Методов математической физики»: «...полиномы Лагерра также имеют простую производящую

функцию, а именно $\psi(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1-t}$ » [68]. (Глава 2, § 9, пункт 5, о которых уже говорилось выше).

В четвертом сообщении «Квантование как задача о собственных значениях» Шрёдингер получает новый вид волнового уравнения, исключив из

него параметр энергии. При рассмотрении уравнения вида

$$\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2} E\right)^2 \psi + \frac{16\pi^2}{h^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0$$

Шрёдингер приходит к следующему заключению. «Легко видеть, что оно представляет собой уравнение колебания мембраны очень простого типа с производными по координатам четвертого порядка и имеет вид, часто встречающийся в многочисленных задачах теории упругости» [69]. Затем идёт ссылка на соответствующий раздел Куранта-Гильберта: «Например, при колебании пластины

$\Delta \psi + \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0$ », «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 8, S. 256» [70]. Действительно, в главе 5 «Проблемы колебаний и задачи о собственных значениях в математической физике» §6 «Колебание пластины» пункте 1 «Общие соображения» [71] мы находим это уравнение: «Вопрос о дифференциальном уравнении колебания однородной пластины

$\Delta \psi + \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0$...» [72]. Мы уже выше встречали упоминания Шрёдингера о колебании струны как модели для колебания отдельного электрона в атоме. Теперь речь идёт о колебании мембраны и пластины, которые соответствуют колебанию поверхности электронного облака в атоме.

В работе 1926 года «Волновая теория механики атомов и молекул» Шрёдингер приходит к уравнению вида

$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m(E + \epsilon^2 / h^2) \psi}{h^2} = 0$. Это уравнение сводится к решению задач типа Штурм-Лиувилля для случая особых точек.

«Таким образом, величины $(E > 0, E = -\frac{8\pi^2 m \epsilon^4}{h^2 n^2} (n = 1, 2, 3, 4, \dots))$ представляют собой в сущности то, что называется “характеристическими числами”, а соответствующие им решения суть “фундаментальные функции”

задачи, относящейся к уравнению $\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m(E + \epsilon^2 / h^2) \psi}{h^2} = 0$. С математической точки зрения, предельные условия в собственном смысле слова не нужны и неприменимы для бесконечной границы по той причине, что мы

приближаемся к особой точке уравнения $\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m(E + \epsilon^2 / h^2) \psi}{h^2} = 0$, если удаляемся по какому-нибудь направлению в пространстве в бесконечность» [73]. Затем следует ссылка на Куранта-Гильберта: «Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik, I. Berlin: Springer Verlag, 1924. Kap. 5, § 9, n 1» [74]. Во втором немецком издании «Методов математической физики» это соответствует следующему разделу: Глава 5 «Проблемы колебаний и задача о собственных значениях в математической физике» параграфе 10 «Задачи штурм-лиувилевского типа. Особые краевые точки» [75]. Здесь мы находим следующие характеристики этих точек: «Для этих особых точек из самого характера задачи получаются при этом некоторые условия, как, например, непрерывность или конечность решения или обращение его в бесконечность не выше заданного порядка, каковые условия принимают на себя роль однородного краевого условия» [76].

Теперь рассмотрим несколько косвенных упоминаний и ссылок на книгу «Методы математической физики». В работе Шрёдингера 1927 года «Закон сохранения энергии-импульса волн материи» присутствует упоминание вариационной производной: «При преобразовании вариационной производной...» [77]. На это обращает внимание комментатор и переводчик этой статьи известный советский историк науки В.П. Визгин. «Под вариационной производной понимается левая часть одного из уравнений Лагранжа—Эйлера, в данном случае отвечающая переменной ψ . См., например: Р. Курант, Д. Гильберт. Указ. соч., с. 175» [78]. Вот соответствующее место из «Методов математической физики»: «Дифференциальное выражение -

$$[F]_y = \frac{\delta}{\delta y} F_y - F_y = 0$$

мы называем вариационной производной функции F по y . Оно здесь играет такую же роль, какую обыкновенная производная играет в обыкновенных проблемах *minima*» [79]. Далее в работе 1929 года «Представление квантовых законов с помощью непрерывных функций» Шрёдингер рассматривает квантовые законы с точки зрения общего анализа Фурье в функциональном пространстве Гильберта. Вот цитата из этой статьи: «Общий анализ Фурье, о котором говорилось выше, или преобразование Фурье, как мы теперь его предпочитаем называть, может рассматриваться как обобщение анализа формы кривой на основе дифференциального исчисления. При преобразовании Фурье из заданной кривой также выводится новая кривая, которая обобщает определённые элементы графика первоначальной кривой. Обобщение состоит в том, что теперь каждый отдельный элемент графика относится не к бесконечно близкой окрестности одной точки первоначальной кривой, но в целом к общему ходу первоначальной кривой <...> То есть представление одной функции совокупностью функций какой-нибудь так называемой полной ортогональной системы (которой всегда являются упомянутые выше собственные функции), но не только функциями синус и косинус. Метод преобразования Фурье можно также назвать методом аффинных преобразований в функциональном пространстве Гильберта» [80]. Это более поздняя работа Шрёдингера. К этому моменту операторный анализ стал общепринятым математическим методом, который разрабатывался большим количеством математиков. Уже вполне сформировались основные понятия функционального анализа, в том числе и функциональное пространство Гильберта.

К сожалению, объём и форма изложения данной статьи не позволили дать подробный комментарий двух специальных разделов второго немецкого издания «Методов математической физики», посвящённых волновой механике Шрёдингера. Речь идёт о пятой главе «Проблемы колебаний и задача о собственных значениях в математической физике» параграфе «Краевые задачи с непрерывным спектром собственных значений» пункте 4 «Задачи Шрёдингера о собственных значениях» [81] и о шестой главе «Применение вариационного исчисления к задачам о собственных значениях» параграфе «Задачи о собственных значениях шрёдингеровского типа»

[82]. Развернутые комментарии к этим разделам планируется сделать позже в отдельной статье.

В завершение следует сказать несколько слов об общей направленности данной работы. С помощью развёрнутого комментария шрёдингеровских ссылок удалось показать ту огромную роль, которую сыграла книга Куранта-Гильберта «Методы математической физики», и в целом гёттингенская математическая школа, в формировании волновой механики. Для автора статьи это является первым звеном общей цепи доказательства того факта, что современная физика базируется на теоретико-множественной математике. Это необходимо автору для того, чтобы сделать второй шаг. Этот шаг заключается в обосновании теоретико-множественной математики с помощью философских идей атомизма. Это делалось в ряде предыдущих статей автора в этом же сборнике. Таким образом, общая установка заключается в установлении связи между современными физико-математическими науками и традицией философского атомизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полак Л.С. Эрвин Шрёдингер и возникновение квантовой механики // *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 371.
2. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 40.
3. Гейзенберг В. Избранные труды. М., 2001. С. 100.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 310.
5. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 40.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. М.; Л., 1933. С. 84–85.
7. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 40.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 85.
9. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 41.
10. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 51.
11. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 271–279.
12. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 279–281.
13. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 281–290.
14. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 290–291.
15. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 51.
16. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 51.
17. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 58–61.
18. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 61.
19. *Шрёдингер Э. Избранные труды*. М., 1976. С. 61.
20. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 4.
21. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 46.
22. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 61–64.
23. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 63.
24. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 63.

25. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 64.
26. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 48.
27. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 75.
28. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 75.
29. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 396–402.
30. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 397.
31. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 399.
32. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 401.
33. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 75.
34. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 275–279.
35. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 275.
36. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 276.
37. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 77–78.
38. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 75.
39. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 79.
40. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 79.
41. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 326–328.
42. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 326.
43. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 79.
44. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 275.
45. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 88.
46. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 88.
47. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 23–24.
48. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 24.
49. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 312–320.
50. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 90.
51. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 91.
52. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 91.
53. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 173–196.
54. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 196–198.
55. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 213–222.
56. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 175.
57. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 190.

58. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 110.
59. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 110.
60. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 87.
61. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 86–88.
62. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 111.
63. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 111.
64. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 311.
65. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 310–312.
66. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 112.
67. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 112.
68. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 86.
69. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 117.
70. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 117.
71. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 290–291.
72. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 290.
73. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 193.
74. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 193.
75. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 306–312.
76. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 306.
77. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 146.
78. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 406.
79. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 175.
80. Шрёдингер Э. Избранные труды. М., 1976. С. 208.
81. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 322–324.
82. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1933. Т. I. С. 423–428.